WALTHER–MEIßNER–INSTITUT 16. Mai 2018
Bayerische Akademie der Wissenschaften
Lehrstuhl für Technische Physik E23, Technische Universität München
Prof. Dr. Rudolf Gross, Dr. Stephan Geprägs
Tel.: +49 (0)89 289 14225
E-mail: stephan.gepraegs@wmi.badw.de **Blatt 6**

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Physik der Kondensierten Materie II
SS 2018

12 Magnetismus

12.3 Brillouin-Funktion

Diskutieren Sie die paramagnetische Magnetisierung M_{para} eines quantenmechanischen Systems aus gleichwertigen, nichtwechselwirkenden Atomen mit Gesamtdrehimpuls J [$(2J+1)$–Niveau–System] im thermischen Gleichgewicht.

(a) Diskutieren Sie den mittleren Wert $\langle m_J \rangle$ der magnetischen Quantenzahl in einem äußeren Feld B_{ext}.

(b) Leiten Sie einen Ausdruck für die Magnetisierung M_{para} als Funktion des angelegten Magnetfeldes und der Temperatur ab und diskutieren Sie den Verlauf von M_{para}. Entwickeln Sie die Funktion $M_{\text{para}}(x)$ nach der Größe $x = g_J \mu_B B_{\text{ext}}/k_B T$ für $x \ll 1$ und $x \gg 1$.

(c) Welches äußere Feld B_{ext} wäre notwendig, um in einem System mit $J = 1/2$ bei Raumtemperatur etwa 80% der Sättigungsmagnetisierung zu erreichen?

(d) Welches Ergebnis würde man für den Verlauf der Magnetisierung bei einer klassischen Rechnung erhalten? Zeigen Sie, dass das klassische Ergebnis mit dem quantenmechanischen Ergebnis übereinstimmt, wenn man die Größe $\mu_{\text{eff}} = g_J \sqrt{J(J+1)}\mu_B$ als Betrag des magnetisches Moments betrachtet. Warum besteht ein Unterschied zwischen μ_{eff} und dem Sättigungswert $\mu_s = g_J \mu_B J$ des magnetischen Moments in Richtung des angelegten Magnetfeldes?

12.4 Paulische Spin-Suszeptibilität

Die Spin-Suszeptibilität eines Gases aus freien Elektronen (ohne jegliche Austauschwechselwirkung) am absoluten Nullpunkt kann auch wie folgt abgeleitet werden. Gegeben seien die

Konzentrationen der Elektronen mit Spin σ nach oben $\sigma =\uparrow$ und Spin nach unten $\sigma =\downarrow$:

$$\begin{aligned} n^{(\sigma)} &= \frac{n}{2}\left[1+\sigma\zeta\right] \ , \quad \sigma \ = \ \pm 1 \\ n &= \sum_{\sigma=\pm 1} n^{(\sigma)} \ ; \ \delta n = \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma n^{(\sigma)} \ ; \ \zeta = \frac{\delta n}{n} \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass in einem äußeren Magnetfeld B_{ext} für ein freies Elektronengas die Gesamtenergiedichte der Elektronen mit Spin-Projektion σ durch

$$\frac{E^{(\sigma)}}{V} = nE_0\left[1+\sigma\zeta\right]^{\frac{5}{3}} - \frac{\sigma}{2} n\mu_{\mathrm{B}} B_{\mathrm{ext}}\left[1+\sigma\zeta\right]$$

gegeben ist, wobei $E_0 = 3E_{\mathrm{F}}^0/10$ durch die Fermi-Energie $E_{\mathrm{F}}^0 = \hbar^2 k_{\mathrm{F}}^{0\,2}/2m$ ohne äußeres Feld gegeben ist.

(b) Minimieren Sie die Gesamtenergiedichte

$$E^{\mathrm{tot}} = \sum_{\sigma} E^{(\sigma)}$$

durch Variation von ζ und bestimmen Sie in der Näherung $\zeta \ll 1$ den Gleichgewichtswert von ζ. Zeigen Sie schließlich, dass für die Magnetisierung

$$M = \mu_{\mathrm{B}}\delta n = \mu_{\mathrm{B}}\left[n^{(+)} - n^{(-)}\right] = \underbrace{\frac{3n\mu_{\mathrm{B}}^2}{2E_{\mathrm{F}}^0}}_{\chi_{\mathrm{P}}} B_{\mathrm{ext}}$$

gilt, wobei χ_{P} die Paulische Spin-Suszeptibilität ist.

12.5 Klassische Dipol-Dipol-Wechselwirkung

Ein magnetischer Dipol $\boldsymbol{\mu}$, der sich im Ursprung des Koordinatensystems befinden soll, erzeugt in seiner Umgebung die magnetische Feldstärke

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{3(\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{r})\,\mathbf{r} - r^2\,\boldsymbol{\mu}}{r^5} \ .$$

Berechnen Sie die Stärke des Magnetfeldes, welches ein Atom mit dem magnetischen Moment $\mu \simeq \mu_{\mathrm{B}}$ am Ort eines Nachbaratomes erzeugt. Der für die Ferromagneten Fe, Ni und Co typische Abstand nächster Nachbarn r_0 kann aus den folgenden Angaben berechnet werden: Fe besitzt ein bcc-Gitter mit $a = 2.866$ Å, Co ein hcp-Gitter mit $a = 2.507$ Å und Ni ein fcc-Gitter mit $a = 3.524$ Å.

Vergleichen Sie die maximale Energie der Dipol-Dipol-Wechselwirkung mit der thermischen Energie der Dipole bei der Curie-Temperatur, die für die genannten Materialien in der Größenordnung von 1000 K liegt.