Physik der Kondensierten Materie 2

Rudolf Gross

SS 2021

Teil 15

Vorlesungsstunde: 04.05.2021-1

• *Ferroelektrizität*

- spontane Polarisation P_s ohne E_{ext} unterhalb Curie-Temperatur T_c: $T < T_C$: pyro-/ferroelektrisch
  $T > T_C$: para-/dielektrisch

- Klassifizierung:
  (i) ***pyroelektrisch***: endliches P_s, kann nicht durch E_{ext} umgeschaltet werden
  (ii) ***ferroelektrisch***: endliches P_s, kann durch E_{ext} umgeschaltet werden
  (iii) ***piezoelektrisch***: $P_s = 0$, endliches P_s kann durch externe Kraftwirkung erzeugt werden

- spontane Polarisation P_s tritt nur dann auf, wenn Kristallstruktur ***eine polare Achse*** besitzt (fehlende Inversionssymmetrie)

- Thermodynamik $\mathcal{F} = U - TS$ mit $dU = TdS - pdV - V\mathbf{P}_s \cdot d\mathbf{E}_{\text{ext}}$ folgt: $d\mathcal{F} = -SdT - pdV - V\mathbf{P}_s \cdot d\mathbf{E}_{\text{ext}}$

  ➢ für isotherm-isochoren Prozess $dT = 0, \quad dV = 0$

$$P_{s,i} = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial E_{\text{ext},i}}\right)_{V,T}$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{\epsilon_0}\left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial E_{\text{ext},j}}\right)_{V,T} = -\frac{1}{\epsilon_0 V}\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial E_{\text{ext},i}\partial E_{\text{ext},j}}\right)_{V,T}$$

• *Landau Theorie der Phasenübergänge*

- Übergang paraelektrisch-ferroelektrisch kann als Phasenübergang betrachtet werden, wobei P_s der OP ist
- Entwicklung der freien Energiedichte in Potenzreihe des OP

$$\mathcal{F}(P_s,T)/V = a_0 + \frac{1}{2}a_2 P_s^2 + \frac{1}{4}a_4 P_s^4 + \frac{1}{6}a_6 P_s^6 + \cdots$$

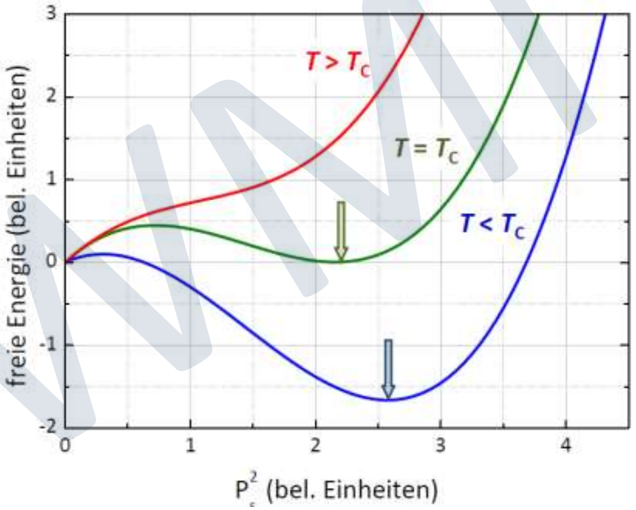
- Gleichgewichtszustand ist durch Minimum von f gegeben:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \mathcal{F}(P_s,T)}{\partial P_s}\bigg|_{T,E_{\text{ext}}} = 0 = a_2 P_s + a_4 P_s^3 + a_6 P_s^5 + \cdots$$

PÜ 1. Ordnung: $\gamma(T - T_C) + a_4 P_s^2 + a_6 P_s^4 = 0 \qquad a_4 < 0, a_6 > 0$

$a_2 = \gamma(T - T_C)$ mit $\gamma > 0$

PÜ 2. Ordnung: $|P_s| = \sqrt{\gamma/a_4}\,\sqrt{T_C - T} \qquad a_4 > 0, a_6$ vernachlässigt



Zusammenfassung: Teil 14b, 03.05.2021/2

- ***Klassifizierung von Ferroelektrika***

  - ***Ordnungs-Unordnung-Systeme:***
    ungeordnete elektrische Dipole in paraelektrischer Phase → Ordnung der Dipole für $T < T_c$
    z.B. Protonenpositionen in H-Brückenbindung (KDP)

  - ***displazive Systeme:***
    keine elektrischen Dipolmomente für $T > T_c$, Einfrieren von TO-Gitterschwingungen für $T < T_C$
    → weiche TO Phononen, $\omega_T \to 0$ für $T \to T_c$, z.B. $BaTiO_3$

$$\epsilon(T) = \frac{1 + \frac{2}{3}\sum_i n_{V,i}\alpha_i}{1 - \frac{1}{3}\sum_i n_{V,i}\alpha_i} \propto \frac{1}{T - \Theta}$$

Curie-Weiss-Gesetz

$$\omega_T^2(T) \propto \epsilon_{\mathrm{stat}}\, \omega_L^2\, (T - \Theta)$$

$\boldsymbol{\omega_T \to 0}$ ***für*** $\boldsymbol{T \to \Theta}$

- ***ferroelektrische Domänen***

  – Minimierung von Energiebeiträgen durch Anisotropien, Streufelder, etc. durch Domänenbildung

