



Physik der Kondensierten Materie 1

**Rudolf Gross
WS 2020/2021
Teil 17**

Vorlesungsstunde: 12.01.2021

• freies Elektronengas, spezifische Wärme:

- **klassisch**: Gleichverteilungssatz, N Elektronen \rightarrow pro kinetischem Freiheitsgrad Beitrag $\frac{1}{2} k_B T$

$$c_V^{\text{klassisch}} = \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial T} \Big|_V = \underset{\text{Spin}}{2 \cdot 3} \cdot N \cdot \frac{1}{2} k_B = 3Nk_B \quad c_V^{\text{klassisch}} = \frac{C_V^{\text{klassisch}}}{V} = 3nk_B$$

um Faktor $T/T_F \approx 100$ zu groß !!

- **quantenmechanisch**: $U = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} E(\mathbf{k}) f(E_{\mathbf{k}}) = \int_0^{\infty} dE E D(E) f(E)$

- T -Erhöhung \rightarrow Umbesetzung der Zustände

- wegen Pauli-Prinzip kann nur Anteil der Elektronen in Energieintervall $k_B T$ um E_F teilnehmen $\rightarrow N_{\text{th}} \approx D(E_F) k_B T$

- jedes Elektron trägt etwa $k_B T$ zu U bei

$$\left. \begin{array}{l} U \approx U(T=0) + D(E_F)(k_B T)^2 \\ c_V \approx \frac{D(E_F)}{V} 2k_B^2 T = 3nk_B^2 \frac{T}{E_F} = 3nk_B \frac{T}{T_F} \end{array} \right\} \begin{array}{l} D(E_F) = \frac{3N}{2E_F} = \frac{3nV}{2E_F} \end{array}$$

- genaue Rechnung (Sommerfeld-Entwicklung)

$$c_V^{\text{qm}} = \frac{\pi^2}{3} k_B^2 \frac{D(E_F)}{V} T = \frac{\pi^2}{2} nk_B \frac{T}{T_F} = \gamma \cdot T \approx c_V^{\text{klassisch}} \frac{T}{T_F}$$

$$\gamma = \frac{\pi^2}{3} k_B^2 \frac{D(E_F)}{V} = \frac{\pi^2}{2} \frac{nk_B^2}{E_F} \quad \text{Sommerfeld-Koeffizient}$$

• freies Elektronengas, elektrische Leitfähigkeit:

$$\mathbf{J}_q = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \nabla \phi_{\text{el}}$$

Drude-Modell:

(klassisches Teilchengas)

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{m}{\tau} \mathbf{v} = -e\mathbf{E}$$

τ = Impulsrelaxationszeit

stationärer Zustand ($\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0$):

$$\mathbf{v}_D = -\frac{e\tau}{m} \mathbf{E} = -\mu \mathbf{E}$$

$\mathbf{v}_D = \langle \mathbf{v} \rangle$ = mittlere Drift-Geschwindigkeit aller Elektronen

$$\mu = |\mathbf{v}_D|/|\mathbf{E}| \quad (\text{Beweglichkeit})$$

elektrische Stromdichte:

$$\mathbf{J}_q = -en\mathbf{v}_D = \frac{ne^2\tau}{m} \mathbf{E} = ne\mu \mathbf{E}$$

$$\sigma = ne^2\tau/m$$

(elektrische Leitfähigkeit)

Zusammenfassung: Teil 16, 07.01.2021/2

Sommerfeld-Modell:
(fermionsches Quantengas)

$$J_q = \left(\frac{N(-e)}{V} \right) \langle \mathbf{v} \rangle = -en \langle \mathbf{v} \rangle = -en \frac{\hbar}{m} \langle \mathbf{k} \rangle = -en \frac{\hbar}{m} \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}, \sigma} f_{\mathbf{k}} \mathbf{k} = -en \frac{\hbar}{m} \delta \mathbf{k}$$

thermisches Gleichgewicht: $\sum_{\mathbf{k}, \sigma} f_{\mathbf{k}} \mathbf{k} = \mathbf{0}$

