

## Kapitel 3

# Die Polarisation von Licht

In diesem Kapitel werden wir uns mit elektromagnetischen Wellen beschäftigen, deren Feldvektor  $\mathbf{E}$  eine definierte Richtung zum Wellenvektor  $\mathbf{k}$  besitzt. Solche Wellen nennt man *polarisiert*. Wir werden ferner Medien kennenlernen, deren Eigenschaften richtungsabhängig sind. Solche Medien nennen wir anisotrop. Das Verhalten von elektromagnetischen Wellen in anisotropen Medien hat weitreichende Anwendungen in der Optik.

Bei der Ableitung der Wellengleichung in Kapitel 2 haben wir gesehen, dass Licht transversalen Charakter hat, das heißt, dass für optisch isotrope Medien das elektrische und magnetische Feld senkrecht auf dem Wellenvektor steht. Dadurch ist genau eine Ebene festgelegt, in der das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  schwingen kann. Ferner haben wir gelernt, dass das  $B$ -Feld auf dem  $E$ -Feld senkrecht steht. Die Richtung von  $\mathbf{E}$ , oder wie wir später sehen werden, die Richtung des Verschiebungsfeldes  $\mathbf{D}$  wird *Polarisationsrichtung* genannt. Schließlich haben wir gezeigt, dass sich mit Hilfe der Fourier-Zerlegung jedes beliebige Feld als Linearkombination von ebenen Wellen darstellen lässt. Für diese ebenen Wellen schwingen also beide Felder in einer Ebene senkrecht zum Wellenvektor  $\mathbf{k}$ , d.h. sie sind in dieser Ebene polarisiert (siehe Abb. 3.1). Dabei ist es ausreichend, das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  zu spezifizieren. Um die Polarisations Ebene aufzuspannen, bedarf es zweier orthogonaler Basisvektoren  $\hat{\mathbf{i}}$  und  $\hat{\mathbf{j}}$ . Die Entwicklungskoeffizienten  $E_1$  und  $E_2$  müssen dabei auf Grund möglicher Phasenverschiebungen komplex sein.<sup>1</sup>

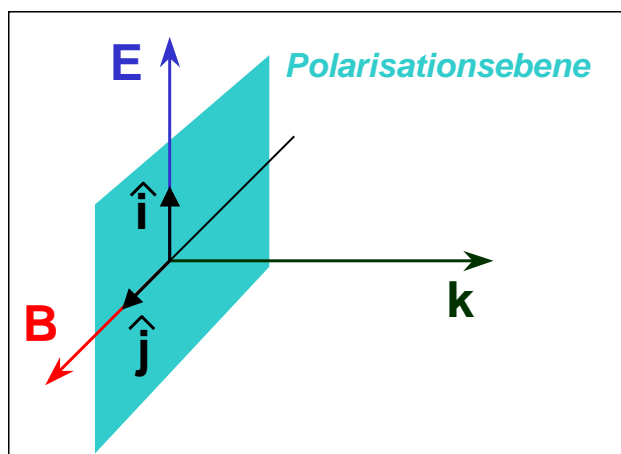


Abbildung 3.1: Zur Definition der Polarisations Ebene, die senkrecht auf dem Wellenvektor  $\mathbf{k}$  steht, und der Polarisationsrichtung, die durch die Richtung des  $\mathbf{E}$ -Vektors festgelegt wird, einer transversalen elektromagnetischen Welle.

<sup>1</sup>In einer Exponentialdarstellung kann man sie durch  $E_1 = E_{10}e^{i\alpha_1}$  und  $E_2 = E_{20}e^{i\alpha_2}$  ausdrücken.

Mathematisch kann dieser Sachverhalt wie folgt zum Ausdruck gebracht werden:

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{i}}E_1e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + \hat{\mathbf{j}}E_2e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \quad (3.0.1)$$

In Kapitel 2 haben wir gesehen, dass Licht, je nachdem wie die Felder bezüglich einer Grenzfläche orientiert sind, unterschiedliches Brechungsverhalten zeigt. Wir wollen aus diesem Grunde in diesem Kapitel die Polarisation von Licht etwas genauer betrachten. Dies tun wir auch deshalb, weil die Analyse der Polarisation von Licht in spektroskopischen Untersuchungen in der Atom-, Festkörper-, Kern- und Teilchenphysik wichtige Informationen liefert. Ferner werden wir die Theorie der elektromagnetischen Wellen auf anisotrope Medien ausdehnen.

### Anmerkung zu geschichtlichen Entwicklung

Auch historisch war die Beobachtung der Polarisation von Licht senkrecht zur Ausbreitungsrichtung von großer Bedeutung. Die Vorstellung longitudinaler Wellen bricht damit zusammen, was Probleme für das vor allem von **Newton** vertretene *Ätherbild* mit sich brachte.

Als **Huyghens**, **Young** und **Fresnel** die Wellentheorie des Lichts entwickelten, kam für sie nur die Vorstellung elastischer Wellen in einem das Weltall erfüllenden Medium, dem so genannten Äther, in Frage. Sie glaubten, dass es sich bei dem Äther nur um eine sehr feine Flüssigkeit oder ein Gas, keinesfalls aber um einen festen Körper handeln könnte. Da Gase oder Flüssigkeiten keine Scherwellen zulassen,<sup>2</sup> sind nur elastische Longitudinalwellen möglich, d.h. **Huyghens**, **Young** und **Fresnel** fassten die Lichtwellen – genau wie Schallwellen – als Longitudinalwellen auf. Bei longitudinalen Wellen gehen die Verschiebungen in Fortpflanzungsrichtung vor sich. Dadurch herrscht um die Fortpflanzungsrichtung herum völlige Symmetrie. Bei Transversalwellen erfolgen die Verschiebungen dagegen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung, wodurch diese Symmetrie nicht mehr gewährleistet sein muss. Da man zunächst bei Licht, das von natürlichen Strahlungsquellen ausging, keine Anzeichen für eine Abweichung von einer Symmetrie um die Ausbreitungsrichtung gefunden hatte, war die Annahme von Longitudinalwellen völlig natürlich. Die Annahme von longitudinalen Lichtquellen schien gut begründet, bis im Jahr 1808 der französische Physiker **E. L. Malus** eine für die Optik folgenschwere Beobachtung machte, die eine Asymmetrie um die Ausbreitungsrichtung, das heißt, eine *Polarisation* des Lichtes offenbarte. Die Malus'sche Beobachtung führte zu der Feststellung, dass Licht, das an einem durchsichtigen Medium reflektiert worden ist, seine Symmetrie um die Fortpflanzungsrichtung verloren hat.

Ein wichtiges Experiment zum Nachweis der Polarisation ist in Abb.3.2 gezeigt. Dieses Experiment wurde erstmals von **Nörremberg** durchgeführt. Licht trifft hier unter einem Winkel von etwa  $56^\circ$  auf eine Glasplatte (dieser Winkel entspricht etwa dem Brewster Winkel). Dadurch wird wegen  $r_{\parallel} \simeq 0$  nur die TE-Komponente reflektiert und das reflektierte Licht ist somit linear polarisiert. Trifft dieses jetzt auf eine zweite Glasplatte unter dem gleichen Winkel auf, so hängt die Intensität des reflektierten Lichts stark von der relativen Verdrehung beider Glasplatten ab. Sind die Platten parallel, so ist die reflektierte Intensität maximal, sind sie um  $90^\circ$  gegeneinander verdreht, so geht die reflektierte Intensität gegen Null, da dann auf die zweite Glasplatte Licht in TM-Polarisation fällt und hierfür der Reflexionskoeffizient beim Brewster Winkel verschwindet. Aus diesem Experiment zogen **Young** und **Fresnel** – wenn auch wegen der Konsequenz eines festen Äthers nur widerstrebend – den Schluss auf Transversalität der Lichtquellen. Diese Problematik hat fast ein dreiviertel Jahrhundert auf der Optik gelastet, bis die

<sup>2</sup>Flüssigkeiten und Gase besitzen keine Rückstellkräfte normal zur Wellenausbreitung, das heißt keinen Schubmodul wie Festkörper.

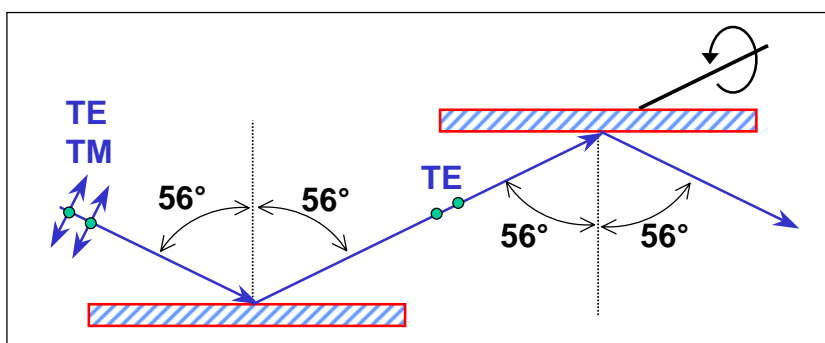


Abbildung 3.2: Versuchsaufbau nach **Nörremberg** zum Nachweis von polarisiertem Licht durch Reflexion. Auf den ersten Spiegel trifft natürliches Licht, das sowohl eine TE- als auch eine TM-Komponente enthält. Unter dem Brewster Winkel wird davon nur die TE-Komponente reflektiert.

Vorstellung elastischer Lichtwellen durch die Erkenntnis, dass es sich bei Licht um elektromagnetische Wellen handelt, abgelöst wurde.

Wir wollen an dieser Stelle auch kurz die Frage ansprechen, warum natürliches Licht trotz Transversalität vollkommene axiale Symmetrie aufweist. Dieser Sachverhalt kann nur so gedeutet werden, dass diese Symmetrie statistischen Charakter hat, der in der Komplexität der Vorgänge in den Lichtquellen begründet liegt. Wir können z.B. annehmen, dass wir in einer Lichtquelle eine sehr große Anzahl von Hertzchen Oszillatoren vorliegen haben, die alle statistisch unabhängig voneinander schwingen und deren Schwingungsrichtungen sich im Mittel gleichmäßig auf alle Raumrichtungen verteilen. Im Grunde erzeugt jedes Atom, das durch Übergang von einem angeregten Zustand in den Grundzustand strahlt, polarisierte Wellenzüge. In einer Lichtquelle, die aus einer großen Anzahl von Atomen besteht, überlagern sich diese Wellenzüge dann auf statistische Art und Weise. Um polarisiertes Licht, d.h. Licht mit einer bevorzugten Ausrichtung der Felder zu schaffen, muss entweder auf spezielle Quellen, wie z.B. LASER, ausgerichtete Diplostrahler etc. ausgewichen werden, oder das nicht polarisierte Licht muss nachträglich durch einen Filter laufen. Filter dieser Art haben wir schon in Kapitel 2 kennengelernt. Zum Beispiel lässt ein lineares Drahtgitter nur cm-Wellen, bei denen das E-Feld senkrecht zur Drahtachse steht, passieren. Ein Spiegel unter dem Brewster-Winkel reflektiert nur die TE-Komponente. Weitere Polarisatoren (Polaroid-Folien, Kristalle etc.) werden wir später kennenlernen. Im nächsten Abschnitt soll es uns zuerst nur um die verschiedenen Polarisationsstypen gehen.

### 3.1 Polarisationszustände von Licht

In einem isotropen Medium breitet sich jede harmonisch Welle mit einer gegebenen Geschwindigkeit aus. Solch eine Welle können wir als eine Superposition eines Paares von orthogonalen Basiswellen ausdrücken:

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{i}}E_{10}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + \hat{\mathbf{j}}E_{20}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\varphi)} \quad \text{mit } \varphi = \alpha_2 - \alpha_1 \quad (3.1.1)$$

Hierbei ist  $\varphi$  der relative Phasenwinkel der beiden orthogonalen Basiswellen. Man nennt die beiden Wellen *in Phase*, wenn  $\varphi = \pm n2\pi$  ( $n = \text{ganze Zahl}$ ) bzw. *außer Phase*, wenn  $\varphi = \pm(2n+1)\pi$ . Es gibt nun verschiedene Arten, solch ein Wellenpaar auszuwählen.

#### 3.1.1 Linear polarisiertes Licht

Falls es eine Richtung  $\hat{\mathbf{i}}$  gibt, so dass in (3.0.1) nur ein Koeffizient von Null verschieden ist, so spricht man von *linear polarisiertem Licht*, da die Richtung des elektrischen Feldes unabhängig von  $\mathbf{r}$  und  $t$  gleich bleibt. Man erhält

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{i}}E_0e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \quad (3.1.2)$$

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{j}}B_0e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} . \quad (3.1.3)$$

Durch eine geeignete Wahl des Zeitnullpunktes können  $E_0$  und  $B_0$  reell gemacht werden. Die Vektoren  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{k}$  definieren dabei die *Polarisationsebene*. Als Polarisationsrichtung wird allgemein die Richtung des elektrischen Feldes gewählt. Die Richtung des magnetischen Feldes steht auf dieser senkrecht. Linear polarisiertes Licht ist in Abb. 3.3 dargestellt. Man erkennt, dass die Richtung der Felder im Raum konstant ist, d.h. sie ändert sich für eine feste Zeit  $t = t_0$  beim Fortschreiten entlang der Welle nicht. Nur die Amplitude und das Vorzeichen der Felder ändert sich periodisch. Würde man mit der Welle mitlaufen, so bleibt die Amplitude natürlich konstant.

Nach (3.0.1) bzw. (3.1.1) erhält man linear polarisiertes Licht aber auch ganz allgemein dann, wenn die Phasendifferenz  $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$  der komplexen Vorfaktoren  $E_1 = E_{10}e^{i\alpha_1}$  und  $E_2 = E_{20}e^{i\alpha_2}$  Null oder  $\pm\pi$  beträgt. Das heißt, man z.B. kann schreiben

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{i}}E_{10}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + \hat{\mathbf{j}}E_{20}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)+\varphi} \quad \text{mit } \varphi = 0, \pm\pi . \quad (3.1.4)$$

und erhält eine linear polarisierte Welle als Überlagerung von zwei linear polarisierten Wellen, die entweder in Phase oder gegenphasig schwingen.

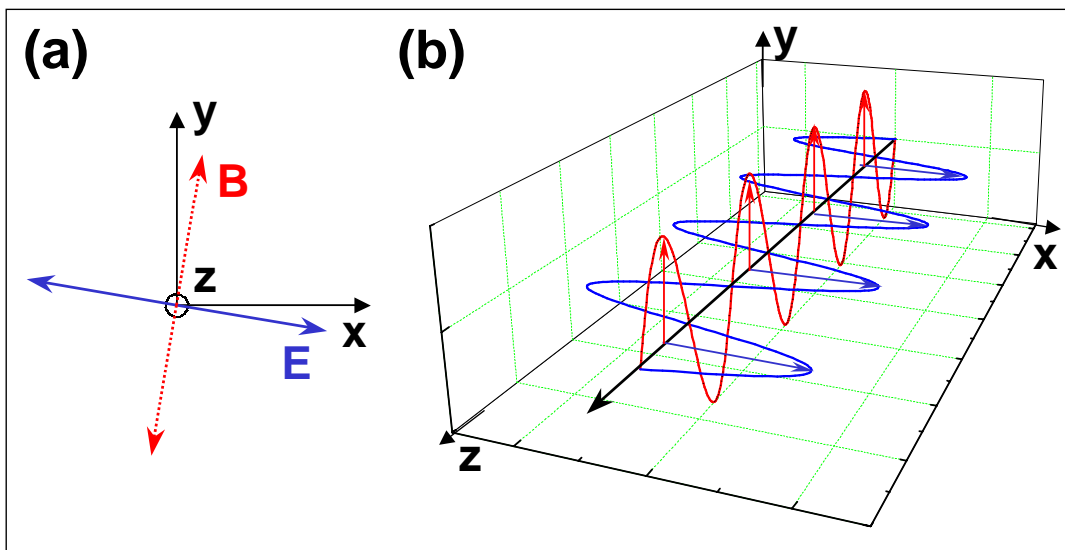


Abbildung 3.3: Linear polarisiertes Licht. (a) Beobachtung an einem festen Ort; das Ende des elektrischen Feldvektors beschreibt eine lineare Oszillation senkrecht zur Ausbreitungsrichtung  $z$ . (b) Beobachtungen zu den festen Zeitpunkten  $t_0$ . Der elektrische Feldvektor  $\mathbf{E}$  beschreibt lineare Schwingung.

### 3.1.2 Zirkular polarisiertes Licht

In einem Medium, das eine lineare Reaktion auf elektrische und magnetische Felder zeigt, ist jede Superposition der oben erwähnten linear polarisierten Wellen wiederum eine Lösung der Maxwell-Gleichungen. Ein besonders wichtiger Fall ist zirkular polarisiertes Licht, das man sich durch Überlagerung von zwei zueinander senkrechter und um  $\pi/2$  phasenverschobener, linear polarisierter Wellen mit gleicher Ausbreitungsrichtung, Amplitude und Frequenz entstanden denken kann. Das heißt, die zueinander senkrecht schwingenden elektrischen Felder haben denselben Betrag, eilen aber einander voraus. Die Situation ist analog zum Übergang vom linearen Pendel zur Kreisbewegung.

Beim zirkular polarisierten Licht rotiert die Richtung des elektrischen und magnetischen Feldes an einem festen Ort  $\mathbf{r}$  mit der Kreisfrequenz  $\omega$  um die Ausbreitungsrichtung. Dabei bleibt der Betrag der Felder konstant (siehe Abb. 3.4). Mathematisch kann dies durch

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{i}}E_0e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + \hat{\mathbf{j}}E_0e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\varphi)} \quad \text{mit } \varphi = \pi/2 \pm n2\pi \quad (3.1.5)$$

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{i}}B_0e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\varphi)} + \hat{\mathbf{j}}B_0e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \quad (3.1.6)$$

ausgedrückt werden, was sich auf<sup>3</sup>

$$\mathbf{E} = (\hat{\mathbf{i}} \pm i\hat{\mathbf{j}}) E_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \quad (3.1.7)$$

$$\mathbf{B} = (\hat{\mathbf{i}} \mp i\hat{\mathbf{j}}) B_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \quad (3.1.8)$$

<sup>3</sup>Hierbei nutzen wir aus, dass der Phasenfaktor  $e^{\pm i\pi/2}$  in der komplexen Schreibweise durch die Multiplikation mit  $\pm i$  ersetzt werden kann.

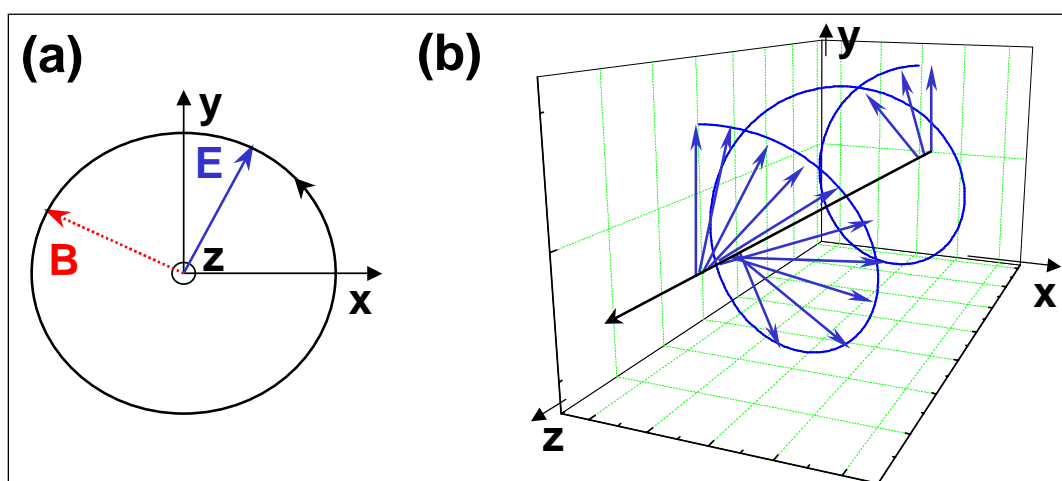


Abbildung 3.4: Zirkular polarisiertes Licht: (a) Beobachtung an einem festen Ort; das Ende des elektrischen Feldvektors beschreibt eine Kreisbahn in einer Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. (b) Beobachtungen zu einem festen Zeitpunkt; der elektrische Feldvektor  $\mathbf{E}$  beschreibt nach unserer Definition für rechts (links) polarisiertes Licht eine Links(Rechts)schraube. Gezeigt ist linkszirkular polarisiertes Licht, für das die Bewegung des  $\mathbf{E}$ -Vektors entlang der Ausbreitungsrichtung eine Rechtsschraube beschreibt.

reduzieren lässt. Erinnern wir uns daran, dass das reale elektrische Feld den Realteil dieses komplexen Vektors bildet:  $\text{Re}\mathbf{E} = \hat{\mathbf{i}}E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \pm \hat{\mathbf{j}}E_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ . Für einen festgehaltenen Ort stellt dies einen Vektor mit konstanter Länge dar, der in der Ebene  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{const.}$  um die Ausbreitungsrichtung der Welle mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotiert. Friert man dagegen die Zeit ein, so erhält man  $\text{Re}\mathbf{E} = E_0(\hat{\mathbf{i}}\cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \hat{\mathbf{j}}\sin \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ . Die Drehung erfolgt für einen Beobachter, der die Welle auf sich zukommen sieht, im Uhrzeigersinn (Minus-Zeichen) bzw. gegen den Uhrzeigersinn (Plus-Zeichen). Bei einer Drehung im Uhrzeigersinn spricht man von einer *rechtszirkular polarisierten Welle*, bei einer Drehung gegen den Uhrzeigersinn von einer *linkszirkular polarisierten Welle*. Diese Definition ist etwas unglücklich gewählt, da der  $\mathbf{E}$ -Vektor für rechtszirkular polarisiertes Licht die Bewegung einer Linksschraube beschreibt. Umgekehrt beschreibt der  $\mathbf{E}$ -Vektor für linkszirkular polarisiertes Licht eine Rechtsschraube.<sup>4</sup> In der neueren Literatur wird deshalb deshalb die Definition für links- und rechtszirkular polarisiert manchmal genau umgekehrt benutzt.