- ***Piezoelektrizität***

  – Erzeugung einer elektrischen Polarisation $\mathbf{P}_\sigma$ durch mechanische Spannung $\boldsymbol{\sigma}$

$$\mathbf{P}_\sigma = d \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

d = Tensor des piezoelektrischen Effekts,
σ = mechanische Spannung

  – Erzeugung einer mechanischen Dehnung $\mathbf{e}$ durch Anlegen eines elektrischen Feldes $\mathbf{E}_{\mathrm{ext}}$

$$\mathbf{e} = d^t \cdot \mathbf{E}_{\mathrm{ext}}$$

d^t = Tensor des inversen piezoelektrischen Effekts, e = Dehnung

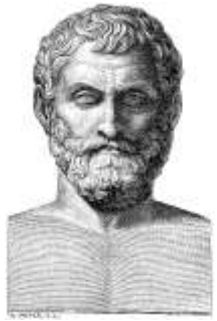
Kapitel 12

Magnetismus

12 Magnetismus

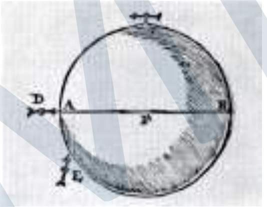
- **Geschichtliches**

  – Thales von Milet (6. Jh vor Christus): *Magnetit, Kraftwirkung auf Eisen*



  – China (4. Jh nach Christus): *Kompass*,
  allg. Verwendung nach etwa 1200

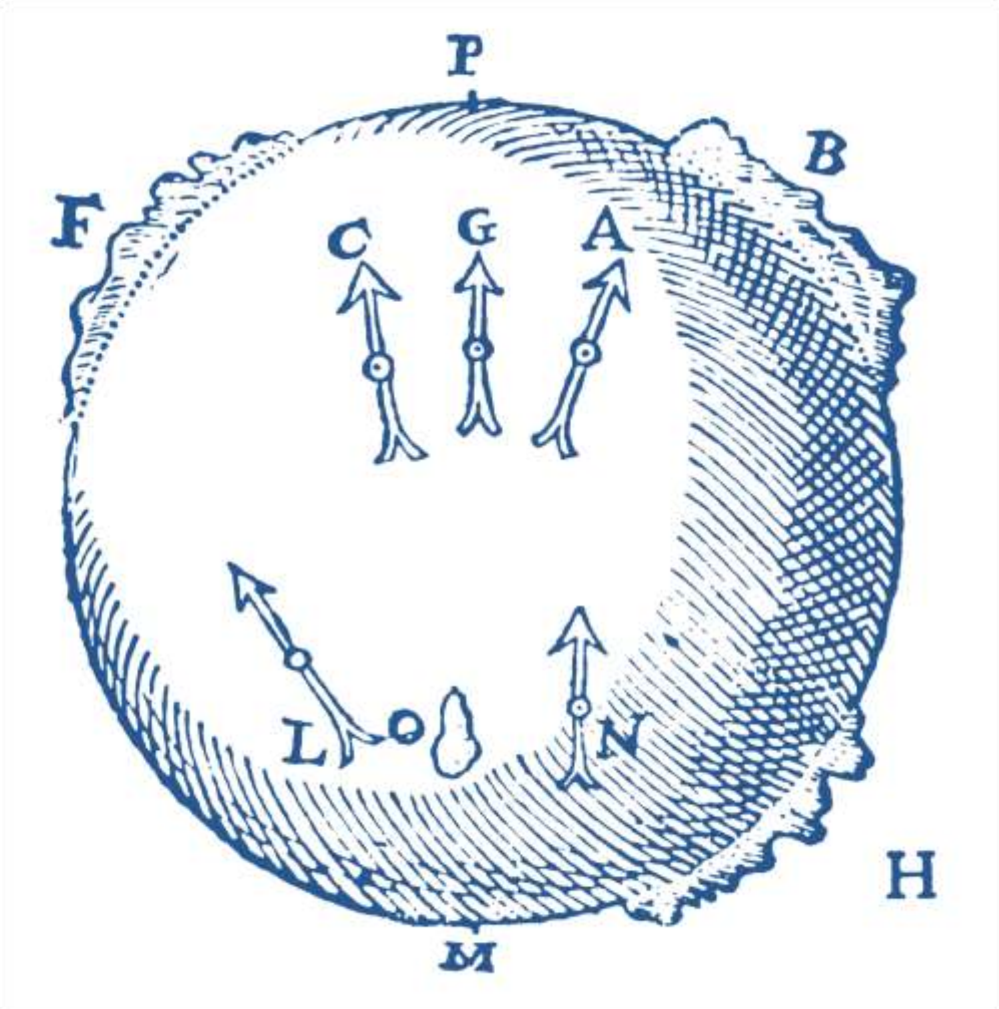
  – William Gilbert: Beginn der modernen Forschung,
  1600: Veröffentlichung des Werk „*de Magnete*“,
  → Funktion des Kompass hängt mit Erdmagnetismus zusammen



  – Andre-Marie Ampere (um 1800): magnetische Felder resultieren aus
  sich bewegenden elektrischen Ladungen

12 Magnetismus

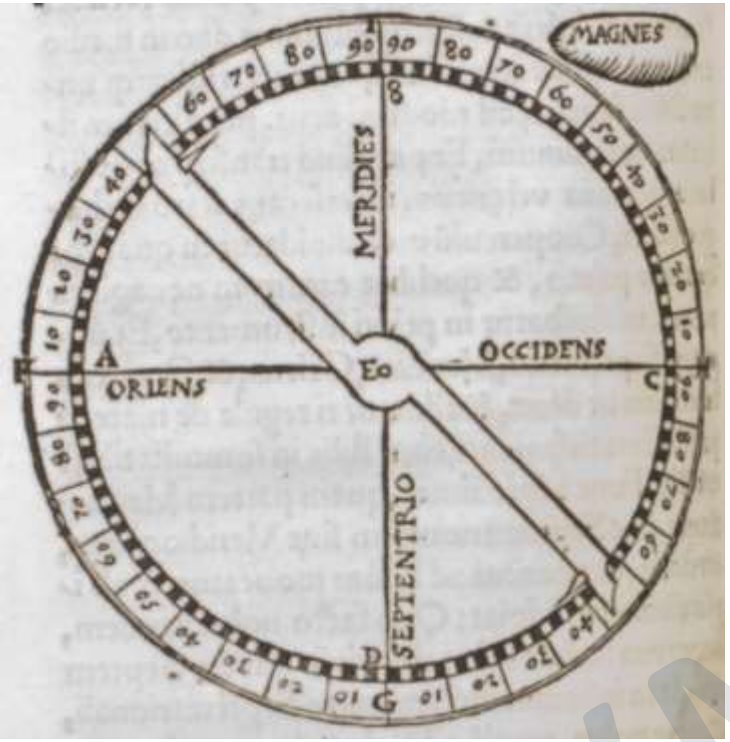
- Geschichtliches



William Gilbert (1544 – 1603)

