Physik der Kondensierten Materie 2

Rudolf Gross

SS 2021

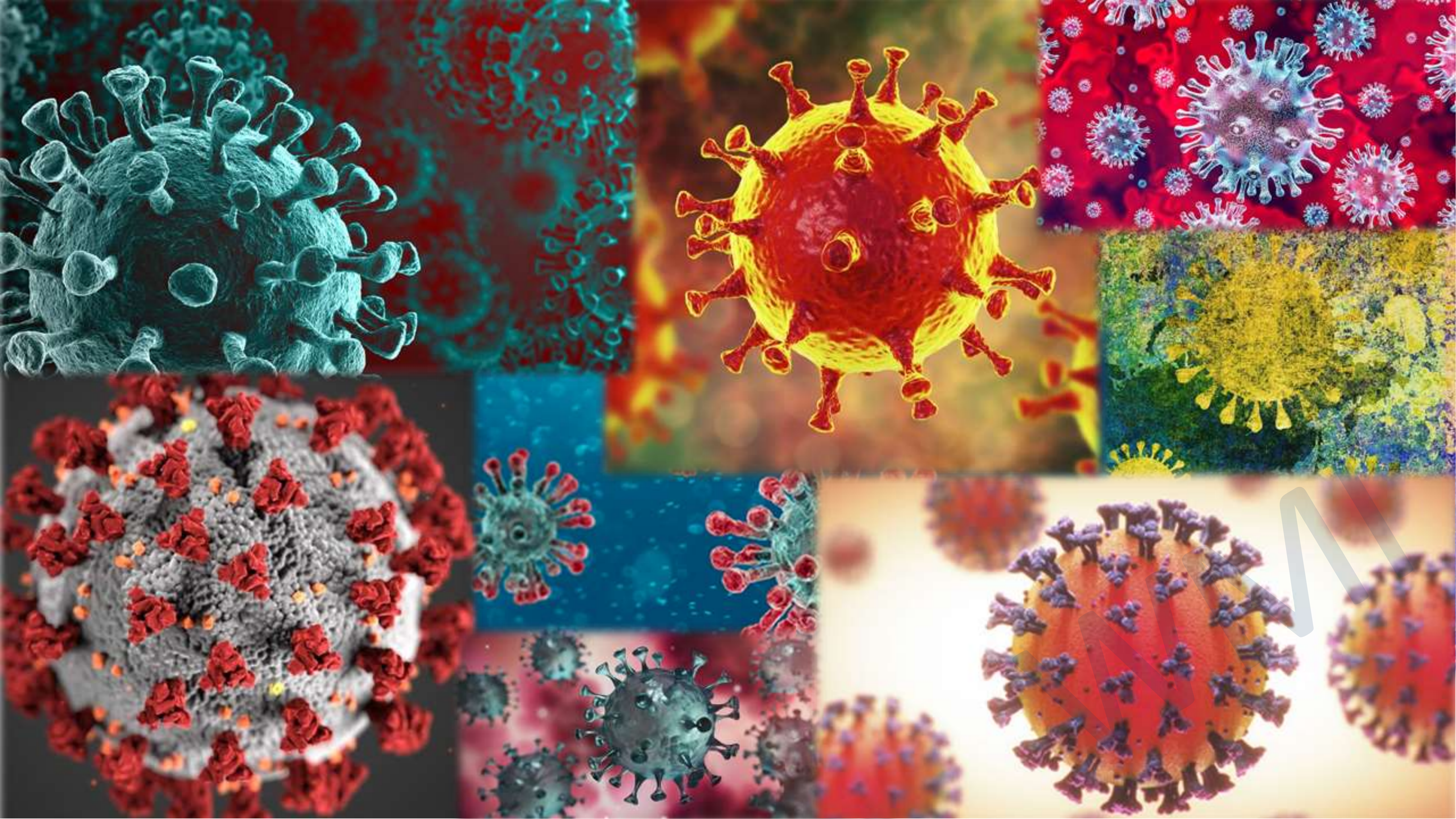
SS 2021

Vorlesungszeit:
Mo. 12. April – Di. 08. Juni 2020

Montag,	10:15 – 11:45h	Hörsaal 2
Montag,	12:30 – 14:00h	Hörsaal 2
Dienstag,	08:30 – 10:00h	Hörsaal 2
Dienstag,	12:15 – 13:45h	Hörsaal 2

Tutorium zu KM 2, SS 2021

Mittwoch,	10:15 – 11:45h	Hörsaal 2



SS 2021

Vorlesung:
asynchrones E-Learning

32 Doppelstunden
ein File pro Doppelstunde

Tutorium:
synchrones E-Learning

Zoom-Meeting
(Link wird via Email zugeschickt)

Übungsgruppen KM 2, SS2021

	Zeit	Raum
Übungsgruppe 1	Mo 08:30-10:00 Uhr	Zoom-Meeting
Übungsgruppe 2	Di 16:15-17:45 Uhr	Zoom-Meeting
Übungsgruppe 3	Do 10:15-11:45 Uhr	Zoom-Meeting
Übungsgruppe 4	Do 12:30-14:00 Uhr	Zoom-Meeting

Übungsgruppenleitung: Dr. Stephan Geprägs, Stephan.Gepraegs@wmi.badw.de

synchrones E-Learning

Zoom Meeting

(Link wird via Email verschickt)

Beginn: Mo. 19.04.2021

WMI

Physik der Kondensierten Materie 2

Rudolf Gross

SS 2021

Teil 1

Vorlesungsstunde: 12.04.2021-1

Physik der Kondensierten Materie 1

…eine kurze Wiederholung

Themen

- **1 Aufbau von Kristallen:**
  Klassifizierung von Kristallstrukturen, Richtungen und Ebenen, Defekte, Oberflächen
- **2 Reziprokes Gitter und Strukturanalyse:**
  Brillouin-Zonen, von Laue- und Bragg-Bedingung, Struktur- und Atomformfaktor, Debye-Waller-Faktor
- **3 Bindungskräfte:**
  Van der Waals, ionische, kovalente und metallische Bindung, Wasserstoffbrückenbindung
- **4 Elastische Eigenschaften:**
  Kontinuumsmechanik, Spannung, Dehnung, Elastizitätstensor, elastische Wellen
- **5 Gitterdynamik:**
  klassische Theorie des Kristallgitters, Dispersionsrelation der Gitterschwingungen, Phononen
- **6 Thermische Eigenschaften des Kristallgitters:**
  spezifische Wärme (klassisch, quantenmechanisch), Debye- und Einstein-Näherung, thermische Ausdehnung, Wärmeleitfähigkeit