→ $J_q \neq \mathbf{0}$ nur für $\sum_{\mathbf{k}, \sigma} f_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \neq \mathbf{0}$

$$J_q = -en \frac{\hbar}{m} \delta \mathbf{k}$$

$\delta \mathbf{k}$ = Abweichung vom therm. Gleichgewicht

Berechnung der Änderung von $\delta \mathbf{k}$ durch äußere Kräfte (**E**-Feld) und Relaxationsprozesse (Streuung)

$$\frac{d\langle \mathbf{k} \rangle}{dt} = \left. \frac{\partial \langle \mathbf{k} \rangle}{\partial t} \right|_{\text{Kraft}} + \left. \frac{\partial \langle \mathbf{k} \rangle}{\partial t} \right|_{\text{Streuung}} = 0 \quad (\text{stationärer Zustand})$$

$$\left. \frac{\partial \langle \mathbf{k} \rangle}{\partial t} \right|_{\text{Kraft}} = -\frac{e}{\hbar} \mathbf{E} \quad \left. \frac{\partial \langle \mathbf{k} \rangle}{\partial t} \right|_{\text{Streuung}} = -\frac{\delta \mathbf{k}}{\tau} \quad \text{Relaxationszeitansatz}$$

$$\delta \mathbf{k} = -\frac{e\mathbf{E}}{\hbar} \tau$$

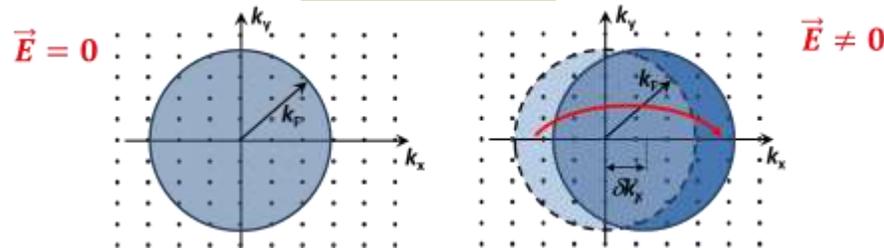
$$J_q = -en \frac{\hbar}{m} \delta \mathbf{k}$$

$$J_q = \frac{ne^2\tau}{m} \mathbf{E} = ne\mu \mathbf{E} \quad \text{Ohmsches Gesetz}$$

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m} = \frac{ne^2\ell}{mv_F} \quad \text{elektrische Leitfähigkeit}$$

$$\text{Beweglichkeit: } \mu = \frac{|v_D|}{|\mathbf{E}|} = \frac{e\tau}{m}$$

mittlere freie Weglänge: $\ell = v_F \tau$



typische Feldstärke in Kupferkabel: $E \sim 10 \text{ V/m}$
typische Streuzeit: $\tau \sim 10^{-14} \text{ s}$

$$\Rightarrow |\delta \mathbf{k}| = \frac{eE\tau}{\hbar} \sim 10^2 \text{ m}^{-1} \sim 10^{-9} k_F$$

• freies Elektronengas, T-Abhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit:

- Streuung an Phononen
- Streuung an Verunreinigungen
- Streuung an Probenoberfläche
-

- hohe $T, T \gg \Theta_D$: $\rho \propto n_{\text{ph}} \propto T$ (Streuung an Phononen)
- tiefe $T, T \ll \Theta_D$: $\rho \propto T^5$ (Streuung an Phononen)
- $T \rightarrow 0$: $\rho \rightarrow \text{const.}$ (Streuung an Defekten, Probenoberfläche, ...)