- **Geschichtliches**

Model of a Han Dynasty (206 BC–220 AD) south-indicating ladle or *sinan*



Pivoting compass needle in a 14th century copy of Epistola de magnete of Peter Peregrinus (1269)

- **Mystik, Esoterik, Scharlatanerie, ….**

FRANZ ANTON MESMER (1734-1815)

Mesmerization

to be mesmerized literally means to undergo the treatment of Franz Mesmer, to be "magnetized".

In 1774 he used a magnet to produce an "artificial tide" in a patient. Mesmer had her swallow a preparation containing iron, and then attached magnets to various parts of her body. She reported feeling streams of a mysterious fluid running through her body and was relieved of her symptoms for several hours. Mesmer did not believe that the magnets had achieved the cure on their own. He felt that he had contributed animal magnetism, which had accumulated in his own body, to her. He soon stopped using magnets as a part of his treatment.

12 Magnetismus

- Mystik, Esoterik, Scharlatanerie, ….

12 Magnetismus

- **Grundlegende Frage: Wie verhalten sich FK bei Störung durch elektromagnetische Felder**

  - **Kapitel 9:** Bewegung ***einzelner*** Elektronen in Festkörper aufgrund von äußeren Kräften durch E- und B-Feld
    ➔ Dynamik der Kristallelektronen

  - **Kapitel 11+12:** Reaktion des Festkörpers ***insgesamt*** auf Störung durch E- und B-Felder
    - ***insgesamt*** bedeutet: wir betrachten FK als Kontinuum und beschreiben seine Antwort auf eine Störung durch eine Materialkonstante $\chi(\omega, q)$ ➔ ***verallgemeinerte Suszeptibilität***
    - wir beschränken uns meistens auf den Fall der ***linearen Antwort (linear response)*** bei kleinen Störungen

  - **Beschreibung der Wechselwirkung eines Festkörpers mit einem elektromagnetischen Feld:**
    - **mikroskopisch:** z.B. Änderung elektronischer Niveaus, Absorption von einzelnem Photon, Erzeugung von FK-Anregungen, …
    - **makroskopisch:** basierend auf Maxwell-Gleichungen, FK-Reaktion steckt in makroskopischer Materialkonstante (elektrische oder magnetische Suszeptibilität)

Zentrale Frage: ***Wie hängen makroskopische Materialkonstanten mit den mikroskopischen FK-Eigenschaften zusammen?***

- **Grundlegender Unterschied bei Beschreibung von dielektrischen und magnetischen Eigenschaften**

  – Phänomen Magnetismus kann nicht klassisch erklärt werden → ***Magnetismus ist Quantenphänomen***

- **Bohr-van Leeuwen Theorem** (in Doktorarbeiten 1911 und 1919)

  "**Nettomagnetisierung von Ensemble aus Elektronen kann nicht klassisch erklärt werden**"

  – ***Bohr-van Leeuwen Theorem***: heuristische Betrachtung

    - Magnetisierung ist proportional zur Änderung der freien Energiedichte eines Systems im Magnetfeld: $M = -\frac{1}{V}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial B_{\text{ext}}}$
    - Lorentz-Kraft auf bewegte Ladung steht senkrecht zur Bewegungsrichtung
      → Richtungsänderungen aber keine Änderung des Geschwindigkeitsbetrags d.h. der kinetischen Energie

  – ***Bohr-van Leeuwen Theorem***: Herleitung

    - es gilt: $M = -\frac{1}{V}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial B_{\text{ext}}}$ und $\frac{\mathcal{F}}{V} = -\frac{N}{V} k_{\text{B}} T \ln Z$ (Z = Zustandssumme)
    - Zustandssumme Z eines Systems aus N ununterscheidbaren Teilchen ist unabhängig von Vektorpotenzial $\mathbf{A}$:

$$Z = \frac{1}{h^{3N} N!} \int_{\mathbb{R}^{3N}} d^{3N}p \int_{V^N} d^{3N}r \exp[-\beta \mathcal{H}(\{\underbrace{\mathbf{p}_i - q\mathbf{A}(\mathbf{r}_i)}_{\mathbf{p}_i'}\}, \mathbf{r}_i)] = \frac{1}{h^{3N} N!} \int_{\mathbb{R}^{3N}} d^{3N}p' \int_{V^N} d^{3N}r \exp[-\beta \mathcal{H}(\mathbf{p}_i', \mathbf{r}_i)]$$

- **Beschreibung der Reaktion eines Festkörpers auf Magnetfeld im Rahmen der Kontinuumstheorie**

  – völlig analoge Beschreibung von magnetischen und elektrischen Phänomenen

  – externes Magnetfeld $\mathbf{H}_{\text{ext}}$ (Störung) ruft im Festkörper Magnetisierung $\mathbf{M}$ (Antwort) hervor

$$M_i(\mathbf{r}',t') = \sum_j \int \underbrace{\chi_{ij}(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t')}_{\text{Tensor der magnetischen Suszeptibilität}} H_{\text{ext},j}(\mathbf{r},t)\ \mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}t$$

(Faltungsintegral)

i-te Komponente von M

j-te Komponente von H_{ext}

$\chi_{ij}(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t') \rightarrow \chi_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')$ falls Raum und Zeit homogen sind