Themen

- **7 Das freie Elektronengas:**
  Fermi-Gas, Fermi-Energie, Dispersionsrelation, spezifische Wärme, elektrische und thermische Leitfähigkeit, Hall-Effekt

- **8 Elektronen im periodischen Potenzial:**
  Bloch-Wellen, Dispersionsrelation und Bandstruktur, Näherung von schwach und stark gebundenen Elektronen, Metalle/Halbmetalle/Isolatoren, Fermi-Flächen

- **9 Dynamik von Kristallelektronen:**
  Semiklassiche Beschreibung, Bewegung in elektrischen und magnetischen Feldern, Streuprozesse, Boltzmann-Transportgleichung, thermoelektrische und thermomagnetische Effekte

Fortsetzung: quantenmechanische Beschreibung der Elektronenbewegung

Kapitel 9

Dynamik von Kristallelektronen

9.10 Quantisierung von Elektronenbahnen

- *Bewegung von Elektronen im Orts- und k-Raum*

- **bisher**: *semiklassische Beschreibung* der Elektronenbewegung
  → Quantenmechanik liefert $\varepsilon(\mathbf{k})$ und damit $\mathbf{v}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\mathbf{k}} \varepsilon(\mathbf{k})$
  → klassische Bewegungsgleichungen

  Bahnen in Orts- und k-Raum

- **jetzt**: *quantenmechanische Beschreibung* der Elektronenbewegung
  → Elektronen auf geschlossenen Bahnen müssen die **Bohr-Sommerfeld-Quantisierung** erfüllen
  → Phase darf sich nur um $n \cdot 2\pi$ bei einem Umlauf ändern
  → ***Quantisierung der Bahnen***

- **zuerst**: Bewegung von **freien Ladungsträgern** mit Ladung q in Magnetfeld $\mathbf{B}||\hat{\mathbf{z}}$ (Elektronen: $q = -e$)
- **später**: Bewegung von **Bandelektronen** mit Ladung q in Magnetfeld $\mathbf{B}||\hat{\mathbf{z}}$

- ***Schrödinger-Gleichung***:

$$\frac{1}{2m}\underbrace{\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A}\right)}^{2}\Psi = \varepsilon\,\Psi$$

Eichung: $\mathbf{A} = (0, Bx, 0) \;\rightarrow\; \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} = (0,0,B)$

B-Feld in z-Richtung

Operator des kinematischen Impulses $\hbar\mathbf{k}$:

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} + q\mathbf{A} \;\rightarrow\; \hbar\mathbf{k} = \mathbf{p} - q\mathbf{A} = \frac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A}$$

- mit $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$ lautet die Schrödinger-Gleichung:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{qB}{\hbar}x\right)^2\Psi - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = \varepsilon\,\Psi$$

- ***Lösungsansatz***:

$$\Psi(x,y,z) = u(x)\exp[i(\beta y + k_z z)]$$

→ freie Bewegung in z-Richtung parallel zu B, keine Kraftwirkung von B
→ modifizierte Bewegung in xy-Ebene

9.10.1 Freie Ladungsträger

- Einsetzen von $\Psi(x,y,z) = u(x)\exp[i(\beta y + k_z z)]$ in $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{qB}{\hbar}x\right)^2\Psi - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = \varepsilon\,\Psi$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\beta - \frac{qB}{\hbar}x\right)^2 u = \tilde{\varepsilon}\ u$$

mit $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$ (Energie ohne freie Bewegung in z-Richtung)

- Vergleich mit Bewegungsgleichung eines 1D harmonischen Oszillators

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega_c^2\tilde{x}^2\,u(x) = \tilde{\varepsilon}\ u(x)$$

$$\Rightarrow\ \tilde{x} = x - \frac{\hbar\beta}{qB} = x - \frac{m}{qB}\frac{\hbar\beta}{m} = x - x_0$$

$$\Rightarrow \omega_c = \frac{qB}{m}$$

➔ $u(x)$ beschreibt Bewegung eines ***1D harmonischen Oszillators***

Schwingungsfrequenz $\omega_c = \frac{eB}{m} = 1.758\,820\,174\,(71) \times 10^{11}\ \mathrm{s}^{-1} \times B\,[\mathrm{Tesla}]$

Zyklotronfrequenz

Schwerpunktkoordinate $x_0 = \frac{m}{eB}\frac{\hbar\beta}{m} = \frac{1}{\omega_c}\frac{\hbar\beta}{m}$

mit $(q = e)$

9.10.1 Freie Ladungsträger

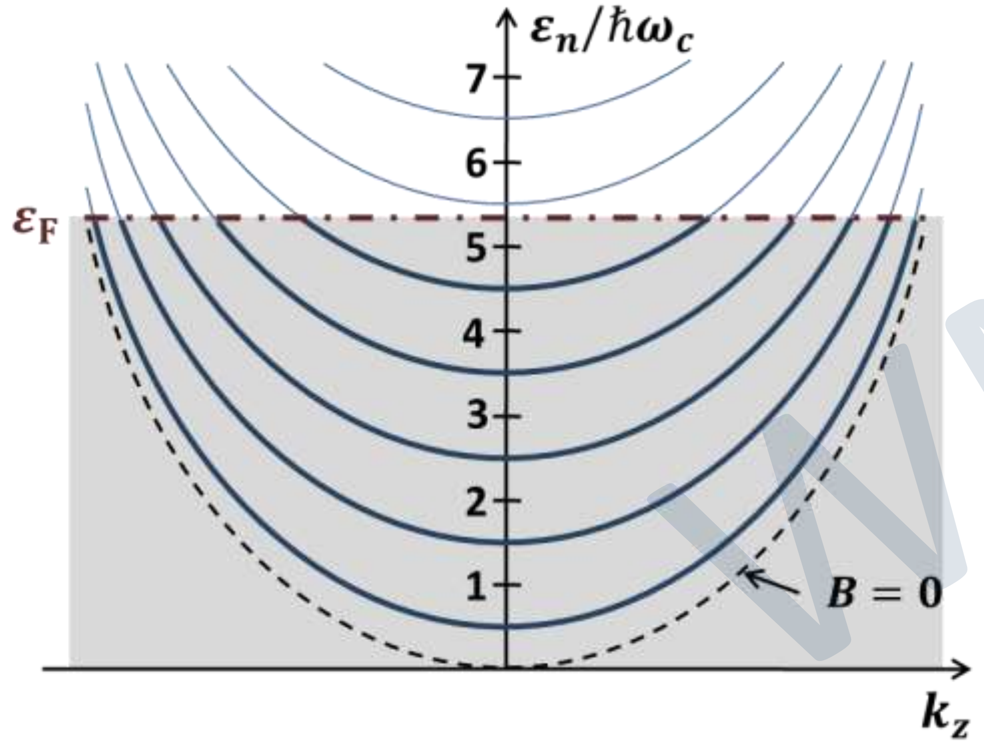
- Eigenenergien des 1D harmonischen Oszillators:

