

Kapitel 2

Mechanik des Starren Körpers

In der Mechanik der Massenpunkte wurde bereits mehrfach von der Vorstellung Gebrauch gemacht, daß ein makroskopischer Körper aus vielen Massenpunkten aufgebaut ist. In diesem Kapitel idealisieren wir einen Festkörper als einen *starren Körper* mit definiertem Volumen und definierter Gestalt. Man kann folgende Definition für einen starren Körper angeben:

Ein starrer Körper ist ein System von Massenpunkten, bei dem die Relativabstände der einzelnen Massenpunkte auch unter der Einwirkung von Kräften unverändert bleiben.

Technisch läßt sich zwar ein ideal starrer Körper nicht realisieren, aber in vielen Fällen ist der starre Körper eine gute Näherung.

In diesem Kapitel untersuchen wir in der Statik die Gleichgewichtsbedingungen und in der Dynamik die Bewegungsformen starrer Körper unter dem Einfluß äußerer Kräfte.

2.1 Der Starre Körper

Wir übertragen zunächst eine Reihe von Beziehungen, die in der Mechanik der Massenpunkte aufgestellt wurden, auf den speziellen Fall des starren Körpers. Insbesondere werden wir mit diesen Beziehungen die Bewegungsgleichungen für den starren Körper ableiten. Hierbei werden Formeln für die potentielle Energie und das Drehmoment eines starren Körpers in einem konstanten Gravitationsfeld aufgestellt, die uns zur Deutung des Massenmittelpunktes als *Schwerpunkt* führen.

Ist ein starrer Körper mit Masse m und Volumen V räumlich homogen, so kann ihm eine konstante *Massendichte*

$$\rho := \frac{m}{V} \quad [\rho] = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (2.1.1)$$

zugeordnet werden. Beispiele für Massendichten sind $\rho = 1.000 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ für Wasser, $\rho = 5.500 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ für die mittlere Massendichte der Erde, $\rho = 19.30 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ für Uran und $\rho \simeq 10^{17} \text{kg/m}^3$ für die Dichte von Atomkernen.

Für einen räumlich inhomogenen starren Körper ist es zweckmäßig, den Körper in einzelne Volumenelemente dV aufzuteilen, die einerseits so groß sind, daß sie viele Atome enthalten, und andererseits so klein sind, daß die Massenverteilung innerhalb von dV als homogen angesehen werden kann. Die in dV enthaltene Masse dm ist dann

$$dm = \rho dV \quad (2.1.2)$$

mit

$$\rho := \frac{dm}{dV} \quad (2.1.3)$$

als lokale Massendichte eines inhomogenen starren Körpers

2.1.1 Bewegungsgleichungen und Freiheitsgrade

Unter der Zahl der *Freiheitsgrade* eines Körpers versteht man in der Mechanik die Zahl von unabhängigen Parameter, die zur Festlegung der Lage und Orientierung eines Körpers im Raum notwendig ist. So hat ein im Raum frei beweglicher Massenpunkt 3 Freiheitsgrade, ein auf einer Fläche frei beweglicher Massenpunkt dagegen nur noch 2 Freiheitsgrade und ein entlang einer Raumkurve frei beweglicher Massenpunkt nur einen Freiheitsgrad. Für die Festlegung eines Systems von n Massenpunkten im Raum benötigt man $3n$ unabhängige Parameter, das heißt, dieses System besitzt $3n$ Freiheitsgrade. Die Zahl der Freiheitsgrade eines frei beweglichen starren Körpers ist dagegen wesentlich kleiner, da alle Massenpunkte starr miteinander verbunden sind. Wir ermitteln die Zahl der Freiheitsgrade anhand von Abb. 2.1. Greift man sich willkürlich einen Massenpunkt 1 heraus, so hat dieser 3 Freiheitsgrade. Ein zweiter Massenpunkt 2 kann sich dann lediglich auf einer Kugel um 1 als Mittelpunkt bewegen, da der relative Abstand von 1 und 2 in einem starren Körper konstant ist. Der Körperpunkt 2 besitzt demnach nur noch 2 Freiheitsgrade. Schließlich kann sich ein dritter Massenpunkt 3 nur noch auf einem Kreis um die Verbindungslinie 1 – 2 bewegen (Schnittlinie zweier Kugeln) und liefert somit nur noch einen zusätzlichen

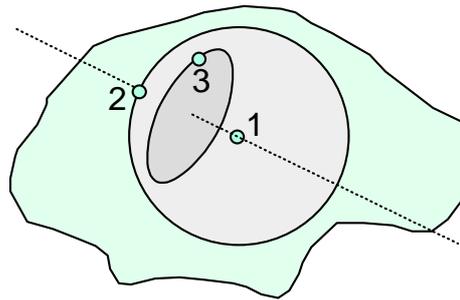


Abbildung 2.1: Zur Ableitung der Zahl der Freiheitsgrade eines starren Körpers.

Freiheitsgrad. Alle weiteren Punkte sind durch die herausgegriffenen drei (nicht-kollinearen) Massenpunkte festgelegt. Daher hat der frei bewegliche starre Körper nur $3 + 2 + 1 = 6$ Freiheitsgrade. Wird dagegen ein Körperpunkt festgehalten, so verbleiben nur noch $2 + 1 = 3$ Freiheitsgrade, und bei einer vorgegebenen festen Drehachse lediglich ein einziger Freiheitsgrad.

Mit obiger Überlegung läßt sich die Bewegung eines starren Körpers in eine *Translationsbewegung* und eine *Rotationsbewegung* unterteilen. Bei einer Translation wird der Körper parallel zu sich selbst verschoben, d.h. die Differenz der Anfangs- und Endvektoren aller Massenpunkte ist durch einen einheitlichen Verschiebevektor $\Delta \mathbf{r}$ gegeben (siehe Abb. 2.2a). Der zeitliche Bewegungsablauf ist eine Aufeinanderfolge von infinitesimalen Verschiebungen $d\mathbf{r}$, die sich im allgemeinen zu einer gekrümmten Bahnkurve addieren. Nach Vorgabe der Raumkurve eines beliebigen Körperpunktes P laufen alle anderen Körperpunkte auf parallel versetzten, aber ansonsten identischen Bahnen. Für die Beschreibung der Translationsbewegung sind 3 Freiheitsgrade notwendig.

Unter der Rotation eines starren Körpers versteht man eine Bewegungsform, bei der sich alle Massenpunkte auf Kreisbahnen um eine feste Drehachse und zwar um den gleichen Winkel $\Delta\varphi$ bewegen. Der Körper ändert zwar seine Orientierung im Raum, die Punkte auf der Drehachse bleiben aber raumfest. Man kann jede Bewegung eines starren Körpers um einen festen Raumpunkt P als Rotation um eine feste Drehachse mit geeignetem Drehwinkel $\Delta\varphi$ darstellen.¹ Wenn wir – ohne Angabe eines strengen Beweises – dieses **Eulersche** Theorem übernehmen, dann läßt sich in der Tat jede Bewegung eines starren Körpers als eine Überlagerung einer Translation und einer Rotation beschreiben.²

Eine weitere Schwierigkeit bei der Beschreibung von Drehbewegungen besteht darin, daß es nicht gelingt, endliche Drehungen mit Drehkoordinaten zu erfassen, die eine ähnliche Symmetrie wie die kartesischen Lagekoordinaten (x, y, z) eines Raumpunktes besitzen.³ Dagegen ist es üblich, die Orientierung bzw. Rotation eines starren Körpers mit den **Eulerschen Winkeln** (θ, φ, ψ) zu beschreiben. Zur Definition verwendet man ein im Bezugspunkt P liegendes raumfestes Koordinatensystem (x, y, z) sowie ein zweites im Körper verankertes „körperfestes“ Koordinatensystem (x', y', z') , dessen Ursprung mit P zusammenfällt. Wie aus Abb. 2.3 ersichtlich ist, ist dadurch die Orientierung des Körpers im Raum festgelegt und zwar durch die Winkel (θ, φ) für die Raumrichtung der körperfesten z' -Achse und den Winkel ψ für die Drehung um die z' -Achse. Man kann dieser Konstruktion insbesondere entnehmen, daß die Orientierung bzw. Rotation des starren Körpers durch 3 Freiheitsgrade charakterisiert ist.

¹Dies ist keineswegs trivial aber aus Abb. 2.2b anschaulich klar.

²Der zeitliche Bewegungsablauf bei der Rotation ist anschaulich schwieriger nachzuvollziehen. Ähnlich wie die einzelnen infinitesimalen Translationen $d\mathbf{r}$ nicht entlang der globalen endlichen Translation $\Delta \mathbf{r}$ verlaufen müssen, dreht sich bei der Rotation der Körper um eine *momentane* Drehachse um einen infinitesimalen Drehwinkel $d\varphi$, wobei i.a. die momentane Drehachse sowohl im Raum als auch relativ zum Körper wandert. Die Endlage des Körpers kann man aber aus der Anfangslage durch eine Rotation um eine einzige Drehachse mit endlichem $\Delta\varphi$ hervorgehen lassen.

³Darauf wurde bereits im Abschnitt 1.1 hingewiesen.

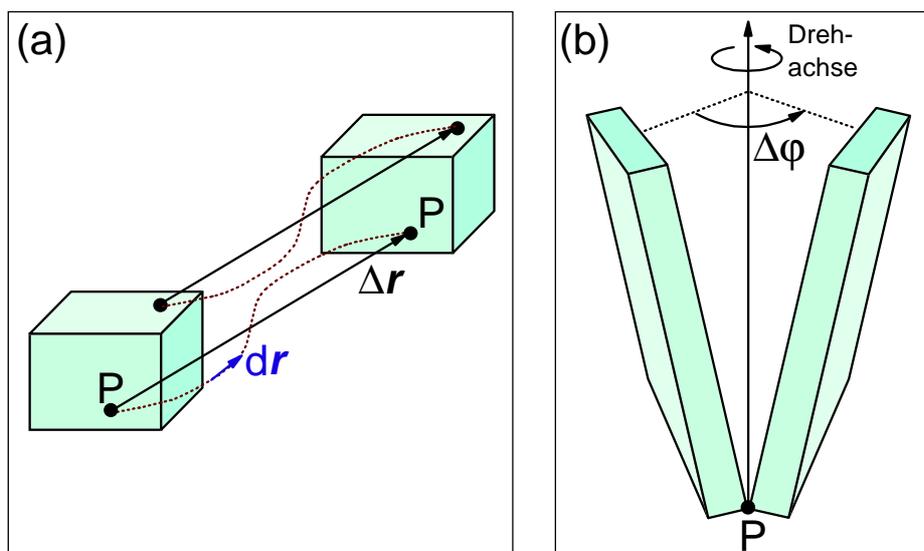


Abbildung 2.2: Translationsbewegung (a) und Rotationsbewegung (b) eines starren Körpers.

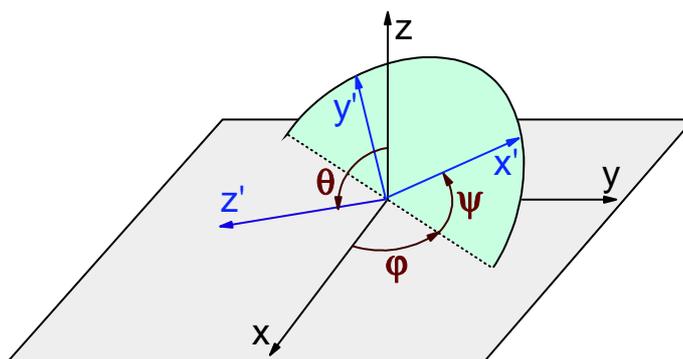


Abbildung 2.3: Die **Eulerschen Winkel**.

Wir haben bereits im Abschnitt 1.8.2 diskutiert, daß im Gegensatz zu endlichen Drehbewegungen infinitesimale Drehungen durch axiale Vektoren darstellbar sind. Im folgenden werden die im Bewegungsablauf der Rotation auftretenden momentanen Drehachsen mit dem Vektor ω der Winkelgeschwindigkeit beschrieben. Hierbei gibt ω die Lage der Drehachse, den Drehsinn (Rechte-Hand-Regel) und die Änderungsgeschwindigkeit $d\varphi/dt$ des Drehwinkels an. Die Dynamik des frei beweglichen starren Körpers ist im allgemeinen dadurch erschwert, daß die momentane Winkelgeschwindigkeit ω nach Größe und Richtung weder raum- noch körperfest ist.

Es soll jetzt die Bewegungsgleichung für einen frei beweglichen starren Körper aufgestellt werden. Die Bewegung ist vollständig bestimmt, wenn die 6 Freiheitsgrade durch 6 Bewegungsgleichungen abgedeckt sind. Um diese zu finden, wählen wir einen im Körper fest verankerten Bezugspunkt P , bezüglich dessen wir die Translation und die Rotation angeben. Es stellt eine wesentliche Vereinfachung dar, ist aber keineswegs zwingend, wenn man als Bezugspunkt den Massenmittelpunkt CM aus Abschnitt 1.10 wählt (siehe Abb. 2.4). Mit der Masse m_i und dem Ortsvektor \mathbf{r}_i des i -ten Massenpunktes ist der Ortsvektor \mathbf{r}_{cm} des Massenmittelpunktes durch

$$\mathbf{r}_{\text{cm}} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} = \frac{1}{M} \sum m_i \mathbf{r}_i \quad (2.1.4)$$

gegeben, wobei die Summation über alle Massenpunkte zu erstrecken ist und $M = \sum m_i$ die Gesamtmasse des Körpers angibt. Da der starre Körper aus sehr vielen Massenpunkten aufgebaut ist, ist es zweckmäßig, den Körper in einzelne Volumenelemente dV aufzuteilen, die einerseits so groß sind, daß sie viele Atome enthalten, und andererseits so klein sind, daß die Massenverteilung innerhalb von dV als homogen angesehen werden kann. An Stelle der Massenpunkte m_i in Gl.(2.1.4) tritt das Massenelement dm und aus der Summation wird eine Integration:

$$\mathbf{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} \rho dV . \quad (2.1.5)$$

Hierbei ist \mathbf{r} der Ortsvektor des Massen- bzw. Volumenelements dm bzw. dV . Im allgemeinen schwankt die Massendichte, d.h. $\rho = \rho(\mathbf{r})$. Nur im Falle eines homogenen Körpers ist $\rho = \text{const}$ und kann vor das Integral gezogen werden.

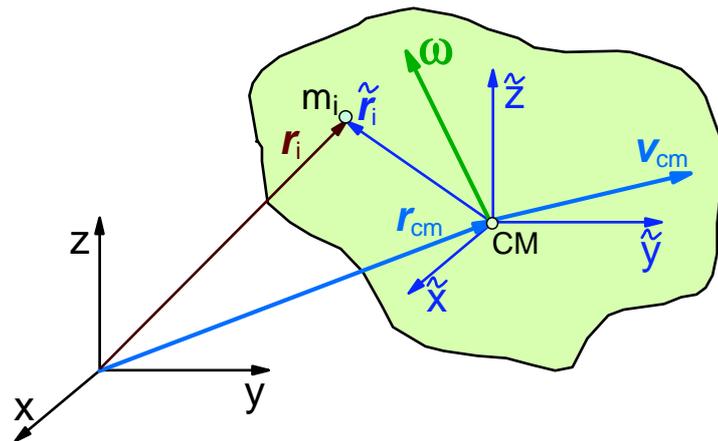


Abbildung 2.4: Die Bewegung eines starren Körpers als Überlagerung von Translation (Geschwindigkeit \mathbf{v}_{cm}) und Rotation (Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$) mit dem Massenmittelpunkt CM als Bezugspunkt.

Die Translationsbewegung \mathbf{v}_{cm} des Massenmittelpunkts und damit aller Körperpunkte ist

$$\mathbf{v}_{\text{cm}} = \frac{d\mathbf{r}_{\text{cm}}}{dt} . \quad (2.1.6)$$

Der Gesamtimpuls des Körpers als Summation bzw. Integration über alle Einzelimpulse $m_i \mathbf{v}_i$ bzw. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) dm$ ist nach Gl.(1.10.50) gleich dem Schwerpunktsimpuls $\mathbf{p}_{\text{cm}} = M \mathbf{v}_{\text{cm}}$, den wir künftig einfach als Impuls des Körpers bezeichnen werden. Mit der am Körper angreifenden äußeren Kraft \mathbf{F}_{tot} als Summe bzw. Integral der Einzelkräfte an den Massenpunkten m_i bzw. Massenelementen dm ergibt sich (vergleiche Gl.(1.10.51))

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}_{\text{cm}}}{dt} , \quad (2.1.7)$$

wobei die von außen angreifende Gesamtkraft im folgenden einfach mit $\mathbf{F} := \mathbf{F}_{\text{tot}}^*$ bezeichnet wird. Die Impulsgleichung (2.1.7) ist die gesuchte Bewegungsgleichung für die Translationsbewegung des starren Körpers. Als Vektorgleichung faßt sie drei unabhängige Bewegungsgleichungen für die drei Freiheitsgrade der Translation zusammen. Sie besagt, daß die mit dem Bezugspunkt CM beschriebene Translationsbewegung so erfolgt, wie wenn die Gesamtkraft \mathbf{F} am Massenmittelpunkt angreifen würde, in dem die Gesamtmasse des Körpers vereinigt zu denken ist.

Die Bewegungsgleichung für die Rotationsbewegung um den Massenmittelpunkt CM ist die Drehimpulsgleichung. Um diese Behauptung einzusehen, legen wir ein zum Inertialsystem (x, y, z) achsenparalleles System $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ in den Massenmittelpunkt CM , das dann von der Translationsbewegung mitgeführt wird (siehe Abb. 2.4). Mit CM als Bezugspunkt ist das Gesamtdrehmoment der äußeren Kräfte $\mathbf{T}_{\text{cm}} := \mathbf{T}_{\text{tot,cm}}^*$ gleich der Summe der Einzelmomente $\tilde{\mathbf{r}} \times d\mathbf{F}$, wobei $d\mathbf{F}$ die am Massenelement dm angreifende äußere Kraft darstellt. Entsprechend liefert die Summation bzw. Integration über die Einzeldrehimpulse $\tilde{\mathbf{r}}_i \times \tilde{\mathbf{p}}_i = \tilde{\mathbf{r}}_i \times m_i \tilde{\mathbf{v}}_i$ bzw. $\tilde{\mathbf{r}} \times d\tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{r}} \times \tilde{\mathbf{v}} dm$ den Gesamtdrehimpuls $\tilde{\mathbf{L}} := \tilde{\mathbf{L}}_{\text{tot}}$ im translatorisch bewegten CM -System. Die Drehimpulsgleichung (1.11.57) wird dann zu

$$\mathbf{T}_{\text{cm}} = \frac{d\tilde{\mathbf{L}}}{dt} \quad (2.1.8)$$

Es sei an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen, daß nur mit dem Massenmittelpunkt als Bezugspunkt die Drehimpulsgleichung unabhängig von der Bewegung des Bezugspunktes diese einfache Form annimmt (vergleiche hierzu die Diskussion in Abschnitt 1.11.3). Die Interpretation der Drehimpulsgleichung ist schwieriger als die der Impulsgleichung. Jedenfalls regelt (2.1.8) die Rotationsbewegung des Körpers um den Massenmittelpunkt. Zu jedem Zeitpunkt ist die Rotation durch eine Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ charakterisiert, die mit den für den Drehimpuls $\tilde{\mathbf{L}}$ benötigten Geschwindigkeiten $\tilde{\mathbf{v}}$ gemäß Gl.(1.8.32) über die Beziehung

$$\tilde{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}} \quad (2.1.9)$$

verknüpft ist. Damit stellt letztlich Gl.(2.1.8) die Bewegungsgleichung für $\boldsymbol{\omega}$, also die Rotation, dar. Als Vektorgleichung faßt sie wiederum 3 unabhängige Gleichungen für die 3 Freiheitsgrade der Rotation zusammen.

Insgesamt bilden Gl.(2.1.7) und (2.1.8) ein vollständiges Gleichungssystem für die Beschreibung der Bewegung eines starren Körpers unter der Einwirkung äußerer Kräfte. Falls \mathbf{F} von der Rotations- und \mathbf{T}_{cm} von der Translationsbewegung abhängig ist (z.B. beim Bumerang), sind beide Gleichungen miteinander gekoppelt und es gelingt nur in Sonderfällen eine geschlossene Lösung anzugeben. Sind Translations- und Rotationsbewegung dagegen entkoppelt, so ist die Impulsgleichung $\mathbf{F} = d\mathbf{p}_{\text{cm}}/dt$ ein einfaches Problem der Punktmechanik. Dagegen ist die Drehimpulsgleichung selbst in diesem Fall nicht allgemein geschlossen lösbar (Kreiselproblem).

Die kinetische Energie des starren Körpers läßt sich mit dem Massenmittelpunkt als Bezugspunkt (vergleiche hierzu Gl.(1.10.61)) in

$$T = \tilde{T} + \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 \quad (2.1.10)$$

aufspalten. Dabei ist

$$T_{\text{trans}} := \frac{1}{2} M v_{cm}^2 \quad (2.1.11)$$

die kinetische Energie, die mit der Translationsbewegung des Massenmittelpunktes verknüpft ist, und

$$T_{\text{rot}} := \tilde{T} \quad (2.1.12)$$

die kinetische Energie der Rotation um den Massenmittelpunkt. Ein Hauptziel der folgenden Abschnitte ist es, explizite Ausdrücke für T_{rot} abzuleiten.