Matthiessen-Regel: $\tau^{-1} = \tau_1^{-1} + \tau_2^{-1} + \tau_3^{-1} + \dots$ (Addition der Streuraten)

7.3.2 Thermische Leitfähigkeit

- Definition der thermischen Leitfähigkeit analog zur elektrischen Leitfähigkeit

→ Proportionalitätskonstante zwischen Temperaturgradient (Störung) und der Wärmestromdichte (lineare Antwort)

$$\mathbf{J}_h = -\kappa \nabla T$$

(im Allgemeinen ist κ ein Tensor 2. Stufe)

analog zu Definition der elektrischen Leitfähigkeit: $\mathbf{J}_q = -\sigma \nabla \phi_{el} = -\sigma \mathbf{E}$

(thermisches Feld $\mathbf{E}_{th} = -\nabla T$ wird nicht verwendet)

- Transporttheorie

→ vollkommen analoge Beschreibung des Wärmetransports von Elektronen- und Phononengas

- Wärmeleitfähigkeit von Phononengas:

$$\kappa = \frac{1}{3} c_V v \ell = \frac{1}{3} c_V v^2 \tau$$

- für Elektronengas müssen wir die entsprechenden Ausdrücke für c_V und v verwenden:

$$c_V = \frac{\pi^2}{2} \frac{n k_B^2}{E_F} T$$

$$v^2 = v_F^2 = \frac{2E_F}{m} = \frac{2k_B T_F}{m}$$

$$\kappa = \frac{\pi^2}{3} \frac{n k_B^2 \tau}{m} T$$

WMI

7.3.2 Thermische Leitfähigkeit

- Diskussion der thermischen Leitfähigkeit von Metall

$$\kappa_{\text{ph,el}} = \frac{1}{3} c_V v \ell = \frac{1}{3} c_V v^2 \tau$$

– Wie groß ist κ_{el} des Elektronensystems im Vergleich zu κ_{ph} des Gitters (Phononen) ?

- $c_{V,\text{el}}$ ist wegen Faktor $\frac{T}{T_F} \sim 0.01$ etwa $10^2 - 10^3$ mal kleiner als $c_{V,\text{ph}}$ bei nicht allzu tiefen Temperaturen
- v_{ph}^2 ist wegen $\frac{v_F}{v_{\text{ph}}} \sim 1000$ etwa $10^5 - 10^6$ mal größer als $v_{\text{el}}^2 = v_F^2$
- τ ist wegen Streuung von Elektronen an Phononen vergleichbar

➔ $c_{V,\text{el}} v_{\text{el}}^2 \gg c_{V,\text{ph}} v_{\text{ph}}^2$

- ➔ in Metallen dominiert thermische Leitfähigkeit des Elektronensystems üblicherweise gegenüber derjenigen des Phononensystems
- ➔ Gitterwärmeleitfähigkeit in Metallen viel kleiner als in Isolatoren, Ursache ist starke Streuung von Phononen an Leitungselektronen

7.3.2 Thermische Leitfähigkeit

- Wiedemann-Franz Gesetz

$$\kappa = \frac{\pi^2 n k_B^2 \tau}{3 m} T$$

$$\sigma = \frac{n e^2 \tau}{m} = n e \mu$$

- Elektronen transportieren sowohl Ladung als auch Wärme (und Spin !!)
- materialunabhängiges Verhältnis κ/σ falls gleiche Streuprozesse bei Ladungs- und Wärmetransport vorherrschen, da sich die materialabhängigen Parameter τ und n wegkürzen

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B}{e} \right)^2 T$$

Wiedemann-Franz-Gesetz

$$L = \frac{\kappa}{\sigma T} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B}{e} \right)^2 = 2.44 \times 10^{-8} \frac{W \Omega}{K^2}$$

Lorenz-Zahl

➔ gute elektrische Leiter sind auch gute Wärmeleiter !!