Das  $\pm$  Zeichen in obiger Gleichung bringt zum Ausdruck, dass wir links- und rechtszirkular polarisiertes Licht erzeugen können. Wir führen also den Begriff der *Händigkeit* oder *Chiralität* ein. Das Pluszeichen steht dabei für linkszirkular polarisiertes Licht, d.h. wenn wir uns das elektrische Feld für einen festen Zeitpunkt  $t = t_0$  betrachten, so beschreibt es eine rechtshändige Spirale entlang der Ausbreitungsrichtung. Eine Darstellung von linkszirkular polarisiertem Licht ist in Abb. 3.4 gegeben. Die Endpunkte des  $\mathbf{E}$ -Feldvektors liegen auf einer Rechtsschraube.

Wie oben bereits erwähnt lässt sich zirkular polarisiertes Licht durch Summation von zwei senkrecht zueinander linear polarisierten Wellen gleicher Amplitude und passender Phasenverschiebung erhalten. In gleicher Weise kann man jede linear polarisierte Welle als Summe einer links- und rechtszirkular polarisierten Welle darstellen.

<sup>4</sup>Zeigt der Daumen der rechten Hand in Richtung der Ausbreitungsrichtung, so geben die gekrümmten Finger den Drehsinn einer Rechtsschraube an. Zur Definition von rechts und linkszirkular sei hier noch angemerkt, dass im Folgenden die in der Optik gebräuchliche Konvention verwendet wird. In der Quantenmechanik wird die mit dem Spin des Photons verknüpfte Zirkularpolarisation jedoch gerade umgekehrt definiert (vergleiche hierzu Abschnitt 10.3.3).

### 3.1.3 Elliptisch polarisiertes Licht

Der allgemeinste Fall einer monochromatischen Welle, den man aus (3.0.1) konstruieren kann, ist der von *elliptisch polarisiertes Licht* (siehe Abb. 3.5). Sowohl linear als auch zirkular polarisiertes Licht sind Spezialfälle des elliptisch polarisierten Lichts, dessen resultierender  $\mathbf{E}$ -Vektor sowohl rotiert als auch seinen Betrag ändert. Nach (3.1.1) gilt

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{i}}E_{10}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + \hat{\mathbf{j}}E_{20}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\varphi)} \quad \text{mit } \varphi = \alpha_2 - \alpha_1 \quad (3.1.9)$$

Elliptisch polarisiertes Licht erhält man allgemein durch Überlagerung zweier senkrecht zueinander linear polarisierter Wellen mit unterschiedlichen Amplituden  $E_1$  und  $E_2$ , die gegeneinander um den Phasenwinkel  $\varphi$  phasenverschoben sind.

Für  $\varphi = \pm\pi/2$  erhält man

$$\mathbf{E} = (E_{10}\hat{\mathbf{i}} \pm iE_{20}\hat{\mathbf{j}})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} . \quad (3.1.10)$$

In diesem Fall erhält man für die Feldkomponenten in  $\hat{\mathbf{i}}$  und  $\hat{\mathbf{j}}$  Richtung eine Ellipsengleichung in Hauptachsenform

$$\frac{E_i^2}{E_{10}^2} + \frac{E_j^2}{E_{20}^2} = 1 \quad (3.1.11)$$

Die Hauptachsen der Ellipse liegen dann in  $\hat{\mathbf{i}}$  und  $\hat{\mathbf{j}}$  Richtung. Im allgemeinen Fall  $\varphi \neq \pm\pi/2$  schließt die Hauptachse der Ellipse einen endlichen Winkel  $\alpha$  mit der Richtung des Einheitsvektors  $\hat{\mathbf{i}}$  ein, der durch

$$\tan 2\alpha = \frac{2E_{10}E_{20}\cos\varphi}{E_{10}^2 + E_{20}^2} \quad (3.1.12)$$

gegeben ist.

### 3.1.4 Polarisation und Drehimpuls

Wir werden später bei der Diskussion der *Quantenoptik* sehen, dass die Quantenstatistik des elektromagnetischen Feldes der eines Ensembles von identischen Teilchen mit *Bose-Statistik* entspricht. Diese Teilchen werden Photonen genannt und müssen entsprechend der Bose-Statistik einen ganzzahligen Spin besitzen. Darüber hinaus werden wir sehen, dass aus Gründen der Drehimpulserhaltung bei der Wechselwirkung von Photonen mit Atomen der Spin von der Größe  $\pm 1$  in Einheiten des *Planck'schen Wirkungsquantums*  $\hbar$  sein muss. Daraus folgt, dass die beste Beschreibung für ein Photon eine zirkular polarisierte Welle ist, und zwar rechtszirkular polarisiert für Spin 1 und linkszirkular polarisiert für Spin  $-1$ . Linear

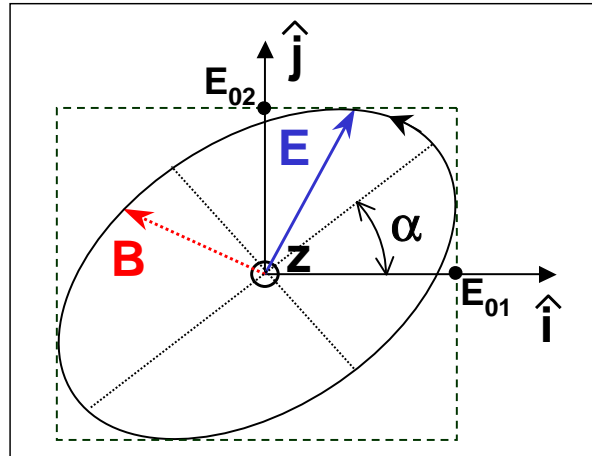


Abbildung 3.5: Elliptisch polarisiertes Licht: Beobachtung an einem festen Ort; das Ende des elektrischen Feldvektors beschreibt eine elliptische Bahn in einer Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung  $z$ . Die Hauptachse der Ellipse schließt mit dem Einheitsvektor  $\hat{i}$  den Winkel  $\alpha$  ein.

polarisiertes Licht sollte daher korrekterweise als eine Überlagerung zweier zirkular polarisierter entgegengesetzter Händigkeit Wellen betrachtet werden. Photonen existieren also in beiden Händigkeiten, oder anders ausgedrückt, die elektromagnetische Wechselwirkung besitzt chirale Symmetrie. Dies gilt nicht für die schwache Wechselwirkung. Neutrinos sind daher nur linkshändig und Antineutrinos nur rechtshändig vorzufinden.

Wir wollen in diesem Abschnitt noch eine Bemerkung zum Absorptionsprozess von zirkular polarisierten Wellen gemacht werden. Bei Lichtabsorption tritt nicht nur der Strahlungsdruck auf, sondern es erfolgt auch eine Übertragung eines Drehimpulses

$$\Delta L = \frac{\text{absorbierte Energie}}{\text{Kreisfrequenz der Welle}} = \frac{W}{\omega} . \quad (3.1.13)$$

### 3.1.5 Jones Darstellung

Die mathematische Behandlung der Polarisation stellt ein Problem der linearen Algebra dar. Wir können den schon oben erwähnten Projektionsformalismus verallgemeinern, indem wir den Polarisationszustand einer monochromatischen Lichtwelle durch einen zweidimensionalen Vektor mit komplexen Koeffizienten beschreiben. Der Transport der Polarisation durch ein Medium wird dann über Matrizenmultiplikation beschrieben. Die Vektoren werden als Jones Vektoren und die Abbildungsmatrizen als Jones Matrizen bezeichnet (eine ausführliche Beschreibung ist z.B. in E. Hecht: Optik, Oldenbourg Verlag, München, oder in Fowles: Modern Optics, Dover, gegeben).

### 3.1.6 Polarisationsgrad von Licht

Licht, das beispielsweise von einer Glühwendel oder einer Gasentladung erzeugt wird, ist im Allgemeinen unpolarisiert. In Wirklichkeit bedeutet dies, dass solch unpolarisiertes Licht als eine Überlagerung sehr vieler, linear polarisierter Wellen betrachtet werden kann, die alle eine statistisch verteilte Phase



und Polarisationssebene besitzen. Darüberhinaus ändert sich die Phasenbeziehung der einzelnen Wellen im Laufe der Zeit, da die Lichtquelle nicht streng monochromatisch ist. Ein derart chaotisches Ensemble von Wellen nennt man *unpolarisiert* oder man spricht von *natürlichem Licht*. Manchmal gibt es allerdings bevorzugte Polarisationssebenen und man erhält *teilweise polarisiertes Licht*.

Manchmal ist es wichtig, den *Polarisationsgrad* einer Lichtwelle zu beschreiben. Der Polarisationsgrad von Licht kann allgemein durch

$$P \equiv \frac{I_{\text{pol}}}{I_{\text{ges}}} \quad (3.1.14)$$

definiert werden, wobei  $I_{\text{pol}}$  die Intensität des polarisierten Anteils und  $I_{\text{ges}}$  die Gesamtintensität des Lichts ist.

Bei der Angabe des Polarisationsgrades  $P$  ist allerdings die Art der Polarisation anzugeben. Nehmen wir als Beispiel Licht, dass zu 100% linear entlang des Einheitsvektors  $\hat{\mathbf{u}} = (\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})/\sqrt{2}$  polarisiert ist, so können wir das elektrische Feld als

$$\mathbf{E} = \frac{(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})}{\sqrt{2}} E_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (3.1.15)$$

schreiben. Interessieren wir uns für den linearen Polarisationsgrad entlang  $\hat{\mathbf{i}}$ , so erhalten wir

$$P_{\hat{\mathbf{i}}} = \frac{I_{\hat{\mathbf{i}}}}{I_{\text{ges}}} = \frac{|\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{i}}|^2}{|\mathbf{E}|^2} = 50\% \quad (3.1.16)$$

In der Praxis ist aber häufig von Interesse, ob eine lineare Polarisation entlang einer beliebigen Richtung vorliegt. Experimentell lässt sich dann der Polarisationsgrad dadurch bestimmen, dass man einen drehbaren Analysator in den Strahl stellt und dabei die Intensität als Funktion des Analysatorwinkels aufnimmt. Der Polarisationsgrad ergibt sich dann zu

$$P = \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}} \quad (3.1.17)$$

Linear polarisiertes Licht lässt sich in beliebige Raumkomponenten zerlegen. Die Intensität des durch einen Analysator transmittierten linear polarisierten Lichts erhält man zu

$$I(\theta) = I_0 \cos^2 \theta = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \cos^2 \theta \quad (3.1.18)$$

wobei  $\theta$  der Winkel zwischen der Polarisationssebene des linear polarisierten Lichts und derjenigen des Analysators ist (siehe hierzu Abb. 3.6). Die durch (3.1.18) gegebene Abhängigkeit der transmittierten Lichtintensität vom Winkel  $\theta$  ist unter dem Namen **Malus'sches Gesetz** bekannt.

### 3.1.7 Zustände orthogonaler Polarisation

Zwei Polarisationsmoden nennt man *orthogonal*, wenn die Vektoren ihrer elektrischen Felder aufeinander senkrecht stehen, d.h. wenn

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2^* = 0, \quad (3.1.19)$$

gilt. Für linear polarisierte Wellen sind diese Amplituden zwei reelle Vektoren, die im üblichen Sinne aufeinander senkrecht stehen, d.h.  $E_{1x}E_{2x} + E_{1y}E_{2y} = 0$ . Zwei zirkular polarisierte Wellen mit entgegengesetztem Drehsinn sind ebenfalls orthogonal. Aus (3.1.7) folgt nämlich

$$\mathbf{E}_1 = E_0(\hat{\mathbf{i}} + i\hat{\mathbf{j}}) \quad \mathbf{E}_2 = E_0(\hat{\mathbf{i}} - i\hat{\mathbf{j}}) \quad (3.1.20)$$

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2^* = E_0^2(\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} + i^2 \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}}) = 0. \quad (3.1.21)$$

## 3.2 Polarisatoren und Analysatoren

Unter einem Polarisator versteht man ein optisches Element, mit dessen Hilfe aus unpolarisiertem Licht Licht mit einem definiertem Polarisationszustand erzeugt werden kann (siehe hierzu Abb. 3.6). Jede denkbare Abhängigkeit der Ausbreitungseigenschaften des Lichtes von seiner Polarisationsrichtung kann theoretisch dazu benutzt werden, polarisiertes Licht zu erzeugen. Je nach Typ der erzeugten Polarisation spricht man von einem *Linearpolarisator*, *Zirkularpolarisator* oder einem *elliptischen Polarisator*. Allen Polarisatoren liegt das gleiche physikalische Funktionsprinzip zugrunde. Polarisatoren besitzen eine optisch asymmetrische Komponente, die in der Lage ist, Licht der ungewünschten Polarisationsrichtung zu unterdrücken. Dabei werden in den unterschiedlichen Polarisatorarten im Wesentlichen vier unterschiedliche Mechanismen verwendet: (i) Reflexion, (ii) Streuung (iii) richtungsselektive Absorption (Dichroismus) und (iv) Doppelbrechung.

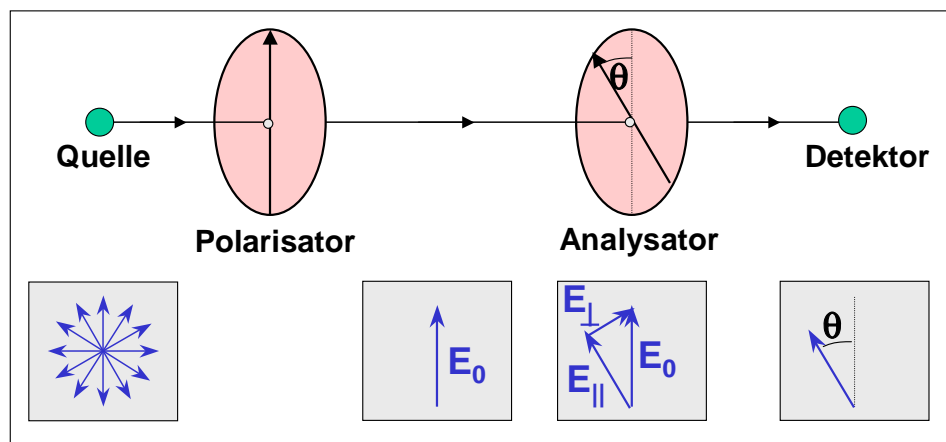


Abbildung 3.6: Funktionsweise eines Linearpolarisators. Ein idealer Linearpolarisator lässt nur die Feldkomponente parallel zur Polarisatorrichtung passieren. Ein nachgeschalteter Analysator bestimmt die Feldkomponente parallel zur Analysatorrichtung.

Mit Hilfe von Polarisatoren lassen sich auch die Polarisations Eigenschaften von Licht bestimmen. Der Polarisator fungiert dann als *Analysator* (siehe Abb. 3.6). Mit Hilfe eines Analysators kann der Polarisationsgrad von Licht ermittelt werden.

Beim Vorgang des Polarisierens von Licht wird im Wesentlichen aus einem Strahl unpolarisierten Lichts ein Strahl polarisierten Lichts extrahiert. Der Rest des Lichts, der manchmal dazu orthogonal polarisiert ist, wird häufig nicht verwendet. Es ist wichtig festzustellen, dass es keine Möglichkeit gibt, Licht so umzuformen, dass man aus einer unpolarisierten Quelle einen einzigen Strahl polarisierten Lichts erhält. Gäbe es eine solche Möglichkeit, könnte man damit den 2. Hauptsatz der Thermodynamik umgehen.

### 3.2.1 Polarisation durch Streuung

Wir wollen nun die bereits in Abschnitt 2.6.2 erwähnte Polarisation durch Streuung näher diskutieren. Dazu betrachten wir natürliches Licht, das an Molekülen oder kleinen dielektrischen Teilchen mit einem Durchmesser, der klein gegenüber der Wellenlänge ist, gestreut wird. Bei dem Streuprozess werden die Teilchen zu Dipolschwingungen angeregt, wodurch diese wiederum Licht derselben Frequenz abstrahlen. Da es sich hierbei um einen stimulierten Prozess handelt, entspricht die Schwingungsachse der Dipole der Feldrichtung des einfallenden Lichts. Bei natürlichem Licht ist letztere willkürlich, so dass wir Dipolschwingungen mit beliebiger Richtung senkrecht zur Einfallsrichtung des Lichts (aufgrund der Transversalität von Licht) vorfinden.

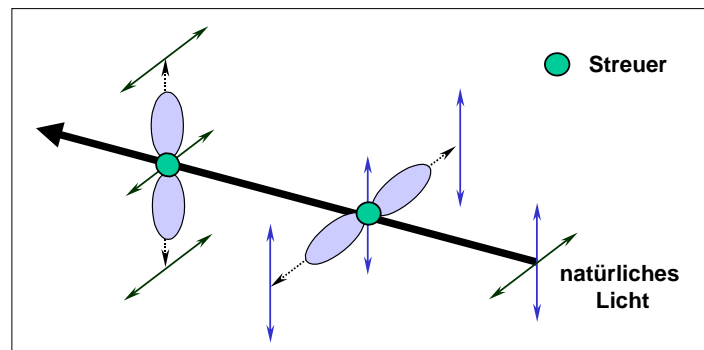


Abbildung 3.7: Zur Streuung von natürlichem Licht. Beobachtet man senkrecht zum einfallenden Licht, so erhält man immer linear polarisiertes Licht mit einer Polarisationsrichtung, die jeweils senkrecht auf der Einfallsebene und der Beobachtungsrichtung steht. Am Ort des Streuers sind die Schwingungsrichtung des Dipolstrahlers (Pfeil) und seine Abstrahlcharakteristik gezeigt

Wie bereits in Abschnitt 2.6.2 erwähnt, strahlen Dipole entlang der Schwingungsachse nicht ab. Darüberhinaus ist das senkrecht zur Dipolachse abgestrahlte Licht parallel zur Dipolachse linear polarisiert. Das senkrecht zur Einfallsebene von unpolarisiertem, natürlichem Licht abgestrahlte Streulicht ist damit zu 100% linear polarisiert und zwar senkrecht zur Einfallsebene und Beobachtungsrichtung (siehe hierzu Abb. 3.7).

Die Effizienz des Streuprozesses von Teilchen, deren Durchmesser klein gegenüber der Wellenlänge ist, hängt stark von der Frequenz ab. Wie bereits in Abschnitt 2.5 diskutiert wurde, variiert die Effizienz mit  $\omega^4$ . Dies verursacht z.B. die blaue Färbung des Himmels. Beim Photographieren will man das Streulicht z.B. aufgrund von Dunst meist eliminieren, um so einen erhöhten Kontrast zu erzielen und den Himmel dunkler erscheinen zu lassen. Dies kann man aufgrund der Polarisation des Streulichts durch Vorschalten eines Polfilters vor das Objektiv der Kamera tun.

### 3.2.2 Polarisation durch Reflexion

#### Erzeugung von linear polarisiertem Licht

Fällt Licht unter einem Einfallswinkel  $0^\circ < \theta_e < 90^\circ$  auf eine dielektrische Oberfläche, so ergeben die *Fresnel'schen Formeln* aus Abschnitt 2.6.2 unterschiedliche Reflexionskoeffizienten für Licht, das parallel zur Einfallsebene (TM-Polarisation) und senkrecht zur Einfallsebene (TE-Polarisation) polarisiert ist. Das extremale Verhältnis der Reflexionskoeffizienten ergibt sich am *Brewster-Winkel*  $\theta_B$ , an dem der Reflexionskoeffizient der TM-Komponente gleich Null wird (vergleiche Gleichung 2.6.41). Betrachten wir das unter dem Brewster-Winkel reflektierte Licht, so ist dieses senkrecht zur Einfallsebene polarisiert (es enthält nur die TE-Komponente). Die reflektierende Oberfläche stellt also einen perfekten Polarisator dar, der die unerwünschte TM-Komponente unterdrückt. Ein Problem eines solchen einfachen Polarisators für linear polarisiertes Licht stellt aber sein Reflexionskoeffizient  $r_\perp \ll 100\%$  dar. Das heißt, die Effizienz des Polarisators liegt weit unter 100%, so dass bei einer einfachen dielektrischen Oberfläche als Polarisator hohe Verluste auftreten. Diese Verluste werden in der Praxis durch Aufbringen von dünnen dielektrischen Mehrschichten, die die Reflexion der TE-Komponente auf weit über 90% erhöhen, stark reduzieren. Diese *dielektrischen Polarisatoren* werden häufig in Hochleistungslasern eingesetzt.