Die innere Energie U des starren Körpers enthält neben T_{rot} noch die potentielle Energie der Wechselwirkung der Massenpunkte m_i bzw. der Massenelemente dm untereinander (vergleiche Gl.(1.10.63)). In der Näherung des starren Körpers ist allerdings die Wechselwirkungsenergie konstant und kann daher außer Betracht bleiben. Dagegen müssen wir in der Bilanz der Gesamtenergie E noch die potentielle Energie mitberücksichtigen, die der Körper in einem äußeren Kraftfeld (z.B. dem Gravitationsfeld) hat. Für die Gesamtenergie E des frei beweglichen starren Körpers erhält man somit

$$E = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + T_{\text{rot}} + E_{\text{pot}} \quad (2.1.13)$$

Abschließend wollen wir noch die Bewegungsgleichung eines starren Körpers diskutieren, der einen raumfesten Punkt P besitzt (z.B. die in einer Führung aufsitzende Spitze eines Kreisels). Die allgemeinste Bewegungsform ist eine Rotation (3 Freiheitsgrade) um den ruhenden Punkt P . Es ist in diesem Fall zweckmäßig, den ruhenden Punkt P als Bezugspunkt zu wählen. Die Bewegungsgleichung ist dann die Drehimpulsgleichung (1.11.52) und man erhält

$$\mathbf{T}_P = \frac{d\mathbf{L}_P}{dt} \quad (2.1.14)$$

Mit der momentanen Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ ist die Geschwindigkeit \mathbf{v} eines Massenpunktes mit dem vom Punkt P aus gemessenen Ortsvektor \mathbf{r}^P durch $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^P$ gegeben. Die Gesamtenergie wird

$$E = T_{\text{rot}} + E_{\text{pot}} \quad (2.1.15)$$

wobei T_{rot} jetzt abweichend zu Gl.(2.1.13) die kinetische Energie der Rotation um den Bezugspunkt P bedeutet.⁴

2.1.2 Der Schwerpunkt

In diesem Abschnitt soll der Schwerpunkt eines starren Körpers eingeführt werden und eine Beziehung zu dem in Kapitel 1 eingeführten Massenmittelpunkt hergestellt werden. Im Gravitationsfeld $\mathbf{f}_G(\mathbf{r})$ wirkt auf das Massenelement dm eines starren Körpers die äußere Kraft $d\mathbf{F} = \mathbf{f}_G dm$. Befindet sich der Körper in einem Bereich, in dem $\mathbf{f}_G = \text{const}$ ist, so erhält man die am Körper angreifende Gewichtskraft \mathbf{F}_G , das *Gewicht* des Körpers, durch Integration über alle Massenelemente

⁴Die Translationsenergie verschwindet für einen ruhenden Bezugspunkt.

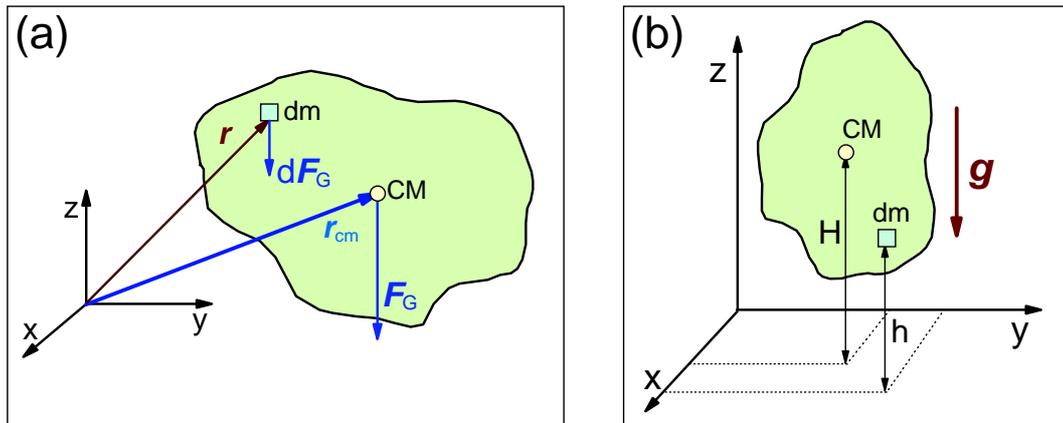


Abbildung 2.5: (a) Drehmoment eines starren Körpers im Gravitationsfeld: $\mathbf{T}_G = \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{F}_G$. (b) Potentielle Energie eines starren Körpers im konstanten Gravitationsfeld: $E_{pot} = Mgh$.

$$\mathbf{F}_G = \left(\int dm \right) \mathbf{f}_G = M \mathbf{f}_G . \quad (2.1.16)$$

Hierbei ist $M = \int dm$ die Gesamtmasse des Körpers. Ebenso läßt sich das Drehmoment \mathbf{T}_G angeben, das der Körper im konstanten Schwerfeld erfährt (siehe Abb. 2.5a). Es ist

$$\mathbf{T}_G = \int \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_G = \int \mathbf{r} \times (dm) \mathbf{f}_G = \left(\int \mathbf{r} dm \right) \times \mathbf{f}_G \quad (2.1.17)$$

und mit Gl.(2.1.5) für den Ortsvektor \mathbf{r}_{cm} des Massenmittelpunktes erhält man

$$\mathbf{T}_G = M \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{f}_G = \mathbf{r}_{cm} \times M \mathbf{f}_G = \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{F}_G . \quad (2.1.18)$$

Danach berechnet sich das Drehmoment des starren Körpers im Schwerfeld gerade so, als ob die Gesamtmasse M des Körpers im Massenmittelpunkt vereinigt wäre. Daher nennt man den Massenmittelpunkt auch *Schwerpunkt*. Aus Gl.(2.1.18) folgt weiter, daß daß das Drehmoment \mathbf{T}_G bezüglich des Schwerpunkts verschwindet: für ein im Schwerpunkt verankertes Bezugssystem ist $\tilde{\mathbf{r}}_{cm} = 0$ und damit auch $\mathbf{T}_{G,cm} = 0$. Diese Aussage läßt sich zu einer allgemeinen Definition des Schwerpunkts erweitern:

Der Schwerpunkt eines Körpers ist der Punkt, bezüglich dessen das Drehmoment in einem Gravitationsfeld verschwindet.

Wichtig ist, daß der so definierte Schwerpunkt nur dann mit dem Massenmittelpunkt CM zusammenfällt, wenn das Gravitationsfeld räumlich konstant ist.

Der Schwerpunkt spielt auch für die potentielle Energie eines Körpers in einem konstanten Gravitationsfeld eine ausgezeichnete Rolle. Anhand von Abb. 2.5b und Gl.(1.9.48) ist die potentielle Energie

des Massenelements dm , das sich in der Höhe h über einer normal zur Fallbeschleunigung g stehenden Bezugsebene befindet, durch $dE_{\text{pot}} = (dm)gh$ gegeben. Durch Integration über alle Massenelemente erhält man dann

$$E_{\text{pot}} = \int (dm)gh = g \int h dm . \quad (2.1.19)$$

Nach Gl.(2.1.5) ist nun die Höhe H des Massenmittelpunkts durch

$$H = \frac{1}{M} \int h dm \quad \text{bzw.} \quad \int h dm = M H \quad (2.1.20)$$

gegeben, woraus

$$E_{\text{pot}} = M g H \quad (2.1.21)$$

folgt. Analog zum Schweremoment \mathbf{T}_G berechnet sich also auch die potentielle Energie eines Körpers im konstanten Gravitationsfeld so, als ob die Gesamtmasse im Schwerpunkt vereinigt wäre.

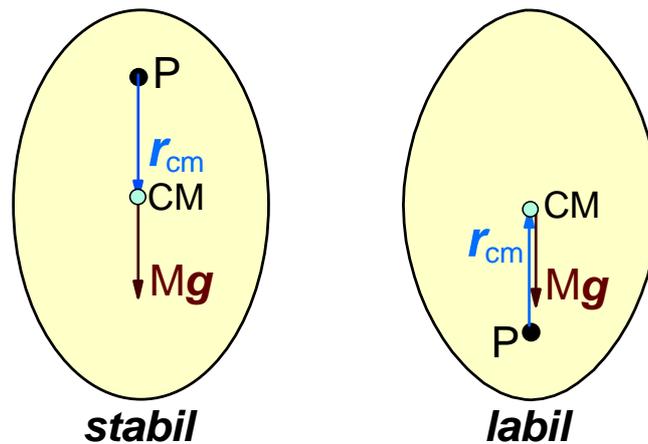


Abbildung 2.6: Stabiles und labiles Gleichgewicht.

2.2 Statik des starren Körpers

In der Statik betrachtet man einen Zustand, in dem alle Körperpunkte bezüglich eines geeigneten Inertialsystems ruhen. Die Bedingungen, unter denen dieser Zustand beibehalten wird, nennt man *Gleichgewichtsbedingungen*. In Abschnitt 1.9.4 hatten wir abgeleitet, daß im statischen Gleichgewicht die Gesamtkraft \mathbf{F}_i (als Summe der inneren und äußeren Kräfte) auf jeden einzelnen Massenpunkt verschwinden muß: $\mathbf{F}_i = 0$ (Gl.(1.9.67)). Unterliegen die Massenpunkte noch Zwangsbedingungen, so müssen zu den äußeren Kräften noch die Zwangskräfte \mathbf{f}_i dazugerechnet werden: $\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i = 0$ (Gl.(1.9.71)). Bei n Massenpunkten sind das jeweils n vektorielle Gleichungen.

2.2.1 Gleichgewicht

Bei der Statik des starren Körpers mit nur 6 Freiheitsgraden genügt es, die Gleichgewichtsbedingung für die Translation und die Rotation anzugeben. Die Forderung, daß im Gleichgewicht keine Beschleunigungen auftreten dürfen, führt auf $d\mathbf{p}/dt = 0$ und $d\mathbf{L}/dt = 0$. Aus den Bewegungsgleichungen für die Translation und Rotation (Gln.(2.1.7) und (2.1.8)) liest man dann folgende Gleichgewichtsbedingungen der Statik ab

$$\mathbf{F} = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{T} = 0 \quad (\text{Gleichgewicht}) \quad . \quad (2.2.1)$$

Hierbei ist \mathbf{F} die Summe aus äußeren eingepägten Kräften (z.B. Gravitationskräften) und Zwangskräften und entsprechend ist \mathbf{T} das äußere Gesamtdrehmoment. Man muß beachten, daß die inneren Kräfte zwischen den einzelnen Massenpunkten eines starren Körpers nicht in die Bewegungsgleichungen des starren Körpers eingehen und deshalb völlig außer Betracht gelassen werden können. Die inneren Kräfte sorgen sozusagen nur für die "Starrheit" des Körpers. Unter den Bedingungen von Gl.(2.2.1) verharrt ein starrer Körper mit $\mathbf{P} = 0$ und $\mathbf{L} = 0$ im Ruhezustand.

Wir betrachten nun einen Körper, der an einem körperfesten Punkt P unterstützt wird, ansonsten aber frei beweglich sein soll (siehe Abb. 2.6). Es gibt drei Positionen, in denen der Körper im Schwerfeld im Gleichgewicht ist:

1. Der Schwerpunkt CM befindet sich lotrecht unter dem Unterstützungspunkt P . In diesem Fall ist $\mathbf{r}_{cm} \parallel \mathbf{Mg}$ und damit ist $\mathbf{T}_G = \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{Mg} = 0$, d.h. es herrscht Gleichgewicht. Bei einer kleinen

Auslenkung aus dieser Gleichgewichtsposition tritt ein Drehmoment $\mathbf{T}_G = \mathbf{r}_{cm} \times M\mathbf{g}$ auf, das den Körper wieder in die Ruhelage zurücktreibt. Man spricht deshalb von *stabilem Gleichgewicht*.

- Der Schwerpunkt CM befindet sich lotrecht über dem Unterstützungspunkt P . In diesem Fall ist $\mathbf{r}_{cm} \parallel - (M\mathbf{g})$. Es ist zwar wiederum $\mathbf{T}_G = \mathbf{r}_{cm} \times M\mathbf{g} = 0$, d.h. es herrscht Gleichgewicht, bei einer kleinen Auslenkung aus dieser Gleichgewichtsposition treibt das auftretende Drehmoment $\mathbf{T}_G = \mathbf{r}_{cm} \times M\mathbf{g}$ den Körper aber nicht mehr in die Ruhelage zurück. Man spricht deshalb von *labilem Gleichgewicht*.
- Der Schwerpunkt CM fällt mit dem Unterstützungspunkt P zusammen. In diesem Fall verschwindet wegen $\mathbf{r}_{cm} = 0$ das Drehmoment \mathbf{T}_G , d.h. jede Drehposition des Körpers ist im Gleichgewicht. Man spricht hier von einem *indifferenten Gleichgewicht*.

Experiment: Bestimmung des Schwerpunkts

Aus der obigen Betrachtung folgt sofort ein Verfahren zur experimentellen Bestimmung des Schwerpunkts eines starren Körpers. Der Körper wird frei beweglich aufgehängt. Sein Schwerpunkt versucht dann, die stabile Lage unterhalb des Aufhängepunktes einzunehmen. Durch zweimaliges Aufhängen an verschiedenen Punkten findet man den Schwerpunkt als Schnittpunkt der beiden Lote, die durch die Aufhängepunkte gehen.

Experiment: Kippen eines Schrankes

Versucht man einen Schrank über eine Kante zu kippen, bedeutet das ein Anheben seines Schwerpunktes (siehe Abb. 2.7). Es wirkt ein Drehmoment \mathbf{T}_G , das den Schrank so lange in seine alte Stellung zurückzukippen versucht, wie das Lot des Schwerpunktes sich noch innerhalb der Unterstützungsfläche befindet. Ist das Lot außerhalb, wirkt ein Drehmoment, das den Schrank umzukippen versucht.

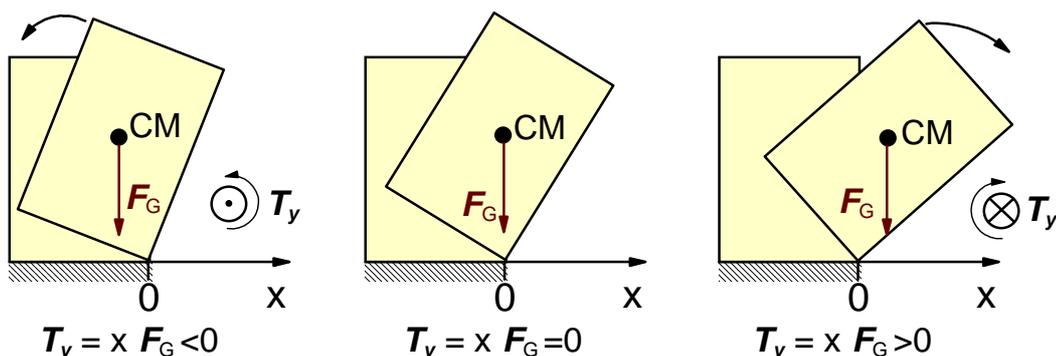


Abbildung 2.7: Drehmomente beim Kippen eines Schrankes. Die y -Achse zeigt in die Papierebene hinein.

Wir haben bisher die Gleichgewichtsbedingungen für einen starren Körper als Bedingungen für die Kräfte und Drehmomente formuliert. Dabei sind neben den äußeren eingprägten Kräften auch die Zwangskräfte zu berücksichtigen. Im Abschnitt 1.9.4 wurde dagegen die Gleichgewichtsbedingung eines Systems als "Prinzip der virtuellen Arbeit" gefaßt. Es besagt, daß im Gleichgewicht die Arbeit der inneren und äußeren Kräfte bei virtuellen Verrückungen δs verschwindet, wobei allerdings die Verrückungen den Zwangsbedingungen genügen müssen (vergleiche Gl.(1.9.74)). Bei dieser Formulierung der Gleichgewichtsbedingung war wesentlich, daß die Zwangskräfte für sich genommen keine virtuelle Arbeit

leisten, die Zwangskräfte also außer Betracht gelassen werden können. Für einen starren Körper ergibt sich die weitere Vereinfachung, daß die inneren Kräfte keine Arbeit leisten können, da die dazu erforderlichen Verrückungen der einzelnen Massenelemente gegeneinander bei einem starren Körper nicht zulässig sind. Beim starren Körper verschwindet deshalb die virtuelle Arbeit der äußeren eingepprägten Kräfte für sich allein. Sind schließlich die äußeren Kräfte konservativ und aus einem Potential ableitbar, so besagt Gl.(1.9.75), daß im Gleichgewicht

$$\boxed{\delta E_{\text{pot}} = 0 \quad (\text{Gleichgewicht}) \quad (2.2.2)}$$

ist. Das heißt, die potentielle Energie der eingepprägten Kräfte nimmt im Gleichgewicht ein Extremum an.

Als Beispiel hierfür kann nochmals Abb. 2.6 betrachtet werden. Anhand des Ausdrucks für die potentielle Energie, $E_{\text{pot}} = Mgh$ des Körpers im Gravitationsfeld erkennt man, daß die Extremalwerte der Höhenkoordinate H , die der Schwerpunkt im labilen und stabilen Gleichgewicht einnimmt, jeweils zu einem Extremum der potentiellen Energie führen. Die stabile Gleichgewichtslage entspricht dabei einem Minimum, die labile Gleichgewichtslage einem Maximum der potentiellen Energie.

2.2.2 Balkenwaage und Hebel

Hebel und Hebelgesetze

Die Gleichgewichtsbedingungen finden Anwendung in den Hebelgesetzen. Hierzu betrachten wir den in Abb. 2.8a gezeigten *Hebel*, der in einem raumfesten Punkt unterstützt wird und an dessen Hebelarmen \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 die Kräfte \mathbf{F}_1 und \mathbf{F}_2 angreifen sollen. In Abb. 2.8a ist ferner angenommen, daß die Kräfte vertikal gerichtet sind und die Gewichtskräfte des Hebels vernachlässigt werden können. Die Gleichgewichtsbedingung für die Rotation $\mathbf{T} = 0$ besagt, daß die Drehmomente $\mathbf{T}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1$ und $\mathbf{T}_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$ sich zu Null addieren müssen. Für die Beträge der Momente muß also gelten

$$|\mathbf{T}_1| = |\mathbf{T}_2| \quad \text{bzw.} \quad |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1| = |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2| \quad . \quad (2.2.3)$$

Deutet man den Betrag des Drehmoments wie in Abschnitt 1.11.1 als Produkt aus Kraft F und Kraftarm b , so lautet die Gleichgewichtsbedingung am Hebel

$$F_1 b_1 = F_2 b_2 \quad . \quad (2.2.4)$$

Diese Beziehung nennt man das Hebelgesetz, das sich in Worten als

$$\text{Kraft} \cdot \text{Kraftarm} = \text{Last} \cdot \text{Lastarm} \quad (2.2.5)$$

formulieren läßt. Am längeren Hebel kann man also mit kleinerem Kraftaufwand einer größeren Kraft das Gleichgewicht halten. Die Stützkraft \mathbf{f} (Zwangskraft) im Lagerpunkt erhält man aus der Bedingung $\mathbf{F} = \mathbf{f} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$.

Experiment: Mehrarmiger Hebel

Mit Hilfe eines mehrarmigen Hebels läßt sich einfach zeigen, daß es für die Gleichgewichtsbedingung nur auf den senkrechten Abstand zwischen Krafrichtung und Drehpunkt ankommt.

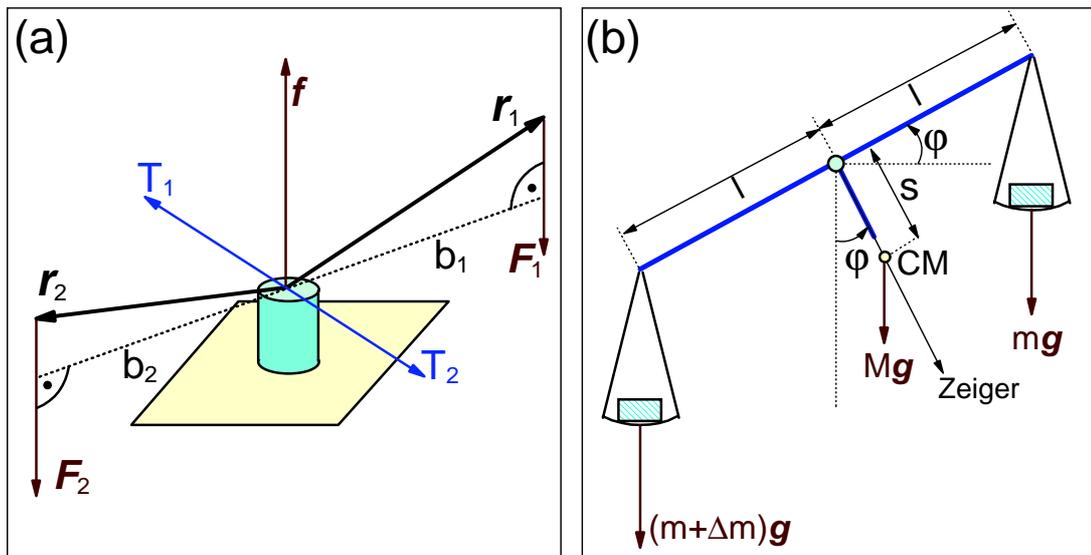


Abbildung 2.8: (a) Gleichgewichtsbedingung am Hebel. (b) Gleichgewichtsbedingung für die Balkenwaage.