(Beispiel: Kupfer und Edelstahl)

7.3.2 Thermische Leitfähigkeit

- Lorenz-Zahl $L = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B}{e}\right)^2 = 2.44 \times 10^{-8} \frac{W \Omega}{K^2}$

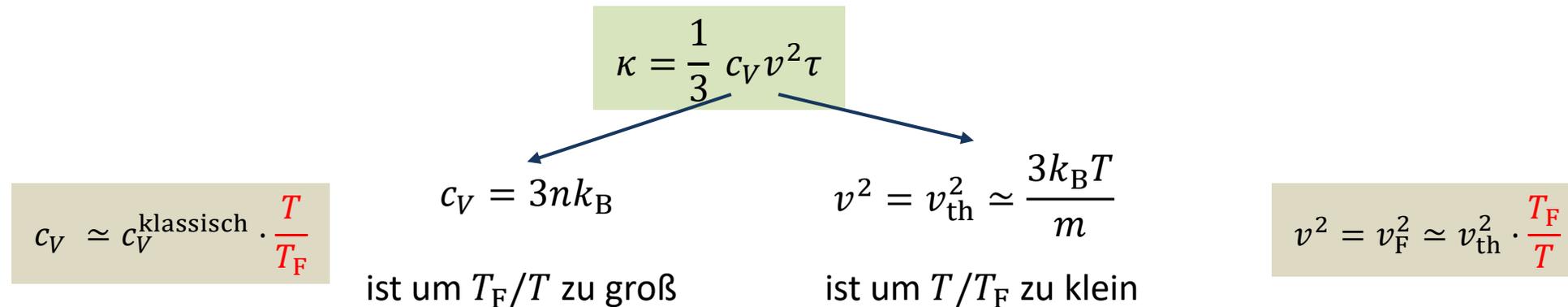
Metall	κ (W/cm K)	L ($10^{-8} W \Omega / K^2$)	Metall	κ (W/cm K)	L ($10^{-8} W \Omega / K^2$)
Al	2.38	2.14	Na	1.38	2.12
Ag	4.18	2.31	Pb	0.38	2.47
Au	3.10	2.35	Pt	0.72	2.51
Cd	1.00	2.42	Sn	0.64	2.52
Cu	3.85	2.23	Nb	0.52	2.90
Fe	0.80	2.61	Sb	0.64	2.57
In	0.88	2.58	W	1.70	3.04
Mo	1.39	2.61	Zn	1.13	2.31

@ 272 K

7.3.2 Thermische Leitfähigkeit

Drudes falsche Schlussfolgerungen (3)

durch zwei falsche Annahmen liefert Drude-Modell richtiges Ergebnis für Wärmeleitfähigkeit κ von Elektronengas



→ richtige Größenordnung von Wärmeleitfähigkeit !