*Kristallpolarisatoren* verwenden die innere Totalreflexion, um die polarisierte Komponente vom unpolarisierten Licht zu trennen. Sie werden bei sehr hohen Ansprüchen an den Polarisationsgrad verwendet (eine nähere Diskussion folgt später).

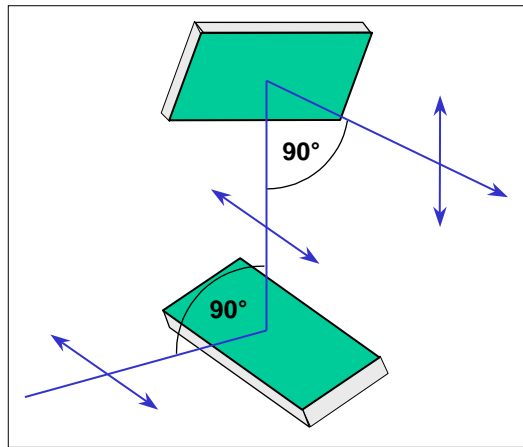


Abbildung 3.8: Drehung der Polarisationsrichtung bei Reflexion von Licht.

Es sei hier noch darauf hingewiesen, dass Reflexion an einer dielektrischen Oberfläche nicht nur dazu eingesetzt werden kann, Licht zu polarisieren. Man kann Reflexion auch zur Drehung der Polarisationsrichtung von linear polarisiertem Licht verwenden. Dies ist in Abb. 3.8 gezeigt. Man benutzt hier zwei Reflexionen, bei denen das linear polarisierte Licht zunächst um  $90^\circ$  nach oben und dann um  $90^\circ$  nach rechts abgelenkt wird. Dabei wird die Polarisationsrichtung des linear polarisierten Lichts um  $90^\circ$  gedreht. Ganz allgemein kann man sagen: Liegt bei mehrfachen Reflexionen die Strahlführung nicht in einer Ebene, so kann dies zu einer Drehung der Polarisationssebene des Lichtes führen.

### Erzeugung von zirkular polarisiertem Licht

Wir haben in Abschnitt 2.6.3 gesehen, dass bei Totalreflexion eine Phasenschiebung  $\Delta \neq 0$  zwischen der TE- und der TM-Komponente auftritt. Diese Tatsache kann man sich zur Veränderung des Polarisationszustandes zunutze machen. Ein Beispiel hierfür ist das in Abb. 3.9 gezeigte *Fresnel'sche Parallelepipiped*. Bei diesem wird durch zweimalige Totalreflexion aus linear polarisiertem Licht zirkular polarisiertes Licht erzeugt. Um dies zu erreichen, muss durch die zweimalige Totalreflexion eine Phasendifferenz von  $\Delta = \pi/2$  zwischen der TE- und der TM-Komponente, als  $\Delta = \pi/4$  pro Reflexion erzeugt werden. Außerdem muss für zirkular polarisiertes Licht die Amplitude der TE- und der TM-Komponente gleich sein. Dies erreicht man dadurch, dass die Schwingungsebene des einfallenden, linear polarisierten Lichts mit der Einfallsebene im Parallelepipiped einen Winkel von  $45^\circ$  bildet.

Mit Hilfe von (2.6.60)<sup>5</sup>

$$\tan \frac{\Delta}{2} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_e} \sqrt{\sin^2 \theta_e - n^2}}{\sin^2 \theta_e} \quad (3.2.1)$$

folgt mit  $\tan \Delta/2 = \tan(\pi/8) = 0.414$  für ein Parallelepipiped aus Kronglas ( $n = 1/1.5 = 2/3$ )

$$0.414 \sin^2 \theta_e = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_e} \sqrt{\sin^2 \theta_e - (2/3)^2} . \quad (3.2.2)$$

<sup>5</sup>Hierbei wird  $\cos \theta_e = (1 - \sin^2 \theta_e)^{1/2}$  benutzt.

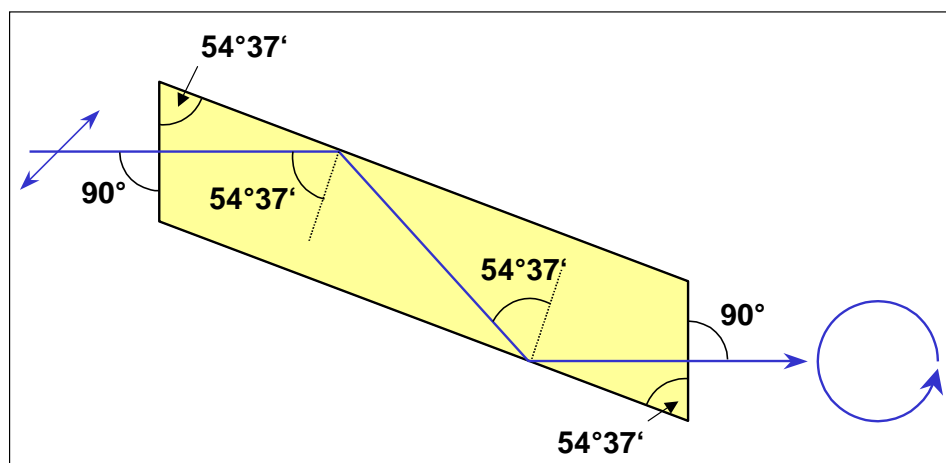


Abbildung 3.9: Fresnel'sches Parallelepiped zur Herstellung von zirkular polarisiertem Licht durch zweimalige Totalreflexion. Die beiden inneren Totalreflexionen erzeugen eine Phasendifferenz von  $90^\circ$  zwischen der TE- und der TM-Komponente des einfallenden linear polarisierten Lichtes. Die Amplitude der einfallenden TE- und der TM-Komponente sind gleich, falls die Schwingungsebene des linear polarisierten Lichtes um  $45^\circ$  gegen die Ebene des Parallelepipedes verdreht ist.

Die Lösung führt auf zwei mögliche Einfallswinkel. **Fresnel** (1823) hat dazu ein in Abb. 3.9 gezeigtes Parallelepiped aus Kronglas angefertigt, mit dem er den Übergang von linear zu zirkular polarisiertem Licht realisieren konnte. Der Querschnitt des Glaskörpers stellt ein Parallelogramm dar, dessen spitzer Winkel bei  $A$  und  $C$  genau  $54^\circ 27'$  beträgt. Linear polarisiertes Licht, das senkrecht auf die Stirnfläche trifft, wird zweimal unter dem Winkel  $54^\circ 27'$  totalreflektiert und verlässt den Glaskörper wiederum senkrecht auf der gegenüberliegenden Stirnfläche. Das Licht ist dann tatsächlich zirkular polarisiert, falls die Schwingungsebene des linear polarisierten Lichtes mit der Einfallsebene im Parallelepiped einen Winkel von  $45^\circ$  einschließt, damit die Amplitude der TE- und der TM-Komponente gleich groß ist.

Analysiert man das Licht hinter dem Parallelepiped mit einem Analysator, so zeigt dieser wegen der axialen Symmetrie des zirkular polarisierten Lichtes in allen Stellungen die gleiche Intensität. Um wirklich zu beweisen, dass es sich um zirkular polarisiertes und nicht um natürliches Licht handelt, hat Fresnel ein zweites Parallelepiped benutzt. Dieses macht aus dem zirkular polarisierten Licht wiederum linear polarisiertes Licht, was man mit dem Analysator leicht nachweisen kann. Wäre aus dem ersten Parallelepiped natürliches Licht ausgetreten, so hätte man auch nach dem zweiten Parallelepiped natürliches Licht.<sup>6</sup>

### Erzeugung von elliptisch polarisiertem Licht

Wir haben bereits bei der Diskussion des zirkular polarisierten Lichtes im letzten Abschnitt gesehen, dass bei der Totalreflexion eine Phasenschiebung zwischen der TE- und der TM-Komponente von linear polarisiertem Licht auftritt. Das reflektierte Licht ist damit nicht mehr linear polarisiert. Die TE- ( $E_\perp$  oder  $E_{TE}$ ) und TM-Komponente ( $E_\parallel$  oder  $E_{TM}$ ) sind nach der Reflexion nun vorphasenstarr gekoppelt, jedoch ist ihre zeitliche Phasendifferenz nicht mehr Null oder  $\pm\pi$  wie beim linear polarisierten Licht, sondern nimmt einen Zwischenwert an. Das entspricht dem allgemeinen Polarisationszustand, den man als *elliptisch polarisiert* bezeichnet.

<sup>6</sup>Der tiefere Grund für das unterschiedliche Verhalten beim Durchgang von zirkular polarisiertem und natürlichem Licht durch das zweite Parallelepiped liegt darin begründet, dass zirkular polarisiertes Licht eine echte axiale Symmetrie besitzt und natürliches Licht nur eine statistische.

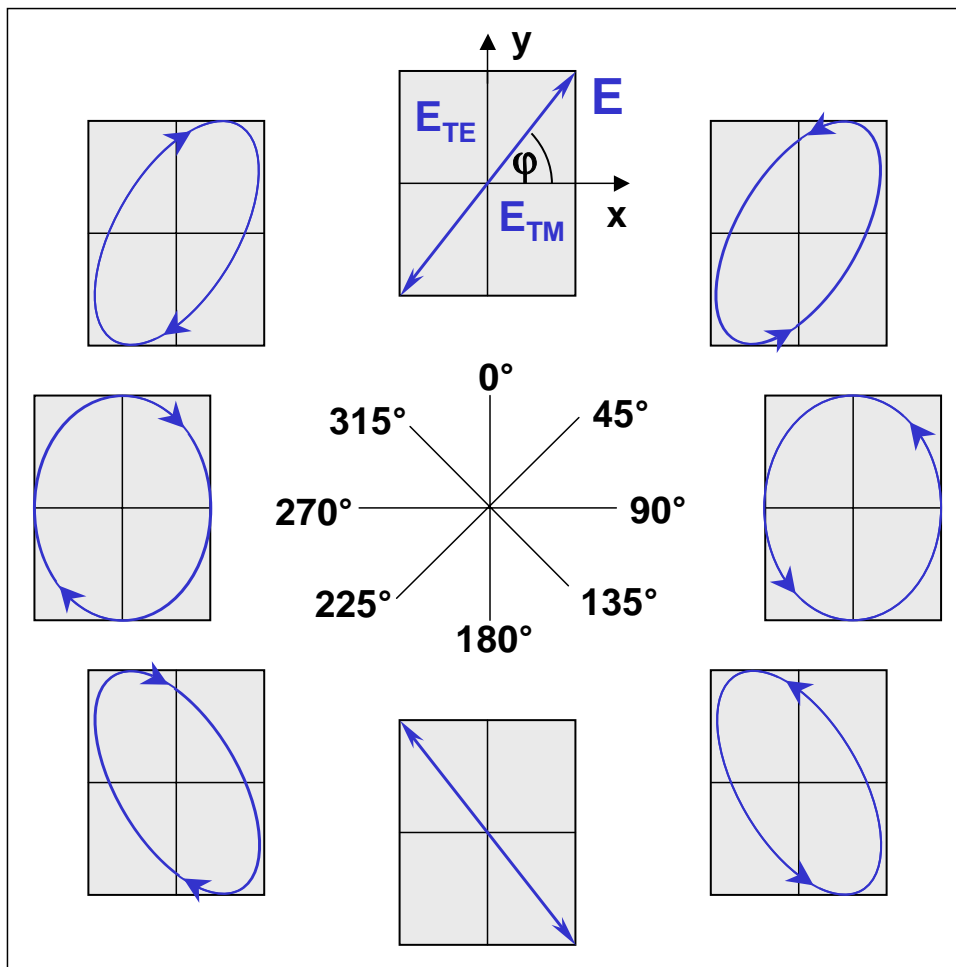


Abbildung 3.10: Schwingungsformen elliptisch polarisierten Lichtes in Abhängigkeit vom Phasenwinkel  $\Delta$ . Die TM-Komponente läuft der TE-Komponente voraus, die Ausbreitungsrichtung ist normal zur Paperebene auf den Betrachter zu. Die Ellipsen auf der rechten (linken) Seite gehören zu rechtselliptisch (linkselliptisch) polarisiertem Licht. Für  $\Delta = 0^\circ$  oder  $180^\circ$  ergibt sich linear polarisiertes Licht. Für  $\Delta = 90^\circ$  oder  $270^\circ$  ergibt sich zirkular polarisiertes Licht, falls  $E_{TM} = E_{TE}$ .

Nimmt man an, dass die Komponente  $E_{TM}$  um den Phasenwinkel  $\Delta$  vorseilt, so gilt in komplexer Schreibweise für das Zeitverhalten  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}e^{i\omega t}$  mit  $\mathbf{E} = \{E_{TM}, E_{TE}\}$  und  $E_{TM} = E \cos \varphi e^{i\Delta}$ ,  $E_{TE} = E \sin \varphi$ . Die Realteile der Komponenten von  $\mathbf{E}(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= |E_{TM}| \cos(\omega t + \Delta) \\ y(t) &= |E_{TE}| \cos(\omega t) \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

setzen sich zu einer elliptischen Schwingung zusammen, das heißt, der Endpunkt des Vektors  $\mathbf{E}(t)$  beschreibt in der Ebene  $z = \text{const}$  während der Schwingungsdauer  $2\pi/\omega$  genau eine vollständige Ellipse um die Ausbreitungsrichtung (vergleiche hierzu Abb. 3.4). Die Form der Ellipse findet man nach Elimination des Parameter  $t$  zu

$$\frac{x^2}{|E_{TM}|^2} - 2 \frac{x}{|E_{TM}|} \frac{y}{|E_{TE}|} \cos \Delta + \frac{y^2}{|E_{TE}|^2} = \sin^2 \Delta . \tag{3.2.4}$$

Die Ellipse tangiert das Rechteck mit den Seiten  $2|E_{TM}|$  und  $2|E_{TE}|$ , im übrigen hängen ihre Form sowie die Orientierung ihrer Hauptachse von der Phasendifferenz  $\Delta$  ab, wie in Abb. 3.10 gezeigt ist.

### 3.2.3 Polarisation durch Reflexion an absorbierenden Medien

Metalle sind gute elektrische Leiter und werden daher elektromagnetische Felder abschirmen. Abgesehen von idealisierten, perfekten Leitern (unendliche Leitfähigkeit) geschieht dies über einen endlichen Raumbereich, d.h. die elektromagnetischen Felder dringen bis in eine gewisse Tiefe, die so genannte Skin-Tiefe in das Metall ein. Dabei wird ein Teil des Lichts absorbiert. Wir werden in folgendem die in Abschnitt 2.6.6 begonnene Diskussion etwas vertiefen, wobei wir nur den Fall betrachten, dass Licht aus Luft ( $n_e = 1$ ) auf ein Metall trifft. Mathematisch lässt sich dieser Sachverhalt durch einen komplexen relativen Brechungsindex der Form

$$n = n_R + i\kappa \quad (3.2.5)$$

ausdrücken. Mit  $\omega = (c/n)k$  erhält man den komplexen Wellenvektor  $K_t = (n_R/c)\omega + i(\kappa/c)\omega$ . Im Gegensatz zu nichtabsorbierenden Materialien (Gleichungen (2.6.5) - (2.6.7)) setzen wir jetzt

$$\mathbf{E}_e = \mathbf{E}_{e0} e^{i(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (3.2.6)$$

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{r0} e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (3.2.7)$$

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{t0} e^{i(\mathbf{K}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \mathbf{E}_{t0} e^{i[(\mathbf{k}_t + i\mathbf{k}'_t) \cdot \mathbf{r} - \omega t]} \quad (3.2.8)$$

an. Das heißt, wir benutzen für das absorbierende Medium einen komplexen Wellenvektor

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{k}_t + i\mathbf{k}'_t . \quad (3.2.9)$$

Im absorbierenden Medium erhält damit man eine gedämpfte Welle

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{t0} e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t)} e^{-\mathbf{k}'_t \cdot \mathbf{r}} . \quad (3.2.10)$$

Mit der Wellengleichung (2.6.1) erhalten wir unter Ausnutzen von  $\nabla = i\mathbf{k}$

$$(\mathbf{K}_t \cdot \mathbf{K}_t) \mathbf{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = n^2 \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} , \quad (3.2.11)$$

woraus sich



$$(\mathbf{k}_t + i\mathbf{k}'_t) \cdot (\mathbf{k}_t + i\mathbf{k}'_t) = \frac{\omega^2}{c^2} (n_R + i\kappa)^2 \quad (3.2.12)$$

ergibt. Damit erhalten wir nach Real- und Imaginärteil getrennt

$$k_t^2 - k_t'^2 = (n_R^2 - \kappa^2) \frac{\omega^2}{c^2} = (n_R^2 - \kappa^2) k_e^2 \quad (3.2.13)$$

$$\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{k}'_t = k_t k_t' \cos \theta_e = n_R \kappa \frac{\omega^2}{c^2} = n_R \kappa k_e^2 . \quad (3.2.14)$$

Die beiden Gleichungen zeigen, dass  $k_t$  und  $k_t'$  in komplizierter Weise koppeln. Insbesondere sind im Allgemeinen  $\mathbf{k}_t$  und  $\mathbf{k}'_t$  nicht kollinear. Derartige gedämpfte Wellen bezeichnet man als inhomogen.

Die Stetigkeit der Tangentialkomponente des elektrischen Feldes an der Grenzfläche ergibt

$$\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} \quad (3.2.15)$$

$$\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{k}_t + i\mathbf{k}'_t) \cdot \mathbf{r} . \quad (3.2.16)$$

Gleichung (3.2.15) führt auf das Reflexionsgesetz, d.h. Einfallswinkel gleich Reflexionswinkel. Für die transmittierte Welle finden wir (Real- und Imaginärteil)

$$\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} \quad (3.2.17)$$

$$0 = \mathbf{k}'_t \cdot \mathbf{r} . \quad (3.2.18)$$

Aus (3.2.18) folgt sofort, dass die Wellenfronten der gedämpften Welle parallel zur Grenzfläche verlaufen. Dies haben wir in ähnlicher Weise schon bei der Diskussion der evaneszenten Wellen kennengelernt. Aufgrund von Gleichung (3.2.17) können wir für den oszillierenden Anteil der transmittierten Welle wiederum formal

$$k_e \sin \theta_e = k_t \sin \theta_t , \quad (3.2.19)$$

schreiben (Brechungsgesetz), wobei der Zusammenhang zwischen  $k_t$  und  $n$  durch (3.2.13 und (3.2.14) gegeben ist.

Die Amplitudenreflexionskoeffizienten kann man entsprechend (2.6.26) und (2.6.28) schreiben als

$$r_{\perp} = \frac{E_r}{E_e} \Big|_{\text{TE}} = \frac{\cos \theta_e - n \cos \theta_t}{\cos \theta_e + n \cos \theta_t} . \quad (3.2.20)$$

$$r_{\parallel} = \frac{E_r}{E_e} \Big|_{\text{TM}} = - \frac{n \cos \theta_e - \cos \theta_t}{n \cos \theta_e + \cos \theta_t} , \quad (3.2.21)$$

wobei jetzt<sup>7</sup>

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_e}{n^2}} \quad (3.2.22)$$

eine komplexe Zahl ist.

Als Spezialfall wollen wir kurz den senkrechten Einfall diskutieren. Für diesen Fall reduziert sich (3.2.12) zu

$$k_t + ik'_t = k_e(n_t + i\kappa) \quad (3.2.23)$$

und somit

$$k_t = n_t k_e \text{ und } k'_t = \kappa k_e . \quad (3.2.24)$$

Damit ist die *Eindringtiefe* der Welle gegeben durch<sup>8</sup>

$$\ell = \frac{1}{2k'_t} = \frac{1}{2\kappa k_e} = \frac{\lambda_e}{4\pi\kappa} . \quad (3.2.25)$$

Die Intensität einer ebenen Lichtquelle, die senkrecht auf das absorbierende Medium trifft, ist nach Durchlaufen der Länge  $\ell$  auf  $1/e$  abgeklungen. Den Kehrwert  $1/\ell$  der Eindringtiefe bezeichnet man als *Absorptionskoeffizienten*. Gleichung (3.2.25) zeigt, dass die Eindringtiefe für typische Metalle im Bereich  $0.1\lambda_e < \ell < \lambda_e$  liegt.

Typische Reflexionsgrade liegen für Metalle im sichtbaren Bereich bei 70% (z.B. für Kupfer). Wie bereit in Abschnitt 2.6.6 diskutiert, gibt es keinen Brewster Winkel im eigentlichem Sinne. Das heißt, sowohl die TE- als auch die TM-Komponente werden unter allen Winkeln teilweise reflektiert. Jedoch unterscheiden sich die Amplitudenreflexionskoeffizienten außer bei normalen Einfall für die TM- und

<sup>7</sup>Es gilt unter Benutzung des Snelliusschen Brechungsgesetzes:  $\cos^2 \theta_t = 1 - \sin^2 \theta_t = 1 - (k_e/k_t)^2 \sin^2 \theta_e = 1 - (\sin^2 \theta_e/n^2)$ .