Balkenwaage

Die Balkenwaage wird zur vergleichenden Messung von Gewichtskräften und dadurch von Massen verwendet. Sie besteht, wie in Abb. 2.8b gezeigt ist, aus einem dreiarmligen Hebel. Im raumfesten Drehpunkt der Waage kommen zwei Hebel der Länge l , die den Waagebalken der Länge $2l$ bilden, und ein weiterer Hebel für den Zeiger der Waage zusammen. Die Masse von Zeiger und Balken bezeichnen wir als M . Für die Bestimmung von Drehmomenten denken wir uns M im partiellen Schwerpunkt CM vereinigt. Aus Symmetriegründen liegt der Schwerpunkt im Zeiger und sein Abstand von dem Waagebalken sei s . Die Masse von Waagschale und Wägegut fassen wir zu $(m + \Delta m)$ bzw. m zusammen. Im Gleichgewicht muß die Summe der links und rechts drehenden Momente, die vektoriell gesehen aus der Zeichenebene heraus oder in die Zeichenebene hinein zeigen, betragsmäßig gleich groß sein, um insgesamt $\mathbf{T} = 0$ zu liefern. Mit dem Neigungswinkel bzw. Zeigerausschlag φ der Waage ergibt sich daher anhand von Abb. 2.8b

$$(m + \Delta m)g (l \cos \varphi) = mg (l \cos \varphi) + Mg (s \sin \varphi) . \quad (2.2.6)$$

Für kleine Neigungswinkel folgt daraus

$$\varphi \approx \tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{l}{Ms} \Delta m . \quad (2.2.7)$$

Im Gegensatz zum zweiarmigen Hebel gerät der dreiarmige Hebel nicht beim kleinsten von Δm verursachten Übergewicht aus dem Gleichgewicht. Vielmehr ist der Zeigerausschlag φ proportional zum "Übergewicht" Δm auf einer Waagschale. Der Proportionalitätsfaktor wird als *Empfindlichkeit* ϵ der Waage bezeichnet. Es ist

$$\epsilon := \frac{\varphi}{\Delta m} = \frac{l}{M s} . \quad (2.2.8)$$

Eine Waage ist also umso empfindlicher, je stärker sie bei vorgegebenem Übergewicht ausschlägt. Um eine hohe Empfindlichkeit zu erreichen, muß man gemäß Gl.(2.2.8) lange und massearme Waagbalken verwenden, sowie bei der Konstruktion den Abstand s klein halten.⁵

⁵Es soll hier aber darauf hingewiesen, daß sich bei realen Waagen der Waagbalken durchbiegt. Die Empfindlichkeit der Waage hängt dann auch von der Gesamtbelastung, die den Grad der Durchbiegung ausmacht, ab.

2.3 Dynamik des starren Körpers bei fester Drehachse

Der Übergang von der Statik zur Dynamik eines starren Körpers soll in mehreren Stufen vollzogen werden. Dabei braucht die reine Translationsbewegung nicht diskutiert werden, da sie sich nicht von der eines Massenpunktes unterscheidet. Wir beginnen mit der nach der Translation einfachsten Bewegung, der Rotation eines starren Körpers um eine nach Lage und Orientierung fest vorgegebene Drehachse. Mit Hilfe der Bewegungsgleichung $\mathbf{T} = d\mathbf{L}/dt$ berechnen wir zunächst den Drehimpuls, der mit der Drehung um die vorgegebene Achse verknüpft ist, was uns auf den Begriff des *Trägheitsmoments* führen wird. Anschließend werden Arbeit und Energie bei Drehbewegungen diskutiert. Nach der Bestimmung der Trägheitsmomente einfacher Körper wird dann der **Steinersche Satz** abgeleitet. Als Anwendungsbeispiele sollen die *Drehschwingung* und das *Physikalische Pendel* diskutiert werden.

2.3.1 Das Trägheitsmoment

Bei vorgegebener ortsfester Drehachse kann ein Körper als einzige Bewegungsform eine Rotation um diese Achse ausführen. Wählt man als Bezugspunkt P einen beliebigen Punkt auf der Drehachse, so ist dieser Punkt raumfest. Die Bewegungsgleichung ist dann (vergleiche (2.1.14)) durch

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (2.3.1)$$

gegeben. Zur Auswertung der Bewegungsgleichung suchen wir einen geschlossenen Ausdruck für \mathbf{L} . Nach Abb. 2.9 bewegt sich bei der starren Rotation jeder Massenpunkt m bzw. Massenelement dm mit Ortsvektor \mathbf{r} auf einer raumfesten Kreisbahn um die Achse. Die Drehachse geht durch den Mittelpunkt diesen Kreises und steht normal zur Bahnebene. Die Geschwindigkeit \mathbf{v} eines jeden Massenpunktes ist bei gegebener Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ durch

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (2.3.2)$$

gegeben. Die Geschwindigkeit steht also immer senkrecht auf $\boldsymbol{\omega}$ und damit auf der Drehachse. Mit dem Impuls $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ eines Massenpunktes erhält man dessen Drehimpuls $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Wie in Abb. 2.9 gezeigt, zerlegt man den Ortsvektor in eine Komponente \mathbf{r}_{\parallel} und \mathbf{r}_{\perp} parallel und senkrecht zur Drehachse und man erhält

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = (\mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}) \times \mathbf{p} = \mathbf{r}_{\parallel} \times \mathbf{p} + \mathbf{r}_{\perp} \times \mathbf{p} . \quad (2.3.3)$$

Da $\mathbf{v} \parallel \mathbf{p}$ ist $\mathbf{p} \perp \boldsymbol{\omega}$ und man entnimmt Abb. 2.9, daß $(\mathbf{r}_{\parallel} \times \mathbf{p}) \perp \boldsymbol{\omega}$ und $(\mathbf{r}_{\perp} \times \mathbf{p}) \parallel \boldsymbol{\omega}$ ist. Man hat damit eine zu $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$ analoge Komponentenzersetzung für den Drehimpuls gefunden:

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}_{\parallel} + \mathbf{l}_{\perp} \quad \text{mit} \quad \mathbf{l}_{\perp} = \mathbf{r}_{\parallel} \times \mathbf{p} \quad \text{und} \quad \mathbf{l}_{\parallel} = \mathbf{r}_{\perp} \times \mathbf{p} . \quad (2.3.4)$$

Danach hat der Drehimpuls \mathbf{l} interessanterweise sowohl eine Komponente parallel als auch senkrecht zur Drehachse, die zur Folge hat, daß \mathbf{l} nicht parallel zu $\boldsymbol{\omega}$ ist. Bei einer gleichförmigen Rotation ($\boldsymbol{\omega} = \text{const}$) ist zwar wegen $|\mathbf{r}_{\perp}| = \text{const}$ und $|\mathbf{p}| = \text{const}$ auch $|\mathbf{l}_{\parallel}| = \text{const}$, dagegen ist aber $\mathbf{l}_{\perp} \neq \text{const}$.

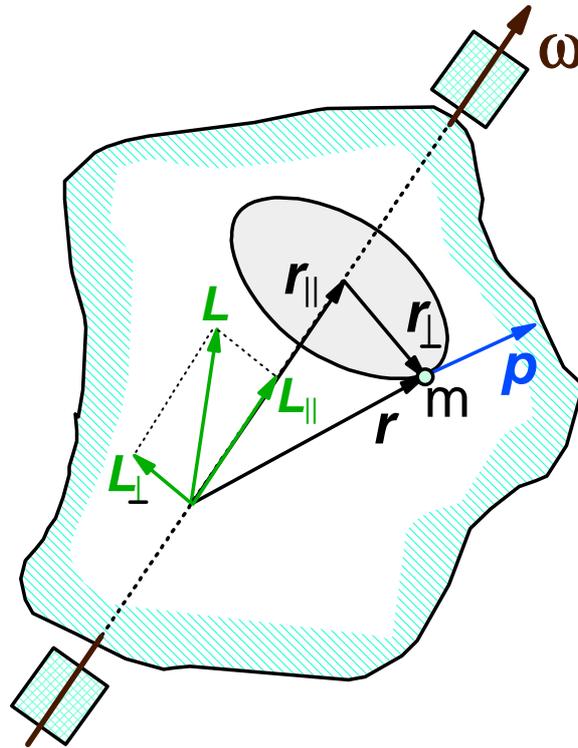


Abbildung 2.9: Der Drehimpuls des starren Körpers bei fester Drehachse.

Die Komponente \mathbf{l}_\perp steht vielmehr antiparallel zu \mathbf{r}_\perp und läuft daher mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Drehachse. Betragsmäßig ist aber $|\mathbf{l}_\perp| = \text{const}$ und im zeitlichen Mittel ist deshalb $\langle \mathbf{l}_\perp \rangle = 0$. Entsprechend ist der gesamte Drehimpuls des umlaufenden Massenpunktes zeitlich konstant.

Durch Summation der Beiträge der einzelnen Massenpunkte erhält man den Gesamtdrehimpuls des starren Körpers zu

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_\parallel + \mathbf{L}_\perp, \quad (2.3.5)$$

wobei wiederum $\mathbf{L}_\parallel = \text{const}$ und $\mathbf{L}_\perp \neq \text{const}$. Das heißt, damit ist auch $\mathbf{L} \neq \text{const}$ und insbesondere ist der Gesamtdrehimpuls nicht parallel zu ω . Dies stellt im Vergleich zur Translation, wo $\mathbf{p}_{\text{cm}} \parallel \mathbf{v}_{\text{cm}}$ ist, eine erhebliche Erschwerung der Diskussion der Drehbewegung dar. Wir werden allerdings im nächsten Abschnitt zeigen, daß es für jeden Körper drei ausgezeichnete Achsen gibt, für die sich die Einzelbeiträge \mathbf{l}_\perp gegenseitig kompensieren und damit $\mathbf{L}_\perp = 0$ und damit $\mathbf{L} = \mathbf{L}_\parallel \parallel \omega$ wird.

Wir diskutieren nun den Zusammenhang zwischen \mathbf{L}_\parallel und ω . Die Integration über alle Massenelemente dm liefert

$$\mathbf{L}_\parallel = \int \mathbf{r}_\perp \times \mathbf{v} \, dm. \quad (2.3.6)$$

Mit $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ und $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\parallel + \mathbf{r}_\perp$ ergibt sich

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp} , \quad (2.3.7)$$

da $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\parallel} = 0$. Nach Einsetzen von (2.3.7) in (2.3.6) ist der Term $\mathbf{r}_{\perp} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp})$ auszuwerten. Anhand von Abb. 2.9 ist klar, daß $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp})$ normal auf der von $\boldsymbol{\omega}$ und \mathbf{r}_{\perp} aufgespannten Ebene steht und $\mathbf{r}_{\perp} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp})$ parallel zu $\boldsymbol{\omega}$ gerichtet ist. Für die Beträge gilt

$$|\mathbf{r}_{\perp} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp})| = |\mathbf{r}_{\perp}| \cdot |(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp})| = |\mathbf{r}_{\perp}| \cdot |\boldsymbol{\omega}| \cdot |\mathbf{r}_{\perp}| = r_{\perp}^2 \omega . \quad (2.3.8)$$

Insgesamt wird dadurch

$$\mathbf{L}_{\parallel} = \int \mathbf{r}_{\perp} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp}) dm = \int r_{\perp}^2 \boldsymbol{\omega} dm . \quad (2.3.9)$$

Da bei der Rotation eines starren Körpers alle Massenelemente die gleiche Winkelgeschwindigkeit besitzen, kann $\boldsymbol{\omega}$ vor das Integral gezogen werden. Mit dem *Trägheitsmoment* I

$$I = \int r_{\perp}^2 dm \quad (2.3.10)$$

des starren Körpers erhält man schließlich

$$\mathbf{L}_{\parallel} = I \boldsymbol{\omega} . \quad (2.3.11)$$

Bei fester Drehachse ist wegen $\mathbf{r}_{\perp} = \text{const}$ das Trägheitsmoment eines starren Körpers ebenfalls eine Konstante, die die Massenverteilung des Körpers um die Drehachse charakterisiert. Ein und derselbe Körper hat aber für verschiedene Drehachsen unterschiedliche Trägheitsmomente. Das Trägheitsmoment übernimmt als Proportionalitätskonstante zwischen Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit bei der Rotationsbewegung die Rolle der trägen Masse als Proportionalitätskonstante zwischen Impuls und Geschwindigkeit bei der Translationsbewegung. Da $I > 0$ ist \mathbf{L}_{\parallel} immer parallel zu $\boldsymbol{\omega}$.

Die Einheit des Trägheitsmoments im SI-System ist

$$[I] = 1 \text{ kg m}^2 . \quad (2.3.12)$$

Analog zu Gl.(2.3.9) kann man für die Drehimpulskomponente \mathbf{L}_{\perp} den Ausdruck

$$\mathbf{L}_{\perp} = \left(- \int r_{\parallel} \mathbf{r}_{\perp} dm \right) \boldsymbol{\omega} \quad (2.3.13)$$

ableiten, der schwieriger zu interpretieren ist, da der Klammerterm zeitlich nicht konstant ist.

Entsprechend zum Drehimpuls zerlegen wir jetzt das am Körper wirksame Drehmoment \mathbf{T} in eine Komponente \mathbf{T}_{\parallel} parallel und \mathbf{T}_{\perp} senkrecht zur Drehachse, so daß

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\parallel} + \mathbf{T}_{\perp} . \quad (2.3.14)$$

Die Komponente \mathbf{T}_{\parallel} kann dabei parallel oder antiparallel zu $\boldsymbol{\omega}$ sein. Aus der Bewegungsgleichung (2.3.1) folgt dann unter der Randbedingung, daß bei fester Achse \mathbf{T}_{\parallel} bzw. \mathbf{T}_{\perp} nur auf \mathbf{L}_{\parallel} bzw. \mathbf{L}_{\perp} einwirken können

$$\mathbf{T}_{\parallel} = \frac{d\mathbf{L}_{\parallel}}{dt} \quad \text{und} \quad \mathbf{T}_{\perp} = \frac{d\mathbf{L}_{\perp}}{dt} \quad (\text{feste Achse}) . \quad (2.3.15)$$

Da bei fester Drehachse ferner I zeitlich konstant ist, erhält man durch Einsetzen von (2.3.11) in (2.3.15)

$$\mathbf{T}_{\parallel} = I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \quad (\text{feste Achse}) . \quad (2.3.16)$$

Bei fester Achse hat der starre Körper nur einen Freiheitsgrad, der kinematisch durch die Komponente der Winkelgeschwindigkeit in Achsenrichtung eindeutig charakterisiert ist. Aus $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\boldsymbol{\omega}}$ folgt wegen $d\hat{\boldsymbol{\omega}}/dt = 0$ (feste Achse) für die Winkelgeschwindigkeit $d\boldsymbol{\omega}/dt = (d\omega/dt)\hat{\boldsymbol{\omega}} + \omega d\hat{\boldsymbol{\omega}}/dt = (d\omega/dt)\hat{\boldsymbol{\omega}}$. Mit $\mathbf{T}_{\parallel} = T_{\parallel} \hat{\boldsymbol{\omega}}$ erhält man also für die Komponenten in $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ -Richtung

$$\boxed{T_{\parallel} = I \frac{d\omega}{dt} \quad (\text{feste Achse}) . \quad (2.3.17)}$$

Diese Gleichung beschreibt, wie das Drehmoment der am Körper angreifenden äußeren Kräfte eine Winkelbeschleunigung $d\omega/dt$ hervorruft. Die Komponente \mathbf{T}_{\perp} hat die Tendenz die Drehachse zu verkippen und kann deshalb bei vorgegebener fester Drehachse nicht zur Geltung kommen. Gl.(2.3.17) stellt somit bereits die volle Bewegungsgleichung dar.

Die in Abb. 2.10 gezeigte Komponentenzerlegung für den Ortsvektor und die angreifende Kraft macht klar, daß zum Drehmoment \mathbf{T}_{\parallel} nur der Term $\mathbf{r}_{\perp} \times \mathbf{F}_{\perp}$ beiträgt. Für alle Massenpunkte zusammengenommen ist $\mathbf{T}_{\parallel} = \int \mathbf{r}_{\perp} \times d\mathbf{F}_{\perp}$. Diese Überlegung macht deutlich, daß ein ideales Drehlager (keine Reibung) wegen $\mathbf{F}_{\perp} = 0$ kein Drehmoment \mathbf{T}_{\parallel} liefert. Dagegen sind im allgemeinen von den Lagern bereitzustellende Zwangskräfte mit $\mathbf{T}_{\perp} \neq 0$ notwendig, um gemäß Gl.(2.3.15) das bei der Rotation auftretende $d\mathbf{L}_{\perp}/dt \neq 0$ zu kompensieren. In der Technik wird dies als "Unwucht" des rotierenden Körpers bezeichnet, die bei entsprechender Stärke zu einer Zerstörung der Lager führen kann.

Für verschwindendes \mathbf{T}_{\parallel} erhält man für einen rotierenden Körper $\mathbf{L}_{\parallel} = \text{const}$, d.h. die Drehimpulskomponente in Drehachsenrichtung bleibt zeitlich konstant und der Körper rotiert gleichförmig mit $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$. Die Bedingung $\mathbf{T}_{\parallel} = 0$ ist außer bei der kräftefreien Bewegung auch für eine Bewegung im Gravitationsfeld erfüllt, falls der Schwerpunkt auf der Drehachse liegt.

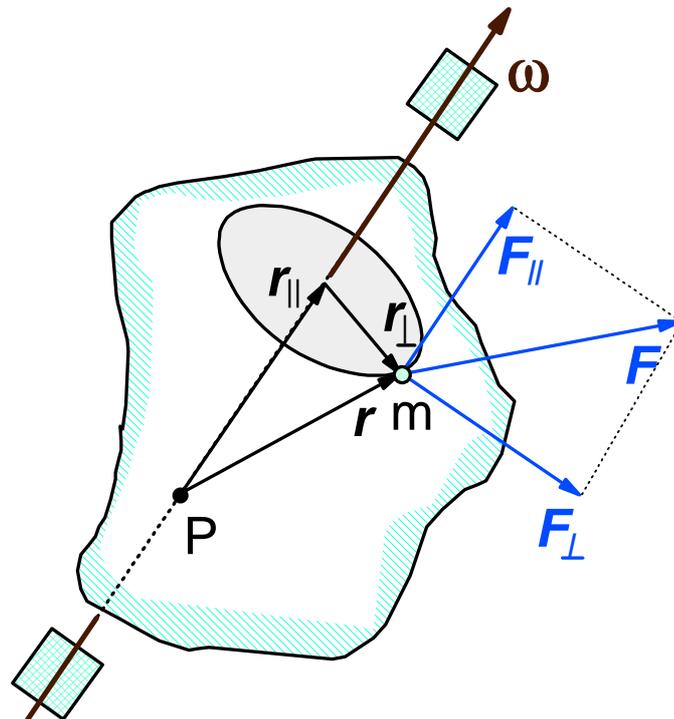


Abbildung 2.10: Zum Drehmoment des starren Körpers bei fester Drehachse.

Die Pirouette

Eine Anwendung der Konstanz von L_{\parallel} bei $T_{\parallel} = 0$ ist die Pirouette. Bei $L_{\parallel} = I\omega$ ist für $I = \text{const}$ auch $\omega = \text{const}$. Eine Eiskunstläuferin ist aber kein starrer Körper, sie kann vielmehr ihr Trägheitsmoment um die vertikale Körperachse variieren. Dies tut sie durch Ausstrecken und Anlegen der Arme. Bei ausgestreckten Armen ist I groß (da r_{\perp} groß), bei an den Körper angeschmiegtten Armen ist I dagegen klein. Bei der Pirouette holt man mit ausgestreckten Armen "Drehschwung", d.h. man erzeugt einen bestimmten Drehimpuls $L_{\parallel} = I\omega$ um die vertikale Körperachse. Da beim Heranziehen der Arme $T_{\parallel} = 0$ ist, bleibt L_{\parallel} erhalten. Die Verringerung von I muß sich deshalb in einer Zunahme von ω manifestieren.

Derselbe Effekt kann auch auf einem Drehschemel demonstriert werden. Eine Versuchsperson sitzt auf dem Drehschemel und hält zwei Gewichte mit gestreckten Armen nach außen. Der Drehschemel wird dann in eine Rotationsbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit versetzt ($L_{\parallel} = \text{const}$). Die Versuchsperson zieht dann die Gewichte an den Körper, wodurch wegen $L_{\parallel} = \text{const}$ das Trägheitsmoment verkleinert und die Winkelgeschwindigkeit erhöht wird. Durch Ausstrecken der Arme kann die Drehgeschwindigkeit wieder auf den alten Wert reduziert werden.

2.3.2 Arbeit und Energie

Mit Hilfe der Definitionsgleichung für die Arbeit, $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ (vergleiche (1.9.8)) wollen wir jetzt die bei der Rotation von den äußeren Kräften geleistete Arbeit berechnen. Für jedes Massenelement steht das Wegelement $d\mathbf{r}$ senkrecht zur Rotationsachse (siehe Abb. 2.11). Zerlegt man die Kraft \mathbf{F} in eine Komponente \mathbf{F}_{\parallel} parallel und \mathbf{F}_{\perp} senkrecht zur Drehachse, so kann deshalb nur die Komponente \mathbf{F}_{\perp} zur Arbeit beitragen: $dW = \mathbf{F}_{\perp} \cdot d\mathbf{r}$. Diese Kraftkomponente gibt aber auch Anlaß zur einem Drehmoment

$\mathbf{T}_{\parallel} = \mathbf{r}_{\perp} \times \mathbf{F}_{\perp}$ in der Drehachse. Man sieht also, daß die Arbeit dW mit dem Drehmoment \mathbf{T}_{\parallel} verknüpft ist.