$$\tilde{\varepsilon}_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c \quad \Rightarrow \quad \textbf{Gesamtenergie:} \quad \varepsilon_n = \underbrace{\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c}_{\text{Kreisbewegung in Ebene } \perp B \text{ um Schwerpunktkoordinate } x_0} + \underbrace{\frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}}_{\text{freie Bewegung } || \, B}$$

Hinweis:
Spin wird nicht berücksichtigt, erfolgt später bei Diskussion der magnetischen Eigenschaften

➔ parabelförmige Energiebänder der freien Elektronen spalten in Subbänder (***Landau-Niveaus***) mit Abstand $\hbar\omega_c$ auf

Besetzung der Subbänder bei $T = 0$ bis zur Fermi-Energie ε_F



- ***Wie viele Zustände gibt es pro Landau-Niveau, wie groß ist die Entartung des Landau-Niveaus ?***

Fall $B = 0$: freie Elektronen in Potenzialkasten mit Abmessungen L_x, L_y, L_z $\rightarrow V = L_x \cdot L_y \cdot L_z$

Randbedingungen: $k_x = \frac{2\pi}{L_x} n_x, k_y = \frac{2\pi}{L_y} n_y, k_z = \frac{2\pi}{L_z} n_z$ $\quad n_{x,y,z}$ = ganze Zahl

Zustand nimmt in k-Raum Volumen $(2\pi)^3/V$ ein → **Zustandsdichte für eine Spin-Richtung: $1/(2\pi)^3$**

Fall $B \neq 0$: z-Richtung: alles gleich → Quantisierung von k_z in Einheiten von $2\pi/L_z$

in Ebene $\perp B$: Kreisbewegung um Schwerpunktkoordinate $x_0 = \frac{m}{eB}\frac{\hbar\beta}{m} = \frac{1}{\omega_c}\frac{\hbar\beta}{m}$

Randbedingung: x_0 muss innerhalb des Festkörpers liegen → $0 < x_0 < L_x$

➔ **Randbedingung** für β: $\quad 0 < \beta < \frac{m\omega_c}{\hbar} L_x$

➔ **Anzahl** p der möglichen β-Werte:

$$p = \left(\frac{m\omega_c}{\hbar} L_x\right) / \left(\frac{2\pi}{L_y}\right) = \hbar\omega_c \underbrace{D_{2D}} = \underbrace{L_x L_y B} \cdot \underbrace{\frac{e}{2\pi\hbar}} = \frac{\Phi}{2\Phi_0}$$

$D_{2D} = \frac{m}{2\pi\hbar^2} L_x L_y$
2D Zustandsdichte
für eine Spin-Richtung

magnetischer Fluss Φ
durch Probenfläche $\perp B$

Flussquant
$\Phi_0 = \frac{h}{2e}$

9.10.1 Freie Ladungsträger

- ***Zusammenfassung der wichtigen Fakten***

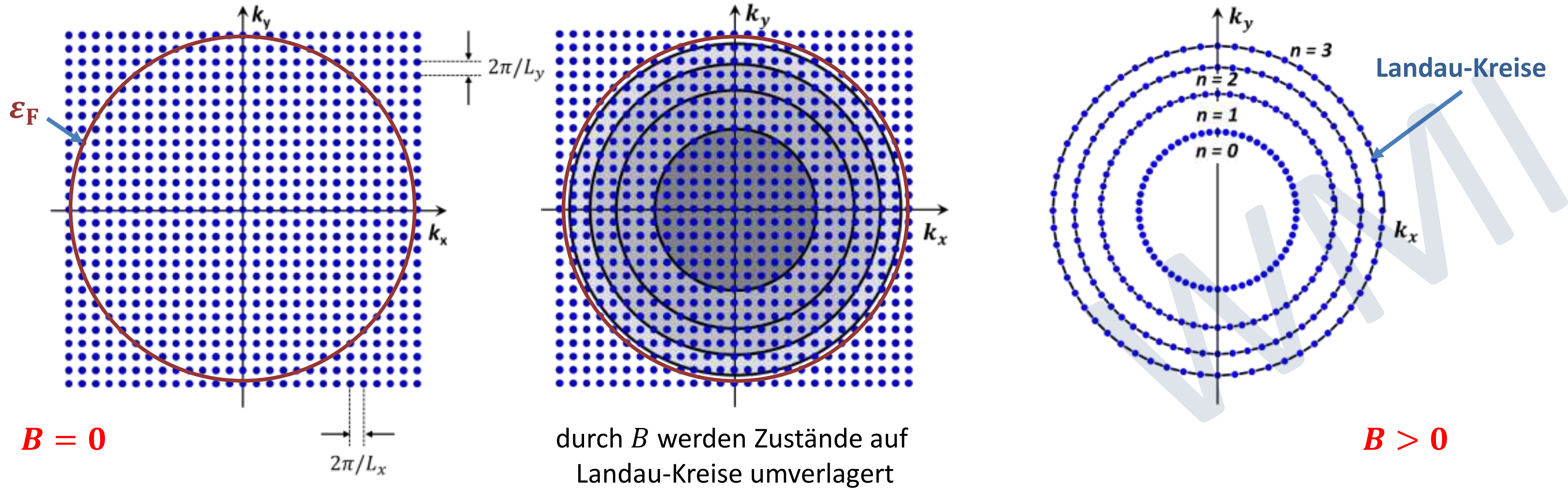
  i. jedes Landauniveau/Energieniveau mit Quantenzahl n ist p-fach entartet

  ii. Entartung p nimmt mit B und Probengröße $L_x L_y \perp B$ zu

  iii. Entartung p entspricht 2 x Zahl der Zahl der Flussquanten durch Probenfläche $\perp B$