<sup>8</sup>Der Faktor 2 resultiert aus der Tatsache, dass man bei der Diskussion der Eindringtiefe immer Intensitäten betrachtet.

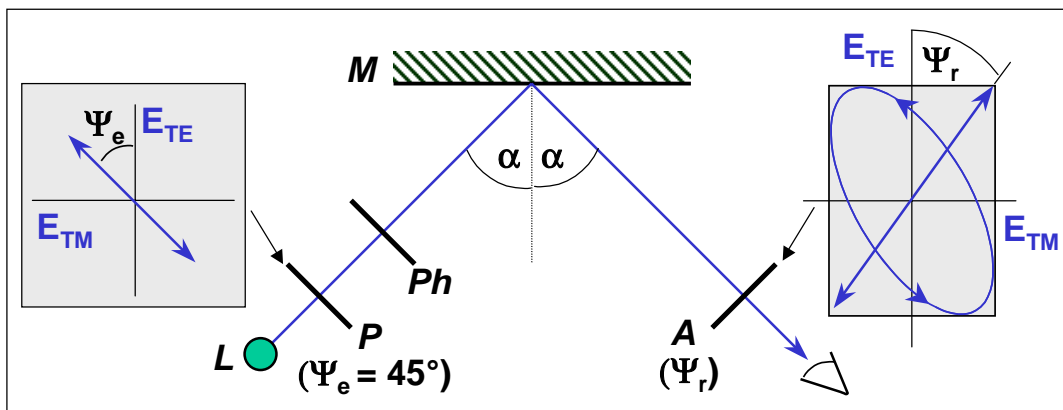


Abbildung 3.11: Ellipsometer zur Messung der Phasenverschiebung zwischen den Schwingungskomponenten parallel (TM) und senkrecht (TE) zur Einfallsebene im reflektierten Licht:  $L$  – monochromatische Lichtquelle,  $P$  – Polarisator,  $45^\circ$  gegen die Einfallsebene geneigt.,  $Ph$  – Phasenschieber,  $A$  – Analysator,  $M$  – Probe. Die Zerlegung des Schwingungsvektors parallel und senkrecht zur Einfallsebene ist bei  $P$  in Strahlrichtung und bei  $A$  entgegen der Strahlrichtung gezeigt. In modernen Ellipsometern werden Laser als Lichtquellen und CCD-Kameras zur Detektion des reflektierten Lichts verwendet.

TE-Komponente. Ferner treten in den Fresnelschen Gleichungen komplexe Größen auf, die im Allgemeinen zu einer Phasendifferenz zwischen der TE- und TM-Komponente führt, die nicht  $0$  oder  $\pi$  beträgt. Dadurch wird linear polarisiertes Licht, das wir als eine Mischung aus TE- und TM-Komponente betrachten können, nach der Reflexion an einem absorbierenden Medium generell zu elliptisch polarisiert werden. Das heißt, man kann die Reflexion an einem absorbierenden Medium zur Erzeugung elliptisch polarisierten Lichtes benutzen. Diese Eigenschaft unterscheidet absorbierende Medien (z.B. Metalle) wesentlich von nichtabsorbierenden Dielektrika. Durch Messen der Polarisation des reflektierten Lichtes als Funktion des Einfallswinkels ist es möglich den komplexen Brechungsindex von absorbierenden Medien zu bestimmen. Dies ist vor allem für stark absorbierende Stoffe wie Metalle wichtig, da diese nicht in Transmission untersucht werden können. Für schwach absorbierende Materialien misst man den komplexen Brechungsindex genauer in Transmission.

## Ellipsometrie

Die speziellen Reflexionseigenschaften von absorbierenden Medien kann man für ein Messverfahren benutzen, das man als *Ellipsometrie* bezeichnet. Eine entsprechende Messanordnung ist in Abb. 3.11 gezeigt. Man lässt monochromatisches, paralleles Licht durch den auf  $45^\circ$  eingestellten Polarisator  $P$  auf die spiegelnde Oberfläche  $M$  des zu untersuchenden Mediums fallen. Zwischen  $P$  und  $M$  ist ein Phasenschieber  $Ph$  montiert, mit dem man den beiden Komponenten (TE und TM) eine beliebige Phasendifferenz  $\Delta'$  erteilen kann. Diese Phasendifferenz soll die bei der Reflexion verursachte Phasenverschiebung zwischen TE- und TM-Komponente gerade kompensieren, um auf der Beobachtungsseite linear polarisiertes Licht zu erhalten. Die Auslöschungsstellung des Analysators liefert dann den Winkel  $\Psi_r$ . Die Genauigkeit, mit der sich die Messwinkel bei  $P$ ,  $Ph$  und  $A$  einstellen lassen, liegen bei etwa  $10^{-2}$  Grad. Die untersuchte Oberfläche kann sehr klein sein (weniger als  $1 \text{ mm}^2$ ).

Eine interessante Anwendung der Ellipsometrie besteht in der ellipsometrischen Messung der Dicke von Adsorptionsschichten. Sind  $\Psi_{r0}$  und  $\Delta_0$  die Messwerte einer vollkommen sauberen Oberfläche und ist  $d$  die Dicke einer fremden Oberflächenschicht (z.B. Oxid- oder Feuchtigkeitfilm), so lässt sich die dadurch hervorgerufene Störung formal durch die linearen Ansätze

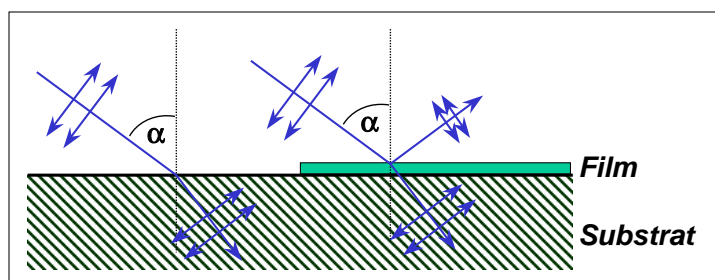


Abbildung 3.12: Brewster-Reflektometrie: Linear polarisiertes Licht wird so auf die Oberfläche fallen gelassen, dass es nur eine TM-Komponente besitzt. Reflektiertes Licht unter dem Brewster-Winkel gibt Aufschluss über eine Oberflächenbedeckung.

$$\Delta = \Delta_0 + \gamma_1 d + \dots \quad \text{und} \quad \Psi_r = \Psi_{r0} + \gamma_2 d + \dots \quad (3.2.26)$$

erfassen. Die Koeffizienten  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  sind Funktionen der beteiligten optischen Konstanten sowie des Einfallswinkels. Ihre Werte können  $10^{-1} - 10^{-3}$  Winkelgrad/Å erreichen. Unter günstigen Bedingungen kann deshalb nicht nur die Dicke monomolekulare Schichten bestimmt werden, sondern sogar Bedeckungsgrade von nur einigen % der Oberfläche gemessen werden.

Eine zur Ellipsometrie konkurrierende Methode ist die Brewster-Reflektometrie (siehe Abb. 3.12), bei der die Tatsache ausgenutzt wird, dass eine absorbierende Fremdschicht auf der Oberfläche eines nichtabsorbierenden Dielektrikums die Bedingung für die Auslöschung der TM-Komponente, d.h. den Brewster-Winkel modifiziert.

### 3.2.4 Polarisation durch Dichroismus und Doppelbrechung

Eine weitere Möglichkeit zur Erzeugung von polarisiertem Licht ist die Ausnutzung der Pänomene *Dichroismus* und *Doppelbrechung*. Im weitesten Sinne bezeichnet der Ausdruck Dichroismus die selektive Absorption einer der orthogonalen linearpolarisierten Zustandskomponenten eines einfallenden Stahlbündels. Der dichroitische Polarisator ist physikalisch anisotrop und absorbiert eine Feldkomponente in stark asymmetrischer oder selektiver Weise. Das einfachste Gerät dieser Art ist ein Gitter aus parallelen leitenden Drähten.

Die Pänomene *Dichroismus* und *Doppelbrechung* werden erst in Abschnitt 3.3.1 und 3.3.2 ausführlich diskutiert, nachdem wir uns mit der Wellenausbreitung und Polarisation in anisotropen Medien befasst haben.

### 3.2.5 Extinktionsverhältnis

Ein Maß für die *Effektivität* eines Polarisators kann dadurch gewonnen werden, dass man unpolarisiertes Licht durch zwei identische Polarisatoren schickt, die in Serie geschaltet sind. Wenn beide Polarisatoren Licht der gleichen Polarisationstichtung durchlassen, geht diese Komponente durch beide Polarisatoren hindurch und man misst die Intensität  $I_1$ . Dreht man nun einen Polarisator, so dass die Durchlassrichtungen senkrecht aufeinander stehen, so sollte idealerweise kein Licht durch die Anordnung kommen. In der Realität misst man aber eine Restintensität  $I_2$ . Das Verhältnis  $I_1/I_2$  bezeichnet man als *Extinktionsverhältnis*. In guten Kristallpolarisatoren erreicht man Werte von bis zu  $10^7$ , ähnliche Werte kann man durch Reflexion unter dem Brewster Winkel erhalten. Polaroid-Folien (siehe Abschnitt 3.3.1) haben einen typischen Wert von  $10^3$ .

### 3.3 Wellenausbreitung und Polarisation in anisotropen Medien

Wir werden in diesem Kapitel diskutieren, wie man polarisiertes Licht durch Ausnutzen der anisotropen optischen Eigenschaften von Materialien erhalten kann. Dazu müssen wir uns mit der Wellenausbreitung in anisotropen Medien beschäftigen.

In Kapitel 2 haben wir die Wechselwirkung von Licht mit einem linearen, homogenen und isotropen Medium diskutiert. Wir wollen nun die Diskussion auf den Fall anisotroper Festkörper ausweiten, das heißt auf Materialien, bei denen die Ausbreitungseigenschaften von der Orientierung abhängen. Bei anisotropen Materialien ist meist die Rotationssymmetrie auf die eine oder andere Weise gebrochen. Der einfachste Fall ist ein nicht kubischer Kristall.<sup>9</sup> Denken sie z.B. an die Schichtstruktur eines Hochtemperatur-Supraleiters oder von Graphit, die sogar auch makroskopisch sichtbar ist.<sup>10</sup> Unabhängig von den genauen Details auf atomarer Skala ist entscheidend, dass wir für ein optisch anisotropes Medium nicht mehr annehmen dürfen, dass die durch ein elektrisches Feld  $\mathbf{E}$  induzierte Polarisation  $\mathbf{P}$  zum E-Feld parallel ist. Da wir aber weiterhin von einem linearen Medium ausgehen, d.h. die Linearität der Antwort (Polarisation) des Mediums auf die Störung (elektrisches Feld) annehmen wollen, ist die allgemeinste Lösung für die frequenzabhängige Polarisation durch

$$\mathbf{P}(\omega) = \varepsilon_0 \tilde{\chi}(\omega) \mathbf{E}(\omega) \quad (3.3.1)$$

gegeben. Hierbei ist die Suszeptibilität  $\tilde{\chi}$  ein Tensor, d.h. eine  $(3 \times 3)$  Matrix mit komplexen Koeffizienten, der jedem  $\mathbf{E}$  eindeutig ein  $\mathbf{P}$  zuordnet:

$$\tilde{\chi} = \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{pmatrix}, \quad (3.3.2)$$

Da die elektrische Suszeptibilität jetzt kein Skalar sondern ein Tensor ist, ist im allgemeinen Fall die dielektrische Verschiebung  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  nicht mehr parallel zu  $\mathbf{E}$ , da jetzt  $\mathbf{P}$  nicht mehr parallel zu  $\mathbf{E}$  ist.

Um den eben diskutierten Sachverhalt zu veranschaulichen, betrachten wir das in Abb. 3.13 gezeigte Bild eines Atoms. Dieses soll aus einem positiven Kern und einer kugelsymmetrischen Wolke aus Elektronen der gleichen Gesamtladung bestehen, so dass im Gleichgewicht der Ladungsschwerpunkt der Elektronen mit dem des Kerns zusammenfallen. Als Resultat hat man ein verschwindendes Dipolmoment  $\mathbf{p} = q\mathbf{r}$ , wobei  $\mathbf{r}$  der Ortsvektor vom positiven zum negativen Ladungsschwerpunkt ist. Wird das Atom durch ein äußeres Feld gestört, so verschieben sich die beiden Ladungsschwerpunkte gegeneinander und man erhält  $\mathbf{p} = q\mathbf{r} \neq 0$ . Für ein isotropes Medium ist das resultierende Dipolmoment unabhängig von der Richtung des äußeren Feldes und immer parallel zu diesem gerichtet. In diesem Fall ist die elektrische Suszeptibilität ein Skalar. Für ein anisotropes Medium können wir formal annehmen, dass in unterschiedliche Richtungen unterschiedliche Federkonstanten wirken. Dadurch wird das resultierende Dipolmoment richtungsabhängig und muss außerdem nicht mehr parallel zum wirkenden Feld sein. Diese Situation ist ähnlich zu einem anisotropen elastischen Medium, das in der klassischen Mechanik diskutiert wird. Diese muss durch einen Elastizitätstensor charakterisiert werden.

<sup>9</sup>Natürlich ist ein kubischer Kristall auf der atomaren Ebene gesehen auch nicht isotrop, was z.B. in der Röntgenbeugung zum Ausdruck kommt. Auf der Längesskala von sichtbarem Licht treten diese anisotropen Erscheinungen aber nicht mehr auf.

<sup>10</sup>Für unsere Diskussion ist aber weder der Hochtemperatur-Supraleiter noch Graphit geeignet, da es sich hierbei um nicht transparente Metalle handelt.

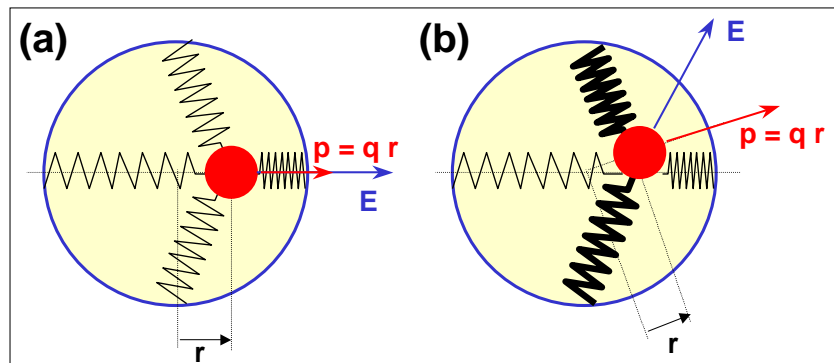


Abbildung 3.13: Klassisches Atommodell zur Veranschaulichung der isotropen (a) und anisotropen dielektrischen Eigenschaften (b) eines Festkörpers.

### 3.3.1 Dichroismus

Von *Dichroismus* spricht man, wenn ein Material eine bestimmte Polarisationskomponente bevorzugt absorbiert. Anders ausgedrückt: Schwingt das elektrische Feld in einer durch das Material ausgezeichneten Richtung, so ist das Material schwarz, während es senkrecht dazu mehr oder minder transparent erscheint. Da Absorption einen imaginären Anteil in der Suszeptibilität verlangt, bedeutet dies mathematisch, dass  $\tilde{\chi}$  für ausgezeichnete Richtungen nicht reell sein darf. Das Drahtgitter ist ein einfaches dichroitische System für cm-Wellen. Schwingt das elektrische Feld parallel zu den leitenden Drähten, so tritt aufgrund der in den Drähten induzierten Ströme eine starke Absorption auf, während für die dazu senkrechte Richtung die Absorption sehr klein ist. Das Prinzip lässt sich auf dichroitische Kristalle bzw. Folien, die im Sichtbaren arbeiten, direkt übertragen.

Bei der Behandlung der Dispersion hatten wir das Modell eines Moleküls oder Atoms verwendet, bei dem ein Elektron an einen positiv geladenen Atomkern gebunden war. Dadurch haben wir ein kugelsymmetrisches Problem diskutiert. Das Elektron kann durch ein äußeres Feld relativ zum Atomkern verschoben werden, wobei die auftretenden Rückstellkräfte und die damit verbundenen Eigenschwingungen völlig unabhängig von der Auslenkungsrichtung sind. Ist jedoch das betrachtete Molekül asymmetrisch (z.B. oval oder zigarrenförmig), so sind die Rückstellkräfte und die Eigenfrequenzen richtungsabhängig. In der einfachsten Beschreibungsweise kann man davon ausgehen, dass die Bewegungen parallel und senkrecht zu einer Vorzugsrichtung (z.B. längs und quer zu Zigarrenform) unabhängig voneinander sind. Man kann das System dann mit zwei harmonischen Oszillatoren beschreiben, die unterschiedliche Frequenzen  $\omega_{\parallel}$  und  $\omega_{\perp}$  haben. Sind die asymmetrischen Moleküle in einer Substanz statistisch verteilt, so beeinflusst die Asymmetrie der Einzelmoleküle nur die Form der Dispersionskurve, die verbreitert erscheint oder Doppelpicks enthält. Sind die Moleküle dagegen in einer kristallinen Struktur geordnet, so können die optischen Eigenschaften dieses Festkörpers stark richtungsabhängig werden, wie dies in Abb. 3.14 gezeigt ist. Die Abhängigkeit der Dispersion von der Ausbreitungsrichtung und Polarisation des Lichtes führt zum Phänomen *Doppelbrechung*, das wir in Abschnitt 3.3.2 diskutieren werden. Hier interessieren wir uns nur für die Absorption. Je nach Richtung der linearen Polarisation des einfallenden Lichtes erhält man eine unterschiedlich starke Absorption. Dieses Phänomen nennt man *Dichroismus*.

Unter idealen Umständen kann man in dichroitischen Substanzen Spektralbereiche realisieren, bei denen das Absorptionsvermögen für eine Polarisationsrichtung nahezu perfekt ist (Transmission  $T \sim 10\%$ ), während für die dazu senkrechte Polarisationsrichtung nur schwache Absorption auftritt ( $T \sim 70\%$ ). Natürliche Vertreter dichroitischer Substanzen sind Tumulal-Kristalle ( $\text{NaFe}_3\text{B}_3\text{Al}_6\text{Si}_6\text{O}_{27}(\text{OH})_4$ , dichroitischer Edelstein). Die zur Hauptachse des Kristalls senkrechte Komponente des elektrischen Feldes wird mit starker Präferenz absorbiert. Technisch ist Tumulal nicht besonders interessant, da auch die transmittierte Komponente geschwächt wird, und die Absorption stark von der Wellenlänge des Lichts

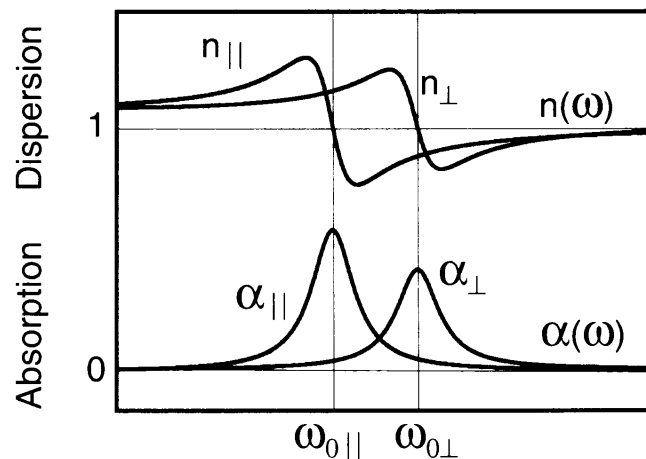


Abbildung 3.14: In einer anisotropen Substanz können die elektronischen Resonanzfrequenzen von der Richtung der Elektronenbewegung abhängen. Je nach Richtung des elektrischen Feldvektors erhält man dann unterschiedliche Dispersions- und Absorptionskurven.

abhängt, d.h. die Effizienz der Polarisation ist stark farbabhängig.

### Polaroid-Filter

Dem 19 Jahre jungen Physiker **Edwin Herbert Land** der Harvard Universität ist es 1928 gelungen, Polymere auszurichten, welche sich wie eindimensionale Metalle also wie mikroskopische metallische Drähte verhalten. Das führte auf die so genannten Polaroid-Folien, die ein großer kommerzieller Erfolg waren und sind. Sie werden z.B. in reflexionsmindernde Brillen oder Flüssigkristallanzeigen verwendet. Im Jahr 1938 erfand Land die *H*-Folie, die mittlerweile wahrscheinlich der am weitesten verbreitete Linearpolarisator ist. Bei der Herstellung von Polaroid-Folien werden lange Moleküle, im Fall der *H*-Folie Polyvinylalkohol, erwärmt, polymerisiert und dann in eine Richtung gestreckt, um die Moleküle auszurichten. Durch eine Farblösung werden Jodatome in das Polymer eindiffundiert. Die dadurch zur Verfügung gestellten Leitungselektronen können sich längs der ausgerichteten Polymermoleküle bewegen und führen so zur Absorption von Licht, das parallel zu den Molekülen polarisiert ist. Dazu senkrecht polarisiertes Licht wird dagegen nur sehr wenig absorbiert.