Faltungssatz: die Fourier-Transformierte der Faltung zweier Funktionen ist gleich dem Produkt der FT der beiden Funktionen

$$M_i(\mathbf{q},\omega) = \sum_j \chi_{ij}(\mathbf{q},\omega)\ H_{\text{ext},j}(\mathbf{q},\omega)$$

$(\mathbf{q},\boldsymbol{\omega})$-Raum

- **Magnetische Flussdichte** (es gilt: $\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mu_0\mathbf{H}_{\text{ext}}(\mathbf{r},t) + \mu_0\mathbf{M}(\mathbf{r},t) = \mu_0[\mathbf{H}_{\text{ext}}(\mathbf{r},t) + \chi(\mathbf{r},t)\mathbf{H}_{\text{ext}}(\mathbf{r},t)] = \mu_0\ [\mathbf{1} + \chi(\mathbf{r},t)]\mathbf{H}_{\text{ext}}(\mathbf{r},t)$)

$$B_i(\mathbf{q},\omega) = \mu_0 \sum_j \mu_{ij}(\mathbf{q},\omega)\ H_{\text{ext},j}(\mathbf{q},\omega)$$

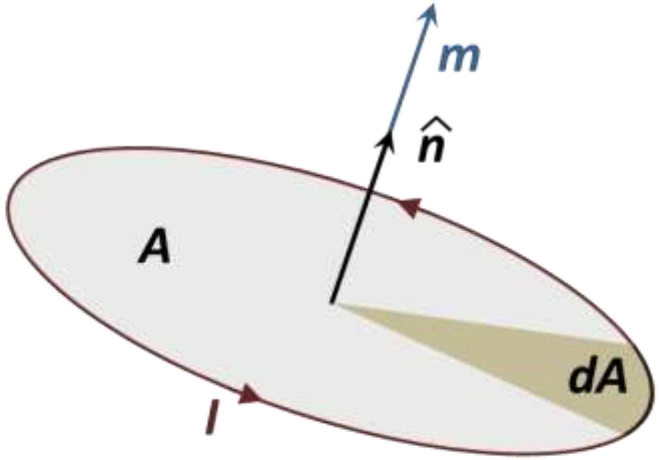
magnetische Permeabilität $\mu_{ij}(\mathbf{q},\omega) = 1 + \chi_{ij}(\mathbf{q},\omega)$

- **Magnetisches Moment und Magnetisierung**

  – klassischer Ausdruck für magnetisches Moment

$$\mathbf{m} = I \oint d\mathbf{A} = I \cdot A\,\hat{\mathbf{n}} \qquad \text{(für ebene Bahnfläche)}$$

allgemein gilt: $\mathbf{m} = \frac{1}{2}\int \mathbf{r} \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) d^3r = \frac{1}{2}\int \mathbf{r} \times I\,\mathrm{d}\mathbf{l} = I \int d\mathbf{A} = \mathbf{m}$



  – Bahnmoment von Elektron (klassisch)

es gilt: $I = -e/T$ und $T = 2\pi r/v$, Bahndrehimpuls: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = rmv\,\hat{\mathbf{n}}$

$$\boldsymbol{\mu}_L = I \cdot A\,\hat{\mathbf{n}} = -\frac{e}{T} \cdot \pi r^2 \hat{\mathbf{n}} = -\frac{ev}{2\pi r} \cdot \pi r^2 \hat{\mathbf{n}} = -\frac{e\hbar}{2m}\frac{rmv}{\hbar}\hat{\mathbf{n}} = -\frac{e\hbar}{2m}\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{p}}{\hbar} = -\mu_B \frac{\mathbf{L}}{\hbar}$$

Bohrsches Magneton

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 9.274\,009\,994(57) \times 10^{-24}\ \mathrm{J/T} = 5.788\,381\,8012(26) \times 10^{-5}\ \mathrm{eV/T}$$

➔ typische Größe von atomaren magnetischen Momenten

  – gyromagnetisches Verhältnis

$$\gamma = \frac{|\boldsymbol{\mu}_L|}{|\mathbf{L}|}$$

Proportionalitätsfaktor zwischen Drehimpuls und dem zugehörigen magnetischen Moment

- **Gegenüberstellung von magnetischen und elektrischen Größen**

$$^{*}\; M_i(\mathbf{r}',t') = \sum_j \int \chi_{ij}(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t')\, H_{\mathrm{ext},j}(\mathbf{r},t)\;\,\mathrm{d}^3 r\,\mathrm{d}t$$

Magnetisierung: $\mathbf{M} = \dfrac{\mathbf{m}}{V}$

magnetisches Moment:

$$\mathbf{m} = \sum_i \boldsymbol{\mu}_i = \sum_i \frac{q_i\hbar}{2m}\frac{\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i}{\hbar} = \sum_i g_i \mu_B \frac{\mathbf{L}_i}{\hbar}$$

Bohrsches Magneton

$$\mu_{\mathrm{B}} = \frac{e\hbar}{2m} = 9.274\,008\,99(37) \times 10^{-24}\ \mathrm{J/T}$$

$$P_i(\mathbf{r}',t') = \epsilon_0 \sum_j \int \chi_{ij}(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t')\, E_{\mathrm{ext},j}(\mathbf{r},t)\;\,\mathrm{d}^3 r\,\mathrm{d}t$$

Polarisation: $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{p}_{\mathrm{el}}}{V}$

elektrisches Moment:

$$\mathbf{p}_{el} = \sum_i \mathbf{p}_{\mathrm{el},i} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i$$

*besser wäre Verwendung von magnetischer Polarisation $\mu_0 M$ mit Einheit Vs/m² analog zur elektrischen Polarisation P mit Einheit As/m²

- **Gegenüberstellung von magnetischen und elektrischen Größen**

Magnetisierung:

$$M_i(\mathbf{r}',t') = \sum_j \int \chi_{ij}(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t')\, H_{\mathrm{ext},j}(\mathbf{r},t)\ \mathrm{d}^3r\ \mathrm{d}t$$

$$*\ M_i(\mathbf{q},\omega) = \sum_j \chi_{ij}(\mathbf{q},\omega)\, H_{\mathrm{ext},j}(\mathbf{q},\omega)$$