Um den genauen Zusammenhang zwischen dW und \mathbf{T}_{\parallel} abzuleiten, muß man berücksichtigen, daß für die gesamte am Körper verrichtete Arbeit über alle Beiträge $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ der einzelnen Massenelemente dm aufsummiert werden muß:

$$dW = \sum \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} . \quad (2.3.18)$$

Mit $d\mathbf{s} = d\varphi \times \mathbf{r}$ (vergleiche (1.8.30)), wobei $d\varphi$ der infinitesimale Drehvektor in der Achse ist, erhält man

$$dW = \sum \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \sum \mathbf{F} \cdot (d\varphi \times \mathbf{r}) = - \sum \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r} \times d\varphi) . \quad (2.3.19)$$

Mit der Vektoridentität $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ ergibt sich nach Umformen

$$dW = - \sum \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r} \times d\varphi) = - \sum (\mathbf{F} \times \mathbf{r}) \cdot d\varphi = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \cdot d\varphi . \quad (2.3.20)$$

Der Drehvektor $d\varphi$ ist hierbei im Gegensatz zu $d\mathbf{r}$ für alle Massenelemente gleich und kann deswegen aus der Summe herausgezogen werden, so daß $dW = (\sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F})) \cdot d\varphi$. Der Ausdruck in Klammern ist aber gerade das gesamte am Körper wirksame Drehmoment und man erhält

$$dW = \mathbf{T} \cdot d\varphi . \quad (2.3.21)$$

Mit $\mathbf{T}_{\perp} \cdot d\varphi = 0$ erhält man schließlich den Ausdruck

$$dW = \mathbf{T}_{\parallel} \cdot d\varphi , \quad (2.3.22)$$

der die Verknüpfung von dW und \mathbf{T}_{\parallel} angibt.

Mit $d\varphi/dt = \omega$ erhält man durch Differenzieren von (2.3.22) nach der Zeit die von den Kräften verrichtete Leistung

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{T}_{\parallel} \cdot \omega . \quad (2.3.23)$$

Diese Gleichung entspricht der Beziehung (1.9.15) für die Leistung $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ einer Kraft an einem bewegten Massenpunkt.

Die Arbeit W_{21} , die bei einer Drehung von der Anfangslage φ_1 bis zur Endlage φ_2 an einem Körper verrichtet wird, erhält man durch Integration von Gl.(2.3.22) zu

$$W_{21} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \mathbf{T}_{\parallel} \cdot d\varphi . \quad (2.3.24)$$

Wir wollen nun die kinetische Energie der Rotationsbewegung T_{rot} eines Körpers um eine feste Achse diskutieren. Die *Rotationsenergie* erhält man dabei als die Summe der kinetischen Energien $T = \frac{1}{2}mv^2$ der einzelnen Massenpunkte. Mit $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp}$ und $|\mathbf{v}| = v = |\boldsymbol{\omega}||\mathbf{r}_{\perp}| = \omega r_{\perp}$ und mit der Tatsache, daß ω für alle Massenpunkte identisch ist, ergibt sich

$$T_{\text{rot}} = \sum \frac{1}{2}mv^2 = \sum \frac{1}{2}mr_{\perp}^2\omega^2 = \frac{1}{2} \left(\sum mr_{\perp}^2 \right) \omega^2, \quad (2.3.25)$$

bzw. mit dem Trägheitsmoment $I = \sum mr_{\perp}^2$ aus Gl.(2.3.10)

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2. \quad (2.3.26)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der kinetischen Energie $\frac{1}{2}mv^2$ des Massenpunktes bzw. der Translationsenergie $T_{\text{trans}} = \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2$ der Schwerpunktsbewegung (vergleiche Gl.(2.1.11)), so erkennt man, daß bei der Rotation das Trägheitsmoment I die Rolle der trägen Masse (m bzw. M) und die Winkelgeschwindigkeit ω diejenige der Translationsgeschwindigkeit (v bzw. v_{cm}) übernimmt. Benutzt man die Beziehung $\mathbf{L}_{\parallel} = I\boldsymbol{\omega}$, so läßt sich (2.3.26) wie folgt umschreiben:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\mathbf{L}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (2.3.27)$$

Mit $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\parallel} + \mathbf{L}_{\perp}$ und $\mathbf{L}_{\perp} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ ergibt sich schließlich

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (2.3.28)$$

Man kann aber auch $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{L}_{\parallel}/I$ aus Gl.(2.3.11) in Gl.(2.3.26) substituieren und erhält

$$T_{\text{rot}} = \frac{L_{\parallel}^2}{2I}. \quad (2.3.29)$$

Diese Beziehung korreliert mit dem Ausdruck $T = p_{\text{cm}}^2/2M$ für die kinetische Energie der Translationsbewegung des Schwerpunktes.

Wie bei der Translationsbewegung stammt auch die kinetische Rotationsenergie aus der Arbeit, die am Körper angreifende Kräfte bzw. Drehmomente aufbringen. Dies soll im folgenden kurz gezeigt werden. Bei fester Drehachse ergibt sich mit den obigen Beziehungen

$$dW = \mathbf{T}_{\parallel} \cdot d\boldsymbol{\varphi} = I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \cdot d\boldsymbol{\varphi} = I\boldsymbol{\omega} \cdot d\boldsymbol{\omega}. \quad (2.3.30)$$

Für einen beliebigen Vektor \mathbf{a} mit $|\mathbf{a}| = a$ erhält man durch Anwenden der Produktregel beim Differenzieren eines Skalarprodukts $a^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$: $2a da = \mathbf{a} \cdot d\mathbf{a} + (d\mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} = 2\mathbf{a} \cdot d\mathbf{a}$ oder $\mathbf{a} \cdot d\mathbf{a} = a da$. Daher erhält man für die Arbeit

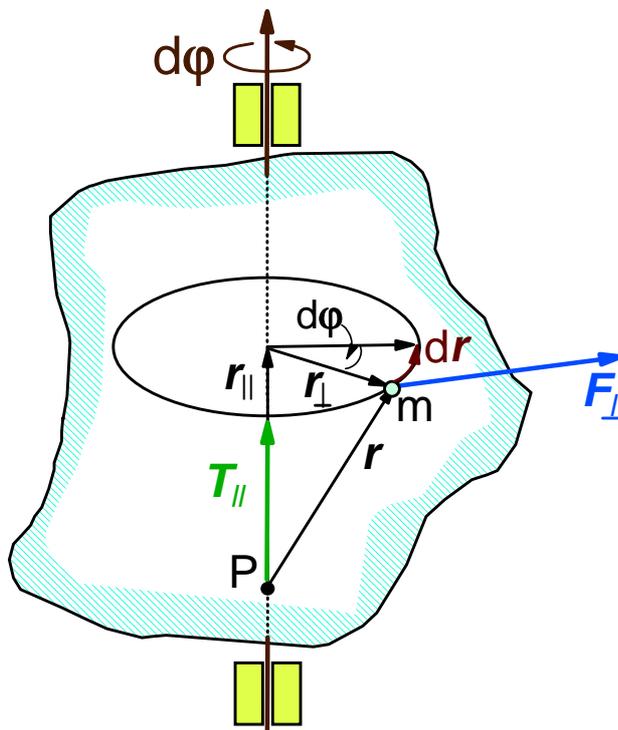


Abbildung 2.11: Zur Arbeit $dW = \mathbf{T}_{\parallel} \cdot d\varphi$ des Drehmoments \mathbf{T}_{\parallel} bei der Rotation eines starren Körpers.

$$dW = I\omega \cdot d\omega = I\omega d\omega = d\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right) \tag{2.3.31}$$

oder

$$dW = dT_{\text{rot}} . \tag{2.3.32}$$

Die von Drehmoment \mathbf{T}_{\parallel} verrichtete Arbeit dW ist also gleich der Änderung dT_{rot} der Rotationsenergie. Die positive Arbeit $dW > 0$ im Falle eines die Rotation antreibenden Moments $\mathbf{T}_{\parallel} \parallel d\varphi$ findet sich als Zunahme der kinetischen Energie wieder.

Wenn das Drehmoment eine eindeutige Funktion des Drehwinkels φ ist, um den ein Körper aus seiner Ruhelage φ_0 ausgelenkt wurde, so ist $\mathbf{T}_{\parallel}(\varphi)$ konservativ und man kann mit

$$E_{\text{pot}}(\varphi) := - \int_{\varphi_0}^{\varphi} \mathbf{T}_{\parallel}(\varphi) \cdot d\varphi \tag{2.3.33}$$

eine potentielle Energie E_{pot} bezüglich der Rotation einführen. Offensichtlich ist

$$dW = -dE_{\text{pot}} , \tag{2.3.34}$$

d.h. eine vom Drehmoment auf den Körper übertragene Arbeit $dW > 0$ entspricht einer Abnahme $dE_{\text{pot}} < 0$ der potentiellen Energie. Durch Kombination von Gl.(2.3.34) mit Gl.(2.3.32) folgt für die Gesamtenergie $E = T_{\text{rot}} + E_{\text{pot}}$ von Gl.(2.1.15) ein Erhaltungssatz

$$\boxed{\begin{array}{l} dE = dT_{\text{rot}} + dE_{\text{pot}} = 0 \quad (2.3.35) \\ \text{oder} \quad E = T_{\text{rot}} + E_{\text{pot}} = \text{const} \quad (2.3.36) \end{array}}$$

Die hier angegebenen Energiebeziehungen stimmen wiederum mit denen der Punktmechanik überein.

Genauso wie man in der Punktmechanik (vergleiche Gl.(1.9)) die Kraft als Gradienten der potentiellen Energie erhält, erhält man auch das Drehmoment durch Differenzieren der potentiellen Energie nach der Winkelkoordinate. Es gilt⁶

$$T_{\parallel} = -\frac{dE_{\text{pot}}}{d\varphi}, \quad (2.3.37)$$

2.3.3 Trägheitsmomente einfacher Körper

Zylindermantel

Am einfachsten läßt sich das Drehmoment eines Massenpunktes m im Abstand R von der Drehachse angeben. Die Definitionsgleichung (2.3.10) liefert

$$I = mR^2 \quad (\text{Massenpunkt}) \quad (2.3.38)$$

Besteht der Körper aus mehreren Massenpunkten, die wie in Abb. 2.12a gezeigt auf einem Zylindermantel mit Radius r liegen, so ergibt sich

$$\begin{array}{l} I = \sum m_i R^2 = \left(\sum m_i \right) R^2 \\ \text{oder} \quad I = MR^2 \quad (\text{Hohlzylinder}) \quad (2.3.39) \end{array}$$

Hierbei ist M die Gesamtmasse des Körpers. Dieser Ausdruck gilt z.B. für kreisförmige Reifen (Fahrradfelge) oder Hohlzylinder bezüglich deren Symmetrieachse.

Homogene Kreisscheibe

Fällt wie in Abb. 2.12b gezeigt die Drehachse mit der Symmetrieachse der Scheibe zusammen, so läßt sich das Trägheitsmoment mit Einführung der Massenbelegung $\sigma = M/A$ der Scheibe durch Integration über konzentrische Ringe mit Innenradius r und Außenradius $r + dr$ und damit der Fläche $dA = 2\pi r dr$ bzw. der Masse $dm = \sigma dA = \sigma 2\pi r dr$ berechnen zu

⁶Da man es bei einer festen Drehachse nur mit einem Freiheitsgrad zu tun hat, muß man nur nach einer Variablen differenzieren.

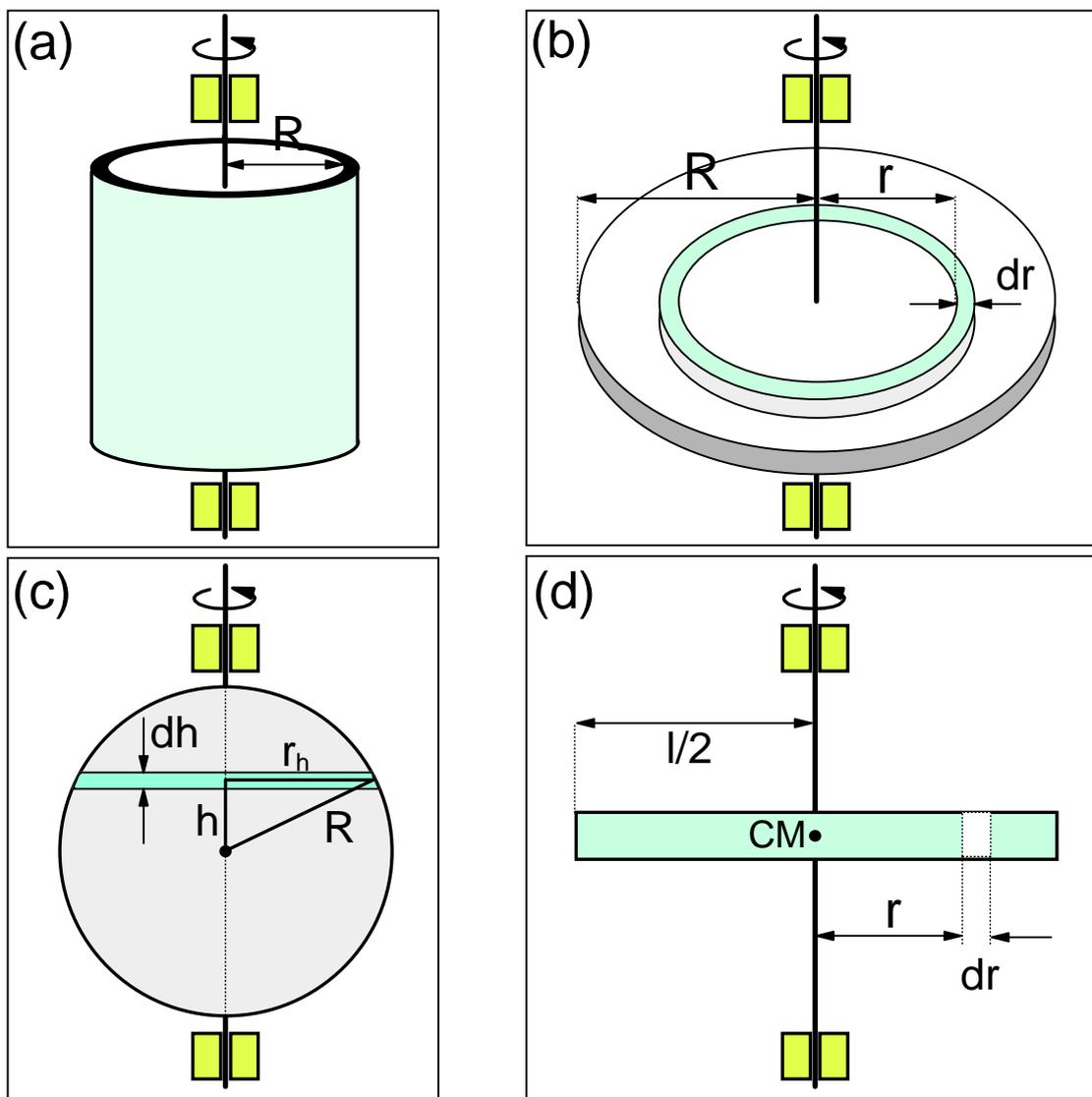


Abbildung 2.12: Zum Trägheitsmoment einfacher homogener Körper: (a) Zylindermantel, (b) Scheibe, (c) Kugel und (d) Stab.

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^R r^2 dm = \int_0^R r^2 \sigma 2\pi r dr = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr = 2\pi\sigma \frac{1}{4} R^4 = \frac{1}{2} (\sigma\pi R^2) R^2 \\
 \text{oder } I &= \frac{1}{2} MR^2 \qquad \qquad \qquad (\text{homogene Scheibe}) \qquad \qquad \qquad (2.3.40)
 \end{aligned}$$

Dies Beziehung gilt auch für einen Vollzylinder. Vergleicht man (2.3.39) und (2.3.40) so sieht man, daß das Trägheitsmoment eines Hohlzylinders mit gleicher Gesamtmasse größer ist als das eines Vollzylinders, da bei Vollzylinder die Gesamtmasse nicht den größtmöglichen Abstand R von der Drehachse hat.

Homogene Vollkugel

Ausgehend von Gl.(2.3.40) läßt sich das Trägheitsmoment einer homogenen Vollkugel mit Radius R und Masse M berechnen, deren Drehachse durch den Kugelmittelpunkt geht. Dazu denken wir uns die Kugel aus flachen Scheiben der Höhe dh und dem Radius r_h aufgebaut. Für eine Scheibe im Abstand h vom Kugelmittelpunkt ist nach Abb. 2.12c $r_h^2 = R^2 - h^2$. Mit der Massendichte ρ der Kugel ist die Masse einer Kreisscheibe gegeben durch $dm = \rho dV = \rho \pi r_h^2 dh$ und deren Beitrag dI zum Gesamtträgheitsmoment nach Gl.(2.3.40) $dI = \frac{1}{2} dm r_h^2 = \frac{\pi}{2} \rho (R^2 - h^2)^2 dh$. Durch Integration über alle Scheiben erhält man für die gesamte Kugel

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{2} \rho \int_{-R}^R (R^2 - h^2)^2 dh = \frac{\pi}{2} \rho \int_{-R}^R (R^4 - 2R^2 h^2 + h^4) dh \\ &= \frac{\pi}{2} \rho \left(R^4 2R - 2R^2 \frac{2R^3}{3} + \frac{2R^5}{5} \right) = \frac{\pi}{2} \rho R^5 \frac{16}{15} . \end{aligned} \quad (2.3.41)$$

Mit $\rho = M / \frac{4\pi}{3} R^3$ ergibt sich schließlich⁷

$$I = \frac{2}{5} MR^2 \quad (\text{homogene Kugel}) . \quad (2.3.42)$$

Homogener Stab

Als letztes soll das Trägheitsmoment eines dünnen Stabes mit Querschnittsfläche A , Länge l und Masse $M = \rho A l$ bestimmt werden. Wie in Abb. 2.12d gezeigt ist, soll die Drehachse durch den Schwerpunkt des Stabes gehen. Man teilt den Stab in Segmente der Länge dr und der Masse $dm = \rho A dr$ auf. Im Abstand r von der Drehachse ist das Trägheitsmoment dI des Segments gegeben durch $dI = r^2 dm = \rho A r^2 dr$. Das Gesamtdrehmoment erhält man durch Integration über die einzelnen Segmente zu

$$\begin{aligned} I &= \rho A \int_{-l/2}^{l/2} r^2 dr = \frac{2}{24} (\rho A l) l^2 \\ \text{oder } I &= \frac{1}{12} M l^2 \quad (\text{homogener Stab}) . \end{aligned} \quad (2.3.43)$$

2.3.4 Der Steinersche Satz

Die im letzten Abschnitt haben wir Ausdrücke für das Trägheitsmoment bei fest vorgegebener Drehachse abgeleitet. Da es im Prinzip unendlich viele mögliche Drehachsen gibt, gibt es auch unendlich viele verschiedene Drehmomente. Der in diesem Abschnitt abgeleitete *Satz von Steiner* gibt eine einfache Relation zwischen dem Trägheitsmoment bezüglich einer Drehachse durch den Körperschwerpunkt und dem Trägheitsmoment bezüglich einer dazu parallelen, aber sonst beliebigen Drehachse.

Zur Ableitung des Satzes von Steiner legt man den Schwerpunkt des starren Körpers in den Ursprung eines raumfesten Koordinatensystems, dessen z -Achse mit der Drehachse durch den Schwerpunkt zusammenfällt (siehe Abb. 2.13). Die zweite Drehachse verläuft parallel zu dieser Achse und schneidet die

⁷Das gleiche Ergebnis erhält man, wenn man Kugelkoordinaten verwendet. Der Abstand eines Massenelements dm von der Drehachse ist dann $r \sin \alpha$ und das Volumenelement ist $dV = (r \sin \alpha d\alpha) \cdot (r d\varphi) \cdot (dr) = r^2 \sin \alpha d\alpha d\varphi dr$. Man erhält damit $I = \rho \int (r^2 \sin^2 \alpha) dV = \rho \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R r^4 \sin^3 \alpha d\alpha d\varphi dr = \frac{8}{15} \rho \pi R^5$.