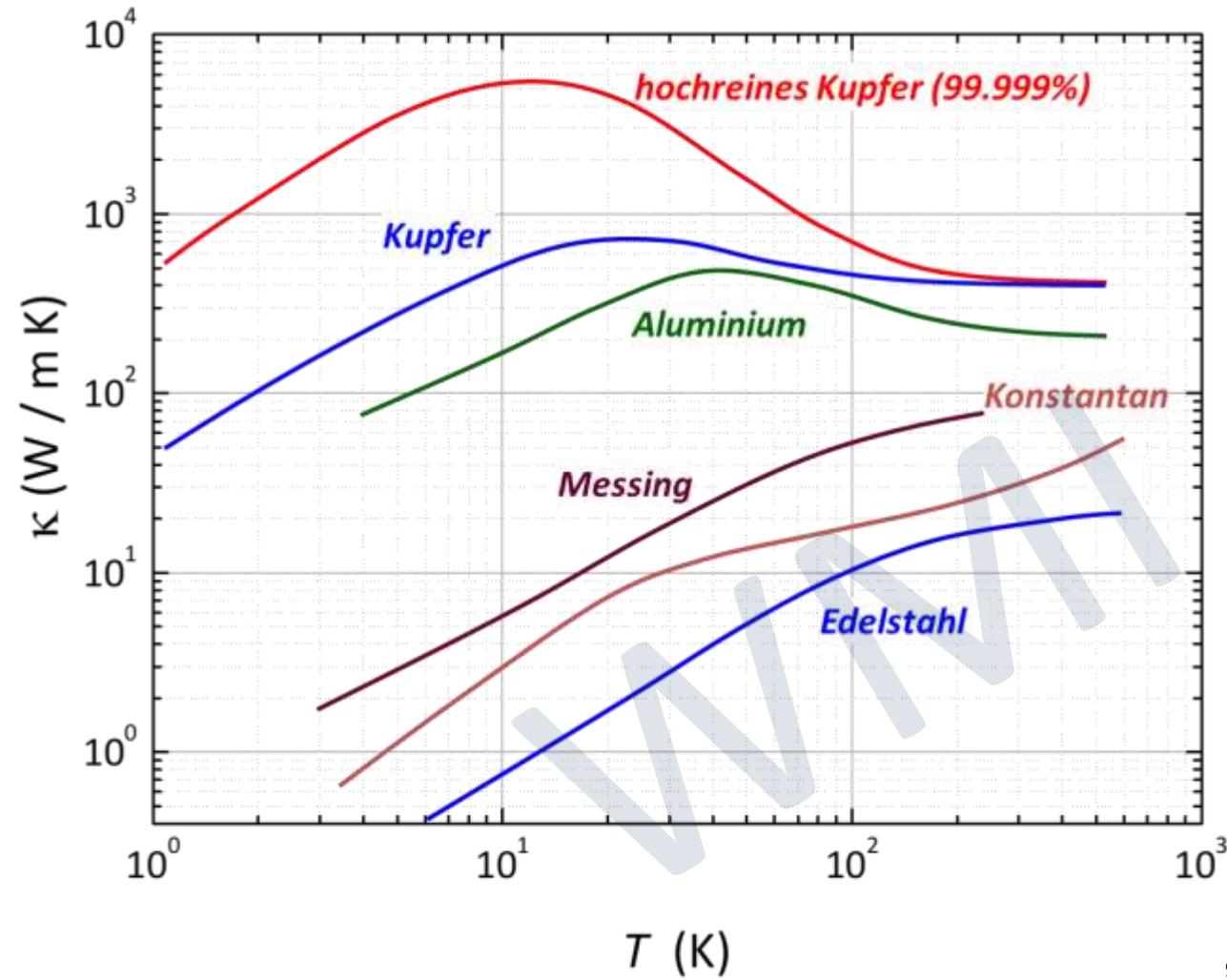


7.3.2 Thermische Leitfähigkeit

- Temperaturabhängigkeit von κ

aus Wiedemann-Franz-Gesetz $\frac{\kappa}{\sigma} = L \cdot T$ folgt: $\kappa(T) = L \cdot \sigma(T) \cdot T = L \cdot T / \rho(T)$