Magnetische Flussdichte:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mu_0\mathbf{H}_{\mathrm{ext}}(\mathbf{r},t) + \mu_0\mathbf{M}(\mathbf{r},t)$$

$$B_i(\mathbf{q},\omega) = \mu_0 \sum_j \mu_{ij}(\mathbf{q},\omega)\, H_{\mathrm{ext},j}(\mathbf{q},\omega)$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{Vs/Am}$$

Magnetische Permeabilität:

$$\mu_{ij}(\mathbf{q},\omega) = 1 + \chi_{ij}(\mathbf{q},\omega)$$

Polarisation:

$$P_i(\mathbf{r}',t') = \epsilon_0 \sum_j \int \chi_{ij}(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t')\, E_{\mathrm{ext},j}(\mathbf{r},t)\ \mathrm{d}^3r\ \mathrm{d}t$$

$$P_i(\mathbf{q},\omega) = \epsilon_0 \sum_j \chi_{ij}(\mathbf{q},\omega)\, E_{\mathrm{ext},j}(\mathbf{q},\omega)$$

Elektrische Flussdichte:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \epsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \mathbf{P}(\mathbf{r},t)$$

$$D_i(\mathbf{q},\omega) = \epsilon_0 \sum_j \epsilon_{ij}(\mathbf{q},\omega)\, E_j(\mathbf{q},\omega)$$

$$\epsilon_0 = 8.854\,187\,187 \times 10^{-12}\ \mathrm{As/Vm}$$

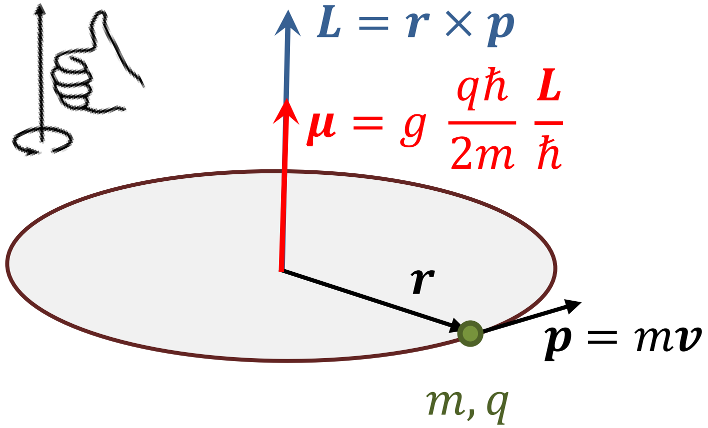
Dielektrische Funktion:

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{q},\omega) = 1 + \chi_{ij}(\mathbf{q},\omega)$$

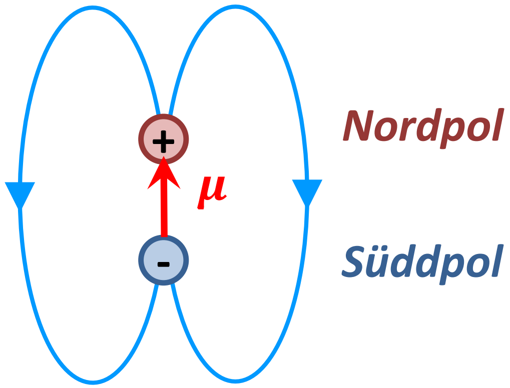
*besser wäre Verwendung von magnetischer Polarisation $\mu_0 M$ mit Einheit Vs/m² analog zur elektrischen Polarisation P mit Einheit As/m²

12.1 Makroskopische Elektrodynamik

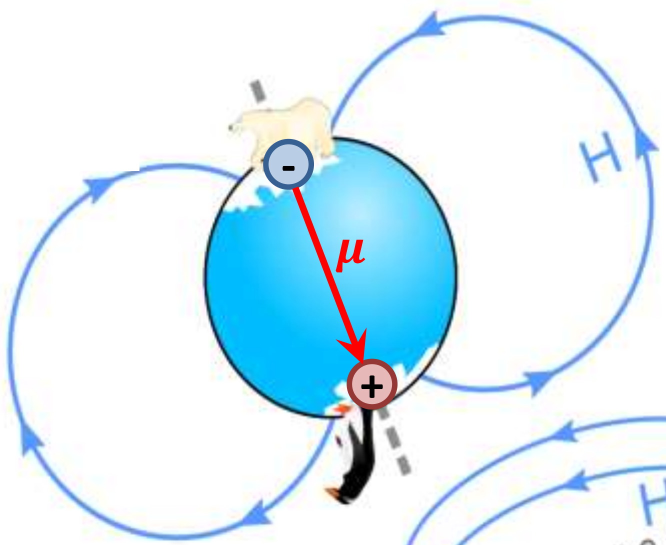
- **Richtung von Drehimpuls, magnetischem Moment, Magnetfeld**
  - ***Drehimpuls und magnetisches Moment***

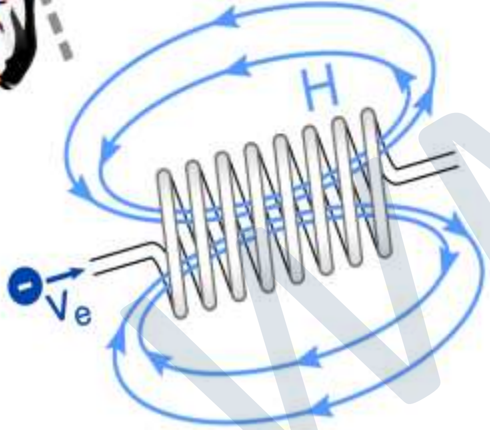


  - ***Analogie zu elektrischer Polarisation***



  - ***geografischer Nordpol ist magnetischer Südpol***





  - ***rechte Hand-Regel gilt für technische Stromrichtung***

- **Unterscheidung zwischen H- und B-Feld**

H-Feld

Bezeichnung:
magnetische Feldstärke oder Magnetisierungskraft (Stromdichte · Länge: A/m)