  (Faktor 2 wegen Verwendung des Flussquants aus der Supraleitung $h/2e$)

- ***Darstellung der p Niveaus mit Eigenenergie $\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c$ für ein 2D-System ($k_z = 0$)***



$B = 0$

durch B werden Zustände auf Landau-Kreise umverlagert

$B > 0$

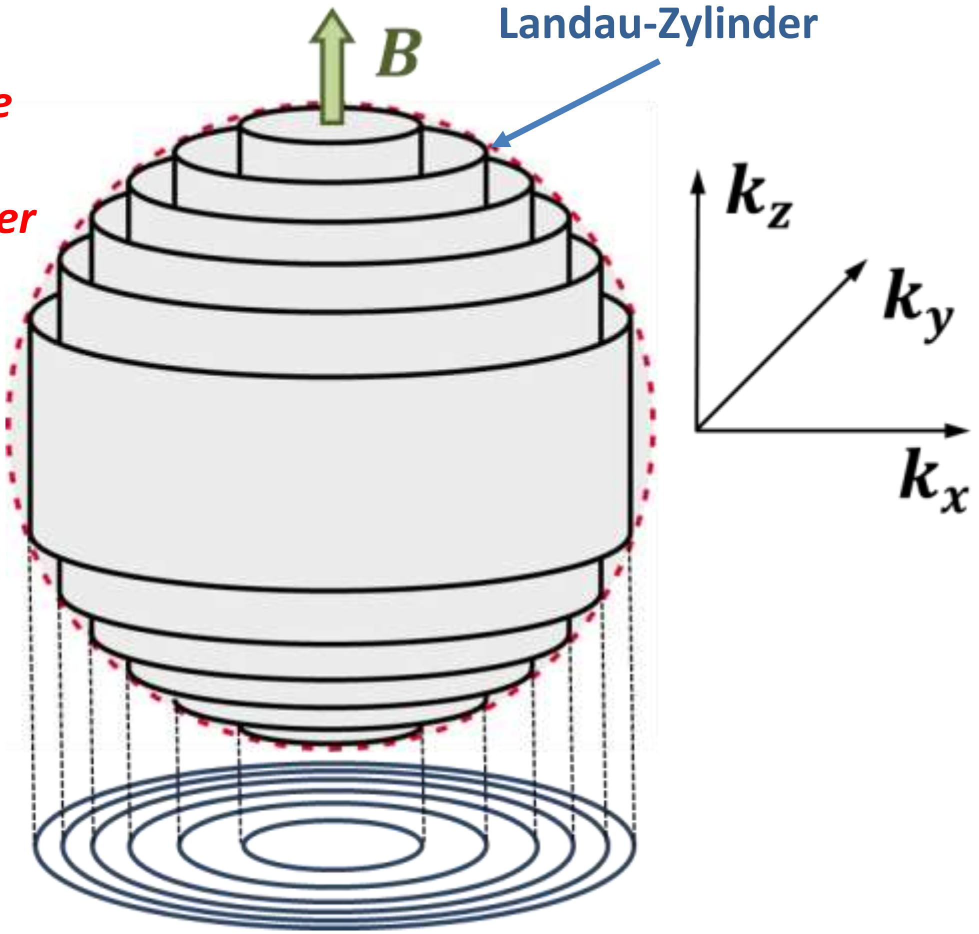
- *Im Dreidimensionalen kommt noch **freie Bewegung || B dazu:***

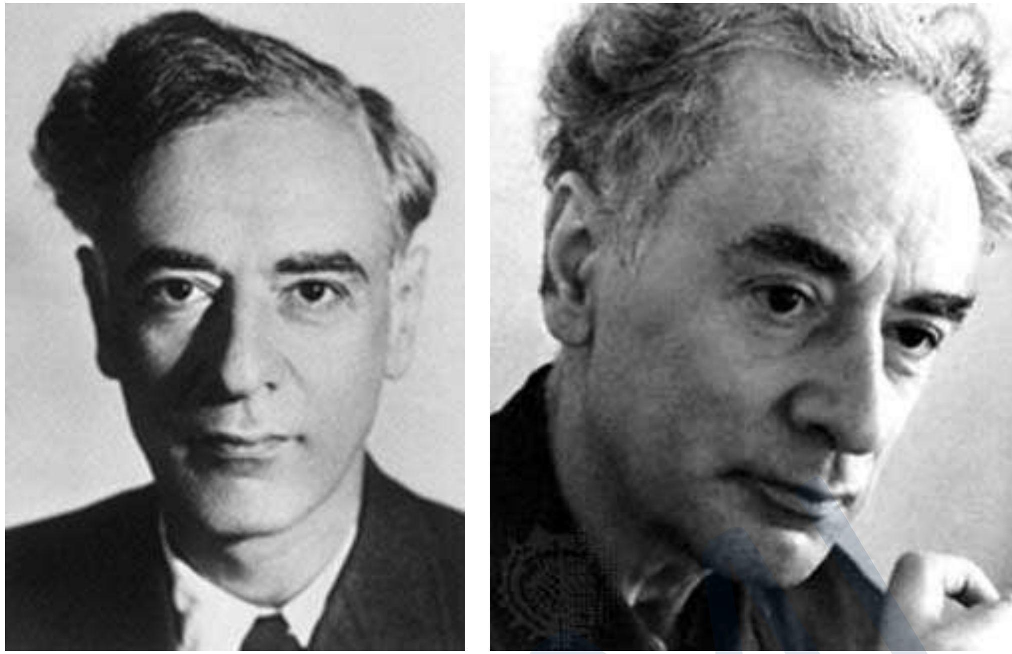
$$\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$$