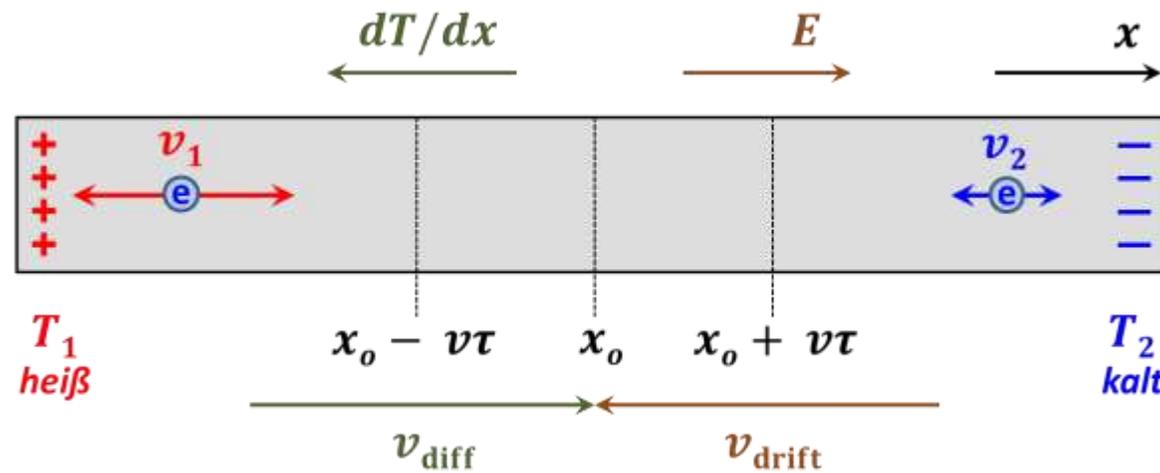
$$\kappa(T) \propto \sigma \cdot T \propto \frac{T}{\rho(T)} \propto \begin{cases} T & \text{für } T \lll \Theta_D \\ T^{-4} & \text{für } T \ll \Theta_D \\ \text{const.} & \text{für } T \gg \Theta_D \end{cases}$$



zum Vergleich: Diamant @ 300 K: $\kappa = 2300 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}$

7.3.3 Thermokraft

- Elektronen transportieren immer gleichzeitig Ladung und Wärme (thermoelektrische Kopplung)
 - ➔ treten bei Wärmetransport durch ∇T auch elektrische Ströme und elektrische Felder auf ?
- wir betrachten elektrischen Leiter (Metall) mit offenen Enden und angelegtem Temperaturgradient (1D-Modell)



- bei Vorhandensein von ∇T in Metall bewegen sich im Mittel mehr Elektronen von heiß nach kalt als umgekehrt
 - Ladungsanhäufung an offenen/elektrisch isolierenden Enden des Metalls
 - Aufbau von elektrischem Gegenfeld \mathbf{E} bis Diffusions- und Driftstrom gleich sind

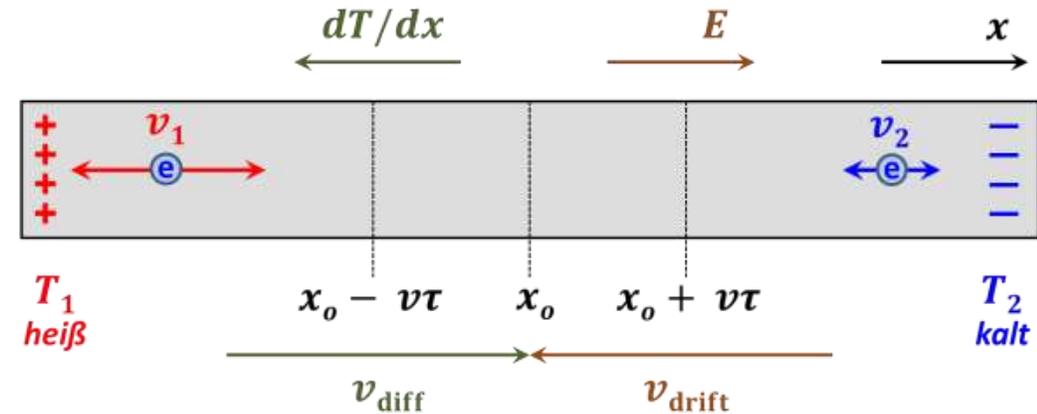
$$\mathbf{E} \equiv S \cdot \nabla T$$

$S =$ **Thermokraft** oder **Seebeck-Koeffizient**

7.3.3 Thermokraft

- Abschätzung der Thermokraft im Rahmen des Modells des freien Elektronengases (1D-Modell)

- wegen $v_1 \neq v_2$ ist der Mittelwert der Teilchengeschwindigkeit bei x_0 nicht mehr null



- mittlere Teilchengeschwindigkeit bei x_0 :

$$v_{diff} = \frac{v_1 - v_2}{2} = \frac{1}{2} [v(x_0 - v\tau) - v(x_0 + v\tau)]$$