### Drahtgitter-Polarisatoren

Für langwelliges Licht, speziell im Infraroten, setzt man Drahtgitter-Polarisatoren ein, die meist aus sehr feinen Golddrähten bestehen. Die feinen Gitter werden z.B. durch Aufdampfen von Metallfilmen auf ein geeignetes Substrat hergestellt. Wie bei der Polaroid-Folie wird Licht mit einer Polarisationsrichtung parallel zur Drahtrichtung stark, dazu senkrecht polarisiertes Licht dagegen fast gar nicht absorbiert. Die polarisationsabhängigen Eigenschaften von nahe benachbarten, parallelen leitenden Streifen machen sich auch in den Reflexionseigenschaften bemerkbar.

### 3.3.2 Doppelbrechung

Der physikalische Hintergrund der Doppelbrechung wurde im letzten Abschnitt kurz vorgestellt. Grundvoraussetzung dabei war, dass sich das betreffende Medium bezüglich seiner dielektrischen Eigenschaften asymmetrisch verhält. Dies hat zur Folge, dass anstelle der Proportionalität zwischen dielektrischer

Verschiebung  $\mathbf{D}$  und elektrischem Feld  $\mathbf{E}$  jetzt ein tensorieller Zusammenhang tritt. Dies führt zu interessanten optischen Phänomenen. Wir werden sehen, dass für ein anisotropes Medium zwei Strahlen (Richtungen des Poynting-Vektors) für jede Richtung von  $\mathbf{k}$  existieren. Dies ist die Ursache für das Phänomen Doppelbrechung, das wir in diesem Abschnitt diskutieren wollen.

### Der dielektrische Tensor

Kristalle sind aufgrund ihrer mikroskopischen Struktur auf atomarer Skala anisotrop. Wir werden uns aber hier nur mit der Anisotropie im Sinne einer makroskopischen Eigenschaft befassen. In einem anisotropen, linearen dielektrischen Medium sind die Vektoren  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{E}$  in ihrem Betrag proportional, aber nicht mehr notwendigerweise parallel, so dass wir eine Tensorbeziehung

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \tilde{\chi} \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \tilde{\chi}) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} \mathbf{E} . \quad (3.3.3)$$

erhalten. Hierbei ist  $\tilde{\varepsilon}$  der *Dielektrizitätstensor*:

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} , \quad (3.3.4)$$

Seine Bedeutung ist einfach. Wird ein elektrisches Feld  $\mathbf{E}$  angelegt, so erhält man für die Komponenten der dielektrischen Verschiebung<sup>11</sup>

$$D_i = \varepsilon_0 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ik} E_k \quad \text{für } i = 1, 2, 3 . \quad (3.3.5)$$

Durch eine geeignete Transformation des Koordinatensystems kann man den Dielektrizitätstensor auf Hauptachsenform transformieren<sup>12</sup> und man erhält

$$D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_i E_i \quad E_i = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_i} D_i . \quad (3.3.6)$$

Die 3 Hauptachsen stehen senkrecht aufeinander. Verwendet man die 3 Hauptachsen als  $x$ ,  $y$  und  $z$ -Achse, so kann der Tensor (3.3.4) in einer einfacheren Hauptachsenform mit den drei *Haupt-Dielektrizitätskonstanten*  $\varepsilon_i$  dargestellt werden:

<sup>11</sup>Man beachte die Analogie zur Mechanik. Dort wird für anisotrope Medien der Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung auch durch einen Tensor beschrieben.

<sup>12</sup>Die Theorie der linearen Algebra zeigt, dass es immer einen Satz von 3 Hauptachsen gibt, für die  $D_i$  und  $E_i$  parallel sind.



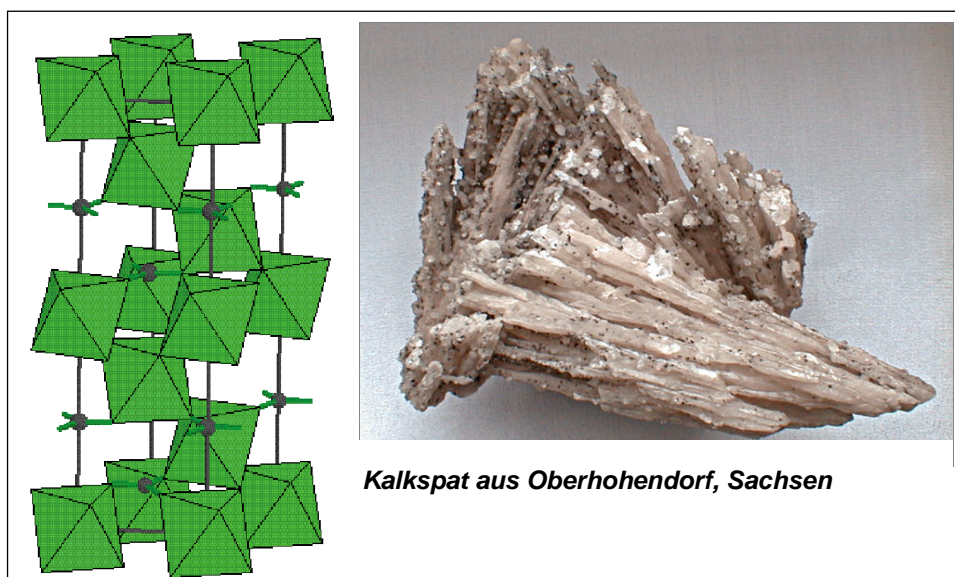


Abbildung 3.15: Schematische Darstellung der Kristallstruktur von Kalkspat, aus dem etwa 4% der Erdkruste besteht. Der Ausdruck Kalzit kommt vom griechischen Wort "Caliz" für Ton. Die  $\text{CO}_3$ -Gruppen bilden Ebenen aus, die Ca-Atome sitzen im Zentrum der Sauerstoff-Oktaeder. Die Schichtstruktur führt zur Anisotropie, welche für die Doppelbrechung entscheidend ist.

$$\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix}, \quad (3.3.7)$$

Wir wollen im Folgenden den Fall betrachten, dass das Medium für alle Polarisationsrichtungen transparent ist (also verschwindende Absorption zeigt). Dadurch wird  $\tilde{\epsilon}$  reell.

Äquivalent erhält man dann den Suszeptibilitätstensor in Hauptachsenform zu

$$\tilde{\chi} = \begin{pmatrix} \chi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_3 \end{pmatrix}, \quad (3.3.8)$$

wobei  $\chi_1$ ,  $\chi_2$  und  $\chi_3$  als Hauptachsensuszeptibilitäten bezeichnet werden. Je nachdem, wie viele Elemente des Suszeptibilitätstensors bzw. des Dielektrizitätstensors verschieden sind, lassen sich 3 Fälle unterscheiden:

#### 1. Optisch isotrope Medien: ( $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$ )

Für optisch isotrope Medien sind alle 3 Komponenten des Dielektrizitätstensors gleich groß und die optischen Eigenschaften damit nicht richtungsabhängig. Optisch isotrope Medien sind zum einen Flüssigkeiten oder Gläser, die keine strukturelle Ordnung aufweisen, zum anderen Kristalle mit kubischer Symmetrie.

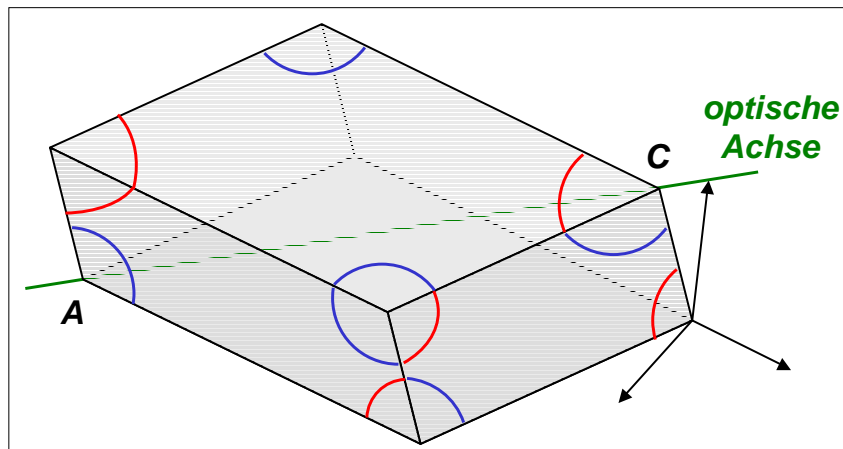


Abbildung 3.16: Spaltform des Kalkspat. Die blauen Winkel entsprechen  $101^{\circ}55'$ , die roten  $78^{\circ}5'$ . Die optische Achse verläuft von entlang der Verbindungslinie der gegenüberliegenden Ecken A und B.

## 2. Optisch einachsige Kristalle: ( $\epsilon_1 = \epsilon_2 \neq \epsilon_3$ )

Sind nur zwei Komponenten des Dielektrizitätstensors gleich, so beschreibt dies den Fall eines optisch einachsigen Kristalls. Man kann hier gemäß der Kristallsymmetrie eine optische Achse (z.B. die  $z$ -Richtung) einführen. Mit dem Bezug zur Kristallachse können wir dann die Elemente des Dielektrizitätstensors schreiben als  $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_{\perp}$  und  $\epsilon_z = \epsilon_{\parallel}$ . Für die Lichtausbreitung längs der optischen Achse tritt keine Polarisationsabhängigkeit der Ausbreitung auf. Jedoch können bei Lichtausbreitung in anderen Richtungen Abweichungen vom Snellius'schen Brechungsgesetz auftreten. Optisch einachsige Kristalle besitzen eine hexagonale, tetragonale oder rhomboedrische Symmetrie. Ein wichtiger Vertreter der optisch einachsigen Kristalle ist Kalkspat (siehe Abb. 3.15).

Kalkspat oder Kalzit (siehe Abb. 3.16) kristallisiert im trigonalen oder rhomboedrischen System ( $a = b = c$ ,  $\alpha = \beta = \gamma \neq 90^{\circ}$ ). Die Kristalle lassen sich gut entlang dreier fast senkrecht zueinander verlaufender Richtungen gut spalten, so dass es leicht gelingt, Stücke in Rhomboedergestalt herauszuspalten. Ein ideales Rhomboeder ist begrenzt von 6 Rhomben gleicher Kantenlänge, deren stumpfer Winkel  $101^{\circ}55'$  beträgt. In zwei gegenüberliegenden Ecken (A und B) stoßen je drei Rhombenflächen zusammen, die dort miteinander gleiche stumpfe Flächenwinkel von  $105^{\circ}5'$  bilden. Die Verbindungslinie von A nach B ist die kristallographische Hauptachse. Sie ist dreizählig, was besagt, dass nach einer Rotation von  $120^{\circ}$  der Kristall mit allen seinen physikalischen Eigenschaften gleich erscheint.

## 3. Optisch zweiachsige Kristalle: ( $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq \epsilon_3$ )

Für Kristallklassen mit geringerer Symmetrie können alle drei Elemente des Dielektrizitätstensors verschieden sein. In diesen Kristallen gibt es zwei optische Achsen, längs denen polarisationsunabhängige Lichtausbreitung stattfinden kann. Die Lichtausbreitung in solchen Kristallen ist im Allgemeinen sehr komplex.

### 3.3.3 Lichtausbreitung in anisotropen Medien

#### Die Huygens'sche Konstruktion

Wir wollen zunächst die generellen Beziehungen zwischen der Ausbreitung von Wellen und Strahlen und den anisotropen Eigenschaften von Materialien besprechen. Historisch wurde dies zuerst von **Huygens**

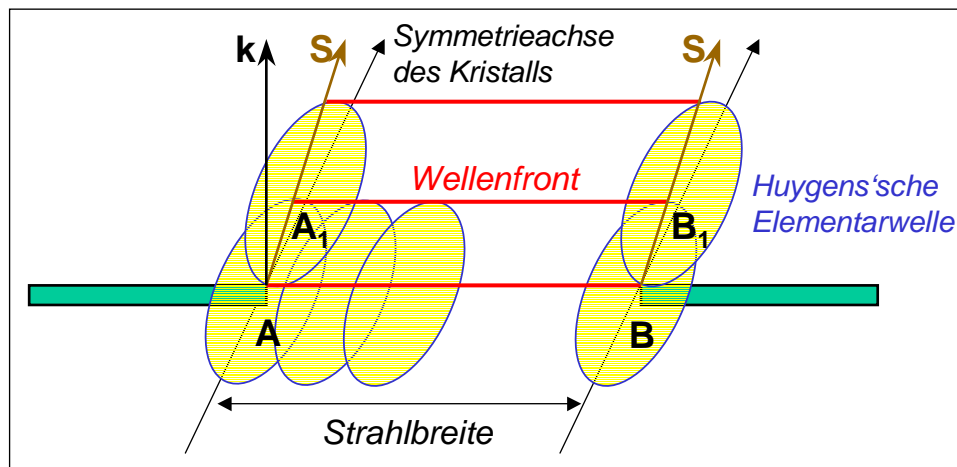


Abbildung 3.17: Anwendung des Huygens'schen Prinzips auf die Ausbreitung eines räumlich begrenzten Strahls in einem anisotropen Medium.

um etwa 1650 durchgeführt (vergleiche hierzu Abschnitt 2.1.6). Wir betrachten dazu die in Abb. 3.17 gezeigte Anordnung, bei der Elementarwellen von Punkten einer gegebenen Wellenfront  $AB$  mit begrenzter Ausdehnung ausgehen. Ist die Wellengeschwindigkeit  $v_{\text{ph}} = \omega_0/k = c/n$  eine Funktion des der Ausbreitungsrichtung, so sind die Elementarwellen keine Kugelwellen mehr, sondern elliptische Wellen (eine genaue Diskussion folgt später). Die neue Wellenfront  $A_1B_1$  ist die Einhüllende der Elementarwellen. Aus Abb. 3.17 wird sofort klar, dass sich die Wellenfront zur Seite bewegt. Das heißt, der Lichtstrahl, den sie repräsentiert, schließt einen endlichen Winkel mit dem Wellenvektor  $\mathbf{k}$  ein, der senkrecht auf der Wellenfront steht. Dies ist eine ganz allgemeine Eigenschaft der Lichtausbreitung in Kristallen. Der Poynting-Vektor  $\mathbf{S}$ , der parallel zum Lichtstrahl steht, ist nicht mehr parallel zu  $\mathbf{k}$ , wie dies in isotropen Medien immer der Fall war.

### Die Brechungsindex-Oberfläche

Wir haben gesehen, dass die Wellengeschwindigkeit  $v_{\text{ph}}$  eine Funktion der Richtung des Wellenvektors  $\mathbf{k}$  ist. Wir wollen nun eine Beziehung zwischen der Ausbreitung von Wellen und Strahlen und den anisotropen Eigenschaften eines Mediums ableiten. Dabei wollen wir die Richtung der Gruppengeschwindigkeit  $\mathbf{v}_g$  (bzw. des dazu parallelen Poynting-Vektors  $\mathbf{S}$ ) mit Hilfe einer geometrischen Methode bestimmen.<sup>13</sup>

Wir betrachten monochromatisches Licht der Frequenz  $\omega_0$ . Der Brechungsindex kann als Vektor geschrieben werden, da er eine Funktion der Ausbreitungsrichtung ist. Man erhält

$$\mathbf{n} = \frac{c}{\omega_0} \mathbf{k} . \quad (3.3.9)$$

Die *Phasengeschwindigkeit* der Welle ist  $v_{\text{ph}} = \omega/k$ . Die *Gruppengeschwindigkeit*  $v_g$ , die die Geschwindigkeit der Energieausbreitung beschreibt und daher die gleiche Richtung wie der Poynting-Vektor  $\mathbf{S}$  hat, kann man als<sup>14</sup>

<sup>13</sup>Die dabei verwendete Ableitung wird auch in der Festkörperphysik bei der Behandlung von Elektronenwellen benutzt. Die hier diskutierte Brechungsindex-Oberfläche ist das Analogon zur Fermi-Oberfläche in Metallen.

<sup>14</sup>Hierbei benutzen wir  $(\partial\omega/\partial k) = (\partial\omega/\partial n)(\partial n/\partial k)$  und  $(\partial n/\partial k) = c/\omega_0$ .

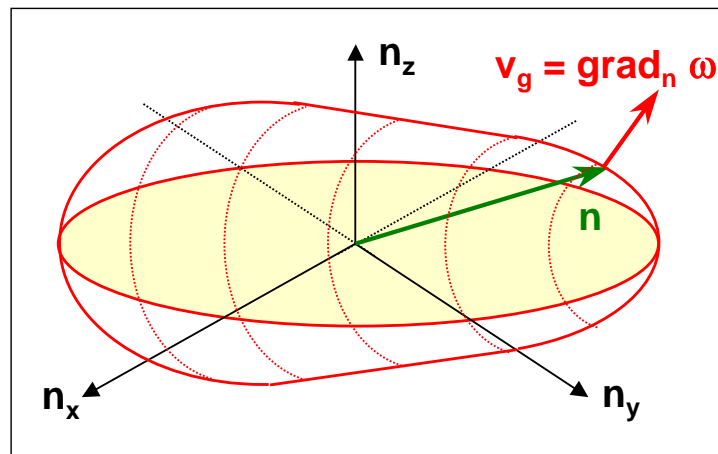


Abbildung 3.18: Konstruktion der Brechungsindex-Oberfläche.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_g &= \nabla_{\mathbf{k}} \omega = \left( \frac{\partial \omega}{\partial k_x}, \frac{\partial \omega}{\partial k_y}, \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \right) \\
 &= \frac{c}{\omega_0} \left( \frac{\partial \omega}{\partial n_x}, \frac{\partial \omega}{\partial n_y}, \frac{\partial \omega}{\partial n_z} \right) = \frac{c}{\omega_0} \nabla_{\mathbf{n}} \omega
 \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

schreiben. Wir drücken jetzt die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Medium durch den Vektor  $\mathbf{n}$  aus. Bei einem bestimmten Wert von  $\omega = \omega_0$  hat er für jede Ausbreitungsrichtung einen spezifischen Wert und kann deshalb als dreidimensionale, geschlossene Oberfläche dargestellt werden. Der Radiusvektor vom Ursprung zu einem Punkt der Oberfläche entspricht dem Wert von  $n$  für die Ausbreitung in diese Richtung. Die so definierte Oberfläche heißt *Brechungsindex-Oberfläche* (siehe Abb. 3.18). Der Vektor der Gruppengeschwindigkeit  $\mathbf{v}_g$  und damit der Poynting-Vektor  $\mathbf{S}$  stehen senkrecht auf dieser Oberfläche. Durch die Brechungsindex-Oberfläche ist es also möglich, für ein gegebenes Material bei der Frequenz  $\omega_0$  geometrisch die Richtung von  $\mathbf{S}$  bzw.  $\mathbf{v}_g$  zu bestimmen, indem man einen Vektor zu einem Oberflächenpunkt zeichnet (dieser bestimmt die  $k$ -Richtung) und an diesem Punkt die Oberflächennormale bestimmt (diese bestimmt die  $S$ -Richtung). Offensichtlich ist die Brechungsindex-Oberfläche eines isotropen Mediums eine Kugelfläche. In diesem Fall ist dann der Poynting-Vektor  $\mathbf{S}$  immer parallel zur Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{k}$ .

### Elektromagnetische Wellen in anisotropen Medien

Für optisch anisotrope Medien kann die Lichtausbreitung, d.h. sowohl Wellenvektor als auch Strahlrichtung, von der Polarisationsrichtung der Welle abhängen. Die theoretische Behandlung der Brechung in solchen Medien ist in seiner allgemeinen Form sehr komplex und führt häufig zu nicht analytischen Lösungen. Wir wollen uns deshalb hier zunächst ganz allgemein mit der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in anisotropen Medien beschäftigen.

Die Lichtausbreitung in anisotropen Medien wird durch die Maxwell-Gleichungen und die Beziehung zwischen  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{E}$  (Gleichung 3.3.3) bestimmt. Wir leiten zunächst für den Ansatz ebener Wellen für das elektrische Feld ( $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ ) aus den Maxwell-Gleichungen folgende Beziehungen für nicht magnetische Substanzen ( $\mu = 1$ ) ab:<sup>15</sup>

<sup>15</sup>Hierbei benutzen wir wiederum die Operatorsubstitutionen  $\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$  und  $\nabla = ik$ .