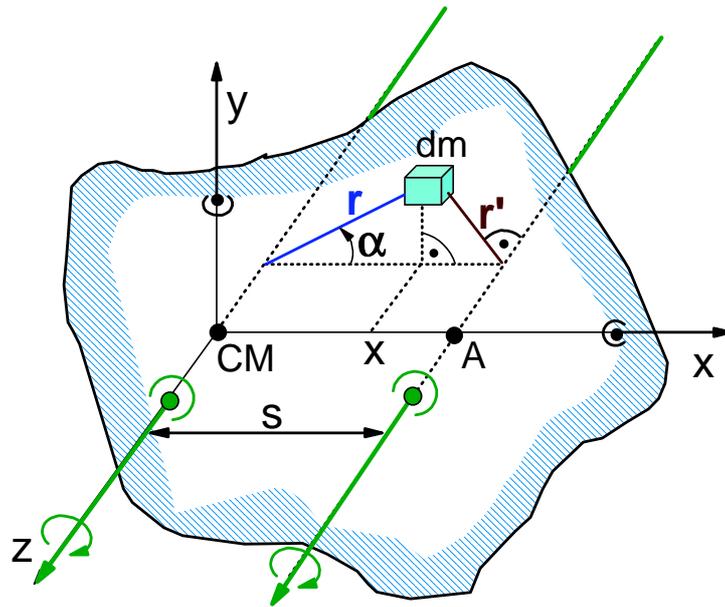


Abbildung 2.13: Zur Ableitung des Steinerschen Satzes.

x -Achse in Punkt A . Der Abstand der beiden Achsen sei s und die Gesamtmasse des Körpers M . Mit den Bezeichnungen aus Abb. 2.13 ergeben sich dann die Trägheitsmomente I_{cm} und I_A bezüglich der beiden Drehachsen zu

$$I_{cm} = \int r^2 dm \quad \text{und} \quad I_A = \int r'^2 dm . \quad (2.3.44)$$

Der Kosinussatz liefert wegen $r \cos \alpha = x$ die Beziehung

$$r'^2 = r^2 + s^2 - 2rs \cos \alpha = r^2 + s^2 - 2sx .$$

Nach Integration über dm erhält man dann

$$\begin{aligned} \int r'^2 dm &= \int r^2 dm + \int s^2 dm - 2s \int x dm \\ \text{bzw.} \quad I_A &= I_{cm} + s^2 \int dm - 2s \int x dm . \end{aligned} \quad (2.3.45)$$

Mit $\int dm = M$ und $\int x dm = x_{cm}M$ und der Tatsache, daß die x -Koordinate des Schwerpunktes $x_{cm} = 0$, da der Schwerpunkt in den Ursprung des Koordinatensystems gelegt wurde, erhält man mit $\int x dm = 0$ den Satz von Steiner:

$$I_A = I_{cm} + Ms^2 . \quad (2.3.46)$$

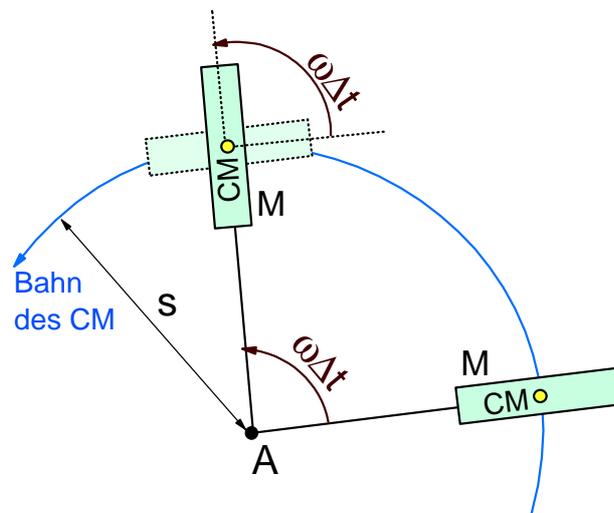


Abbildung 2.14: Die Rotation um A als Überlagerung der Translationsbewegung von CM auf einer Kreisbahn (Revolutionsbewegung) und der Rotationsbewegung um CM .

Der Satz von Steiner besagt, daß es genügt, sich eine Übersicht über alle Trägheitsmomente bezüglich der Drehachsen durch den Körperschwerpunkt zu verschaffen, um daraus dann ohne mühsame Integration Trägheitsmomente bezüglich beliebiger Achsen anzugeben. Da ferner für alle nicht durch der Schwerpunkt gehenden Achsen $Ms^2 > 0$ ist, ist bei vorgegebener Richtung der Drehachse das Trägheitsmoment bezüglich der Schwerpunktsachse minimal.

Der Steinersche Satz steht in engem Zusammenhang mit der Darstellung der Bewegung eines starren Körpers als Überlagerung der Translationsbewegung des Massenmittelpunktes CM und einer Rotationsbewegung um CM . Dies soll anhand des in Abb. 2.14 gezeigten Beispiels veranschaulicht werden, wo ein Körper um eine senkrecht zur Zeichenebene stehende Drehachse A rotieren soll. Die Bahnkurve der Translationsbewegung von CM (unter Beibehaltung der Orientierung im Raum) ist eine Kreisbahn mit Radius s . Diese Bewegungsform nennt man eine "Revolutionsbewegung"⁸. Die Bahngeschwindigkeit von CM ist $v_{cm} = \omega s$. Die Drehachsen der Rotation um A und CM stehen parallel zueinander und man entnimmt Abb. 2.14, daß auch die Winkelgeschwindigkeit ω der Rotation um beide Achsen übereinstimmt. Die kinetische Bewegungsenergie T des Körpers mit A als Bezugspunkt (reine Rotation) ist

$$T = T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_A \omega^2 ,$$

während mit CM als Bezugspunkt unter Benutzung von $T_{\text{trans}} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2$

$$T = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 = \frac{1}{2} M \omega^2 s^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$$

gilt. Da die kinetische Energie eindeutig ist, folgt

⁸Ein typisches Beispiel dafür ist die Gondelbewegung eines Riesenrades, bei der die Gondel Orientierung im Raum beibehält.

$$\frac{1}{2}I_A\omega^2 = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}M\omega^2 s^2$$

oder $I_A = I_{cm} + Ms^2$,

also genau der Steinersche Satz.

Anwendungsbeispiel zum Steinerschen Satz:

Als Anwendungsbeispiel zum Steinerschen Satz soll das Trägheitsmoment eines Stabes der Länge l und der Masse M berechnet werden, der um das Stabende rotiert und zwar um eine Drehachse, die senkrecht zur Stabrichtung steht. Mit Gl.(2.3.43) und dem Steinerschen Satz erhält man

$$I = I_{cm} + m \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}Ml^2 + \frac{1}{4}Ml^2$$

oder $I = \frac{1}{3}Ml^2$.

2.3.5 Drehschwingungen

Eine spezielle Bewegungsform eines an einer festen Achse drehbar gelagerten starren Körpers ist die *Drehschwingung*. Dabei pendelt der Drehwinkel $\varphi(t)$ periodisch um seine Ruhelage φ_0 .

Drehpendel

Bei *Drehpendel* läuft die Drehachse durch den Massenmittelpunkt eines starren Körpers und die Gleichgewichtslage wird durch eine am Körper bzw. der Drehachse befestigte Spiralfeder definiert (siehe Abb. 2.15). Greift am Körper ein äußeres Drehmoment $\mathbf{T}_F = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ an, so wird der Körper um $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$ aus seiner Ruhelage ausgelenkt. Hierbei entsteht aufgrund der Verdrillung der Spiralfeder ein rücktreibendes elastisches Moment \mathbf{T}_{el} , so daß in der neuen Gleichgewichtslage $\mathbf{T} = \mathbf{T}_F + \mathbf{T}_{el} = 0$ gilt. Zur Beschreibung der Schwingung wählt man einen festen Basisvektor $\hat{\mathbf{a}}$ in der Drehachse und setzt willkürlich $\varphi_0 = 0$, so daß $\varphi = \varphi\hat{\mathbf{a}}$ und $\mathbf{T}_{el} = T_{el}\hat{\mathbf{a}}$. Erfüllt das rücktreibende Moment die Bedingung

$$\mathbf{T}_{el} = -T_r\varphi \quad \text{oder} \quad T_{el} = -T_r\varphi, \quad (2.3.47)$$

so nennt man \mathbf{T}_{el} ein *harmonisches Drehmoment*. Die Größe T_r heißt *Richt- oder Direktionsmoment* und entspricht der Federkonstanten k im **Hookeschen** Gesetz $\mathbf{F} = -k\mathbf{s}$. Die potentielle Energie einer um den Winkel φ aus dem Gleichgewicht verdrehten Spiralfeder folgt aus Gl.(2.3.33) zu

$$E_{\text{pot}} = - \int_{\varphi_0}^{\varphi} \mathbf{T}_{el} \cdot d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi} T_r\varphi d\varphi = T_r \int_{\varphi_0}^{\varphi} \varphi d\varphi$$

oder $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}T_r\varphi^2$.

(2.3.48)

Diese Beziehung ist das Analogon zum Ausdruck $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}kx^2$ für die Energie einer Schraubenfeder.

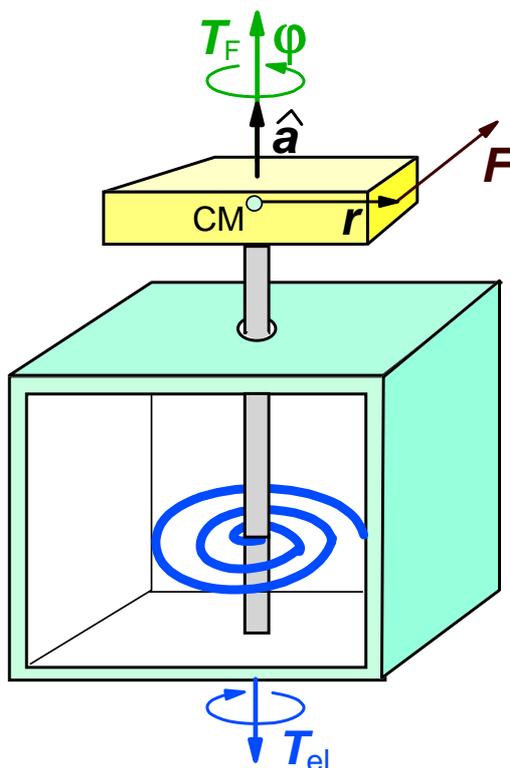


Abbildung 2.15: Das Drehpendel.

Eine einmal aus der Gleichgewichtslage ausgelenkter und dann losgelassener Körper vollführt unter der Wirkung des rücktreibenden Torsionsmoments eine harmonische Drehschwingung. Setzt man in die Bewegungsgleichung (2.3.16) für \mathbf{T}_{\parallel} das elastische Drehmoment \mathbf{T}_{el} ein und berücksichtigt noch, daß $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{a}} = (d\varphi/dt)\hat{\mathbf{a}}$ und damit $d\varphi/dt = \omega$, so erhält man

$$\begin{aligned} T_{\parallel} &= I \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow T_{\text{el}} = I \frac{d^2\varphi}{dt^2} \Rightarrow -T_r\varphi = I \frac{d^2\varphi}{dt^2} \\ \text{oder} \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= -\frac{T_r}{I}\varphi . \end{aligned} \quad (2.3.49)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist die harmonische Schwingung (dies ist vom Masse-Feder Pendel schon bekannt) $\varphi(t) = \hat{\varphi} \sin(\omega t + \varphi_0)$ mit der Winkelamplitude $\hat{\varphi}$, der Kreisfrequenz ω und der Phasenverschiebung φ_0 .⁹

Mit der gleichen Rechnung wie für das Masse-Feder Pendel in Abschnitt 1.6.2 erhält man für die Kreisfrequenz ω bzw. die Schwingungsdauer T

$$\omega = \sqrt{\frac{T_r}{I}} \quad \text{bzw.} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{T_r}} . \quad (2.3.50)$$

Diese Gleichungen sind analog zu den Gln.(1.6.34) und (1.6.35) für das Masse-Feder Pendel.

⁹Es ist hier darauf zu achten, daß die konstante Kreisfrequenz ω der harmonischen Schwingung nicht mit der zeitlich variierenden Winkelgeschwindigkeit $\omega(t) = d\varphi/dt$ des schwingenden Körpers verwechselt wird.

Bestimmung von Trägheitsmomenten mit dem Drehpendel:

Da die Schwingungsdauer eines Drehpendels einfach zu messen ist, wird das Drehpendel häufig zur Bestimmung von Trägheitsmomenten verwendet. Hierzu wird der zu untersuchende Körper auf einer Drehachse montiert, die über eine Feder ein bekanntes Richtmoment T_r erhält. Falls der Schwerpunkt des starren Körpers bei dieser Bestimmung nicht auf der Drehachse liegt, so ist darauf zu achten, daß die Drehachse vertikal steht, um ein Drehmoment der Gravitationskraft in der Drehachse zu vermeiden.

Das physikalische Pendel

Beim *physikalischen Pendel* benutzt man das von der Gravitationskraft bereitgestellte Drehmoment zur Anregung einer Schwingung. Ein physikalisches Pendel ist dabei ein beliebig geformter starrer Körper, der um eine raumfeste Achse A schwingen kann (siehe Abb. 2.16a). Wir betrachten nur den Fall, daß die Drehachse (diese wird als masselos angenommen) senkrecht zur Gravitationskraft steht. Das Drehmoment \mathbf{T}_G der Gravitationskraft $\mathbf{F}_G = M\mathbf{g}$ ist mit dem Ortsvektor \mathbf{r}_{cm} des Schwerpunkts CM nach Gl.(2.1.18) $\mathbf{T}_G = \mathbf{r}_{cm} \times M\mathbf{g}$ und die in der Achse liegende Komponente $\mathbf{T}_{||}$ ist $\mathbf{T}_{||} = \mathbf{r}_{cm,\perp} \times M\mathbf{g}$. Dabei ist in der Zerlegung $\mathbf{r}_{cm} = \mathbf{r}_{cm,||} + \mathbf{r}_{cm,\perp}$ der Vektor $\mathbf{r}_{cm,\perp}$ nach Abb. 2.16a die zur Achse senkrecht stehende Komponente von \mathbf{r}_{cm} . Der Schwerpunkt CM läuft auf einem Kreis mit Radius $|\mathbf{r}_{cm,\perp}| = s$ um die Achse um. Wählt man wiederum einen festen Basisvektor $\hat{\mathbf{a}}$ in der Drehachse, so ist $\varphi = \varphi\hat{\mathbf{a}}$ und $\mathbf{T}_{||} = T_{||}\hat{\mathbf{a}}$. Für den Betrag von $\mathbf{T}_{||}$ gilt

$$|\mathbf{T}_{||}| = |\mathbf{r}_{cm,\perp}| \cdot |M\mathbf{g}| \cdot \sin(\mathbf{r}_{cm,\perp}, M\mathbf{g}) = Mgs \sin \varphi . \quad (2.3.51)$$

Man entnimmt Abb. 2.16a, daß das Moment rücktreibend ist, d.h. $\mathbf{T}_{||}$ und φ stehen antiparallel zueinander. Man erhält somit

$$T_{||} = -Mgs \sin \varphi . \quad (2.3.52)$$

Für kleine Auslenkungswinkel erhält man in der *harmonischen Näherung* ($\sin \varphi \simeq \varphi$) $T_{||} = -Mgs \varphi$ und das Direktionsmoment T_r des physikalischen Pendel ergibt sich zu

$$T_r = Mgs . \quad (2.3.53)$$

Damit ergibt sich die Kreisfrequenz ω und die Schwingungsdauer T des physikalischen Pendels zu

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgs}{I}} \quad \text{bzw.} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgs}} . \quad (2.3.54)$$

Diese Beziehungen gelten nur für kleine Schwingungsamplituden $\hat{\varphi}$. Für größere Auslenkungswinkel wird das rücktreibende Moment kleiner als ein harmonisches Moment und die Schwingungsdauer damit länger. Man sieht insgesamt, daß sich das physikalische Pendel wie ein mathematisches Pendel mit Fadenlänge s verhält, wenn man sich die Gesamtmasse M im Massenmittelpunkt CM konzentriert denkt.

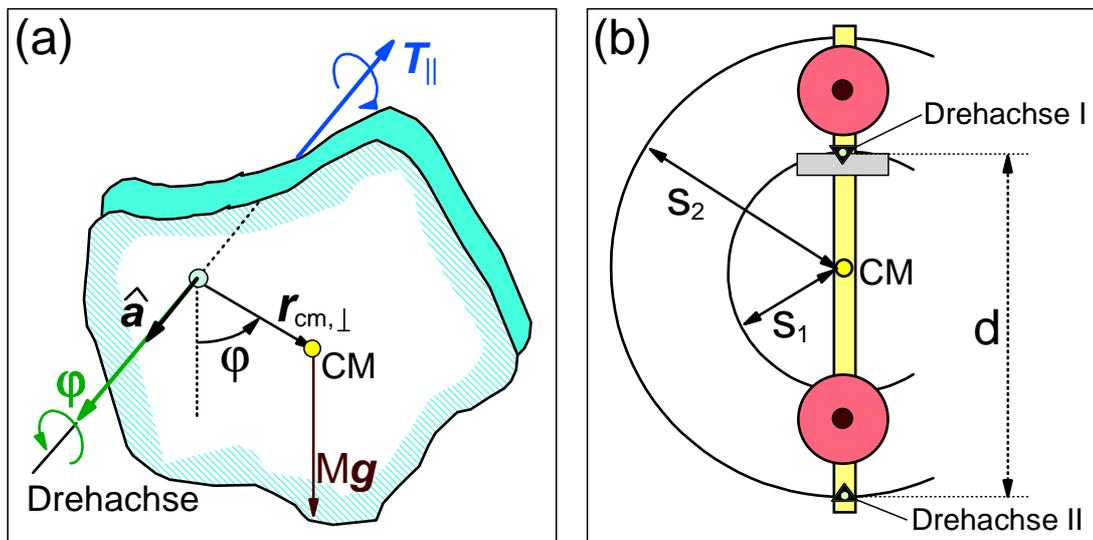


Abbildung 2.16: Das physikalische Pendel (a) und das Reversionspendel (b).

Das Reversionspendel

Das *Reversionspendel* ist eine bestimmte Ausführungsform des physikalischen Pendels, das zur Präzisionsmessung der Fallbeschleunigung verwendet werden kann. Es sollen zunächst die theoretischen Grundlagen diskutiert werden. Berücksichtigt man in dem Ausdruck $\omega^2 = Mgs/I$ den Steiner'schen Satz für das Trägheitsmoment I , so erhält man $\omega^2 = Mgs/(I_{\text{cm}} + Ms^2)$. Für festgehaltenes ω ist dies eine quadratische Gleichung in s , nämlich $\omega^2 Ms^2 - Mgs + \omega^2 I_{\text{cm}} = 0$, mit zwei Lösungen s_1 und s_2 . Mit dem Schwerpunkt CM als Mittelpunkt gibt es deshalb zwei konzentrische Kreise mit Radien s_1 und s_2 , die den geometrischen Ort für Drehachsen mit konstantem ω^2 angeben (siehe Abb. 2.16b). Für die $(s_1 + s_2)$ findet man

$$l_{\text{red}} := s_1 + s_2 = \frac{g}{\omega^2} . \quad (2.3.55)$$

Man nennt hierbei l_{red} die reduzierte Pendellänge, da ein mathematisches Pendel mit der Fadenlänge l_{red} gerade die vorgegebene Kreisfrequenz ω mit $\omega^2 = g/l$ hätte.

Das Reversionspendel ist nun ein physikalisches Pendel, bei dem zwei parallele Drehachsen mit festem Abstand d vorgesehen sind. Dabei liegt der Schwerpunkt CM erstens in der von den beiden Drehachsen aufgespannten Ebene und zweitens zwischen den beiden Achsen. Mit längs des Pendels verschiebbaren Zusatzmassen läßt sich die Position des Schwerpunktes so einstellen, daß die Schwingungsdauer für Schwingungen um beide Drehachsen exakt gleich groß werden. In diesem Fall ist $d = s_1 + s_2 = l_{\text{red}} = g/\omega^2$. Durch eine sehr geaue Abstimmung der Frequenzen und genaue Bestimmung von d läßt sich damit die Erdbeschleunigung g exakt bestimmen.

2.3.6 Vergleich von Rotations- und Translationsbewegung

Für die Beschreibung von Drehbewegungen eines starren Körpers um eine feste Achse ergeben sich formal ähnliche Ausdrücke wie für die Translationsbewegung eines Massenpunktes.¹⁰ In folgender Tabelle werden die entsprechenden Ausdrücke der Translations- und Rotationsbewegung einander gegenübergestellt.

Translationsbewegung des Massenpunktes		Rotationsbewegung des starren Körpers bei fester Drehachse	
Weg	ds	Winkel	$d\varphi$
Geschwindigkeit	$\mathbf{v} = ds/dt$	Winkelgeschwindigkeit	$\boldsymbol{\omega} = d\varphi/dt$
Beschleunigung	$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{s}/dt^2$	Winkelbeschleunigung	$\boldsymbol{\beta} = d\boldsymbol{\omega}/dt = d^2\varphi/dt^2$
Träge Masse	m	Trägheitsmoment	I
Kraft	$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt = m\mathbf{a}$	Drehmoment	$\mathbf{T} = d\mathbf{L}/dt = I\boldsymbol{\beta}$
Impuls	$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$	Drehimpuls	$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$
Kinetische Energie	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2m}p^2$	Rotationsenergie	$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2I}L^2$
Arbeit	$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$	Arbeit	$dW = \mathbf{T} \cdot d\varphi$
lineare Schwingung	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	Drehschwingung	$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{T_r}}$

Tabelle 2.1: Gegenüberstellung der entsprechenden Ausdrücke für die Translations- und Rotationsbewegung.

Zwischen Translations- und Rotationsgrößen bestehen folgende Verknüpfungen:

$$\begin{aligned}
 ds &= d\varphi \times r \\
 \mathbf{v} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \\
 I &= \int r^2 dm \\
 \mathbf{T} &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} \\
 \mathbf{L} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} .
 \end{aligned}$$

¹⁰Hierbei ist anzumerken, daß die mit dem Bezugspunkt CM beschriebene Translationsbewegung eines starren Körpers äquivalent zur derjenigen seines punktförmigen Schwerpunktes ist. D.h. der starre Körper bewegt sich so, wie wenn die Gesamtkraft am Massenmittelpunkt, an dem die Gesamtmasse vereinigt ist, angreifen würde.

