WALTHER–MEIßNER–INSTITUT 22. Dezember 2016
Bayerische Akademie der Wissenschaften
Lehrstuhl für Technische Physik E23, Technische Universität München
Prof. Dr. Rudolf Gross, Dr. Stephan Geprägs
Tel.: +49 (0)89 289 14225
E-mail: stephan.gepraegs@wmi.badw.de **Blatt 10**

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Physik der Kondensierten Materie I
WS 2016/2017

7 Das freie Elektronengas

7.1 Fermi-Gase in d Dimensionen

Geben Sie für ein d-dimensionales Fermi-Gas die Fermi-Wellenzahl $k_{\mathrm{F}d}$, die Fermi-Geschwindigkeit $v_{\mathrm{F}d}$, die Fermi-Energie $E_{\mathrm{F}d}$ und die Zustandsdichte (pro Volumen und Energie) an der Fermi-Kante $N_{\mathrm{F}d} = D_{\mathrm{K}d}/L^d$ für beide Spin-Richtungen an und zeigen Sie, dass die Relationen

$$N_{\mathrm{F}d} v_{\mathrm{F}d}^2 \;=\; d\,\frac{n_d}{m} \qquad N_{\mathrm{F}d} E_{\mathrm{F}d} \;=\; \frac{d}{2}\,n_d$$

gelten, wobei $n_d = N/L^d$ die Teilchendichte in d Dimensionen ist.

7.2 Fermi-Gas mit linearer Dispersion

Wir betrachten ein Elektronengas, das bei der Fermi-Energie ϵ_{F} eine lineare Dispersion $\epsilon(k) = \hbar k v_{\mathrm{F}}$ besitzt (dies trifft zum Beispiel auf Graphen zu). Berechnen Sie die Zustandsdichte an der Fermi-Kante $N_{\mathrm{F}d} = D_{\mathrm{F}d}/L^d$ für beide Spin-Richtungen für $d = 1, 2$ und 3 und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem für ein Fermi-Gas mit parabolischer Dispersion $\epsilon(k) = \hbar^2 k^2/2m$ erhaltenen Ergebnis.

7.3 Temperaturabhängigkeit des chemischen Potenzials

Verwenden Sie die Sommerfeld-Entwicklung und zeigen Sie, dass für die Temperaturabhängigkeit des chemischen Potentials $\mu(T)$ die Beziehung

$$\mu(T) \;=\; \mu(0)\left[1 - \frac{1}{12}\left(\frac{\pi k_{\mathrm{B}} T}{\mu(0)}\right)^2\right]$$

gilt.

7.4 Fermi-Gase in der Astrophysik

Das Modell freier Fermionen wird nicht nur in der Festkörperphysik sondern auch in verschiedenen anderen Gebieten der Physik verwendet. Übertragen Sie das für die Beschreibung des Verhaltens von Elektronen in Metallen entwickelte Modell des freien Elektronengases auf Fermi-Gase in der Astrophysik.

(a) Gegeben ist die Masse $M_\odot = 1.99 \times 10^{30}\,\text{kg}$ und der Radius $R_\odot = 6.96 \times 10^{8}\,\text{m}$ unserer Sonne. Schätzen Sie die Zahl der Elektronen in der Sonne ab.

(b) In etwa 5 Milliarden Jahren wird der Wasserstoffvorrat unserer Sonne aufgebraucht sein und die Sonne geht nach einem Zwischenstadium als Roter Riese, dessen Radius mit dem Bahnradius der Erde vergleichbar ist, in einen Weißen Zwerg ($M \simeq 0.5 \cdot M_\odot$, $R_\odot \simeq 10^7\,\text{m}$) über. Da Weiße Zwerge eine Temperatur von etwa 10^7K besitzen, sind die Heliumatome vollständig ionisiert und die Elektronen können näherungsweise als freie Elektronen betrachtet werden. Berechnen Sie die Fermi-Energie und die Fermi-Temperatur des Elektronengases. Handelt es sich dabei um ein entartetes Elektronengas?

(c) Die Energie eines Elektrons im relativistischen Grenzfall $E \gg mc^2$ hängt mit dem Wellenvektor k über $E \cong pc = \hbar kc$ zusammen. Zeigen Sie, dass die Fermi-Energie in diesem Grenzfall ungefähr $E_\text{F} \simeq \hbar c \left(3\pi^2 n\right)^{1/3}$ beträgt. Hierbei ist n die Elektronendichte und c die Lichtgeschwindigkeit.

(d) Der Druck des Elektronengases im Inneren eines Weißen Zwerges kann die auf dem Weißen Zwerg lastende Gravitationskraft nur dann kompensieren, wenn dieser eine Masse von weniger als 1.4 Sonnenmassen hat. Besitzt eine ausgebrannte Sonne eine höhere Masse, so wird sich der sterbende Stern stattdessen in einen Neutronenstern mit einem Radius von etwa 15 km umwandeln. Berechnen Sie die Fermi-Energie eines Neutronensterns mit der Masse $M = 1.5 \cdot M_\odot$.

(e) Man glaubt, dass Pulsare eher aus Neutronen als aus Protonen und Elektronen bestehen. Dies liegt daran, dass der Energiegewinn der Reaktion $n \to p^+ + e^- + \overline{\nu}_e$ nur $0.77 \times 10^6\,\text{eV}$ beträgt. Überlegen Sie, bei welcher Elektronenkonzentration die Fermi-Energie des Elektronengases größer als dieser Wert wird. Wird der Zerfall der Neutronen dann noch fortschreiten?