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0 \quad \text{oder} \quad \mathbf{D} \perp \mathbf{k} \quad (3.3.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{oder} \quad \mathbf{B} \perp \mathbf{k} \quad (3.3.12)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \quad \text{oder} \quad \mathbf{B} \perp \mathbf{E} \quad (3.3.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\mu_0 \omega \mathbf{D} \quad \text{oder} \quad \mathbf{B} \perp \mathbf{D} . \quad (3.3.14)$$

Kombiniert man noch (3.3.13) mit (3.3.14), so erhält man die Wellengleichung für das elektrische Feld

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{1}{c^2} (1 + \tilde{\chi}) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} . \quad (3.3.15)$$

Interessant ist hierbei, dass aufgrund der Anisotropie zwar weiterhin

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (1 + \tilde{\chi}) \mathbf{E} = 0 , \quad (3.3.16)$$

aber

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0 \quad (3.3.17)$$

gilt. Man kann deshalb (3.3.15) nicht durch Ausnutzen der Identität  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{E}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{E}$  vereinfachen.<sup>16</sup> Durch Benutzen von (3.3.12) kann man (3.3.15) in der Form

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = -\frac{\omega^2}{c^2} (1 + \tilde{\chi}) \mathbf{E} = -\mu_0 \omega^2 \mathbf{D} \quad (3.3.18)$$

schreiben.

Wir betrachten nun zunächst die Richtungen der verschiedenen Vektoren (siehe Abb. 3.19b). Der Vektor  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})$  liegt in der Ebene von  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{E}$  und steht senkrecht auf  $\mathbf{k}$ . Damit die Gleichung (3.3.18) überhaupt eine Lösung hat, muss  $\mathbf{D}$  daher in der von  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{E}$  aufgespannten Ebene liegen. Aus (3.3.12) wissen wir ferner, dass  $\mathbf{D}$  senkrecht auf  $\mathbf{k}$  steht. Dies ist in Abb. 3.19b dargestellt. Die Bedingung, dass  $\mathbf{D}$  in der von  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{E}$  aufgespannten Ebene liegen muss, definiert eine so genannte *charakteristische Welle*, die für das Material eine sich ausbreitende Wellenmode darstellt.

Für eine solche Welle gibt es einen Winkel  $\theta$ , so dass

<sup>16</sup>Für isotrope Medien gilt  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  und man erhält die übliche Wellengleichung  $\Delta \mathbf{E} = \epsilon \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$ .

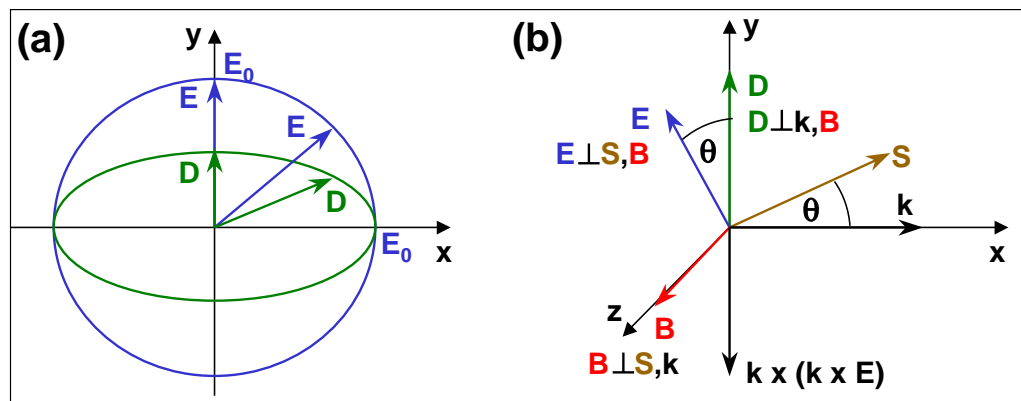


Abbildung 3.19: (a) Zusammenhang zwischen elektrischem Feld  $\mathbf{E}$  und dielektrischer Verschiebung  $\mathbf{D}$ . Im allgemeinen Fall optisch anisotroper Medien sind  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{D}$  nicht mehr parallel. (b) Richtungen, die für die Wellenausbreitung in doppelbrechenden Medien wichtig sind.

$$|\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E})| = k^2 E \cos \theta = \mu_0 \omega^2 D \quad (3.3.19)$$

Die Phasengeschwindigkeit der Welle ist dann durch

$$v_{\text{ph}}^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{E \cos \theta}{\mu_0 D} \quad (3.3.20)$$

gegeben.

Für den Energiefluss, das heißt für den Poynting-Vektor  $\mathbf{S}$  gilt weiterhin die Beziehung

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} . \quad (3.3.21)$$

Die Richtungen der verschiedenen Vektoren sind in Abb. 3.19b zusammengestellt.

Das mathematische Problem, das man nun für ein bestimmtes anisotropes Medium lösen muss, besteht darin, für einen bestimmten Wellenvektor die *charakteristischen Wellen* herauszufinden, das heißt, die Richtungen von  $\mathbf{D}$  zu finden, in denen  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{k}$  koplanar sind. Daraus kann dann unter Benutzung von (3.3.20) die Wellengeschwindigkeit und der Brechungsindex  $n = c/v_{\text{ph}}$  ermittelt werden. Es wird im Allgemeinen zwei getrennte Lösungen für jede Richtung von  $\mathbf{k}$  geben, die unter Umständen entartet sein können. Die Polarisation der beiden charakteristischen Wellen ist orthogonal zueinander. Wenn wir daraus die Brechungsindex-Oberfläche konstruieren (vergleiche oben), werden wir feststellen, dass sie doppelwertig ist, das heißt es gibt für jede Richtung zwei Werte von  $n$ . Dies hat mehrere interessante Konsequenzen.

Für die Berechnung der Lichtausbreitung in anisotropen Medien ist es sinnvoll, zuerst die Richtung des Wellenvektors  $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$  festzulegen. Der Betrag  $|k|$  des Wellenvektors bzw. der dazugehörige Brechungsindex  $n = kc/\omega$  sei dabei noch unbestimmt. Damit lässt sich (3.3.18) schreiben als

$$\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}} \times (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) + \frac{1}{n^2} \tilde{\epsilon} \mathbf{E} \equiv \tilde{\mathcal{G}} \mathbf{E} = 0 . \quad (3.3.22)$$

Man erhält somit ein lineares, homogenes Gleichungssystem für das elektrische Feld. Damit diese Gleichungssystem lösbar wird, muss die Determinante von  $\tilde{\mathcal{G}}$  Null werden. Man erhält somit eine Gleichung 2. Grades in  $n^2$  und kann damit zwei Werte von  $n > 0$  bestimmen, die mit den beiden möglichen Polarisationsrichtungen verknüpft sind. Mit diesen Werten von  $n$  kann man aus (3.3.18) die Richtung von  $\mathbf{E}$  und später mit (3.3.3) die Richtung von  $\mathbf{D}$  bestimmen. Damit hat man einen vollständigen Satz der beteiligten Vektoren für die speziellen Richtungen der Wellenvektoren bestimmt. Wir werden unten eine geometrische Veranschaulichung für das Auffinden dieser Richtungen geben.

Bevor wir die Lichtausbreitung in doppelbrechenden Medien weiter diskutieren, wollen wir zuerst die eben abgeleiteten Beziehungen anhand von Abb. 3.19 veranschaulichen. Abb. 3.19a zeigt für den Spezialfall  $\epsilon_y = \epsilon_x/2 = 1/2$  die Richtung und Größe der dielektrischen Verschiebung für unterschiedlich orientierte elektrische Felder der Stärke  $E_0$ . Die Pfeile geben dabei die Richtung von  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{E}$  an, während die Ellipse und der Kreis die Länge der in die jeweilige Richtung zeigenden Vektoren angeben. Ist der Vektor des elektrischen Feldes längst der  $x$ -Achse gerichtet, so zeigt auch  $\mathbf{D}$  in die gleiche Richtung, wobei die Länge  $|\mathbf{D}| = \epsilon \epsilon_0 |\mathbf{E}|$  ist. Für ein elektrisches Feld, das unter  $45^\circ$  zur  $x$ -Achse orientiert ist, berechnet sich  $\mathbf{D}$  zu

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 \\ 0 & \epsilon_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0/\sqrt{2} \\ E_0/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \epsilon_x \epsilon_0 \begin{pmatrix} E_0/\sqrt{2} \\ E_0/2\sqrt{2} \end{pmatrix} . \quad (3.3.23)$$

Für beliebige Winkel zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  liegt das Ende von  $\mathbf{D}$  auf einer durch die Achsenabschnitte  $\epsilon_x \epsilon_0 E_0$  und  $\epsilon_y \epsilon_0 E_0$  gegebenen Ellipse. Die dielektrische Verschiebung ist also im allgemeinen Fall nicht mehr parallel zum elektrischen Feld. Daraus erkennt man, dass für doppelbrechende Medien die Strahlrichtung des Lichtes der geometrischen Optik (die durch  $\mathbf{S}$  gegeben ist und damit senkrecht zu  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  ist) nicht mehr parallel zum Wellenvektor  $\mathbf{k}$  (der senkrecht zu  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{B}$  ist) gerichtet sein muss. Dies ist in Abb. 3.19b nochmals verdeutlicht. Dabei wurde angenommen, dass  $\mathbf{k} \parallel x$  und die dazu senkrechte dielektrische Verschiebung  $\mathbf{D} \parallel y$  ist. Als Folge davon zeigt  $\mathbf{B}$  in  $z$ -Richtung. Durch den Dielektrizitätstensor wird die Richtung von  $\mathbf{E}$  festgelegt, die wegen  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$  in der  $xy$ -Ebene liegen muss, genauso wie der Poynting-Vektor  $\mathbf{S}$  ( $\mathbf{S} \perp \mathbf{B}$ ).

### Das Brechungsindex-Ellipsoid

Wir wollen nun versuchen, den Dielektrizitätstensor als Ellipsoid darzustellen. Dies ist notwendig, um später die Lichtausbreitung in Kristallen geometrisch zu veranschaulichen. Ein Ellipsoid mit den Achsen  $a$ ,  $b$ , und  $c$  ist eine Oberfläche, für die

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (3.3.24)$$

gilt. Formal lässt sich dies schreiben als

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} a^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & b^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & c^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1, \quad (3.3.25)$$

oder kürzer als

$$\mathbf{r} \cdot \mathcal{M} \cdot \mathbf{r} = 1. \quad (3.3.26)$$

Die zu  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} \mathbf{E}$  inverse Beziehung lautet

$$\varepsilon_0 \mathbf{E} = \tilde{\varepsilon}^{-1} \mathbf{D} \quad (3.3.27)$$

mit

$$\tilde{\varepsilon}^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3^{-1} \end{pmatrix}, \quad (3.3.28)$$

Wir können nun die Bedeutung der formalen Gleichung  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = 1$  studieren, die mit (3.3.27) zu

$$\frac{\mathbf{D}}{\sqrt{\varepsilon_0}} \cdot \tilde{\varepsilon}^{-1} \cdot \frac{\mathbf{D}}{\sqrt{\varepsilon_0}} = 1 \quad (3.3.29)$$

wird. Diese Beziehung wird durch das Ellipsoid aus (3.3.25) dargestellt, wenn  $(x, y, z) = \frac{\mathbf{D}}{\sqrt{\varepsilon_0}}$  und  $\varepsilon_1 = a^2$ ,  $\varepsilon_2 = b^2$  und  $\varepsilon_3 = c^2$  gesetzt wird.

Das entsprechende Ellipsoid mit den Achsen  $\varepsilon_1^{1/2}$ ,  $\varepsilon_2^{1/2}$  und  $\varepsilon_3^{1/2}$  ist in Abb. 3.20 dargestellt. Die 3 Achsen entsprechen den drei Hauptachsenwerten des Brechungsindex.<sup>17</sup> Um die Bedeutung des Ellipsoids zu veranschaulichen, analysieren wir, wie  $\mathbf{D}$  seine Richtung ändert, wobei wir für jeden Punkt aus  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = 1$  seine Länge berechnen. Aus (3.3.29) folgt, dass die Spitze des Vektors  $\mathbf{D}/\sqrt{\varepsilon_0}$  das Ellipsoid beschreibt. Es lässt sich ferner zeigen, dass der Vektor  $\mathbf{E}$  die Richtung der Normalen auf der Ellipsoidoberfläche an der Spitze des Endpunktes von  $\mathbf{D}$  einnimmt.<sup>18</sup>

Aus unserer Betrachtung erhalten wir jetzt sehr einfach den Brechungsindex  $n$  für eine Welle mit dem Polarisationsvektor  $\mathbf{D}$ . Die Phasengeschwindigkeit  $v_{\text{ph}} = \omega/k$  der Wellen erhält man wegen  $k^2 E \cos \theta = \mu_0 \omega^2 D$  zu

<sup>17</sup>Für ein isotropes Medium gilt ja  $n = \sqrt{\varepsilon}$ .

<sup>18</sup>Beweis: Die Tangentialfläche an das Ellipsoid im Punkt  $(x_1, y_1, z_1)$  ist gegeben durch  $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1$ . Ein Vektor, der zu dieser Ebene senkrecht steht ist  $(x_1/a^2, y_1/b^2, z_1/c^2)$ . Ersetzt man nun  $(x_1, y_1, z_1)$  durch  $\mathbf{D}$  und  $a^2$  durch  $\varepsilon_1$  usw., so sieht man, dass dieser Normalenvektor die Richtung von  $\mathbf{E}$  hat.



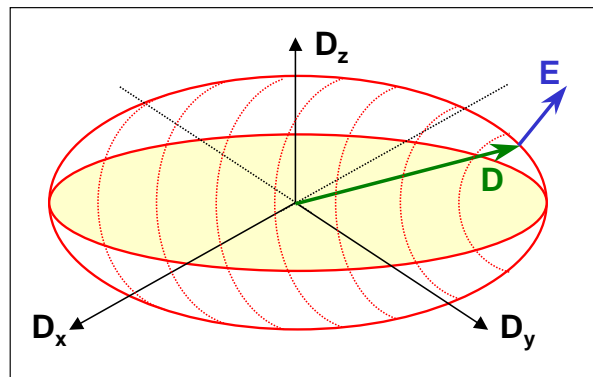


Abbildung 3.20: Brechungsindex-Ellipsoid und der Zusammenhang zwischen  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{E}$ . Der elektrische Feldvektor steht senkrecht auf der Oberfläche des Ellipsoid.

$$v_{\text{ph}}^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{E \cos \theta}{\mu_0 D} = \frac{1}{\mu_0 D^2} \quad (3.3.30)$$

und damit

$$n = \frac{c}{v_{\text{ph}}} = c \sqrt{\mu_0 D} = \frac{D}{\sqrt{\epsilon_0}} \quad (3.3.31)$$

da  $ED \cos \theta = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = 1$  an jedem Punkt des Ellipsoids gilt. In anderen Worten, der Ortsvektor des Ellipsoids in jeder Richtung entspricht dem Brechungsindex des Mediums für eine Welle mit dem Polarisationsvektor  $\mathbf{D}$  in dieser Richtung. Dieses Ellipsoid wird deshalb *Brechungsindex-Ellipsoid* oder *Index-Ellipsoid* genannt.

Es ist sehr wichtig sich darüber klar zu werden, dass die Polarisationsrichtung und nicht die Ausbreitungsrichtung der Welle die Phasengeschwindigkeit der Welle bestimmt. Wellen, die in verschiedene Richtungen laufen, aber den gleichen Polarisationsvektor besitzen, haben die gleiche Geschwindigkeit.

Wir können noch kurz die Form des Brechungsindexellipsoids diskutieren. Optisch einachsige Kristalle mit  $n_1 = n_2 \neq n_3$  besitzen einen um die  $z$ -Achse rotationssymmetrischen Indexellipsoiden. Ist  $n_3 > n_1 = n_2$ , so handelt es sich um *optisch positive*, für  $n_3 < n_1 = n_2$  um *optisch negative* einachsige Kristalle.

### Charakteristische Wellen

Wir wollen nun die Polarisierungen und Geschwindigkeiten der charakteristischen Wellen für eine gegebene Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{k}$  bestimmen. Eine Bedingung für die charakteristischen Wellen war, dass  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$ , und  $\mathbf{k}$  koplanar sind. Wir gehen wir folgt vor:

1. Wir bestimmen zuerst alle möglichen Polarisierungen  $\mathbf{D}$ . Diese liegen in einer Ebene senkrecht zu  $\mathbf{k}$ , da  $\mathbf{D}$  so definiert ist (Maxwell-Gleichungen).
2. Wir konstruieren  $\mathbf{E}$  für jedes  $\mathbf{D}$ , indem wir den Brechungsindex-Ellipsoid verwenden. Wir erinnern uns daran, dass  $\mathbf{E}$  senkrecht auf der Oberfläche des Brechungsindex-Ellipsoids an der Spitze von  $\mathbf{D}$  steht.
3. Wir suchen koplanare  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$ , und  $\mathbf{k}$ .

Diese Schritte sind in Abb. 3.21 verdeutlicht. In Schritt 1 konstruiert man die Ebene senkrecht zu  $\mathbf{k}$ . In Schritt 2 konstruiert man  $\mathbf{E}$  senkrecht zum Brechungsindex-Ellipsoid für jeden Punkt der Schnittellipse.

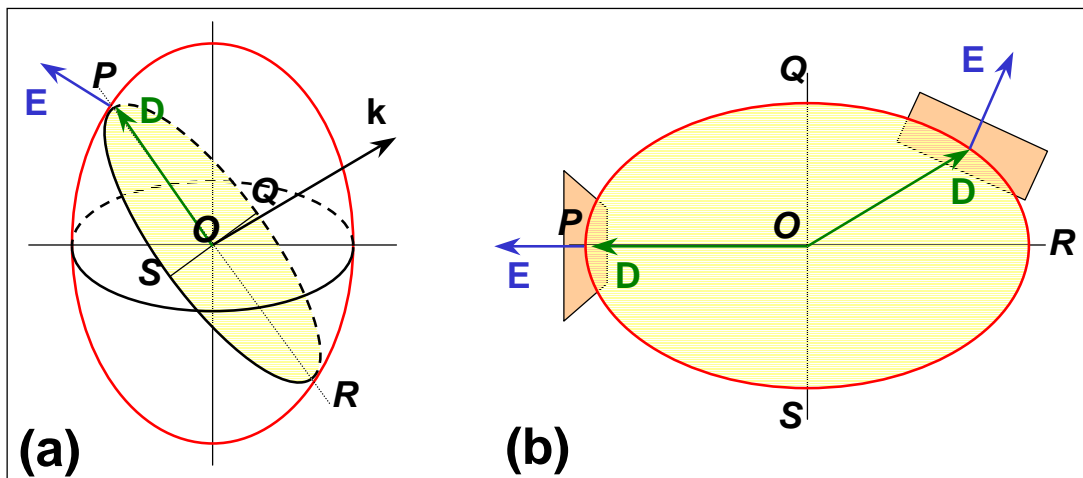


Abbildung 3.21: Zur Bestimmung der Polarisationen der charakteristischen Wellen: (a) Elliptischer Schnitt senkrecht zu  $\mathbf{k}$  durch die Punkte  $PQRS$  des Brechungsindex-Ellipsoids. (b) Tangentialebenen an den Brechungsindex-Ellipsoid an verschiedenen Punkten entlang der Schnittellipse (der Wellenvektor  $\mathbf{k}$  steht senkrecht auf der Schnittellipse und zeigt aus der Papierebene heraus). Nur in entlang der Achsen der Schnittellipse liegen  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{E}$  in einer Ebene. Dadurch sind die zwei charakteristischen Wellen festgelegt. Die Polarisation dieser Wellen ist orthogonal zueinander.

Durch Symmetrieüberlegungen werden in Schritt 3 Punkte auf der Haupt- und Nebenachse ausgewählt, bei denen  $\mathbf{E}$  in der  $(\mathbf{k}, \mathbf{D})$ -Ebene liegt. Daher gibt es immer zwei charakteristische Wellen für die Ausbreitung mit einem speziellen  $\mathbf{k}$ . Die Vektoren  $OP$  und  $OQ$  in Abb. 3.21 stellen ihre Polarisationsrichtungen dar, die senkrecht aufeinander stehen müssen. Die dazugehörigen Brechungsindizes sind durch die Länge von  $OP$  und  $OQ$  gegeben.