2.4 Dynamik des starren Körpers bei freier Drehachse

Beim starren Körper mit freier Drehachse ist weder Betrag noch Richtung der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ der Rotationsbewegung festgelegt. Dieser Fall liegt vor, wenn die Bewegung eines Körpers im Raum keinerlei Zwangsbedingungen unterworfen ist, oder aber höchstens ein Körperpunkt Zwangsbedingungen genügt. Letzterer Fall liegt beim Kreisel vor, wo ein Körperpunkt raumfest gehalten wird. Die Berechnung von Drehimpuls und kinetischer Energie führt auf den *Tägheitstensor*, den wir als *Trägheitsellipsoid* darstellen und zu veranschaulichen suchen. Als Anwendungsbeispiele betrachten wir einfache Kreiselprobleme (*Nutation* und *Präzession*) und die Stabilität von freien Drehachsen. Als Beispiel einer kombinierten Translations- und Rotationsbewegung werden Abrollbewegungen diskutiert.

2.4.1 Das Trägheitsellipsoid

Für einen einzelnen Massenpunkt galt $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}_\varphi)$ (vergleiche Gl.(1.11.11)). Wegen $\mathbf{v}_\varphi = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ und $v_\varphi = \omega r$ war hier immer $\mathbf{L} \parallel \boldsymbol{\omega}$ und es galt $L = mr^2\omega$, d.h. Drehimpuls und Drehachse stehen immer parallel zueinander. Wie bereits im letzten Abschnitt erläutert wurde, besitzt ein starrer Körper sowohl eine nichtverschwindende Drehimpulskomponente \mathbf{L}_\parallel parallel und \mathbf{L}_\perp senkrecht zu $\boldsymbol{\omega}$, d.h. es gilt jetzt nicht mehr $\mathbf{L} \parallel \boldsymbol{\omega}$.¹¹ Nach den in Abschnitt 2.1.1 gemachten Überlegungen ist es zweckmäßig, bei einem frei beweglichen Körper den Massenmittelpunkt CM als Bezugspunkt zu wählen, bei einem in einem Punkt festgehaltenen Körper ist es dagegen sinnvoller, diesen als Bezugspunkt P für die Beschreibung der Rotationsbewegung zu wählen. Im folgenden soll diese Vorschrift immer benutzt werden. Die Bewegungsgleichung der Rotation nimmt in diesem Fall die einfache Form

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (2.4.1)$$

an. Die Rotation wird ihrerseits durch eine momentane Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ charakterisiert, die i.a. weder raum- noch körperfest ist. Man steht also vor der Aufgabe, die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ der Rotation mit dem Drehimpuls \mathbf{L} der Bewegungsgleichung in Beziehung zu setzen.

Zur Berechnung von \mathbf{L} benötigt man die Geschwindigkeit \mathbf{v} der Rotation um die Drehachse $\boldsymbol{\omega}$. Sie ist mit dem vom Bezugspunkt P anzugebenden Ortsvektor \mathbf{r} durch $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ gegeben. Jedes einzelne Massenelement des Körper trägt den Impuls $d\mathbf{p} = \mathbf{v}dm$, woraus sich mit $\mathbf{L} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ durch eine Integration über alle Massenelemente der Drehimpuls $\mathbf{L} = \int (\mathbf{r} \times d\mathbf{p}) = \int (\mathbf{r} \times \mathbf{v})dm$ ergibt. Mit $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ erhält man schließlich

$$\mathbf{L} = \int (\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}))dm \quad (2.4.2)$$

Diese Gleichung gibt im Prinzip schon die gesuchte Verknüpfung zwischen \mathbf{L} und $\boldsymbol{\omega}$ an. Das Vektorprodukt läßt sich mit der Vektoridentität $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ weiter umformen und man erhält folgenden allgemeinen Ausdruck für \mathbf{L}

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\omega} \int r^2 dm - \int \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) dm \quad (2.4.3)$$

¹¹Wir werden später sehen, daß der Drehimpuls \mathbf{L} nur dann parallel zu $\boldsymbol{\omega}$ ist, wenn die Rotationsachse eine Symmetrieachse des starren Körpers darstellt.

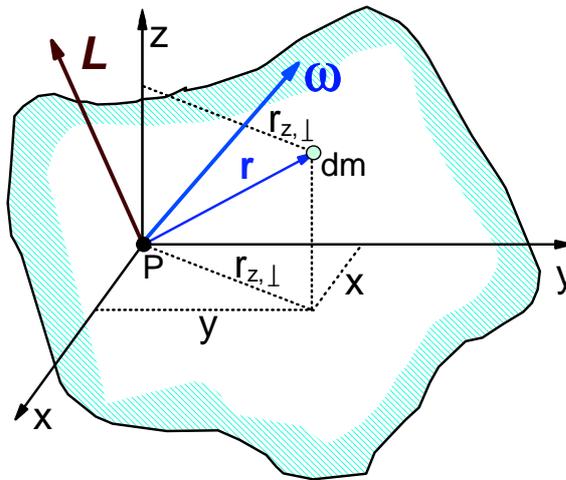


Abbildung 2.17: Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit eines rotierenden Körpers.

Man erkennt einfach, daß der erste Term auf der rechten Seite eine Komponente von \mathbf{L} in $\boldsymbol{\omega}$ -Richtung angibt. Die Richtung des Vektors im zweiten Term ist nicht so einfach zu sehen, da man über alle Ortsvektoren \mathbf{r} gewichtet mit $(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})$ aufsummieren muß. Zur weiteren Auswertung benutzen wir ein im Bezugspunkt P raumfestes, bzw. von $P = CM$ translatorisch mitgeführtes kartesisches Koordinatensystem (siehe hierzu Abb. 2.17). Schreibt man Gl.(2.4.3) in Komponenten, so ergibt sich

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Man erkennt aus diesem Ausdruck, daß der Grund dafür, daß \mathbf{L} und $\boldsymbol{\omega}$ nicht mehr parallel zueinander verlaufen, die Tatsache ist, daß bei beliebiger Rotationsachse das Trägheitsmoment I kein Skalar, sondern ein Tensor ist. Die neun *Trägheitskoeffizienten* des Trägheitstensors faßt man in Form einer quadratischen Matrix zusammen:

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.4.5)$$

Die Komponenten I_{jk} mit $j = k (j, k = x, y, z)$ heißen *Trägheitsmomente* und sind gegeben durch

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm \quad I_{yy} = \int (x^2 + z^2) dm \quad I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm \quad (2.4.6)$$

Die Bezeichnung Trägheitsmoment kommt also daher, daß in den Integralen die Klammerausdrücke jeweils den senkrechten Abstand des Massenelements von der x , y und z -Achse angeben. Daher ist z.B. I_{zz} mit dem Trägheitsmoment I um eine feste z -Achse identisch. Die Komponenten I_{jk} für $j \neq k$ nennt

man dagegen *Trägheitsprodukte* oder *Deviationsmomente*. Sie sind verantwortlich dafür, daß \mathbf{L} und $\boldsymbol{\omega}$ im allgemeinen nicht parallel zueinander stehen. Sie sind gegeben durch

$$\begin{aligned} I_{xy} &= - \int xy \, dm & I_{xz} &= - \int xz \, dm \\ I_{yx} &= - \int yx \, dm & I_{yz} &= - \int yz \, dm \\ I_{zx} &= - \int zx \, dm & I_{zy} &= - \int zy \, dm . \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Die Komponenten des Drehimpulses ergeben sich mit Hilfe der Komponenten des Trägheitstensors zu

$$\begin{aligned} L_x &= \sum_k I_{xk} \omega_k \\ L_y &= \sum_k I_{yk} \omega_k \quad (k = x, y, z) \\ L_z &= \sum_k I_{zk} \omega_k . \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Gemäß den Regeln der Matrizenmultiplikation erhält man die kompakte Schreibweise

$$\boxed{\begin{aligned} \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \\ \text{bzw.} \quad \mathbf{L} &= \tilde{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega} . \end{aligned}} \quad (2.4.9)$$

Mit dem Ausdruck $\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}$ hat man eine Beziehung zwischen der die Bewegung charakterisierenden kinematischen Größe $\boldsymbol{\omega}$ und der den Körper charakterisierenden Größe $\tilde{\mathbf{I}}$ hergestellt und damit sein Ziel erreicht. Der Ausdruck ist analog zu der Beziehung $\mathbf{p}_{\text{cm}} = M \mathbf{v}_{\text{cm}}$. Sowohl $\mathbf{L}(\boldsymbol{\omega})$ als auch $\mathbf{p}_{\text{cm}}(\mathbf{v}_{\text{cm}})$ sind lineare Vektorfunktionen. Der wesentliche Unterschied besteht darin, daß M ein Skalar, $\tilde{\mathbf{I}}$ dagegen eine tensorielle Größe ist, was insbesondere zu $\mathbf{p}_{\text{cm}} \parallel \mathbf{v}_{\text{cm}}$ aber $\mathbf{L} \nparallel \boldsymbol{\omega}$ führt.

Es sei ferner darauf hingewiesen, daß M im Rahmen der nichtrelativistischen klassischen Mechanik eine von der Bewegung und dem Koordinatensystem unabhängige Konstante ist. Die Tensorkomponenten I_k bei der Rotation des Körpers sind dagegen zeitabhängig und ändern sich mit der Orientierung eines Körpers relativ zu einem raumfesten Bezugssystem. Selbst bei einer starren Rotation um eine raum- und körperfeste Drehachse, z.B. die z -Achse, ist zwar $I_{zz} = \text{const}$ aber i.a. $I_{xz} \neq \text{const}$ und $I_{yz} \neq \text{const}$, da die Komponenten $x = x(t)$ und $y = y(t)$ in den Ausdrücken für I_{xz} und I_{yz} Funktionen der Zeit und nur r und z zeitlich konstant sind.

Wir wollen nun eine physikalische Deutung des Trägheitstensors anhand der Betrachtung der Rotationsenergie T_{rot} machen. Mit $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ erhält man

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \int v^2 \, dm = \frac{1}{2} \int \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, dm = \frac{1}{2} \int (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \, dm . \quad (2.4.10)$$

Zur Auswertung dieses Integrals benutzt man die Vektoridentität $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$, womit sich

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \int (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) dm - \frac{1}{2} \int (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) dm \\ \text{oder} \quad T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \int \omega^2 r^2 dm - \frac{1}{2} \int (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})^2 dm \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

ergibt. Diesen Ausdruck kann man auch durch skalare Multiplikation von \mathbf{L} aus Gl.(2.4.3) mit $\boldsymbol{\omega}/2$ erhalten. Es ist also

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} . \quad (2.4.12)$$

Diese Beziehung wurde bereits für die Rotation um eine starre Drehachse abgeleitet (vergleiche Abschnitt 2.3, Gl.(2.3.28)). Diese Beziehung ist wiederum analog zum Ausdruck $E_{\text{trans}} = \frac{1}{2} \mathbf{p}_{\text{cm}} \cdot \mathbf{v}_{\text{cm}}$ für die Translationsbewegung.

Schreibt man Gl.(2.4.12) in Komponenten, so erhält man

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} I_{xx} \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_{yy} \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_{zz} \omega_z^2 \\ &\quad + I_{xy} \omega_x \omega_y + I_{yz} \omega_y \omega_z + I_{zx} \omega_z \omega_x . \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

Diese Beziehung ist einer interessanten Interpretation zugänglich. Wie in der analytischen Geometrie gezeigt wird, stellt Gl.(2.4.13) für $T_{\text{rot}} = \text{const}$ und $I_{jk} = \text{const}$ eine Fläche 2. Grades (Hyperbel, Parabel, Ellipsoid) im $\boldsymbol{\omega}$ -Raum dar. Man kann zeigen, daß es sich in diesem Fall nur um ein Ellipsoid handeln kann. Dieses Ellipsoid läßt sich durch Einführen eines geeigneten Streckungsfaktors in eine normierte Form bringen, die als *Trägheitsellipsoid* bezeichnet wird. Dazu setzt man $\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}$ in den Ausdruck für T_{rot} ein und erhält

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \tilde{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega} . \quad (2.4.14)$$

Mit dem Einheitsvektor $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ in $\boldsymbol{\omega}$ -Richtung erhält man schließlich

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \text{mit} \quad I = \hat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \tilde{\mathbf{I}} \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}} . \quad (2.4.15)$$

Man sieht, daß man denselben Ausdruck für T_{rot} (vergleiche Gl.(2.3.26)) auch bei freier Drehachse erhält, wenn man nur I als das "momentane" Trägheitsmoment um die momentane Drehachse auffaßt. Bemerkenswert an dem Ausdruck $I = \hat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \tilde{\mathbf{I}} \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}}$ ist, daß man bei bekanntem Trägheitstensor die Trägheitsmomente I um alle beliebigen Drehachsen angeben kann. Man benötigt also für einen noch so kompliziert geformten Körper nur die 6 unabhängigen Komponenten I_{jk} des symmetrischen Tensors $\tilde{\mathbf{I}}$ zu kennen. Ist der Trägheitstensor für den Massenmittelpunkt bekannt, so kann man mit Hilfe des Satzes von Steiner eine vollständige Übersicht über alle Trägheitsmomente eines Körpers gewinnen.

Um schließlich zum Trägheitsellipsoid zu kommen, führt man den Vektor

$$\boldsymbol{\rho} := \frac{\hat{\boldsymbol{\omega}}}{\sqrt{I}} = \frac{1}{\sqrt{I}} \boldsymbol{\omega} \quad (2.4.16)$$

mit den kartesischen Koordinaten

$$(\rho_x, \rho_y, \rho_z) = \frac{1}{\sqrt{I}} \left(\frac{\omega_x}{\omega}, \frac{\omega_y}{\omega}, \frac{\omega_z}{\omega} \right) = \sqrt{I} (\hat{\omega}_x, \hat{\omega}_y, \hat{\omega}_z) \quad (2.4.17)$$

ein, wobei I das Trägheitsmoment um die jeweilige $\boldsymbol{\omega}$ -Achse ist. Nach Division von Gl.(2.4.13) durch $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2$ erhält man

$$1 = I_{xx}\rho_x^2 + I_{yy}\rho_y^2 + I_{zz}\rho_z^2 + 2I_{xy}\rho_x\rho_y + 2I_{yz}\rho_y\rho_z + 2I_{zx}\rho_z\rho_x, \quad (2.4.18)$$

d.h. die Endpunkte der Vektoren $\boldsymbol{\rho}$ in Richtung von $\boldsymbol{\omega}$ mit der Länge $1/\sqrt{I}$ liegen auf einem normierten Ellipsoid, dem sogenannten *Trägheitsellipsoid*

Zur experimentellen Bestimmung des Trägheitsellipsoids mißt man für verschiedene Drehachsen die zugehörigen Trägheitsmomente I . Trägt man vom Schwerpunkt CM aus in Richtung der jeweiligen Drehachse, d.h. in Richtung von $\boldsymbol{\omega}$, die reziproke Wurzel des gemessenen Trägheitsmomentes $\rho = 1/\sqrt{I}$ auf, so liegen die Endpunkte dieser Strecken auf dem Trägheitsellipsoid (siehe Abb. 2.18). Für die vollständige Konstruktion des Trägheitsellipsoids sind 6 unabhängige Messungen für die 6 unabhängigen Komponenten des Trägheitstensors notwendig. Ist das Ellipsoid bestimmt, so kann für eine beliebige Drehachsenrichtung $\boldsymbol{\omega}$ das zugehörige Trägheitsmoment als $1/\sqrt{I}$ an dem vom Ellipsoid begrenzten Achsenabschnitt abgelesen werden.

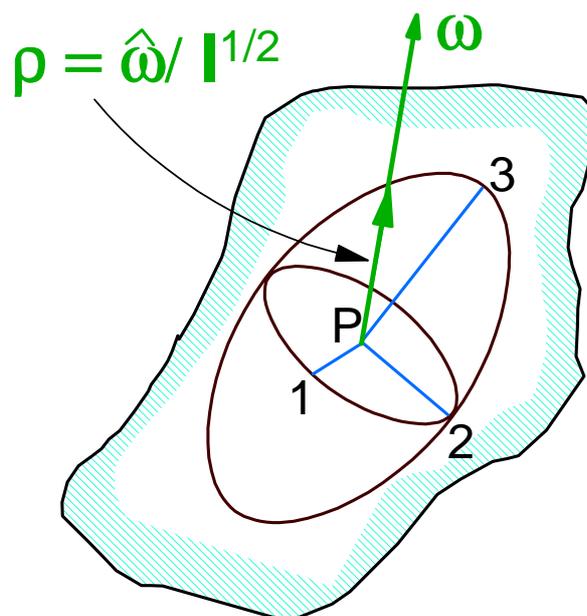


Abbildung 2.18: Das Trägheitsellipsoid mit den Hauptträgheitsachsen 1, 2 und 3.

Aus der Konstruktion des Trägheitsellipsoids wird verständlich, daß sich dieses, wie in Abb. 2.18 angedeutet, der Körperform anschmiegt. So ist z.B. für einen langen Stab das Trägheitsmoment I um die Längsachse klein und daher $1/\sqrt{I}$ groß, während um eine dazu senkrechte Achse I groß und damit $1/\sqrt{I}$ klein ist. Qualitativ ist also das Trägheitsellipsoid ein langgestrecktes Ellipsoid in der Stablängsachse. Entsprechend übertragen sich die Symmetrieeigenschaften des starren Körpers auf sein Trägheitsellipsoid. Eine Symmetrieebene der Massenverteilung führt auf eine Symmetrieebene des Trägheitsellipsoids und eine Rotationssymmetrieachse des Körpers führt auf eine Rotationssymmetrieachse des Trägheitsellipsoids. So ist z.B. das Trägheitsellipsoid einer homogenen Kugel wiederum eine Kugel. Aber auch das Trägheitsellipsoid eines Würfels nimmt Kugelform an, da dieser drei aufeinander senkrecht stehende Achsen mit gleichem I besitzt.

Hauptträgheitsachsen

Das Trägheitsellipsoid ist bei vorgegebenem Bezugspunkt nach Form und Lage fest im Körper verankert. Es liegt deshalb nahe, das bislang verwendete raumfeste Bezugssystem zu verlassen und zu einem körperfesten Bezugssystem mit Ursprung im Bezugspunkt P überzugehen. Dies hat den Vorteil, daß in diesem System die Komponenten I_{jk} des Trägheitstensors zeitlich konstant sind. Man kann aber gleich noch einen Schritt weiter gehen und ein besonders geeignetes körperfestes Bezugssystem wählen. Jedes Trägheitsellipsoid hat drei aufeinander senkrecht stehende Hauptachsen, die im Falle des Trägheitsellipsoid *Hauptträgheitsachsen* genannt werden. Im folgenden werden die Hauptachsen mit den Indizes 1, 2 und 3 unterschieden und die zugehörigen Hauptträgheitsmomente mit I_1 , I_2 und I_3 bezeichnet. Fällt das körperfeste Bezugssystem mit den Hauptträgheitsachsen zusammen, so nennt man es ein Hauptachsensystem. In der analytischen Geometrie wird gezeigt, daß im Hauptachsensystem das Ellipsoid "Normalform" annimmt, d.h. bei einer Hauptachsentransformation wird aus Gl.(2.4.18)

$$1 = I_1\rho_1^2 + I_2\rho_2^2 + I_3\rho_3^2 . \quad (2.4.19)$$

Die Größen ρ_1 , ρ_2 und ρ_3 sind hierbei die Komponenten des Vektors $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\omega}/\sqrt{I}$ bezüglich der Hauptachsen. Im Unterschied zu Gl.(2.4.18) treten in Gl.(2.4.19) jetzt keine gemischten Glieder mehr auf. Die 6 Bestimmungsstücke des Trägheitstensors $\tilde{\mathbf{I}}$ zerfallen in 3 Bestimmungsstücke für die drei Hauptträgheitsmomente, die die Form des Trägheitsellipsoid festlegen, und drei weitere Bestimmungsstücke für die Orientierung des körperfesten Hauptachsensystems relativ zum raumfesten Bezugssystem (z.B. die drei **Eulerschen Winkel** aus Abb. 2.3).

Im Hauptachsensystem nimmt der Trägheitstensor die einfache Darstellung

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (2.4.20)$$

an und ist somit auf Diagonalform. Für den Drehimpuls von Gl.(2.4.8) ergibt sich deshalb

$$L_1 = I_1\omega_1 \quad L_2 = I_2\omega_2 \quad L_3 = I_3\omega_3 , \quad (2.4.21)$$

wobei L_i und ω_i die Komponenten von \mathbf{L} und $\boldsymbol{\omega}$ im Hauptachsensystem sind. Aus Gl.(2.4.21) erkennt man die wichtige Eigenschaft, daß $\mathbf{L} \parallel \boldsymbol{\omega}$, falls $\boldsymbol{\omega}$ in Hauptachsenrichtung zeigt. Bei einem zur Kugel

entarteten Trägheitsellipsoid ist z.B. jede Achse gleichzeitig auch eine Hauptachse und damit \mathbf{L} immer parallel zu $\boldsymbol{\omega}$ (dies trifft z.B. für eine homogene Kugel zu).