Quellen:
externe elektrische Stromdichte J_q , z.B. in elektrischem Leiter von Spule

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_q$$

im Festkörper:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J}_q + \mathbf{J}_M) = \mu_0[\nabla \times \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{M}] \Rightarrow$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

im Festkörper nicht quellenfrei:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M} \neq \mathbf{0}$$

Diskontinuität des H-Feldes an Oberfläche von magnetisiertem FK ist mit Schicht von Quellen und Senken des H-Feldes verknüpft: "magnetische Ladungen"

B-Feld

Bezeichnung:
magnetische Flussdichte (Fluss/Fläche: Vs/m²)

Quellen:
gesamte Stromdichte $J = J_q + J_M$, J_q = externe Stromdichte, J_M = interne, mit Magnetisierung verknüpfte mikroskopische Stromdichte

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} = \mu_0(\mathbf{J}_q + \mathbf{J}_M)$$

im Festkörper:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J}_q + \mathbf{J}_M) = \mu_0(\nabla \times \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{M}) \Rightarrow$$

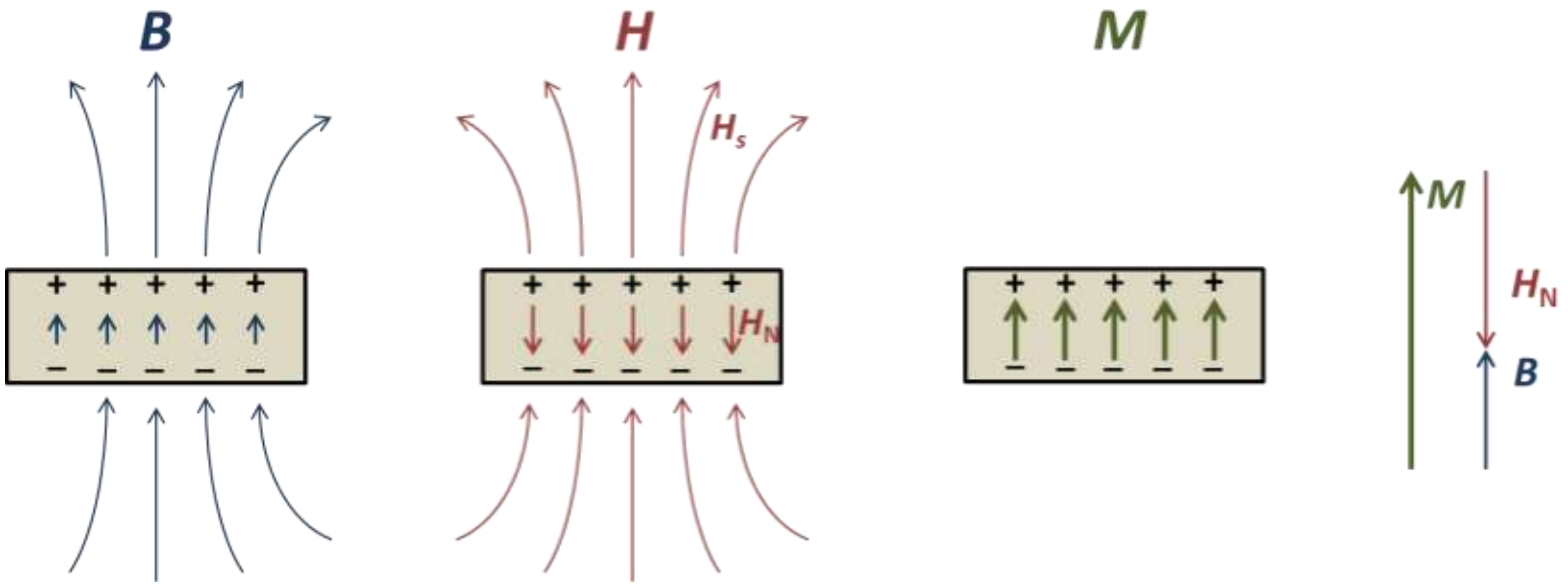
$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\mu_0}\,(\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

immer quellenfrei:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

12.1.3 Entmagnetisierungs- und Streufelder

- Wir betrachten Entmagnetisierungs- und Streufelder von magnetisierter Scheibe ($H_{\text{ext}} = 0$)



– **innerhalb von FK:** $B = \mu_0 M + \mu_0 H_N$ $\quad H_N = \frac{B}{\mu_0} - M = -NM$ $\quad M \neq 0$

– **außerhalb von FK:** $B = \mu_0 H_s$ $\quad H_s$ $\quad M = 0$

N = Entmagnetisierungsfaktor

H_N = Entmagnetisierungsfeld

H_s = Streufeld

➢ geschlossener Pfad entlang von Feldlinien: $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = 0$ ➔ H_N ist antiparallel zu M ("Ent"-Magnetisierungsfeld)

12.1.4 Lokales magnetisches Feld

- **Analog zu dielektrischen Festkörpern:**
  Wie sieht der Zusammenhang zwischen dem von außen wirkenden Feld $\mathbf{H}_{\mathbf{mak}}$ und dem lokal wirkenden Feld $\mathbf{H}_{\mathbf{lok}}$ aus?