2D-Landau-Kreise

$\Rightarrow$

3D Landau-Zylinder

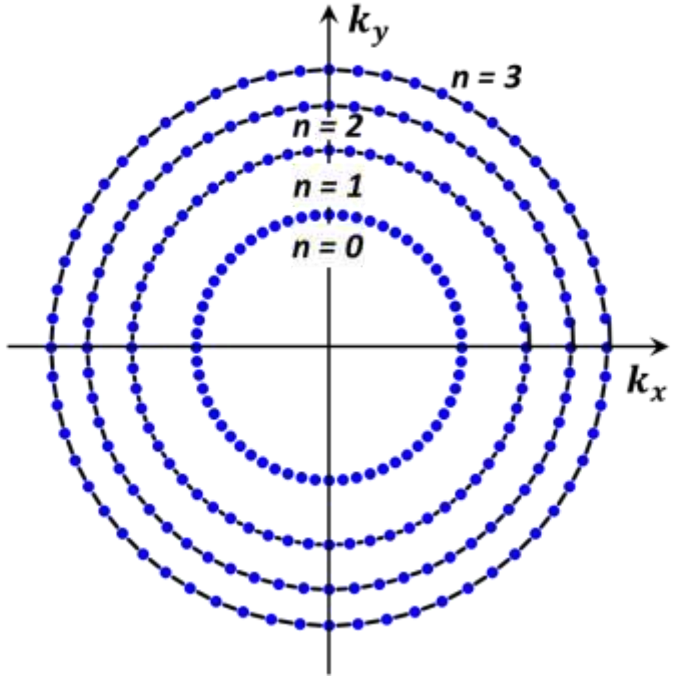




Lev Dawidowitsch Landau (1908 - 1968)
Nobelpreis für Physik 1962

9.10.1 Freie Ladungsträger

- *die von den Landau-Kreisen/Zylindern umschlossenen Flächen $S_n = \pi k_{\perp,n}^2$ sind quantisiert*



aus $\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c = \frac{\hbar^2 k_{\perp,n}^2}{2m}$ folgt Kreisradius

$$k_{\perp,n} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c} = \sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{2eB}{\hbar}}$$

Entartung p:

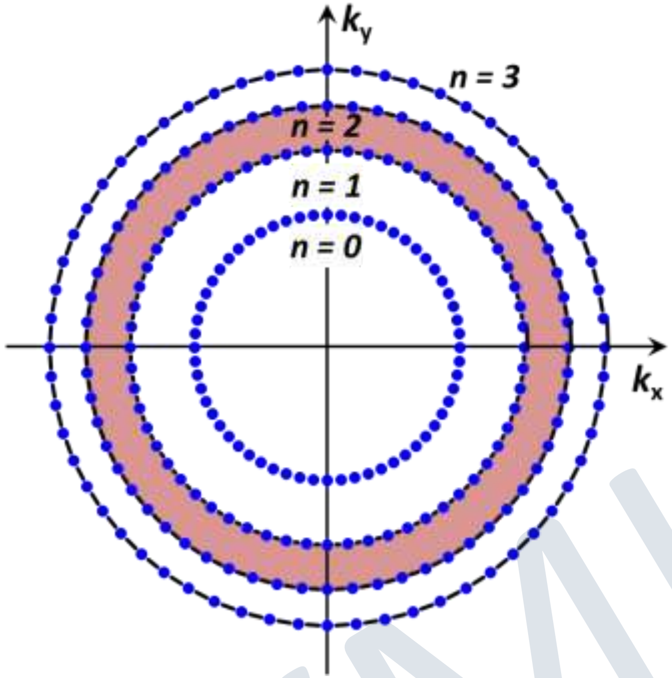
$$p = \frac{\text{Fläche in } k\text{−Raum}}{\text{Zustandsichte in } k\text{−Raum}}$$

$$p = \frac{\Delta S}{(2\pi)^2/L_x L_y}$$

$$p = \frac{2\pi e B}{\hbar} \cdot \frac{L_x L_y}{4\pi^2}$$

$$p = L_x L_y B \frac{e}{h} = \frac{\Phi}{2\Phi_0}$$

- *die Flächendifferenz $\Delta S = S_{n+1} - S_n$ ist konstant*



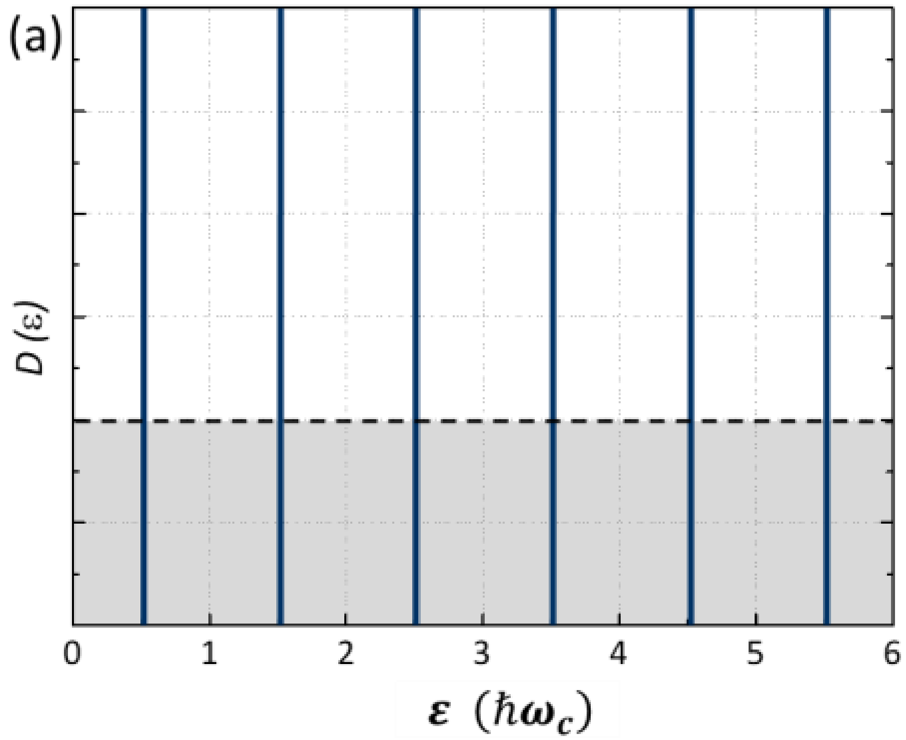
$$\Delta S = S_{n+1} - S_n = \pi\left(k_{\perp,n+1}^2 - k_{\perp,n}^2\right)$$

$$\Delta S = \pi\left[\left(n + 1 + \frac{1}{2}\right) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\right]\frac{2eB}{\hbar}$$