Im Hauptachsensystem vereinfachen sich die Ausdrücke für die Rotationsenergie zu

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 \quad (2.4.22)$$

bzw. unter Benutzung von Gl.(2.4.21) zu

$$T_{\text{rot}} = \frac{L_1^2}{2I_1} + \frac{L_2^2}{2I_2} + \frac{L_3^2}{2I_3} . \quad (2.4.23)$$

Poinsot-Konstruktion

Für ein 3-achsiges Trägheitsellipsoid mit drei unterschiedlichen Hauptträgheitsmomenten ist nur in Hauptachsenrichtung $\mathbf{L} \parallel \boldsymbol{\omega}$. Die Richtung von \mathbf{L} für davon abweichende Drehachsenrichtungen läßt sich mit Hilfe einer einfachen geometrischen Konstruktion am Trägheitsellipsoid aufsuchen. Geht man von Gl.(2.4.22) für die Rotationsenergie aus und berücksichtigt, daß die Trägheitsmomente I_i zeitlich konstant sind und nur die Komponenten ω_i von $\boldsymbol{\omega}$ bezüglich der drei Hauptachsen zeitlich variabel sind, so folgt für die Änderung von T_{rot}

$$dT_{\text{rot}} = d\left(\frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2\right) = I_1\omega_1 d\omega_1 + I_2\omega_2 d\omega_2 + I_3\omega_3 d\omega_3 \quad (2.4.24)$$

und damit unter Berücksichtigung von Gl.(2.4.21)

$$dT_{\text{rot}} = \mathbf{L} \cdot d\boldsymbol{\omega} . \quad (2.4.25)$$

Aus der Diskussion von Gl.(2.4.13) ist bekannt, daß $T_{\text{rot}} = \text{const}$ einem Ellipsoid im $\boldsymbol{\omega}$ -Raum entspricht, das mit einem für die drei Hauptachsen einheitlichen Streckungsfaktor $\sqrt{2T_{\text{rot}}}$ ähnlich zum Trägheitsellipsoid ist (siehe Abb. 2.19). Für einen Verschiebungsvektor $d\boldsymbol{\omega}$ auf der Fläche $T_{\text{rot}} = \text{const}$ ist $dT_{\text{rot}} = 0$. Nach Gl.(2.4.25) muß dann aber \mathbf{L} senkrecht zu diesem Vektor stehen und damit parallel zur Flächennormalen des Trägheitsellipsoids im Durchstoßpunkt von $\boldsymbol{\omega}$ sein. Dies ist die *Poinsotsche Konstruktion* zur Ermittlung der Richtung von \mathbf{L} . Sie zeigt nochmals geometrisch, daß bei einem dreiachsigen Trägheitsellipsoid genau in Hauptachsenrichtung $\mathbf{L} \parallel \boldsymbol{\omega}$ ist.

Freie Achsen

Will man einen Körper bei fester Drehachse so rotieren lassen, daß keine Kräfte auf das Lager der Drehachse wirken, muß die Achse durch den Schwerpunkt gehen. Man sagt, der Körper muß *statisch gewuchtet* sein. Andernfalls tritt durch die Rotation des Schwerpunktes um die Drehachse eine Zentrifugalkraft auf, die vom Lager der Drehachse kompensiert werden muß (siehe Abb. 2.20a). Das statische Wuchten ist aber nicht hinreichend, wenn man Kräfte auf die Lager der Drehachse vermeiden will. Selbst bei einer gleichförmigen Rotation müssen die Lager i.a. noch ein Drehmoment T auf den Körper übertragen,

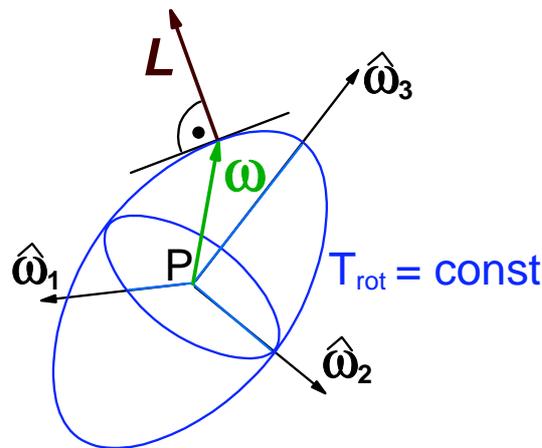


Abbildung 2.19: Die **Poinso'sche** Konstruktion: der Drehimpuls \mathbf{L} steht senkrecht auf der Ellipsoidfläche $T_{\text{rot}} = \text{const}$ im Durchstoßpunkt von $\boldsymbol{\omega}$.

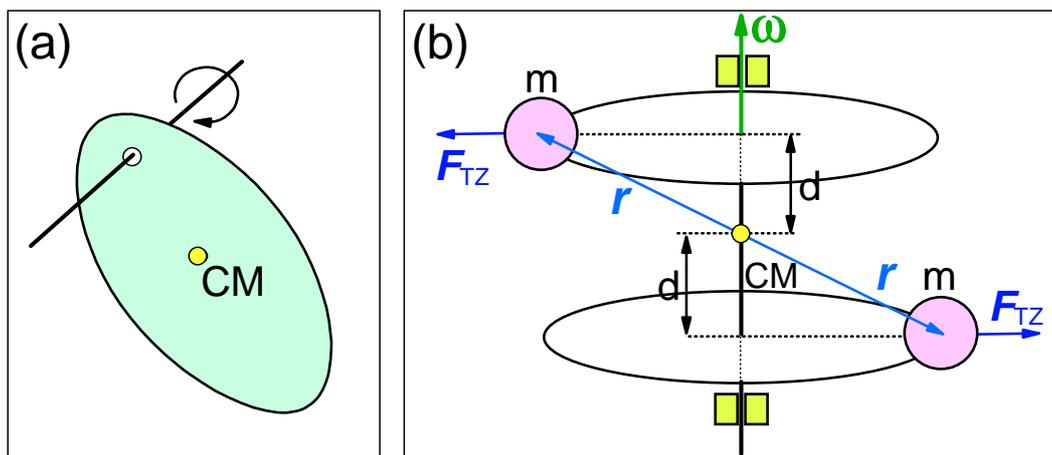


Abbildung 2.20: Zum statischen (a) und dynamischen Wuchten (b).

um die zeitliche Änderung $d\mathbf{L}_{\perp}/dt$ der zur Achse senkrecht stehenden Komponenten des Drehimpulses aufzufangen.

Läßt man z.B. das in Abb. 2.20b gezeigte starr verbundene Massenpaar um die Schwerpunktsachse rotieren, so greift an beiden Massen die Zentrifugalkraft an. Steht die Drehachse nicht senkrecht zu Verbindungsstange der Massen, so bewirkt die Zentrifugalkraft \mathbf{F}_{TZ} im Drehpunkt ein Drehmoment $\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{\text{TZ}} = 2dF_{\text{TZ}}$, welches die Achse im Lager zu verkippen sucht. Dieses Drehmoment auf die Lager verschwindet, wenn die Drehachse mit einer der drei Hauptträgheitsachsen zusammenfällt. Deshalb wird beim *dynamischen Wuchten* (z.B. von Autoreifen) die Massenverteilung so lange verändert, bis die Rotationsachse mit einer Hauptträgheitsachse zusammenfällt. Bei einem statisch und dynamisch gewuchteten Körper müssen die Lager der Drehachsen keine Kräfte mehr aufnehmen. Man kann die Lager entfernen und der Körper rotiert frei, ohne seinen Rotationszustand zu verändern. Man nennt die Hauptträgheitsachsen deshalb auch *freie Achsen*.

Die Rotation eines starren Körpers um seine freien Achsen unterscheidet sich hinsichtlich der Stabilität der Rotationsbewegung. Während die Rotation um die Achsen mit dem größten und dem kleinsten Hauptträgheitsmoment stabil ist, ist die Rotation um die Achse mit dem mittleren Hauptträgheitsmoment

labil. Eine beliebig kleine Störung läßt den Körper aus der Rotation um diese Achse herauskippen.

Rotation einer Zigarrenkiste:

Versetzt man eine quaderförmige Zigarrenkiste so in Rotation, daß die Drehachse mit einer der drei Hauptträgheitsachsen zusammenfällt, so stellt man folgendes fest: Die Rotation ist um die Achse mit dem kleinsten und größten Trägheitsmoment stabil (Drehachsen parallel zur größten und kleinsten Abmessung der Kiste), während die Rotation um die Achse mit dem mittleren Trägheitsmoment zu einer eigenartigen Schlingerbewegung führt.

Rotation einer geschlossenen Kette:

Man bringt eine geschlossene Kette, die an einer Stelle an einem Faden aufgehängt ist, zur Rotation. Nach einiger Zeit spannt sich die Kette zu einem Kreis, dessen Fläche senkrecht auf der Rotationsachse steht, während der Faden auf einem Kegelmantel um die Drehachse umläuft. Die stabile Rotation erfolgt auch hier um die Achse mit dem größten Trägheitsmoment.

Bei einem rotationssymmetrischen Körper, bei dem zwei Hauptträgheitsmomente gleich sind, ist nur die Rotation um eine Symmetrieachse stabil, d.h. um die Achse, zu der das dritte (nur einmal vorkommende) Hauptträgheitsmoment gehört.

Rotation von gekochtem Ei:

Bringt man ein Stopfei oder ein gekochtes Hühnerei um die Achse senkrecht zur Symmetrieachse zum Rotieren, so richtet es sich auf. Die stabile Rotation erfolgt nur um die Achse mit dem kleinsten Trägheitsmoment.

Bewegungsgleichung im Hauptachsensystem

Die Bewegungsgleichung (2.4.1), $\mathbf{T} = d\mathbf{L}/dt$, gilt nur in einem raumfesten Inertialsystem bzw. in einem vom Massenmittelpunkt translatorisch mitgeführten Bezugssystem. In einem raumfesten Bezugssystem sind aber die Komponenten I_{jk} des Trägheitstensors zeitabhängig, so daß bei der Differentiation von $\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}$ komplizierte Ausdrücke auftreten. In einem rotierenden körpereigenen System sind dagegen die Trägheitskoeffizienten zeitlich konstant und speziell im Hauptachsensystem ist sogar $\tilde{\mathbf{I}}$ in Diagonalf orm. Daher ist es nützlich, die Bewegungsgleichung $\mathbf{T} = d\mathbf{L}/dt$ in das rotierende System zu übertragen. Dazu muß man lediglich beachten, daß ein raumfester und körperfester mit $\boldsymbol{\omega}$ rotierender Beobachter die Änderungsgeschwindigkeit von \mathbf{L} unterschiedlich bewerten. Dieses Problem ist bereits in Abschnitt 1.8.2 bei der Diskussion von Drehbewegungen diskutiert worden. Dort wurde Gl.(1.8.38) $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ für den Zusammenhang der Geschwindigkeiten in einem raum- und körperfesten Bezugssystem abgeleitet. Diese Formel läßt sich auch auf die Änderungsgeschwindigkeit $d\mathbf{L}/dt$ des Drehimpulses übertragen. Mit der Bezeichnungsweise $(d\mathbf{L}/dt)_R$ für die Änderungsgeschwindigkeit von \mathbf{L} im ruhenden System und $(d\mathbf{L}/dt)_K$ für die Änderungsgeschwindigkeit der Komponenten von \mathbf{L} im körperfesten System ergibt sich

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_K + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} . \quad (2.4.26)$$

Mit $\mathbf{T} = (d\mathbf{L}/dt)_R$ und Gl.(2.4.21) erhält man dann die **Eulerschen Gleichungen**

$$\begin{aligned} T_1 &= I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\omega_3\omega_2 \\ T_2 &= I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 \\ T_3 &= I_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1 \quad . \quad (2.4.27) \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen kaum mehr erkennen, daß ihr physikalischer Gehalt nicht über die **Newton**schen Axiome hinausgeht, aus denen sie letztendlich abgeleitet wurden.

2.5 Kreiselprobleme

An einigen Beispielen sollen in diesem Abschnitt die interessanten Bewegungsformen des *Kreisels* diskutiert werden, wie sie sich aus der Bewegungsgleichung $\mathbf{T} = d\mathbf{L}/dt$ unter Berücksichtigung von $\mathbf{L} = \hat{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}$ ergeben. Dabei soll die Translationsbewegung vollkommen abgespalten sein, so daß hier nur die Rotation des Körpers um einen raum- und körperfesten Punkt interessiert. Dieses Problem wird als Kreiselproblem bezeichnet.

2.5.1 Der kräftefreie symmetrische Kreisel

Unter einem kräftefreien symmetrischen Kreisel versteht man einen Körper, dessen Trägheitsellipsoid eine Rotationssymmetrieachse besitzt. Ein solcher Körper ist z.B. der Kinderkreisel mit der "Figurenachse" als Symmetrieachse. Im folgenden soll die Symmetrieachse die Hauptachse 3 des Trägheitsellipsoids sein. Die Rotationssymmetrie drückt sich dann in der Gleichheit der beiden anderen Hauptträgheitsmomente aus. Da bei einem kräftefreien Kreisel ferner kein Drehmoment angreifen soll, gilt

$$I_1 = I_2 \quad \text{und} \quad \mathbf{T} = 0, \quad (2.5.1)$$

so daß aus der Bewegungsgleichung $\mathbf{T} = d\mathbf{L}/dt$ unmittelbar die zeitliche Konstanz des Drehimpulses

$$\boxed{\mathbf{L} = \text{const}} \quad (2.5.2)$$

folgt. Bei $\mathbf{T} = 0$ verschwindet wegen $dW = \mathbf{T} \cdot d\boldsymbol{\varphi}$ und $dW = dT_{\text{rot}}$ die zeitliche Änderung der Rotationsenergie und damit ist

$$\boxed{T_{\text{rot}} = \text{const}} \quad (2.5.3)$$

Im Gravitationsfeld der Erde muß der Kreisel im Schwerpunkt CM unterstützt sein, um die Kräftefreiheit zu gewährleisten (siehe hierzu Abb. 2.21a). Man beachte, daß die Figurenachse durch den Schwerpunkt verläuft.

Einen anschaulichen Einblick in den Bewegungsablauf des kräftefreien symmetrischen Kreisels gewinnt man anhand der **Poinsotschen** Konstruktion von Abb. 2.21b. Der Drehimpuls \mathbf{L} , die momentane Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ und die Figurenachse liegen immer in einer Ebene. Man kann ferner zeigen, daß die Tangentialebene TE im Durchstoßpunkt von $\boldsymbol{\omega}$ immer einen konstanten Abstand d von CM hat. Dieser Abstand ist mit Gl.(2.4.16), sowie $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} = \text{const}$ und $\mathbf{L} = \text{const}$ gegeben durch

$$d = \boldsymbol{\rho} \cdot \hat{\mathbf{L}} = \frac{1}{\sqrt{I}} \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}}{\omega} = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}}{L\sqrt{I}\omega^2} = \frac{2T_{\text{rot}}}{L\sqrt{2T_{\text{rot}}}}$$

oder

$$d = \frac{\sqrt{2T_{\text{rot}}}}{L} = \text{const} \quad (2.5.4)$$

Da weiterhin die Tangentialebene senkrecht zum raumfesten Vektor $\mathbf{L} = \text{const}$ steht, ist auch die Orientierung der Tangentialebene zeitlich konstant. Die Tangentialebene ist somit insgesamt raumfest und

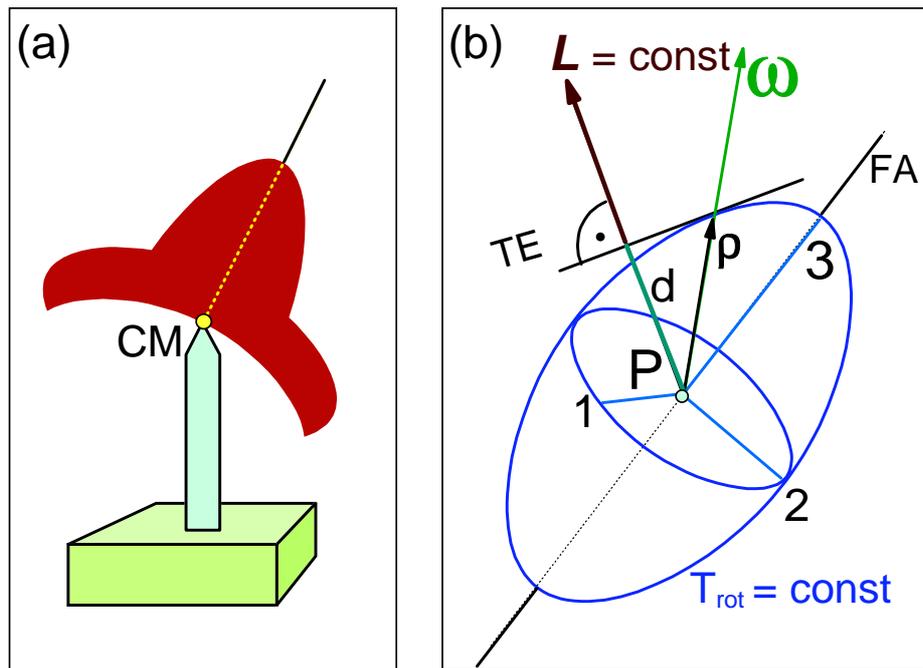


Abbildung 2.21: (a) Ein im Massenmittelpunkt CM unterstützter kräftefreier Kreisel. (b) Bewegung des kräftefreien Kreisels: das Trägheitsellipsoid rollt auf der invarianten Tangentialebene TE ab, es ist $L = const$ und $d = const$.

man nennt sie die “invariante Ebene”. Die Kreiselbewegung ist somit als die Abrollbewegung des Trägheitsellipsoid auf der invarianten Ebene zu beschreiben, mit festgehaltenem Abstand des Bezugspunktes CM zur invarianten Ebene. Da der Berührungspunkt von Ellipsoid und Tangentialebene auf der ω -Achse liegt, in der sich momentan alle Körperpunkte in Ruhe befinden, rollt das Ellipsoid sogar ohne Schlupf auf der invarianten Ebene ab. Die Momentanachse ω läuft dabei auf einem Kreiskegel, dem sogenannten “Raum- oder Spurkegel”, um die Drehimpulsachse L . Bei dieser Bewegung von ω wird zwangsläufig die Figurenachse synchron mitgenommen, da L , ω und die Figurenachse in einer Ebene liegen. Die Wanderung von ω um L ist zudem gleichförmig, da in $T_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2 = const$ das Trägheitsmoment I wegen des festen Winkels zwischen ρ und der rotationssymmetrischen Hauptträgheitsachse 3 konstant und damit

$$\omega^2 = const \quad (2.5.5)$$

ist.

Vom Körper aus gesehen wandert ω ebenfalls auf einem Kreiskegel, dem sog. “Körper- oder Polkegel”, um die Figurenachse, und zwar mit der Winkelgeschwindigkeit Ω , die weiter unten berechnet wird. Die gemeinsame Berührungslinie zwischen Raum- und Körperkegel ist die ω -Achse, in der die Körperpunkte momentan ruhen, so daß insgesamt auch der Körper- und Raumkegel ähnlich zu oben ohne Schlupf abrollen (siehe Abb. 2.22).

Für einen außen stehenden Beobachter ist die momentane Drehachse ω und damit der Raum- und Körperkegel schlecht zu erkennen. Dagegen ist die Bewegung der Figurenachse auf einem Kreiskegel um die raumfeste Drehimpulsachse deutlich sichtbar (Abb. 2.22). Diese Bewegungsform nennt man *reguläre Präzession* oder *Nutation*. Entsprechend nennt man den von der Figurenachse beschriebenen Kegel den “Präzessions- oder Nutationskegel”.

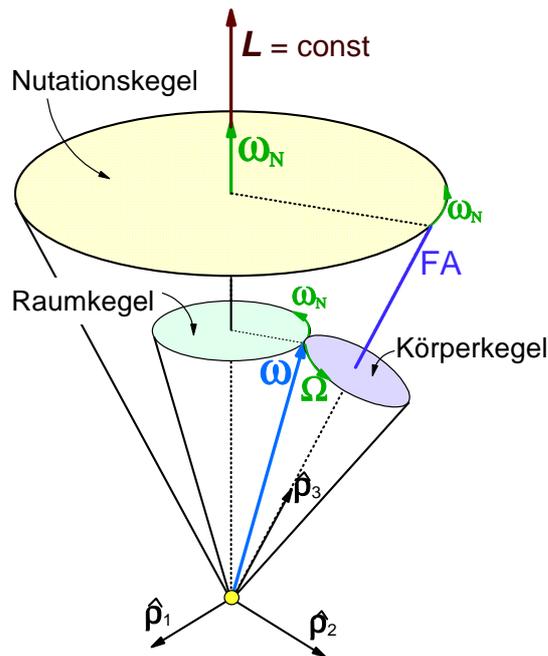


Abbildung 2.22: Nutationsbewegung eines kräftefreien symmetrischen Kreisels: der Körperkegel rollt auf dem Raumkegel ab, die Figurenachse FA wandert auf dem Nutationskegel um $\mathbf{L} = \text{const}$.

Die Kreisfrequenz Ω , mit der die Figurenachse um die ω -Achse im Körpersystem umläuft, lässt sich mit Hilfe der **Eulerschen** Gleichungen (2.4.27) bestimmen. Setzt man darin $T_1 = T_2 = T_3 = 0$ und $I_1 = I_2$ so ergibt sich unmittelbar

$$\boxed{L_3 = I_3 \omega_3 = \text{const} \quad , \quad (2.5.6)}$$

d.h. die Projektion von \mathbf{L} auf die Figurenachse des symmetrischen Kreisels bleibt zeitlich erhalten. Dies kann direkt aus Abb. 2.22 abgelesen werden. Mit der Konstanten

$$\Omega = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_3 \quad (2.5.7)$$

erhält man eine Differentialgleichungen für die zeitliche Änderung von ω_1 und ω_2 mit den Lösungen

$$\omega_1 = A \sin \Omega t \quad \text{und} \quad \omega_2 = A \cos \Omega t \quad . \quad (2.5.8)$$

Im Hauptachsensystem $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2$ und $\hat{\rho}_3$ rotiert also der Endpunkt des Vektorpfeils $\omega_1 \hat{\rho}_1 + \omega_2 \hat{\rho}_2$ mit $\Omega = \text{const}$ gleichförmig auf einer zur Figurenachse senkrechten Ebene. Wegen $\omega_3 \hat{\rho}_3 = \text{const}$ läuft dann für einen körperfesten Beobachter die $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \hat{\rho}_1 + \omega_2 \hat{\rho}_2 + \omega_3 \hat{\rho}_3$ Achse mit konstanter Kreisfrequenz Ω auf dem Körperkegel um die Figurenachse.