makroskopisches Feld ⇔ mikroskopisches Feld

– für H_{lok} gilt in Analogie zu lokalem elektrischen Feld folgtende Beziehung:

$$\mathbf{H}_{\text{lok}} = \mathbf{H}_{\text{mak}} + \mathbf{H}_{\text{L}} = \mathbf{H}_{\text{ext}} + \mathbf{H}_{N} + \mathbf{H}_{\text{L}} = \mathbf{H}_{\text{ext}} - N\,\mathbf{M} + \mathbf{M}/3$$

erzeugt durch externe Ströme

Lorentz-Feld

erzeugt durch magnetische Oberflächenladungen

Hinweis: für dia- und paramagnetische FK ist typischerweise $\chi < 10^{-3}$

➔ Lorentz-Feld $H_L = \frac{\chi H_{\text{ext}}}{3} \ll H_{\text{ext}}$

➔ Entmagnetisierungsfeld $H_N = -N\chi H_{\text{ext}} \ll H_{\text{ext}}$

➔ *Lorentz- und Entmagnetisierungsfeld können im Gegensatz zu dielektrischen FK meistens vernachlässigt werden*

12.1.5 Magnetostatische Selbstenergie

- **Wie groß ist die Wechselwirkungsenergie eines magnetisierten FKs mit dem von ihm erzeugten Magnetfeld?**

  – einzelnes Moment in lokalem Feld:

$$E_\mu = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mu_0 \mathbf{H}_{\mathrm{lok}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mu_0 (\mathbf{H}_N + \mathbf{H}_L)$$

  – Integration über Volumen unter Benutzung von $M = m/V$ und $H_L = M/3$:

$$E = -\frac{1}{2}\mu_0 \int_V \mathbf{H}_N \cdot \mathbf{M}\, dV - \frac{1}{6}\mu_0 \int_V M^2\, dV$$

(Faktor 1/2 notwendig, da jedes Moment als Feldquelle und Moment eingeht)

  – Definition der magnetostatischen Selbstenergie E_m:

$$E_M = E + \frac{1}{6}\mu_0 \int_V M^2\, dV \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_M = -\frac{1}{2}\mu_0 \int_V \mathbf{H}_N \cdot \mathbf{M}\, dV = \frac{1}{2}\mu_0 \int_V \mathbf{M} \cdot N \cdot \mathbf{M}\, dV}$$

$$\mathbf{H}_N = -N \cdot \mathbf{M}$$

  – homogen magnetisierter Festkörper:

$$E_M = \frac{1}{2}\mu_0 \int_V \mathbf{M} \cdot N \cdot \mathbf{M}\, dV = \frac{1}{2}\mu_0 V N M^2$$

E_M ist minimal für kleinstes N

➔ M richtet sich so aus, dass N minimal wird, z.B. parallel zu dünner Scheibe statt senkrecht dazu

➔ magnetische Formanisotropie

12.2 Mikroskopische Theorie

- **Aufgabe: Herstellen des Zusammenhangs zwischen makroskopischen Festkörpereigenschaften (ausgedrückt durch Suszeptibilität) und mikroskopischen Eigenschaften**

  – wir unterscheiden wie bei dielektrischen Festkörpern drei unterschiedliche Materialklassen

I. **diamagnetische Festkörper**:

- keine magnetischen Momente in FK vorhanden
- Momente werden durch äußeres Feld induziert
- Lenzsche Regel: induzierte magnetische Momente sind ihrer Ursache entgegengesetzt

➔ **Suszeptibilität χ_{dia} ist negativ**

Größenordnung:

(i) gebundene Elektronen: $\chi_{\mathrm{dia}} \sim -10^{-4}$ bis -10^{-6}

(ii) freie Leitungselektronen: $\chi_{\mathrm{Landau}} \sim -10^{-5}$, Supraleiter: $\chi_{\mathrm{dia}} \sim -1$ (perfekter Diamagnetismus)

II. **paramagnetische Festkörper**:

- magnetische Momente in FK bereits vorhanden
- Momente werden durch äußeres Feld ausgerichtet (entspricht Orientierungspolarisation bei dielektrischen FK)
- Momente werden parallel zu Feld ausgerichtet

➔ **Suszeptibilität χ_{para} ist positiv**

12.2 Mikroskopische Theorie

II. paramagnetische Festkörper:

Größenordnung der vorhandenen magnetischen Momente:

(i) gebundene Elektronen: Bahn- und Spin-Moment der Elektronen (Langevin-Paramagnetismus)

$$\boldsymbol{\mu}_\ell = g_\ell \mu_\mathrm{B} \frac{\boldsymbol{\ell}}{\hbar}, \quad \boldsymbol{\mu}_s = g_s \mu_\mathrm{B} \frac{\mathbf{s}}{\hbar} \qquad \text{mit} \quad \langle \ell^2 \rangle = \ell(\ell+1)\hbar^2 \qquad \text{und} \quad \langle \mathbf{s}^2 \rangle = s(s+1)\hbar^2$$

Gesamtbahndrehimpuls: $\mathbf{L} = \sum_i \ell_i$ Gesamtspin: $\mathbf{S} = \sum_i \mathbf{s}_i$ Gesamtdrehimpuls: $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$

(Russel-Saunders-Kopplung)

$$\boldsymbol{\mu}_J = g_J \mu_\mathrm{B} \frac{\mathbf{J}}{\hbar}$$

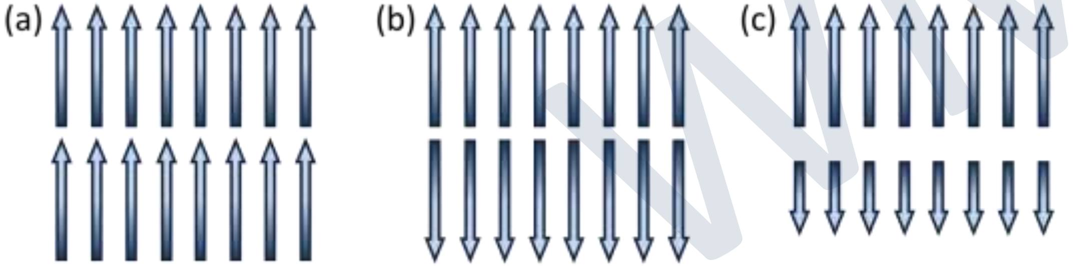
$g_J =$ Landéscher g-Fakto

(ii) freie Leitungselektronen: Spin-Momente der Leitungselektronen (Pauli-Paramagnetismus)

