WALTHER–MEIßNER–INSTITUT 14. Dezember 2017
Bayerische Akademie der Wissenschaften
Lehrstuhl für Technische Physik E23, Technische Universität München
Prof. Dr. Rudolf Gross, Dr. Stephan Geprägs
Tel.: +49 (0)89 289 14225
E-mail: stephan.gepraegs@wmi.badw.de **Blatt 9**

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Physik der Kondensierten Materie I
WS 2017/2018

6 Thermische Eigenschaften des Kristallgitters

6.4 Mittlere thermische Ausdehnung einer Kristallzelle

Wir diskutieren die thermische Ausdehnung eines Natriumkristalls.

(a) Schätzen Sie für eine primitive Elementarzelle eines Natriumkristalls bei 300 K die mittlere thermische Volumenausdehnung $\Delta V/V$ ab. Nehmen Sie dazu den Kompressionsmodul zu $7 \times 10^9\,\mathrm{J/m^3}$ an. Beachten Sie, dass die Debye-Temperatur mit 158 K geringer als 300 K ist, so dass Sie eine klassische Betrachtung machen können.

(b) Benutzen Sie dieses Ergebnis, um die mittlere thermische Schwankung $\Delta a/a$ der Gitterkonstanten abzuschätzen.

6.5 Nullpunkts-Gitterauslenkung und Dehnung

Nullpunktsschwingungen spielen für viele Eigenschaften von Festkörpern eine nicht zu vernachlässigende Rolle.

(a) Zeigen Sie, dass in der Debye-Näherung am absoluten Nullpunkt das mittlere Auslenkungsquadrat eines Atoms aus seiner Ruhelage durch

$$\langle r^2 \rangle \;=\; \frac{3\hbar\omega_\mathrm{D}^2}{8\pi^2\rho v_s^3}$$

gegeben ist, wobei v_s die Schallgeschwindigkeit ist. Zeigen Sie zunächst, dass die maximale, mittlere quadratische Schwingungsamplitude gegeben ist durch $\langle u_\mathrm{max}^2 \rangle = \frac{\hbar}{\rho V}\langle \omega^{-1} \rangle_\mathrm{D}$, wobei V das Probenvolumen, $\rho = mN/V$ die Massendichte und $\langle g(\omega) \rangle_\mathrm{D} = \sum_{\mathbf{q},i} g(\omega_{\mathbf{q},r})$ ist. Der Index D deutet dabei an, dass wir die Summen über Wellenzahlen $\mathbf{q}$ im Rahmen des Debye-Modells auswerten wollen. Leiten Sie daraus die mittlere quadratische Auslenkung $\langle u^2 \rangle = \langle u_\mathrm{max}^2 \rangle/2$ ab.

(b) Zeigen Sie, dass $\langle \omega^{-1} \rangle_{\mathrm{D}}$ und damit $\langle u^2 \rangle$ für ein eindimensionales Gitter (einatomige Basis, Auslenkung u) divergieren, dass jedoch das mittlere Dehnungsquadrat endlich ist. Gehen Sie dazu von der Form $\langle (\partial u / \partial x)^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_q q^2 u_{\max}^2$ für das mittlere Dehnungsquadrat aus und zeigen Sie, dass im Fall einer Kette aus N Atomen, von denen jedes die Masse m hat,

$$\left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\rangle = \frac{\hbar \omega_{\mathrm{D}}^2 L}{4\pi^2 m N v_s^3}$$

gilt, wenn nur longitudinale Zustände berücksichtigt werden. Die Divergenz von $\langle u^2 \rangle$ ist aber für keine einzige physikalische Messung signifikant.

7 Das freie Elektronengas

7.1 Fermi-Gase in d Dimensionen

Geben Sie für ein d-dimensionales Fermi-Gas die Fermi-Wellenzahl $k_{\mathrm{F}d}$, die Fermi-Geschwindigkeit $v_{\mathrm{F}d}$, die Fermi-Energie $E_{\mathrm{F}d}$ und die Zustandsdichte (pro Volumen und Energie) an der Fermi-Kante $N_{\mathrm{F}d} = D_{\mathrm{K}d}/L^d$ für beide Spin-Richtungen an und zeigen Sie, dass die Relationen

$$N_{\mathrm{F}d} v_{\mathrm{F}d}^2 = d\,\frac{n_d}{m} \qquad N_{\mathrm{F}d} E_{\mathrm{F}d} = \frac{d}{2}\, n_d$$

gelten, wobei $n_d = N/L^d$ die Teilchendichte in d Dimensionen ist.

7.2 Fermi-Gas mit linearer Dispersion

Wir betrachten ein Elektronengas, das bei der Fermi-Energie ϵ_{F} eine lineare Dispersion $\epsilon(k) = \hbar k v_{\mathrm{F}}$ besitzt (dies trifft zum Beispiel auf Graphen zu). Berechnen Sie die Zustandsdichte an der Fermi-Kante $N_{\mathrm{F}d} = D_{\mathrm{F}d}/L^d$ für beide Spin-Richtungen für $d = 1, 2$ und 3 und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem für ein Fermi-Gas mit parabolischer Dispersion $\epsilon(k) = \hbar^2 k^2 / 2m$ erhaltenen Ergebnis.