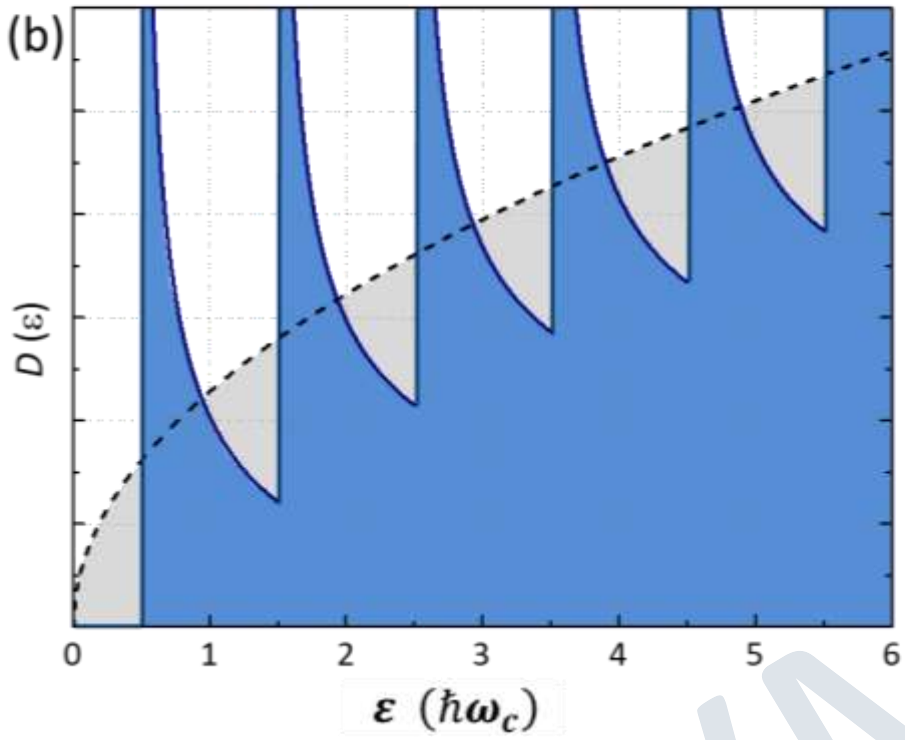
$$\Delta S = \frac{2\pi e B}{\hbar}$$

9.10.2 Zustandsdichte im Energieraum

- ***Wie wird Zustandsdichte $D(\varepsilon)$ durch Magnetfeld modifiziert ?***



2D freies Elektronengas



3D freies Elektronengas

$B = 0$: $D(\varepsilon) = \frac{L_x L_y}{4\pi}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right) = const.$ (eine Spin-Richtung)

$B > 0$: $D(\varepsilon) =$ Summe von δ-Funktionen mit Gewicht p und Abstand $\hbar\omega_c$

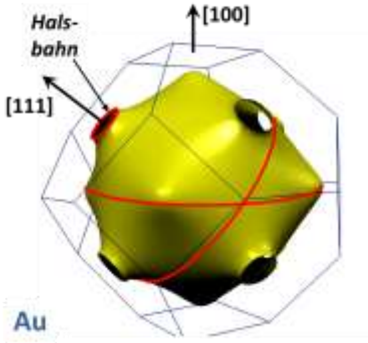
$B = 0$: $D(\varepsilon) = \frac{L_x L_y L_z}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} \propto \sqrt{\varepsilon}$ (eine Spin-Richtung)

$B > 0$: $D(\varepsilon) =$ Überlagerung der Zustandsdichte von 2D-System $\perp B$ und 1D-Zustandsdichte $\propto 1/\sqrt{\varepsilon}$ durch freie Bewegung $||\ B$

9.10.3 Kristallelektronen

- ***Jetzt: Ladungsträger im periodischen Potenzial des Kristallgitters***

  ➔ Bahnen sind jetzt keine Kreisbahnen mehr
  (Abweichungen durch Wirkung des Kristallpotenzials)



Ausgangspunkt: ***Bohr-Sommerfeld-Quantisierung***

Quantisierungsregeln: $\frac{1}{2\pi}\oint p_\varphi\, d\varphi = \hbar(\ell+1), \quad \ell = 0,1,2,3,\ldots$ (Quantisierung des Dreimpulses)

$$\frac{1}{2\pi}\oint p_r\, dr = \hbar(n+\gamma), \qquad n = 0,1,2,3,\ldots$$

hierbei sind $\varphi, p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$ und $r, p_r = m\dot{r}$ ***Paare von kanonisch konjugierten Orts- und Impulsvariablen***
(die Korrektur γ muss durch mit Näherungsverfahren ermittelt werden, für harmonischen Oszillator ist $\gamma = 1/2$)

insgesamt gilt: $$\frac{1}{2\pi}\oint \mathbf{p}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \hbar(n+\gamma), \qquad n = 0,1,2,3,\ldots$$

mit kanonischem Impuls $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} + q\mathbf{A} = q\mathbf{r}\times\mathbf{B} + q\mathbf{A}$ erhalten wir:
(wir benutzen $\hbar\dot{\mathbf{k}} = q\mathbf{v}\times\mathbf{B} = q\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{B}$ und integrieren über Zeit)

$$\frac{1}{2\pi}\oint \mathbf{p}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{1}{2\pi}\oint (q\mathbf{r}\times\mathbf{B} + q\mathbf{A})\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \hbar(n+\gamma), \qquad n = 0,1,2,3,\ldots$$

$$\oint \mathbf{p}\cdot d\mathbf{r} = \underbrace{\oint (q\mathbf{r}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{r}} + \underbrace{\oint q\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}} = 2\pi\,\hbar(n+\gamma), \qquad n = 0,1,2,3,\ldots$$

$$q\oint(\mathbf{r}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{r} = -q\mathbf{B}\cdot\oint \mathbf{r}\times d\mathbf{r} = -2q\,\Phi$$

$$\oint q\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = q\int(\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{F} = q\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{F} = q\Phi$$

$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = -\mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$

$\oint \mathbf{r}\times d\mathbf{r} = 2A\,\hat{\mathbf{n}}$
(A = von der Bahn umschlossene Fläche,
$\Phi = A\,\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ = Fluss durch A)

Satz von Stokes

- ***Insgesamt erhalten wir***

$$\oint \mathbf{p}\cdot d\mathbf{r} = -q\Phi = -q\,BA = 2\pi\,\hbar(n+\gamma), \qquad n = 0,1,2,3,\ldots$$