### Die Brechungsindex-Oberflächen von Kristallen

Wir versuchen jetzt einen besseren Eindruck von der Brechungsindex-Oberfläche in 3 Dimensionen zu vermitteln, indem wir Schnitte mit der  $(x, y)$ -,  $(y, z)$ - und  $(z, x)$ -Ebene konstruieren (siehe Abb. 3.22). Hierbei wollen wir annehmen, dass der Ellipsoid seine kürzeste Achse  $n_1$  entlang der  $x$ -Achse, eine mittlere  $n_2$  entlang der  $y$ -Achse und die längste  $n_3$  entlang der  $z$ -Achse habe. Legt man zunächst  $\mathbf{k}$  parallel zur  $x$ -Achse, so hat die Schnittellipse  $PQRS$  aus Abb. 3.21 die Hauptachse  $OZ = n_3$  und die Nebenachse  $OY = n_2$ . Dreht man nun  $\mathbf{k}$  in der  $(x, y)$ -Ebene um die  $z$ -Achse, so bleibt  $OZ$  immer die Hauptachse, die Nebenachse ändert sich dagegen langsam von  $OY$  nach  $OX = n_1$ . Letztere wird erreicht, wenn  $\mathbf{k}$  parallel zur  $y$ -Achse ist. Zeichnen wird die Werte für  $n$  als Funktion des Drehwinkels in der  $(x, y)$ -Ebene in ein Polardiagramm, so erhalten wir den Schnitt der Brechungsindex-Oberfläche mit der  $(x, y)$ -Ebene. Das Ergebnis ist in Abb. 3.22b gezeigt. Es gibt einen Kreis mit Radius  $n_3$ , der der Polarisation in  $z$ -Richtung entspricht, und eine Ellipse mit Hauptachse  $n_2$  und Nebenachse  $n_1$ , die der Polarisation senkrecht zur  $z$ -Richtung und  $\mathbf{k}$  entsprechen. Der zum Kreis gehörige Brechungsindex hängt wie bei einem isotropen Medium nicht von der Richtung des Wellenvektors ab und wird deshalb *ordentlicher Brechungsindex*  $n_o$  genannt. Dagegen hängt der zur Ellipse gehörige Brechungsindex von der Richtung des Wellenvektors ab und wird *außerordentlicher Brechungsindex*  $n_e$  genannt. Für die kreisförmige Indexfläche des ordentlichen Brechungsindex sind  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{E}$  parallel zueinander und folglich auch  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{S}$  (siehe Abb. 3.19b). Für die elliptische Indexfläche gilt dies nicht mehr,  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{S}$  sind nicht mehr parallel. Wir werden diese Tatsache weiter unten für die Definition von ordentlichen und außerordentlichen Strahlen benutzen.

In gleicher Weise können wir die Schnitte mit der  $(y, z)$  und  $(z, x)$ -Ebene konstruieren (Abb. 3.22c und d). Letztere besteht aus einem Kreis mit Radius  $n_2$ , der eine Ellipse mit Hauptachse  $n_3$  und Nebenach-

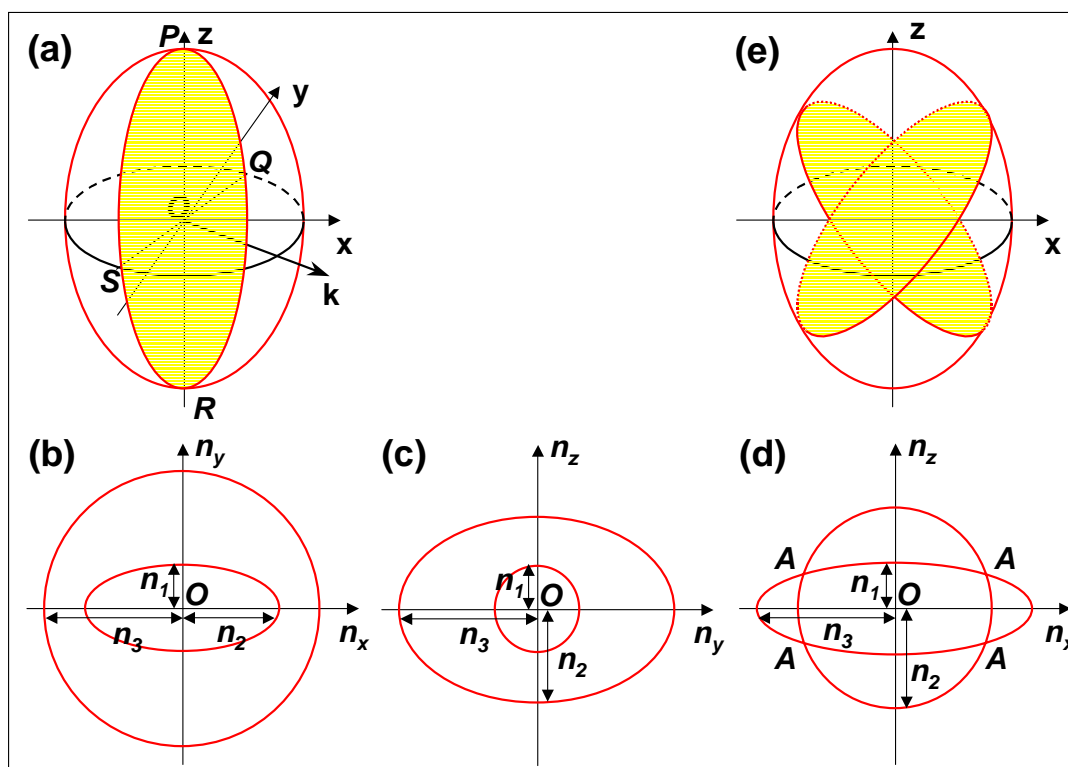


Abbildung 3.22: (a) Schnitt des Brechungsindex-Ellipsoids, bei dem  $\mathbf{k}$  in der  $(x,y)$ -Ebene liegt. (b) - (d) Schnitt der  $n$ -Oberfläche in der  $(x,y)$ ,  $(y,z)$  und  $(z,x)$ -Ebene. (e) Kreisförmige Schnitte des Indexellipsoids.

se  $n_1$  in den vier mit A bezeichneten Punkten schneidet. Sie entsprechen zwei kreisförmigen Schnitten des Brechungsindex-Ellipsoids (siehe Abb. 3.22e). Die Richtungen von  $\mathbf{k}$ , die den Vektoren  $O A$  entsprechen, werden *optische Achsen* genannt. Für eine Ausbreitung entlang dieser Achsen sind die beiden charakteristischen Wellen entartet. Da es im allgemeinsten Fall zwei solche optische Achsen gibt, werden entsprechende Kristalle zweiachsig oder biaxial genannt. Es ist leicht einzusehen, dass es keine weiteren kreisförmigen Schnitte des Ellipsoids im allgemeinsten Fall gibt und daher auch keine weiteren optischen Achsen.

Die Konstruktion der vollständigen Indexoberfläche kann qualitativ durch Interpolation erfolgen. Ein bekanntes optisch biaxiales Material ist Glimmer mit den Haupt-Brechungsindizes  $n_1 = 1.552$ ,  $n_2 = 1.582$  und  $n_3 = 1.587$ . Weitere zweiachsige Materialien sind Gips, Feldspat oder Topaz.

### Ordentliche und außerordentliche Strahlen

Hat man die Brechungsindex-Oberfläche konstruiert, so kann man die Polarisation und die Poynting-Vektoren der beiden charakteristischen Wellen für jede vorgegebene  $\mathbf{k}$ -Richtung konstruieren. Man verbindet mit jeder Richtung  $\mathbf{k}$  und charakteristischer Polarisation einen Strahl, der in Richtung des Poynting-Vektors läuft. Dieser Strahl ist derjenige, den man bei einem Experiment sieht, wenn eine Welle den Kristall durchläuft. Die Existenz von zwei Strahlen für jede gegebene Richtung von  $\mathbf{k}$  ist die Ursache für das Auftreten des bekannten Phänomens der Doppelbrechung.

Es können zwei Arten von Strahlen definiert werden:

- der *ordentliche Strahl*, für den  $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{k}$  parallel sind.

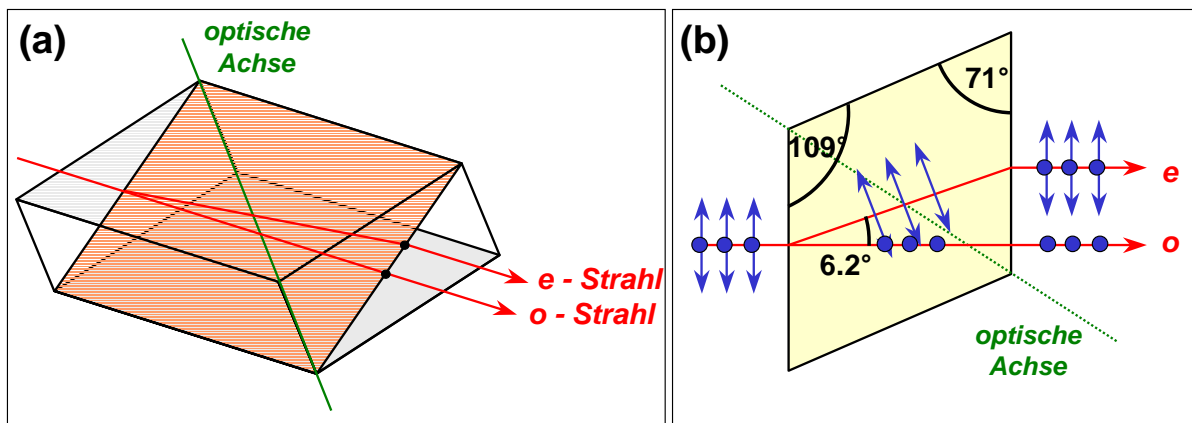


Abbildung 3.23: (a) Strahlenverlauf im Hauptschnitt eines Kalzitrhomboiders (Kalkspat:  $\text{CaCO}_3$ ). (b) Ein Lichtstrahl mit zwei orthogonalen Feldkomponenten beim Durchlaufen eines Kalkspatkristalls.

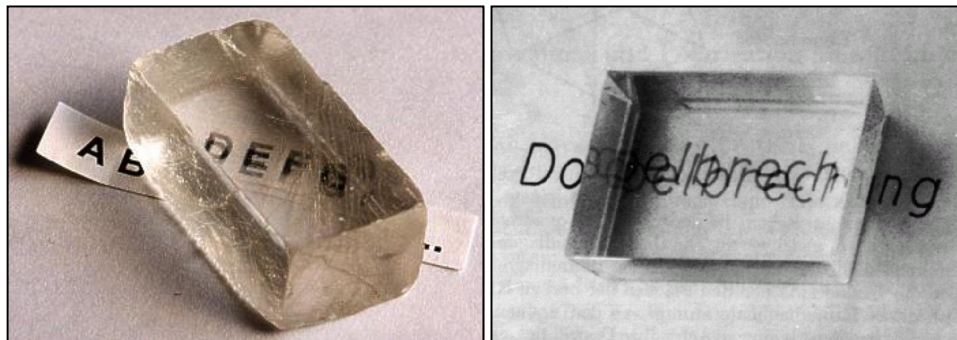


Abbildung 3.24: Doppelbrechung des Lichts durch einen Kalzitrhomboider (mit freundlicher Genehmigung von Jan Krieger, Universität Heidelberg).

- der *außerordentliche Strahl*,<sup>19</sup> für den  $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{k}$  nicht parallel sind.

Die Aufspaltung in zwei Strahlen ist in Abb. 3.23 am Beispiel eines Kalzit-Rhomboeder gezeigt. Wie bereits oben diskutiert wurde, ist die Spaltform des Kalkspats ein Rhomboeder. Man kann nun beliebig viele Ebenen durch das Rhomboeder legen, die die optische Achse enthalten. Man nennt diese Ebenen die *Hauptebenen*. Eine Hauptebene, die gleichzeitig senkrecht auf einem Paar einander gegenüberliegender Flächen der Spaltform steht, bildet einen *Hauptschnitt*. Für den Kalkspat gibt es offensichtlich drei Hauptschnitte, die alle ein Parallelogramm mit den Winkeln  $109^\circ$  und  $71^\circ$  darstellen. Wir lassen nun ein unpolarisiertes Strahlenbündel auf eine natürliche Fläche des Kalzitrhomboiders fallen und betrachten seine Ausbreitung entlang der Hauptebene. Wir sehen, dass sich das Strahlenbündel im Inneren des Kristalls in zwei Strahlen verschiedener Richtung ( $o$  und  $e$ ) aufteilt, wobei das elektrische Feld des  $o$ -Strahl senkrecht, das Feld des  $e$ -Strahls dagegen parallel zum Hauptschnitt liegt. Beim Austritt aus dem Kristall an der parallelen Gegenfläche findet die zweite Brechung statt und beide Strahlen laufen zwar getrennt aber parallel. Dies führt dazu, dass man eine unter dem Rhomboeder befindliche Schrift doppelt sieht (siehe Abb. 3.24). Ebenfalls eingezeichnet ist in Abb. 3.23a die optische Achse, die zusammen mit dem Einfallslot die Ebene des Brechungsindex-Hauptschnittes bildet.

Wir wollen uns nun die Ursache des ordentlichen und außerordentlichen Strahl mit Hilfe des Huygenschen Prinzips physikalisch plausibel machen. Wir nehmen zunächst an, dass das elektrische Feld senk-

<sup>19</sup>Außerordentlich ist eine schlechte Übersetzung der französischen Bezeichnung "rayon extraordinaire". Eine bessere Übersetzung wäre "ungewöhnlich". Leider hat sich der Begriff außerordentlich seit mehr als 100 Jahren eingebürgert. Man benutzt häufig die Inizes  $o$  und  $e$  entsprechend der französischen Bezeichnung ordinaire und extraordinaire.

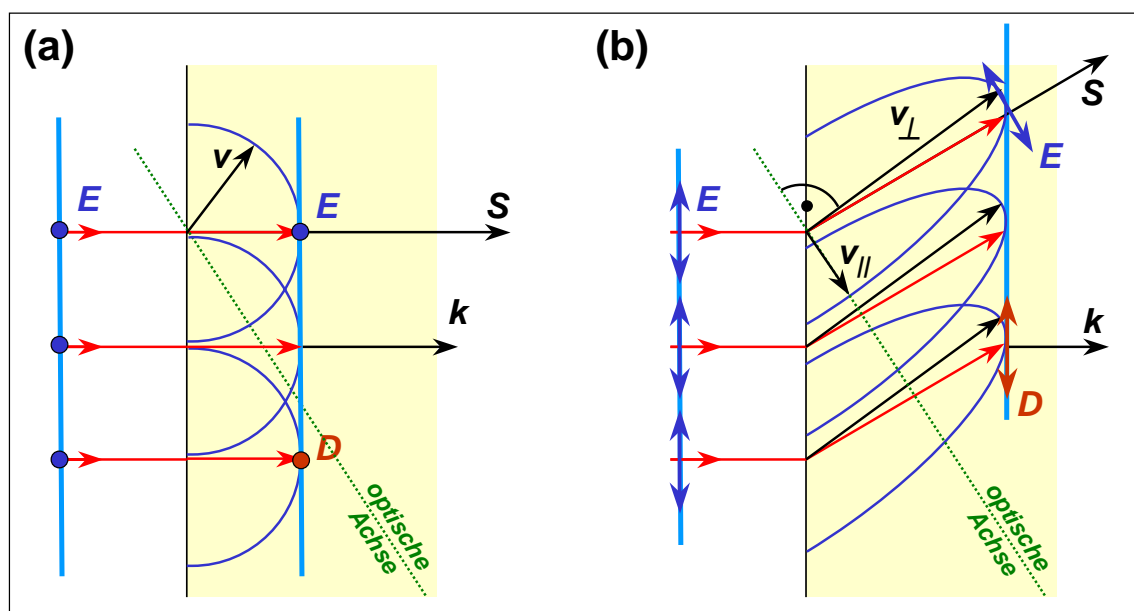


Abbildung 3.25: Erklärung der Doppelbrechung mit Hilfe des Huygenschen Prinzips. (a) ebene Welle die senkrecht zum Hauptschnitt polarisiert ist, (b) ebene Welle, die parallel zum Hauptschnitt polarisiert ist.

recht zur optischen Achse steht (Abb. 3.25a). Die Welle trifft auf die Oberfläche des Kristalls und erzeugt dort sekundäre Elementarwellen, die sich zur gebrochenen Welle überlagern. Das elektrische Feld senkrecht zur optischen Achse steht (ordentlicher Strahl), hängt der Brechungsindex nicht von der Richtung in der Ebene senkrecht zu  $\mathbf{E}$  ab. Das heißt, die in der Ebene senkrecht zu  $\mathbf{E}$  erzeugten Elementarwellen sind kreisförmig. Die Einhüllende der Elementarwellen ist deshalb parallel zu der ursprünglichen Wellenfront der einlaufenden Welle.

Wir betrachten nun den Fall, dass das elektrische Feld parallel zum Hauptschnitt ist (Abb. 3.25b). Das elektrische Feld besitzt nun eine Komponente parallel und senkrecht zur optischen Achse mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten  $v_{\parallel} = c/n_{\parallel}$  und  $v_{\perp} = c/n_{\perp}$ . Die Wellenfronten der erzeugten Elementarwellen sind deshalb keine Kreise mehr sondern Ellipsen. Die Einhüllende der Ellipsoid-Elementarwellen ist wiederum eine ebene Welle parallel zur einfallenden Wellenfront. Die Wellenfront wird aber beim Durchgang durch den Kalkspatkristall seitlich verschoben. Die Ausbreitungsrichtung der Wellen wird durch den Poynting-Vektor bestimmt, der senkrecht auf  $\mathbf{E}$  steht. Offensichtlich steht die Strahlrichtung nicht senkrecht auf der Wellenfront.

Wir wollen noch darauf hinweisen, dass für  $\mathbf{k}$  parallel zur optischen Achse  $\mathbf{E}$  immer senkrecht auf der optischen Achse steht. Es gibt dann zwei entartete ordentliche Strahlen. Ist  $\mathbf{k}$  senkrecht zur optischen Achse, so erhält man ebenfalls ebenfalls zwei ordentliche Strahlen, allerdings mit zwei unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten  $c/n_{\parallel}$  und  $c/n_{\perp}$ .

### 3.3.4 Optische Aktivität

Manche Stoffe drehen auch bei beliebiger Richtung der Polarisationsebene der einfallenden, linear polarisierten Welle die Polarisationsebene. Der Drehwinkel  $\alpha$  ist proportional zur Schichtdicke  $d$

$$\alpha = \alpha_S \cdot d, \quad (3.3.32)$$

wobei der Proportionalitätsfaktor  $\alpha_S$  als *spezifisches optisches Drehvermögen* bezeichnet wird. Man unterscheidet zwischen linksdrehenden und rechtsdrehenden Substanzen. Der Drehsinn ist dabei für einen Beobachter definiert, der gegen die Strahlrichtung schaut.

Die physikalische Ursache für die optische Aktivität liegt in den speziellen Symmetrieeigenschaften der Substanz begründet. Es gibt einerseits eine Reihe von Substanzen, die nur in der festen Phase optisch aktiv sind, nicht aber in der flüssigen Phase. Daraus kann man schließen, dass die optische Aktivität mit der Symmetrie der Kristallstruktur in der festen Phase zusammenhängt. Einige kristalline Substanzen kommen als links- und rechtdrehend in der Natur vor (z.B. Quarz). Andererseits gibt es auch Stoffe (z.B. Zucker oder Milchsäure), die auch im flüssigen Zustand optisch aktiv sind. Hier muss also die Symmetrie der Moleküle eine Rolle spielen.

Eine Erklärung der optischen Aktivität ist korrekt nur mit Hilfe der Quantentheorie möglich. Wir wollen es deshalb hier bei einer Beschreibung der experimentellen Beobachtung belassen.

### 3.3.5 Anwendung der Doppelbrechung

#### $\lambda/4$ und $\lambda/2$ Plättchen

Wir nehmen an, dass eine linear polarisierte Welle senkrecht (in  $z$ -Richtung) auf eine Kristallplatte der Dicke  $d$  mit planparallelen Seitenflächen fällt (siehe Abb. 3.26). Die Polarisationsrichtung sei so ausgerichtet, dass sie den Winkel zwischen den Polarisierungsebenen der beiden charakteristischen Wellen mit dem gleichen  $\mathbf{k}$ -Vektor zweiteilt. Ihre  $\mathbf{D}$ -Vektoren definieren in diesem System die  $x$ - und  $y$ -Achsen. Die beiden charakteristischen Wellen besitzen die Brechungsindizes  $n_1$  und  $n_2$  mit dem Mittelwert  $\bar{n}$  und der Differenz  $\delta n$ . Wir erhalten damit

$$\mathbf{D} = D_0 \hat{\mathbf{x}} \exp[i(n_1 k_0 z - \omega t)] + D_0 \hat{\mathbf{y}} \exp[i(n_2 k_0 z - \omega t)] . \quad (3.3.33)$$

Die charakteristischen Wellen überlagern sich im Punkt  $z = 0$  zu der einfallenden Welle  $\mathbf{D} = D_0(1, 1, 0) \exp[-i\omega t]$ . Für  $z \neq 0$  können wir schreiben

$$\mathbf{D} = D_0 \left[ \hat{\mathbf{x}} \exp(-\frac{1}{2} i \delta n k_0 z) + \hat{\mathbf{y}} \exp(\frac{1}{2} i \delta n k_0 z) \right] \times \exp[i(\bar{n} k_0 z - \omega t)] . \quad (3.3.34)$$

Wir wollen nun einige Spezialfälle diskutieren, die von Anwendungsinteresse sind:

1.  **$\lambda/4$ -Plättchen:**  $\frac{1}{2} \delta n k_0 z = \pi/4$

In diesem Fall beträgt die Phasenschiebung zwischen den  $\hat{\mathbf{x}}$ - und  $\hat{\mathbf{y}}$ -Komponenten genau  $\pi/2$ . Dadurch wird die einfallende, linear polarisierte Welle zu einer zirkular polarisierten Welle. Eine Scheibe mit der Dicke  $d = \lambda/4 \delta n$  nennt man ein  $\lambda/4$ -Plättchen. Liegt die Polarisierungsebene der einfallenden Welle auf der anderen Winkelhalbierenden, so erhält man den entgegengesetzten Drehsinn. Liegt sie nicht exakt auf der Winkelhalbierenden, so erhält man elliptisch polarisiertes Licht.