III. ferromagnetische Festkörper:

- magnetische Momente in FK bereits vorhanden
- Momente wechselwirken untereinander → spontaner Ordnungszustand mit spontaner Magnetisierung M
- maßgebende WW ist Austauschwechselwirkung, Dipol-Dipol-WW spielt untergeordnete Rolle

➔ **Suszeptibilität χ_{ferro} ist sehr groß**



Ferromagnetismus *Antiferromagnetismus* *Ferrimagnetismus*

12.2 Mikroskopische Theorie

- **Klassifizierung magnetischer Phänomene**

Diamagnetismus alle Materialien	**Isolatoren** Larmor-Diamagnetismus	**Metalle** Landau-Diamagnetismus
⇓ **Paramagnetismus** Materialien mit nicht-wechsel-wirkenden magnetischen Momenten	**Isolatoren** Langevin-Paramagnetismus	**Metalle** Pauli-Paramagnetismus
⇓ **Ferro-, Antiferro- und Ferrimagnetismus** Materialien mit wechselwirken-den magnetischen Momenten	**Isolatoren** Ferro-, Antiferro- und Ferri-magnetismus kooperativer magnetischer Momente	**Metalle** Bandferro- und Band-antiferromagnetismus

Zusammenfassung: Teil 15a, 04.05.2021/1

- ***Bohr-van Leeuwen Theorem:***

  magnetische Eigenschaften können nicht klassisch erklärt werden → Magnetismus = Quantenphänomen

- ***Gegenüberstellung von magnetischen und elektrischen Größen:***

Magnetisierung $\mathbf{M} = \frac{\mathbf{m}}{V}$

$$M_i(\mathbf{r}',t') = \sum_j \int \chi_{ij}(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t')\, H_{\mathrm{ext},j}(\mathbf{r},t)\;\; \mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}t$$

$$M_i(\mathbf{q},\omega) = \sum_j \chi_{ij}(\mathbf{q},\omega)\, H_{\mathrm{ext},j}(\mathbf{q},\omega)$$

magnetisches Moment:

$$\mathbf{m} = \sum_i \boldsymbol{\mu}_i = \sum_i \frac{q_i\hbar}{2m}\frac{\mathbf{r}_i\times\mathbf{p}_i}{\hbar} = \sum_i g_i\mu_B\frac{\mathbf{L}_i}{\hbar}$$

Bohrsches Magneton

$$\mu_{\mathrm{B}} = \frac{e\hbar}{2m}$$

magnetische Flussdichte:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mu_0\mathbf{H}_{\mathrm{ext}}(\mathbf{r},t) + \mu_0\mathbf{M}(\mathbf{r},t)$$

$$B_i(\mathbf{q},\omega) = \mu_0\sum_j \mu_{ij}(\mathbf{q},\omega)\, H_{\mathrm{ext},j}(\mathbf{q},\omega)$$

magnetische Permeabilität:

$$\mu_{ij}(\mathbf{q},\omega) = 1 + \chi_{ij}(\mathbf{q},\omega)$$

Polarisation $\mathbf{P} = \frac{\mathbf{p}_{\mathrm{el}}}{V}$

$$P_i(\mathbf{r}',t') = \epsilon_0\sum_j \int \chi_{ij}(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t')\, E_{\mathrm{ext},j}(\mathbf{r},t)\;\; \mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}t$$

$$P_i(\mathbf{q},\omega) = \epsilon_0\sum_j \chi_{ij}(\mathbf{q},\omega)\, E_{\mathrm{ext},j}(\mathbf{q},\omega)$$

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{p}_{\mathrm{el}}}{V}$$

elektrisches Moment:

$$\mathbf{p}_{el} = \sum_i \mathbf{p}_{\mathrm{el},i} = \sum_i q_i\mathbf{r}_i$$

elektrische Flussdichte:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \epsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \mathbf{P}(\mathbf{r},t)$$

$$D_i(\mathbf{q},\omega) = \epsilon_0\sum_j \epsilon_{ij}(\mathbf{q},\omega)\, E_j(\mathbf{q},\omega)$$

dielektrische Funktion:

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{q},\omega) = 1 + \chi_{ij}(\mathbf{q},\omega)$$

Zusammenfassung: Teil 15b, 04.05.2021/1

• ***magnetisches Feld und magnetische Flussdichte:***

H-Feld: $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_q$ $\qquad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$ $\qquad \nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M} \neq 0$

B-Feld: $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} = \mu_0 (\mathbf{J}_q + \mathbf{J}_M)$ $\qquad \mathbf{B} = \boldsymbol{\mu_0}\,(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ $\qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

• ***lokales Magnetfeld:***

$$\mathbf{H}_{\mathrm{lok}} = \mathbf{H}_{\mathrm{mak}} + \mathbf{H}_{\mathrm{L}} = \mathbf{H}_{\mathrm{ext}} + \mathbf{H}_N + \mathbf{H}_{\mathrm{L}} = \mathbf{H}_{\mathrm{ext}} - N\,\mathbf{M} + \mathbf{M}/3$$

Lorentz-Feld $H_L = M/3$ und Entmagnetisierungsfeld $H_N = -NM$ sind für dia- und paramagnetische Materialien vernachlässigbar klein, da $M = \chi H_{\mathrm{ext}} \sim \pm(10^{-4} - 10^{-6}) H_{\mathrm{ext}}$

• ***diamagnetische, paramagnetische und ferromagnetische Materialien***

diamagnetische,	paramagnetische und	ferromagnetische Materialien
keine magn. Momente vorhanden: $\chi_{\mathrm{dia}} < 0$	nicht-ww magn. Momente vorhanden: $\chi_{\mathrm{para}} > 0$	ww magnetische Dipole vorhanden

• ***Klassifizierung magnetischer Phänomene:***