➔ ***von Bahnen umschlossene Flächen und der von ihnen eingeschlossene magnetische Fluss sind quantisiert !***

$$A_n = \frac{2\pi\hbar(n+\gamma)}{qB}, \qquad \Phi_n = BA_n = (n+\gamma)\frac{h}{q} = (n+\gamma)\,2\Phi_0$$

(mit $\Phi_0 = h/2e$)

- ***Zusammenhang zwischen quantisierten Flächen A_n im Ortsraum und S_n im k-Raum***

aus $\hbar\dot{\mathbf{k}} = q\mathbf{v}\times\mathbf{B} = q\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{B}$ erhalten wir durch Zeitintegration $\hbar\mathbf{k} = q\mathbf{r}\times\mathbf{B}$ bzw. $|d\mathbf{r}| = \frac{\hbar}{qB}|\mathrm{d}\mathbf{k}|$ und somit

$$A_n = \left(\frac{\hbar}{qB}\right)^2 S_n$$

mit $|A_n| = \frac{\Phi_n}{B} = (n+\gamma)\frac{h}{|q|}$ folgt $|S_n| = \frac{(n+\gamma)2\pi qB}{\hbar}$ und damit für die Flächendifferenz $\Delta S = S_{n+1} - S_n$

$$\Delta S = S_{n+1} - S_n = [n+1+\gamma-(n+\gamma)]\frac{2\pi qB}{\hbar}$$

$$\Delta S = \frac{2\pi qB}{\hbar} = \frac{2\pi m_c}{\hbar}\hbar\omega_c$$

➔ ***gleiches Ergebnis wie für freie Ladungsträger !!***

mit $\omega_c = qB/m_c$, m_c = Zyklotronmasse

- ***für Experiment interessant: Welche Feldänderung ist notwendig, um S_n gleich groß wie S_{n+1} zu machen?***

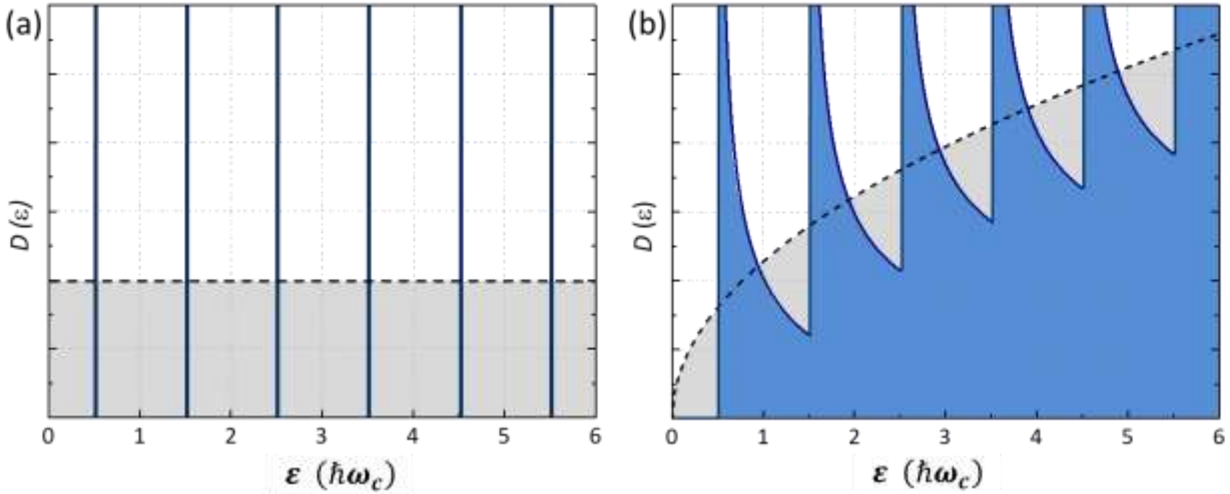
aus $S_{n+1} = (n+\gamma+1)\frac{2\pi qB_{n+1}}{\hbar} = S_n = (n+\gamma)\frac{2\pi qB_n}{\hbar} = S$ folgt $\frac{1}{B_{n+1}} = (n+\gamma+1)\frac{2\pi q}{\hbar S}$ und $\frac{1}{B_n} = (n+\gamma)\frac{2\pi q}{\hbar S}$

$$\Delta = \left(\frac{1}{B_{n+1}} - \frac{1}{B_n}\right) = \frac{2\pi q}{\hbar S}$$

➔ ***gleiche Zunahmen in $1/B$ führen zu gleichen Bahnen in k-Raum***
➔ ***viele physikalsiche Größen zeigen $1/B$ – Periodizität***

➔ ***Quantenoszillationen***

- *Wann können wir Phänomene, die mit Quantisierung der Bahnen zusammenhängen, experimentell beobachten?*



➔ der energetische Abstand von Landau-Niveaus muss größer als die thermische Energie sein

$$\hbar\omega_c = \frac{\hbar q B}{m_c} > k_\mathrm{B} T \qquad \frac{B}{T} > \frac{m_c k_\mathrm{B}}{q\hbar} = 0.78 \left[\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{K}}\right]$$

➔ ***hohe B und niedrige T***

➔ die energetische Verbreiterung der Landau-Niveaus durch die endliche Streuzeit τ der Ladungsträger muss kleiner als $\hbar\omega_c$ sein

$$\Delta\varepsilon \simeq \frac{\hbar}{\tau} < \hbar\omega_c \qquad \omega_c\tau = \frac{qB}{m_c}\tau > 1$$

➔ ***hohe B und reine Proben***

Zusammenfassung: Teil 1a, 12.04.2021/1

- ***Quantisierung der Bahnen freier Ladungsträger ($q = +e$) im Magnetfeld***

Wellen auf geschlossenen Bahnen müssen Bohr-Sommerfeld-Quantisierung erfüllen

- Schrödinger-Gleichung: $$\frac{1}{2m}\underbrace{\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A}\right)}^{2}\Psi = \varepsilon\,\Psi$$ Eichung: $\mathbf{A} = (0, Bx, 0) \quad \rightarrow \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = (0,0,B)$

Operator des kinematischen Impulses: $p = \hbar k + qA \rightarrow \hbar k = p - qA = \frac{\hbar}{i}\nabla - qA$