Kehrt man die Situation um, so erzeugt ein  $\lambda/4$ -Plättchen aus zirkular polarisiertem eine linear polarisierte Welle.

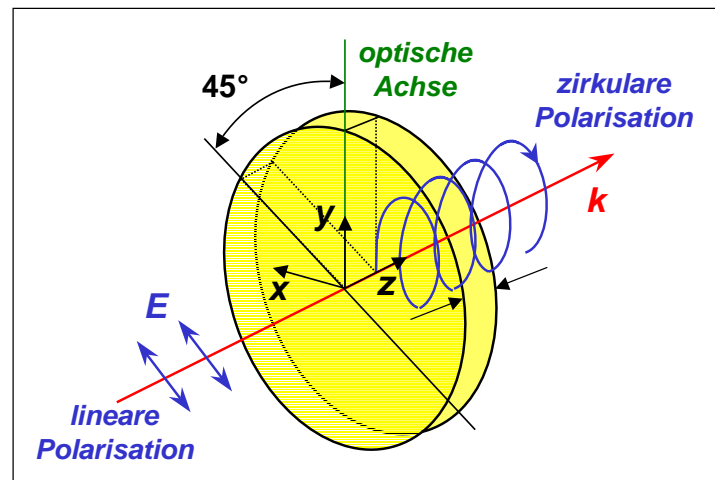


Abbildung 3.26: Prinzip des Zirkular-Polarisators ( $\lambda/4$ -Plättchen).

Die Dicke von  $\lambda/4$ -Plättchen ist im Allgemeinen sehr gering. Für Kalkspat mit  $n_o = 1.658$  und  $n_e = 1.486$ , d.h.  $\delta n = 0.172$  ergibt sich die Dicke für eine Wellenlänge von  $\lambda = 500 \text{ nm}$  zu  $d = \lambda/4 \cdot \delta n = 1.45\lambda \simeq 0.73 \mu\text{m}$ . Die Plättchen sind deshalb sehr fragil. Um größere Dicken zu erreichen, muss man Materialien mit sehr kleinem  $\delta n$  oder höhere Ordnungen (Phasenunterschied von  $(2m+1)\pi/2$ ) verwenden.

## 2. $\lambda/2$ -Plättchen: $\frac{1}{2}\delta n k_0 z = \pi/2$

Ein Plättchen mit der doppelten Dicke spiegelt, wie man sich leicht klar machen kann, die Polarisationsebene in der  $(x, z)$ - und  $(y, z)$ -Ebene und kehrt daher den Drehsinn einer einfallenden zirkular oder elliptisch polarisierten Welle um. Es wird  $\lambda/2$ -Plättchen oder Polarisationsdreher genannt.

## Kompensatoren

Die Phasenverschiebung zwischen den beiden charakteristischen Wellen kann durch so genannte *Kompensatoren* verändert werden. Diese werden aus einem Keil, der aus doppelbrechendem Material mit einem Öffnungswinkel von etwa  $1^\circ$  besteht, hergestellt. Dadurch wird seine Dicke ortsabhängig und sein Einfluss auf den einfallenden Strahl kann durch Verschieben des Keils relativ zum Strahl variiert werden.

Der *Babinet-Kompensator* besteht aus zwei übereinandergelegten, entgegengesetzt orientierten Keilen eines einachsigen Kristalls. Die Keile sind so befestigt, dass die optischen Achsen der beiden Hälften senkrecht aufeinander stehen. Damit erhält man ein System mit parallelen Außenflächen, das zu einer Phasenverschiebung führt, die kontinuierlich durch Null verläuft.

## Kristallpolarisatoren

Mit Hilfe der Doppelbrechung in optisch einachsigen Kristallen lässt sich aus unpolarisiertem Licht linear oder elliptisch polarisiertes Licht erzeugen. Diese Kristallpolarisatoren können auch für hohe Lichtleistungen verwendet werden.

Ein Beispiel für einen Kristallpolarisator ist das *Nivolsche Prisma* (siehe Abb. 3.27a). Es besteht aus einem doppelbrechenden, negativ optisch einachsigen Rhomboeder, der entlang der diagonalen Fläche schräg zur optischen Achse aufgeschnitten und anschließend mit einem durchsichtigen Kleber wieder

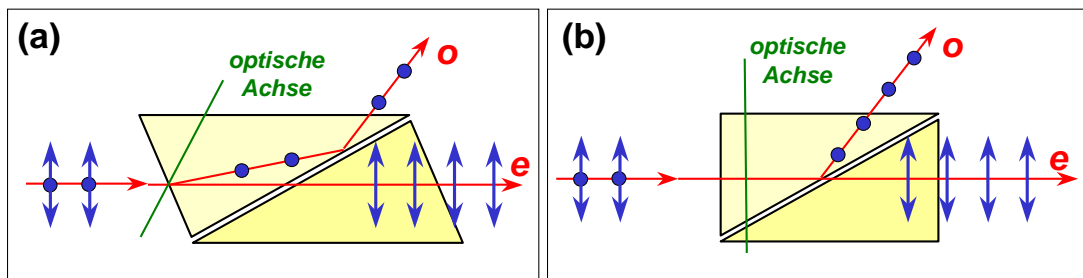


Abbildung 3.27: (a) Nicolsches Prisma zur Erzeugung von linear polarisiertem Licht. (b) Glan-Thompson-Polarisator.

zusammengeklebt wird. Fällt unpolarisiertes Licht auf die Eintrittsfläche, so wird es aufgrund der Doppelbrechung in einen ordentlichen und außerordentlichen Strahl aufgeteilt. Wegen  $n_o > n_e$  wird der ordentliche Strahl stärker gebrochen und beide Strahlen treffen unter unterschiedlichen Winkeln auf die Klebefläche. Der Kleber (z.B. Kanadabalsam) hat einen Brechungsindex ( $n_K = 1.54$ ), der kleiner als  $n_o = 1.66$  aber größer als  $n_e = 1.49$  ist. Der Strahl trifft unter einem Winkel  $\beta$  auf die Grenzfläche, der kleiner als der Grenzwinkel des ordentlichen Strahl ist. Der ordentliche Strahl wird somit totalreflektiert und nur der außerordentliche Strahl wird durchgelassen. Das transmittierte Licht ist dadurch vollständig linear polarisiert. Ein Nachteil der Anordnung ist, dass die Ein- und Austrittsfläche schräg zur Strahlrichtung steht, wodurch ein Strahlversatz für den transmittierten außerordentlichen Strahl entsteht.

Der Nachteil des Strahlversatzes wird beim *Glan-Thompson-Polarisator* vermieden, der senkrechte Endflächen hat (siehe Abb. 3.27b). Er ist so aus einem Kalkspatkristall geschnitten, dass die optische Achse parallel zur Eintrittsfläche liegt. Deshalb tritt beim Auftreffen von unpolarisiertem Licht keine Doppelbrechung auf. Ordentlicher und außerordentlicher Strahl laufen deshalb parallel aber mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten bis zur Klebefläche, wo der ordentliche Strahl totalreflektiert wird.



## 3.4 Induzierte Doppelbrechung

In unseren bisherigen Überlegungen sind wir davon ausgegangen, dass die Anisotropie eines Kristalls eine Folge seiner Struktur ist. Es gibt aber zahlreiche Möglichkeiten, ein zunächst isotropes Medium durch äußere Einwirkung (elektrische und magnetische Felder, mechanisch Kräfte) anisotrop zu machen. Wir wollen hier einige Beispiele kurz diskutieren.

### 3.4.1 Der elektro-optische Effekt

Das Anlegen eines elektrischen Feldes kann induzierte Anisotropie hervorrufen. Es gibt dabei zwei Arten von Effekten, einen quadratischen und einen linearen Effekt, die wir hier diskutieren wollen.

#### Der Kerr-Effekt

Es zeigt sich, dass zahlreiche isotrope Materialien, z.B. Glas oder Flüssigkeiten wie Nitrobenzol, uniaxial werden, wobei ihre optische Achse parallel zur Richtung des angelegten elektrischen Feldes ist. Da es keine Möglichkeit gibt, dass ein isotropes Material empfindlich gegenüber dem Vorzeichen des angelegten elektrischen Feldes sein könnte, muss der Effekt dem Quadrat (oder höheren geraden Potenzen) des angelegten elektrischen Feldes  $E_0$  folgen. Es gilt damit

$$\Delta n = n_e - n_o = \lambda K E_0^2 . \quad (3.4.1)$$

Dieser Zusammenhang wird *Kerr-Effekt*,<sup>20</sup> die Proportionalitätskonstante  $K$  die *Kerr-Konstante* genannt. Für  $\lambda_0 = 589.3 \text{ nm}$  und  $20^\circ\text{C}$  beträgt die Kerr-Konstante für Wasser  $4.7 \times 10^{-7} \text{ cm}/(\text{st. V})^2$ , für Nitrobenzol  $220 \times 10^{-7} \text{ cm}/(\text{st. V})^2$ .

#### Der Pockels-Effekt

Es gibt auch zahlreiche Kristalle ohne Symmetriezentrum in der Anordnung der Atome in der Elementarzelle (keine Inversionssymmetrie). Solche Kristalle können zwischen positiven und negativen Feldern unterscheiden, wodurch der elektrooptische Effekt auch von ungeraden Potenzen des angelegten elektrischen Feldes abhängen kann. Insbesondere wird ein linearer Effekt möglich.

Eine komplette Beschreibung des elektrooptischen Effekts in Materialien ohne Inversionssymmetrie ist schwierig und soll hier nicht durchgeführt werden. Grob gesagt führt der elektrooptische Effekt zu einer Verzerrung des Brechungsindexellipsoids.

Wir wollen hier kurz den *Pockels-Effekt*<sup>21</sup> in uniaxialen Kristallen (z.B.  $\text{KH}_2\text{PO}_4$ ) betrachten. Dabei erzeugt das Anlegen eines Feldes  $E_0$  parallel zur optischen Achse gleich große Änderungen (mit entgegengesetztem Vorzeichen) des Brechungsindex  $n_\perp$  für die beiden Polarisierungen senkrecht zum angelegten Feld. Üblicherweise schreibt man den verzerrten Brechungsindexellipsoid in der Form

<sup>20</sup>Der Kerr-Effekt wurde 1875 von dem schottischen Physiker **John Kerr** (1824 - 1907) entdeckt.

<sup>21</sup>Der Pockels-Effekt wurde 1893 von dem deutschen Physiker **Carl Alwin Pockels** (1865 - 1913) entdeckt.

$$D_x^2 \left( \frac{1}{n_{\perp}^2} + rE_0 \right) + D_y^2 \left( \frac{1}{n_{\perp}^2} - rE_0 \right) + D_z^2 \left( \frac{1}{n_{\parallel}^2} \right) = \varepsilon_0, \quad (3.4.2)$$

wobei angenommen wird, dass die induzierten Brechungsindexänderungen klein sind. Dann ergeben sich die wirklichen Änderungen der  $x$ - und  $y$ -Achse des Brechungsindexellipsoids zu

$$\pm \delta n_{\perp} \simeq \mp rE_0 n_{\perp}^3 / 2. \quad (3.4.3)$$

Offensichtlich wird der Kristall unter der Wirkung des angelegten elektrischen Feldes zweiachsig, so dass eine Welle, die sich entlang der  $z$ -Richtung ausbreitet, elliptisch polarisiert wird.

Interessant ist, dass eine Kristallscheibe der Dicke  $d$  in  $z$ -Richtung wie ein  $\lambda/4$ -Plättchen wirkt, wenn die Bedingung

$$dE_0 = \frac{\lambda}{4rn_{\perp}^3} \quad (3.4.4)$$

erfüllt ist. Das Produkt  $dE_0$  ist hierbei eine Spannung, die von der Kristalldicke unabhängig ist. Sie wird  $\lambda/4$ -Spannung genannt und beträgt typischerweise einige 100 V bis einige kV. Der Pockels-Effekt kann dazu benutzt werden, eine spannungsgesteuerte Strahlblende zu realisieren, indem man den Kristall zwischen zwei gekreuzte Polarisatoren einbaut.

### 3.4.2 Der photoelastische Effekt – Spannungsoptik

Auch in homogenen, isotropen Medien lässt sich unter dem Einfluss von Zug- oder Druckspannungen optische Doppelbrechung erzeugen. Die äußeren Zug- und Druckkräfte führen zu lokalen orts- und richtungsabhängigen Brechungsindexänderungen, aus deren Messung man Information über die mechanischen Spannungen gewinnen kann. Um eine solche Messung z.B. an einem Werkstück durchzuführen, wird das Lichtbündel soweit aufgeweitet, dass das gesamte Werkstück durchstrahlt wird. Das zu untersuchende durchsichtige Werkstück wird dabei von linear polarisiertem Licht durchleuchtet und hinter dem Werkstück befindet sich ein Analysator mit senkrechter Polarisationsrichtung. Erfolgt in dem durchleuchteten Medium keine Änderung der Polarisationsrichtung, so würde man nach dem Analysator keine Intensität messen. Wird allerdings eine mechanische Spannung auf das Medium ausgeübt, so bewirken die nun optisch doppelbrechenden Gebiete des Mediums eine Änderung der Polarisationsrichtung und damit eine von Null verschiedene Intensität hinter dem Analysator.

Da die Phasenschiebung

$$\Delta\varphi(x,y) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \int_0^d \Delta n(x,y) dz \quad (3.4.5)$$

von der Wellenlänge des verwendeten Lichts abhängt, erhält man bei Einstrahlen von weißem Licht ein farbiges Flächenmuster, welches detaillierte Informationen über die mechanischen Spannungen im Medium enthält.

### 3.4.3 Der magneto-optische Effekt

Zahlreiche isotrope diamagnetische Materialien (z.B. Glas, Wasser) werden optisch aktiv, wenn man ein magnetisches Feld anlegt. Dieser Effekt wurde 1845 von **Michael Faraday** entdeckt und nach ihm *Faraday-Effekt* genannt. Die induzierte optische Aktivität richtet sich parallel zum äußeren Feld  $B_0$  aus. Breitet sich nun eine Welle mit  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$  aus, so dreht sich ihre Polarisationsrichtung in die eine oder die andere Richtung, je nachdem ob  $\mathbf{k}$  parallel oder antiparallel zu  $\mathbf{B}_0$  ist.

Der Winkel  $\beta$ , gemessen in Bogensekunden, um den sich die Polarisationsrichtung dreht, ist durch den empirisch ermittelten Ausdruck

$$\beta = \mathcal{V} B_0 d \quad (3.4.6)$$

gegeben. Hierbei ist  $\mathcal{V}$  die *Verdet-Konstante* und  $d$  die vom Licht durchlaufene Dicke des Mediums. Die Verdet-Konstante hängt sowohl von der Frequenz (schnelle Abnahme mit zunehmender Frequenz) als auch von der Temperatur ab. Sie liegt für Flüssigkeiten im Bereich von etwa 10 Bogenminuten  $\text{T}^{-1}\text{m}^{-1}$  und für Flüssigkeiten und Festkörper im Bereich von  $10^4$  Bogenminuten  $\text{T}^{-1}\text{m}^{-1}$ . So dreht z.B. eine 1 cm dicke Wasserprobe bei einem Feld von 1 T die Polarisationssebene um etwa  $2^\circ$ .

Für eine theoretische Beschreibung des Faraday-Effekts muss man die quantenmechanische Dispersionstheorie einschließlich der Auswirkung von  $\mathbf{B}_0$  auf die atomaren oder molekularen Energieniveaus berücksichtigen. Wir wollen uns deshalb hier auf die Beschreibung der experimentellen Beobachtung beschränken.

## Zusammenfassung

- Elektromagnetische Wellen, deren Feldvektor  $\mathbf{E}$  eine definierte Richtung zum Wellenvektor  $\mathbf{k}$  hat, nennt man polarisiert. Die Richtung des elektrischen Feldes  $\mathbf{E}$  bzw. bei anisotropen Materialien des Verschiebungsfeldes  $\mathbf{D}$  gibt die Richtung der Polarisation an. Man unterscheidet zwischen *linear*, *zirkular* und *elliptisch* polarisierten Wellen.
- Ein Polarisator ist ein optisches Element, mit dem aus unpolarisiertem Licht Licht mit einem definierten Polarisationszustand erzeugt werden kann.
- Polarisiertes Licht kann durch Streuung, Reflexion, Dichroismus oder Doppelbrechung erzeugt werden.
- Bei der Reflexion von linear polarisiertem Licht an einem absorbierenden Medium (z.B. Metall) entsteht elliptisch polarisiertes Licht, da die TE- und TM-Komponente unterschiedliche Phasenschiebungen erleiden. Die speziellen Reflexionseigenschaften von absorbierenden Medien werden bei dem als *Ellipsometrie* bezeichneten Messverfahren genutzt.
- In anisotropen Medien sind elektrische Feldstärke  $\mathbf{E}$  und Polarisation  $\mathbf{P}$  bzw. dielektrische Verschiebung  $\mathbf{D}$  im Allgemeinen nichtmehr parallel. Der Poynting-Vektor  $\mathbf{S}$  schließt mit dem Wellenvektor  $\mathbf{k}$  den gleichen Winkel  $\theta$  ein, um den  $\mathbf{E}$  gegen  $\mathbf{D}$  geneigt ist.
- Für anisotrope Materialien sind die elektrische Suszeptibilität bzw. die Dielektrizitätskonstante keine Zahlen mehr, sondern Tensoren. In seiner Hauptachsenform kann der Dielektrizitätstensor durch seine drei Haupt-Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  und  $\epsilon_3$  dargestellt werden.

Je nachdem, wie viele Komponenten des Dielektrizitätstensors verschieden sind, unterscheidet man:

1. optisch isotrope Medien:  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$
  2. optisch einachsige Medien:  $\epsilon_1 = \epsilon_2 \neq \epsilon_3$
  3. optisch zweiachsige Medien:  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq \epsilon_3$
- Für die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen in anisotropen Medien muss die dielektrische Verschiebung  $\mathbf{D}$  in der von  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{E}$  aufgespannten Ebene liegen. Diese Bedingung definiert die *charakteristischen Wellen*. Im Allgemeinen gibt es zwei charakteristische Wellen, deren Polarisation orthogonal zueinander ist.
  - Der Brechungsindex von anisotropen Medien kann als Ellipsoid dargestellt werden, den man *Brechungsindex-Ellipsoid* nennt. Optisch einachsige Medien mit  $n_1 = n_2 \neq n_3$  besitzen einen um die  $z$ -Achse rotationssymmetrischen Index-Ellipsoiden. Materialien mit  $n_1 = n_2 < n_3$  bezeichnet man als *optisch positive*, solche mit  $n_1 = n_2 > n_3$  als *optisch negative* einachsige Materialien.
  - Ein Lichtstrahl, der ein anisotropes Medium durchläuft, spaltet im Allgemeinen in einen *ordentlichen* und einen *außerordentlichen* Strahl auf. Für den ordentlichen Strahl ist der Poynting-Vektor  $\mathbf{S}$  parallel  $\mathbf{k}$ . Für den außerordentlichen Strahl sind  $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{k}$  nicht parallel.
  - Für optisch einachsige Materialien ist für elektrische Felder senkrecht zur optischen Achse der Brechungsindex in der Ebene senkrecht zu  $\mathbf{E}$  konstant. Er wird *ordentlicher Brechungsindex*  $n_o$  genannt. Für diese Feldrichtung ist wie bei isotropen Materialien  $\mathbf{S} \parallel \mathbf{k}$ .

Für elektrische Felder parallel zum Hauptschnitt besitzt das elektrische Feld eine Komponente parallel und senkrecht zur optischen Achse mit unterschiedlichen zugehörigen Brechungsindizes. Der nun von der Ausbreitungsrichtung abhängige Brechungsindex wird *außerordentlicher Brechungsindex*  $n_e$  genannt. Für diese Feldrichtung ist  $\mathbf{S} \nparallel \mathbf{k}$ .

- Die Doppelbrechung kann zur Herstellung von  $\lambda/4$ - und  $\lambda/2$ -Plättchen verwendet werden. Mit  $\lambda/4$ -Plättchen kann aus linear polarisiertem zirkular polarisiertes Licht erzeugt werden. Mit  $\lambda/2$ -Plättchen kann der Drehsinn von zirkular polarisierten Wellen umgekehrt werden.
- Mit Hilfe der Doppelbrechung in optisch einachsigen Kristallen lassen sich Kristallpolarisatoren konstruieren, mit denen aus unpolarisiertem Licht linear oder elliptisch polarisiertes Licht erzeugt werden kann. Beispiele sind das *Nicolsche Prisma* oder der *Glan-Thompson-Polarisator*.
- Optisch isotrope Materialien können durch äußere elektrische und magnetische Felder sowie mechanische Kräfte anisotrop und dadurch doppelbrechend gemacht werden. Man spricht von induzierter Doppelbrechung. Wichtige Effekte sind der elektrooptische Effekt (Kerr- und Pockels-Effekt), der magnetooptische Effekt (Faraday-Effekt) und der photoelastische Effekt.