Die zugehörige Nutationsfrequenz ω_N lässt sich aus dem Verhältnis der Mantelumfänge von Raum- und Körperkegel bestimmen, da das Verhältnis der Umlaufzeiten $T_N = 2\pi/\omega_N$ und $\tau = 2\pi/\Omega$ gleich dem Verhältnis der Kreisumfänge und damit der Radien der beiden Kegelmäntel ist. Die Radien sind durch $(\omega^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{L}})^2)^{1/2}$ bzw. $(\omega^2 - \omega_3^2)^{1/2}$ gegeben. Nach einiger Algebra findet man für die Nutationsfrequenz ω_N von $\boldsymbol{\omega}$ bzw. der Figurenachse um das raumfeste \mathbf{L} :

$$\omega_N = \frac{L}{I_1} . \quad (2.5.9)$$

Es ist wichtig, darauf hinzuweisen, daß bei der Kreiselbewegung die Analogie zur Translationsbewegung zusammenbricht. Bei der kräftefreien Translation mit $\mathbf{F} = 0$ verschwindet wegen $\mathbf{F} = d\mathbf{p}_{\text{cm}}/dt$ die Beschleunigung $d\mathbf{v}_{\text{cm}}/dt$. Bei der kräftefreien Kreiselbewegung mit $\mathbf{T} = 0$ ist dagegen $d\boldsymbol{\omega}/dt \neq 0$. Dies ist das eigentlich Überraschende an der Kreiselbewegung. Nur wenn die Drehachse mit einer der Hauptträgheitsachsen zusammenfällt, entarten der Raum- und der Körperkegel zu einer Geraden in der Drehimpulsachse $\mathbf{L} \parallel \boldsymbol{\omega}$ und es liegt eine "reine" Rotation mit $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$ vor. Dies ist z.B. für den Kugelkegel ($I_1 = I_2 = I_3$) gegeben.

Polschwankungen des Erdkörpers:

Eine Anwendung finden die obigen Überlegungen bei der Deutung der Polschwankungen des Erdkörpers. Der kinematische Nord- bzw. Südpol (Durchstoßpunkt der Drehachse) weicht geringfügig vom geographischen Nord- bzw. Südpol (Durchstoßpunkt der Figuren-achse) ab (um etwa 10 m). Für die Erde ist aufgrund ihrer Abplattung $(I_1 - I_3)/I_1 = -0.033$, d.h. die Erde ist kein Kugelkegel und man erwartet eine Nutationsbewegung. Da in erster Näherung die Gravitationskräfte der Sonne und des Mondes kein Drehmoment auf die Erde ausüben, ist zu erwarten, daß der kinematische Pol gleichförmig mit der Kreisfrequenz Ω um den geographischen Pol wandert. Mit $\omega_3 \simeq \omega = 2\pi/\text{Tag}$ rechnet man eine Nutationsperiode $\tau = 2\pi/\Omega = (1/0.033)\text{Tage} \simeq 304$ Tagen aus (**Eulersche Periode**). Beobachtet wird dagegen eine Periode von etwa 430 Tagen (**Chandlersche Periode**). Es läßt sich zeigen, daß die Abweichung zwischen theoretischem und experimentellem Wert durch die Elastizität der Erde verursacht wird. Die Erde ist also kein idealer starrer Körper.

2.5.2 Der schwere symmetrische Kreisel

Der *schwere symmetrische Kreisel* ist ein Körper mit rotationssymmetrischem Trägheitsellipsoid ($I_1 = I_2$), der in einem Körperpunkt P auf der Figuren-achse FA (Trägheitsmoment I_3) außerhalb des Schwerpunktes unterstützt wird und sich in einem Schwerfeld befindet. Ein bekanntes Beispiel dafür ist der Kinderkeisel. Im Schwerfeld greift das Drehmoment

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_G = \mathbf{r}_{\text{cm}} \times M\mathbf{g} \quad (2.5.10)$$

an und die Bewegungsgleichung $\mathbf{T} = d\mathbf{L}/dt$ besagt, daß der Drehimpuls jetzt nicht mehr zeitlich konstant ist. Da aber die Komponente T_z des Drehmoments in der Vertikalrichtung $\hat{\mathbf{z}}$ wegen $\hat{\mathbf{z}} \parallel M\mathbf{g}$ verschwindet, bleibt die Komponente L_z des Drehimpulses konstant:

$$L_z = \text{const} . \quad (2.5.11)$$

Entsprechend verschwindet wegen $\hat{\boldsymbol{\rho}} \parallel \mathbf{r}_{\text{cm}}$ die Komponente T_3 des Drehmoments in Richtung der Hauptträgheitsachse 3 bzw. der Figuren-achse und aus den **Eulerschen** Gleichungen (2.4.27) folgt für den symmetrischen Kreisel mit $I_1 = I_2$

$$L_3 = \text{const} . \quad (2.5.12)$$

Das Ungewöhnliche an dieser Kreiselbewegung ist die Tatsache, daß der rotierende Kreisel im Gegensatz zu einem nichtrotierenden Körper nicht unter der Wirkung der Schwerkraft umkippt, sondern in Richtung des Drehmoments “ausweicht”.

Die Präzessionsfrequenz läßt sich anhand von Abb. 2.23 bestimmen. Es ist

$$T = |\mathbf{T}| = r_{\text{cm}} M g \sin \theta \quad \text{und} \quad |d\mathbf{L}| = L \sin \theta d\varphi \quad (2.5.16)$$

und wegen $d\mathbf{L} = T dt$ folgt

$$L \sin \theta d\varphi = r_{\text{cm}} M g \sin \theta dt \quad (2.5.17)$$

oder

$$\omega_P := \frac{d\varphi}{dt} = \frac{r_{\text{cm}} M g}{L} . \quad (2.5.18)$$

An diesem Ausdruck ist besonders bemerkenswert, daß die Präzessionsfrequenz unabhängig vom Neigungswinkel θ der Figurenachse ist. Setzt man noch L aus Gl.(2.5.14) ein, so ergibt sich

$$\omega_P := \frac{d\varphi}{dt} = \frac{r_{\text{cm}} M g}{I_3 \omega_3} . \quad (2.5.19)$$

Je höher also der “Spin” des Kreisels ist (L bzw. ω_3 groß), umso langsamer wird die Präzessionsbewegung. Dies kann man bei Kinderkreiseln beobachten, bei denen aufgrund von Reibungseffekten mit abnehmendem ω_3 die Präzessionsfrequenz immer größer wird.

Es soll abschließend noch die Richtung von ω_P diskutiert werden. Aus $|d\mathbf{L}| = L \sin \theta d\varphi$ bzw. $|d\mathbf{L}|/dt = \omega_P L \sin \theta$ und der Richtung der Vektoren $d\mathbf{L}$, ω_P und \mathbf{L} in Abb. 2.23 ersieht man $d\mathbf{L}/dt = \omega_P \times \mathbf{L}$ bzw. mit $\mathbf{T} = d\mathbf{L}/dt$

$$\mathbf{T} := \omega_P \times \mathbf{L} . \quad (2.5.20)$$

Diese Gleichung bleibt auch für andere Drehmomente als das Gravitationsmoment \mathbf{T}_G richtig, solange nur $\mathbf{T} \perp \mathbf{L}$ steht und \mathbf{T} in einer raumfesten Ebene liegt.

Die beschriebene gleichförmige Präzession des Kreisels im konstanten Schwerfeld ist für hinreichend große ω eine mögliche, aber nicht die einzig mögliche Bewegungsform. Gibt man z.B. einem gleichförmig präzedierenden Kreisel einen kurzen seitlichen Stoß auf die Figurenachse, so führt dieser Drehmomentstoß zu einer Drehimpulsänderung $\Delta\mathbf{L}$. Ein bestimmtes $\Delta\mathbf{L}$ resultiert in einer Änderung der Drehachse um $\Delta\omega$. Da aber $I_3 \neq I_2 = I_1$ ist, muß die neue Drehimpulsrichtung nicht mehr parallel zur neuen ω -Richtung sein. Man bekommt dann eine Überlagerung einer Nutations- und einer Präzessionsbewegung. Der Öffnungswinkel des Präzessionskegels ist jetzt nicht mehr zeitlich konstant, sondern schwingt mit der Frequenz ω_N der Nutation. Diese “Nickschwingung” überlagert sich der Präzession und man spricht von *pseudoregulärer Präzession*.

Kreiselbewegung der Erde:

Die Erdabplattung, die wir uns als Äquatorwülste auf einer idealen Kugel vorstellen wollen, zusammen mit der Neigung der Erdachse um 23.5° zur Normalen der Ekliptik (Bahnebene der Erde um die Sonne) bewirken, daß Sonne und Mond ein Drehmoment auf die Erde ausüben: die Gravitationskraft auf den sonnennahen Äquatorwulst ist größer als auf den sonnenfernen; das resultierende Drehmoment um CM versucht die Erdachse normal zur Ekliptik zu stellen, aber aufgrund der Erddrehung ω um die Figurenaxe setzt stattdessen eine Präzessionsbewegung der Erdachse um die Normale zur Ekliptik ein (siehe Abb. 2.24). Die Zeit für einen vollen Umlauf beträgt etwa 26 000 Jahre. Diese Präzessionsbewegung macht verständlich, daß sich die antiken Seefahrer nicht am heutigen Polarstern orientieren konnten.

Der Präzession der Erdachse sind die **Eulerschen** Polschwankungen als Nutation aufgelagert. Hinzu kommt allerdings noch eine astronomische Nutation der Erdachse. Der Mond ist zu $2/3$ für die pseudoreguläre Präzession der Erdachse verantwortlich. Die Mondbahn um die Erde ist aber nicht stationär, sondern unterliegt aufgrund von Störeinflüssen durch die Sonne und die Nachbarplaneten selber einer Präzessionsbewegung: die um 5° gegen die Ekliptik geneigte Mondbahn präzediert mit einer Periode von 18.6 Jahren um die Normale zur Ekliptik. Diese Präzession war wahrscheinlich schon den Menschen in der Megalithkultur bekannt. Da die Größe des vom Mond auf die Erde ausgeübten Drehmoments von der Orientierung der Mondbahn relativ zur Erdachse abhängt, überträgt sich die Mondpräzession mit einer Periode von 18.6 Jahren als zusätzliche Störung auf die Erdpräzession. Diese Störung ist sehr klein. Die astronomische Nutation führt zu einer Kippschwingung der Erdachse mit nur etwa 9 Winkelsekunden Amplitude.

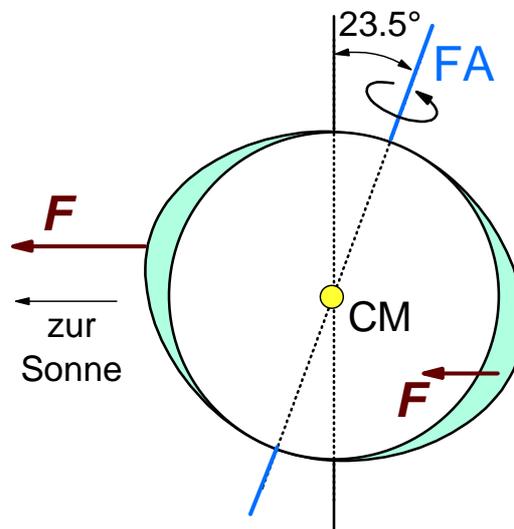


Abbildung 2.24: Zur Deutung der Erdpräzession.

2.5.3 Der Kreiselkompaß

Abb. 2.25a zeigt einen Kreisel in *kardanischer Aufhängung*, bei der der Körper in drei zueinander senkrecht stehenden Achsen drehbar gelagert ist. Wird der Kreisel um seine Figurenaxe in schnelle Rotation versetzt ($\omega \parallel \mathbf{L} \parallel \text{Figurenaxe}$), so behält er seinen Drehimpuls und deshalb seine Figurenaxe (d.h. seine Orientierung im Raum) bei, da bei keiner von außen aufgeprägten Bewegung des kardani-

schen Gehänges auf den Körper ein Drehmoment \mathbf{T} übertragen wird. In der Navigation wird deshalb der kardanische Kreisel als “künstlicher Horizont” eingesetzt, der unabhängig von der Schiffs- oder Flugzeugbewegung eine feste Raumrichtung anzeigt.

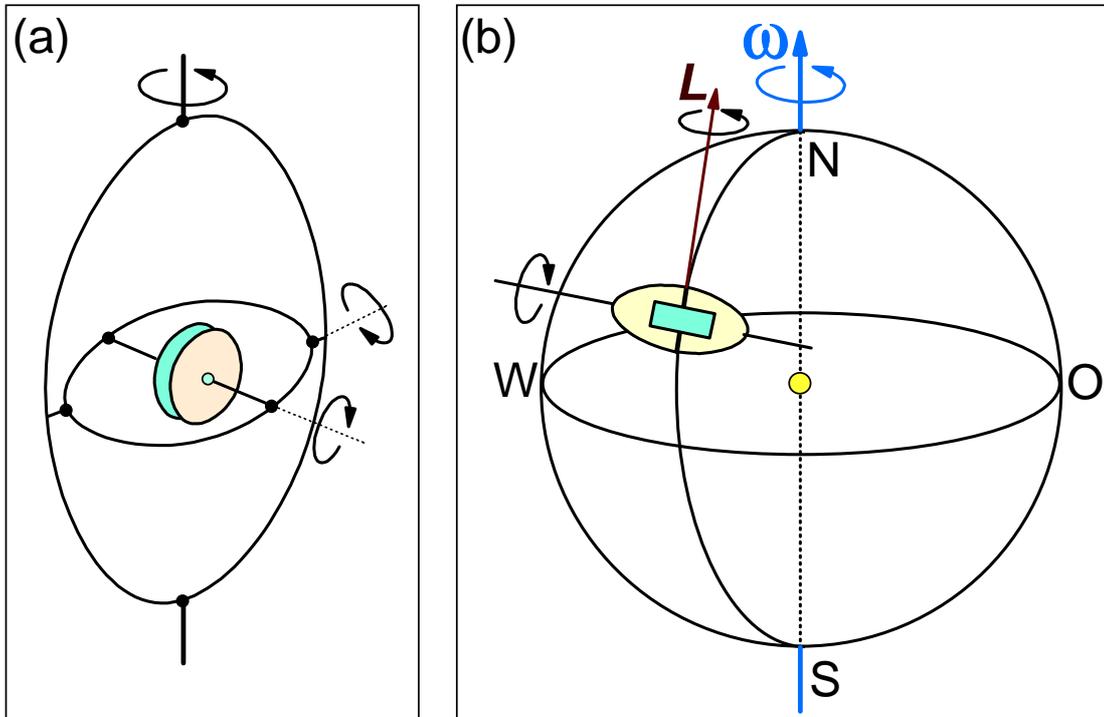


Abbildung 2.25: (a) Kardanische Aufhängung. (b) Der Kreiselkompaß: \mathbf{L} versucht sich möglichst parallel zu ω einzustellen.

Beim *Kreiselkompaß* ist dagegen neben der Figurenachse nur noch eine weitere (und zwar die vertikal stehende) Drehachse vorgesehen. Der Kreisel ist somit in der Horizontalebene der Erde gefesselt (siehe Abb. 2.25b). In der Näherung des schnellen Kreisels liegt der Drehimpuls \mathbf{L} in der Figurenachse. Bei der Rotation ω der Erde um ihre eigene Achse wird nun zwangsweise der Kreiselkompaß um die Erdachse gedreht, d.h. es wird ein Drehmoment $\mathbf{T} \parallel \omega$ ausgeübt, das beim gefesselten Kreisel am Kreiselkörper angreifen kann. Wegen $\mathbf{L} = \mathbf{T} dt$ versucht sich daher der Drehimpuls \mathbf{L} und mit ihm die Figurenachse möglichst “hoch”, d.h. in Nordrichtung einzustellen. Der Kreiselkompaß bringt für die Navigation gegenüber der gewöhnlichen Kompaßnadel den Vorteil, keine magnetische Fehlweisung zu haben.

2.6 Abrollbewegungen

Die Bewegungsgleichungen des frei beweglichen starren Körpers sind die Impulsgleichung $\mathbf{F} = d\mathbf{P}_{\text{cm}}/dt$ für die Translation und die Drehimpulsgleichung $\mathbf{T} = d\mathbf{L}/dt$ (mit dem Massenmittelpunkt als Bezugspunkt) für die Rotation. Dabei sind die dynamischen Größen \mathbf{p} und \mathbf{L} mit den kinematischen Größen \mathbf{v}_{cm} und $\boldsymbol{\omega}$ über $\mathbf{p}_{\text{cm}} = M\mathbf{v}_{\text{cm}}$ und $\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}$ verknüpft. Sind die Translations- und Rotationsbewegung völlig voneinander entkoppelt, so ist $\mathbf{F} = d\mathbf{p}_{\text{cm}}/dt$ ein Problem der Punktmechanik und $\mathbf{T} = d\mathbf{L}/dt$ ein Kreiselpproblem. Die Translations- und Rotationsbewegung überlagern sich unabhängig voneinander. Häufig tritt allerdings der Fall ein, daß Translations- und Rotationsbewegung miteinander verknüpft sind (z.B. Bumerang).

Es soll hier nur ein sehr einfacher Bewegungstyp einer gekoppelten Translations- und Rotationsbewegung behandelt werden, nämlich die Abrollbewegung, bei der die Verknüpfung über eine kinematische Bedingung erfolgt. Unter einer Abrollbewegung versteht man eine Bewegungsform, bei der sich ein Körper auf einer Unterlage schlupffrei, d.h. ohne zu gleiten, bewegt.

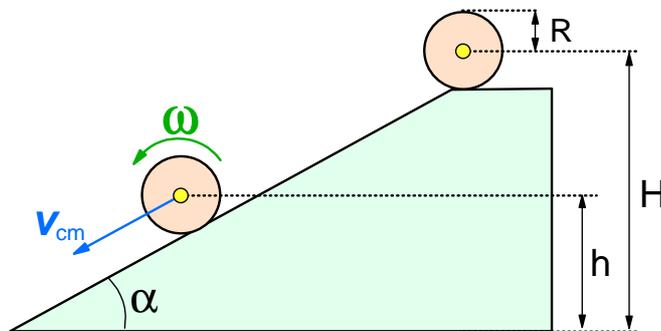


Abbildung 2.26: Abrollbewegung auf der schiefen Ebene.

Bei der kombinierten Translations- und Rotationsbewegung ist die Geschwindigkeit \mathbf{v} jedes Massenelements gegeben zu

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{trans}} + \mathbf{v}_{\text{rot}} \quad . \quad (2.6.1)$$

Mit dem Massenmittelpunkt als Bezugspunkt ergibt sich gemäß Gl.(2.1.6) und (2.1.9)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{cm}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\text{cm}} \quad . \quad (2.6.2)$$

Betrachtet man einen kugel- oder zylinderförmigen Körper auf einer ebenen Unterlage, so erfordert die Bedingung eines schlupffreien Abrollens, daß die Schwerpunktgeschwindigkeit des Körpers entgegengesetzt gleich der Rotationsgeschwindigkeit eines Massenelements auf der Kugel- oder Zylinderoberfläche ist. Mit dem Radius R des Körpers muß also

$$\mathbf{v}_{\text{cm}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad (2.6.3)$$

gelten. Für die Gesamtenergie des Körpers gilt ferner

$$E = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}} + E_{\text{pot}} \quad (2.6.4)$$

mit $T_{\text{trans}} = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2$ und $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \tilde{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}$.

Als erstes Beispiel soll die Abrollbewegung eines Zylinders auf einer schiefen Ebene diskutiert werden (siehe Abb. 2.26). Der Körper soll sich zunächst am oberen Ende der schiefen Ebene in Ruhe befinden, d.h. die Gesamtenergie ist gleich der potentiellen Energie $E_{\text{pot}} = MgH$. Wird der Körper losgelassen, so rollt er die schiefe Ebene herunter, wobei die potentielle Energie in kinetische Translations- und Rotationsenergie umgewandelt wird. Aus der Energieerhaltung folgt für die Endgeschwindigkeit am unteren Ende der schiefen Ebene

$$MgH = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (2.6.5)$$

Mit $v = \omega R$ folgt dann

$$v_{\text{cm}}^2 = \frac{2gH}{1 + \frac{I}{MR^2}} \quad (2.6.6)$$

Setzt man das Trägheitsmoment I für verschieden Körperformen ein, so erhält man

$$\text{Vollzylinder: } I = MR^2/2 \Rightarrow v_{\text{cm}}^2 = \frac{4gH}{3} \quad (2.6.7)$$

$$\text{Hohlzylinder: } I = MR^2 \Rightarrow v_{\text{cm}}^2 = gH \quad (2.6.8)$$

Man erkennt, daß die Translationsgeschwindigkeit unabhängig von Masse und Radius ist, d.h. ein Stahl- und Holzzylinder beliebiger Abmessungen rollen gleich schnell die schiefe Ebene hinunter. Ein Vollzylinder hat ein kleineres Trägheitsmoment als ein Hohlzylinder und damit eine höhere Translationsgeschwindigkeit.