- Lösung ergibt Eigenenergien:

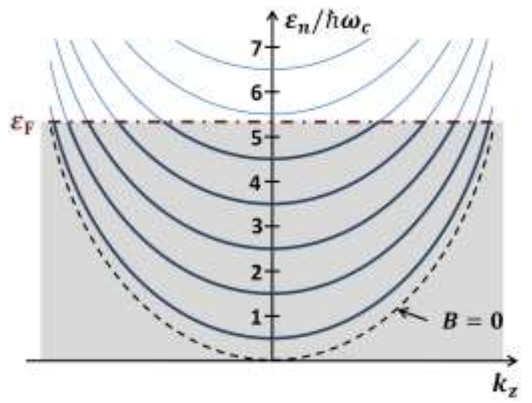
Subbänder: Landau-Niveaus

$$\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$$

Kreisbewegung in Ebene senkrecht zu B   freie Bewegung || B

Zyklotron-Frequenz:

$$\omega_c = \frac{eB}{m} = 1.758\,820\,174\,(71) \times 10^{11}\ \ \mathrm{s}^{-1} \times B\ [\mathrm{Tesla}]$$



- ***Entartung der Landau-Niveaus*** (für eine Spin-Richtung)

$$p = \left(\frac{m\omega_c}{\hbar}L_x\right) / \left(\frac{2\pi}{L_y}\right) = \hbar\omega_c\, D_{2D} = \underbrace{L_x L_y B}\cdot\underbrace{\frac{e}{2\pi\hbar}} = \frac{\Phi}{2\Phi_0}$$

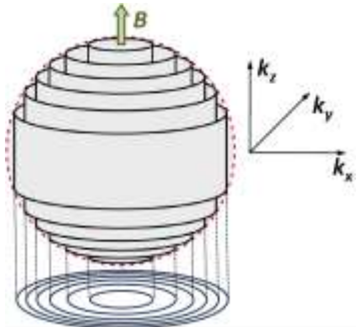
wie viele Zustände gibt es zu jedem möglichen Wert von k_z in $k_x k_y$-Ebene ?

$$D_{2D} = \frac{m}{2\pi\hbar^2}L_x L_y$$

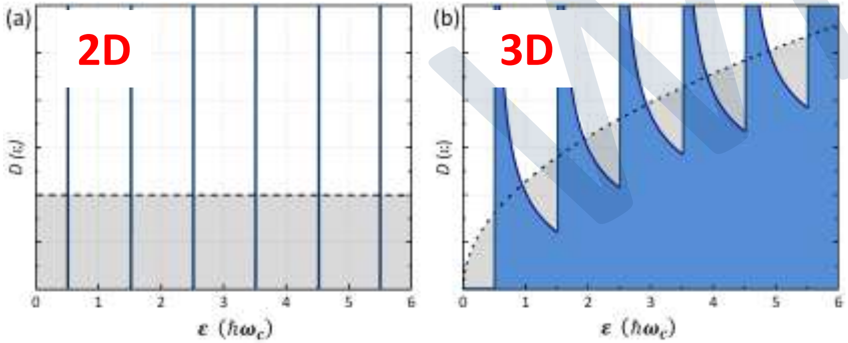
Fluss durch Fläche $\perp B$

$2\Phi_0 \quad (\Phi_0 = \frac{h}{2e} = \text{Flussquant})$

Landau-Zylinder:



Zustandsdichte im Magnetfeld:



Zusammenfassung: Teil 1b, 12.04.2021/1

- ***Bahnquantisierung für Kristallelektronen ($q = +e$)***
  - Quantisierungsbedingung wie für freie Ladungsträger: $$\frac{1}{2\pi}\oint \mathbf{p}\cdot d\mathbf{r} = \hbar(n+\gamma), \qquad n = 0,1,2,3,\ldots$$ Korrekturfaktor γ

  mit kanonischem Impuls $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} + q\mathbf{A} = q\mathbf{r}\times\mathbf{B} + q\mathbf{A}$ erhalten wir:

$$\oint \mathbf{p}\cdot d\mathbf{r} = -q\Phi = -q\,BA = 2\pi\,\hbar(n+\gamma), \qquad n = 0,1,2,3,\ldots$$

➔ *von Bahnen umschlossene Flächen und der von ihnen eingeschlossene magnetische Fluss sind quantisiert !*

$$A_n = \frac{2\pi\hbar(n+\gamma)}{qB}, \qquad \Phi_n = BA_n = (n+\gamma)\frac{h}{q} = (n+\gamma)\,2\Phi_0$$ (mit $\Phi_0 = h/2e$)

  - aus $\hbar\boldsymbol{k} = e\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{B}$ folgt $|dr| = \frac{\hbar}{eB}|dk|$ folgt: $$A_n = \left(\frac{\hbar}{qB}\right)^2 S_n \qquad S_n = \frac{(n+\gamma)2\pi qB}{\hbar}$$
  - Fläche zwischen benachbarten Landau-Zylindern: $$\Delta S = \frac{2\pi qB}{\hbar} = \frac{2\pi m_c}{\hbar}\hbar\omega_c$$

- ***Welches ΔB führt zu gleichen Flächen aufeinanderfolgender Landau-Zylinder?***

aus $(n+\gamma+1)\frac{2\pi q B_{n+1}}{\hbar} = S_n = (n+\gamma)\frac{2\pi q B_n}{\hbar} = S$ folgt: $$\Delta = \left(\frac{1}{B_{n+1}} - \frac{1}{B_n}\right) = \frac{2\pi q}{\hbar S}$$

→ *gleiche Zunahme in $1/B$ führt zu gleichen Bahnen im k-Raum*
→ *$1/B$ -Oszillationen von physikalischen Größen*

- ***Voraussetzungen für experimentelle Beobachtung von 1/B Oszillationen***
  - Abstand benachbarter Landau-Niveaus groß gegen $k_B T$: $\hbar\omega_c > k_B T$ → $\frac{B}{T} > \frac{m_c k_B}{\hbar q} = 0.78\ \mathrm{T/K}$ ➔ *hohe B/T*
  - genügend lange Streuzeit τ: $\Delta\varepsilon \simeq \frac{\hbar}{\tau} < \hbar\omega_c$ → $\omega_c\tau = \frac{qB}{m_c}\tau > 1$ ➔ *hohe B, tiefe T und reine Proben*