- Taylor-Entwicklung um $x = x_0$:

$$v[T(x)] \simeq v(x_0) + \frac{dv}{dx}(x - x_0)$$

$$v_{diff} = \frac{1}{2} \left[v(x_0) + \frac{dv}{dx}(-v\tau) - v(x_0) - \frac{dv}{dx}(v\tau) \right]$$

$$v_{diff} = -\tau v \frac{dv}{dx} = -\tau \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\frac{\tau}{2} \frac{dv^2}{dT} \frac{dT}{dx}$$

- Erweiterung auf 3D-Fall

ersetzen von v_x^2 durch $\frac{1}{3} v^2$:

$$\mathbf{v}_{diff} = -\frac{\tau}{6} \frac{dv^2}{dT} \nabla T$$

7.3.3 Thermokraft

- durch Diffusionsstrom baut sich \mathbf{E} -Feld auf, das wiederum in kompensierendem Driftstrom resultiert:

$$\mathbf{v}_{\text{drift}} = -\frac{e\tau}{m} \mathbf{E} = -\mu \mathbf{E}$$

- im stationären Zustand sind beide Ströme gleich

$$\mathbf{v}_{\text{diff}} + \mathbf{v}_{\text{drift}} = 0 \Rightarrow -\frac{\tau}{6} \frac{d\langle v^2 \rangle}{dT} \nabla T - \frac{e\tau}{m} \mathbf{E} = 0$$

$$\frac{1}{3} \frac{d}{dT} \left(\frac{mv^2}{2} \right) \nabla T + e\mathbf{E} = 0$$

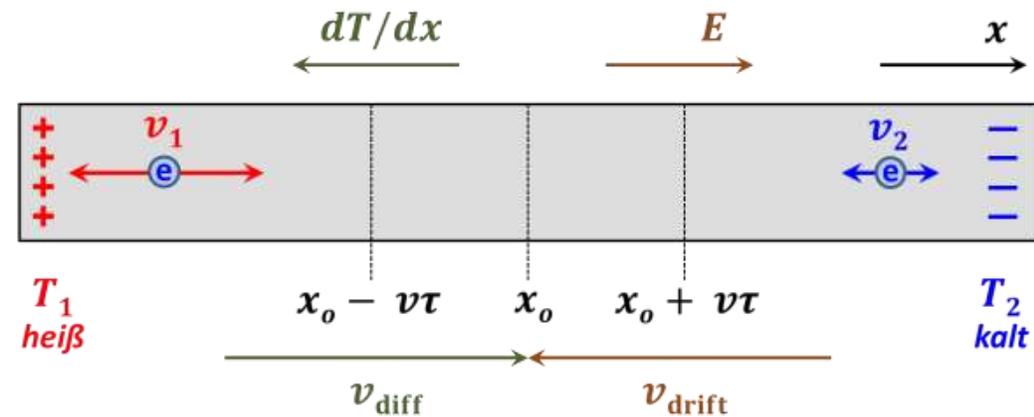
- wir benutzen $\frac{d}{dT} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = c_V/n$ (Wärmekapazität pro Teilchen): $\mathbf{E} = -\frac{1}{3ne} c_V \nabla T = S \cdot \nabla T$

- resultierende Thermokraft:

$$S = -\frac{1}{3ne} c_V = -\frac{\pi^2 k_B k_B T}{6 e E_F} = -\frac{\pi^2 k_B T}{6 e T_F}$$

$$c_V = \frac{\pi^2 n k_B^2}{2 E_F} T$$

Zahlenwert für freies Elektronengas: $S = -142 \frac{\mu\text{V}}{\text{K}} \cdot \frac{T}{T_F}$ mit $\frac{T}{T_F} \simeq 0.01$ folgt typischer Wert von $S = -1 \frac{\mu\text{V}}{\text{K}}$ für Metalle

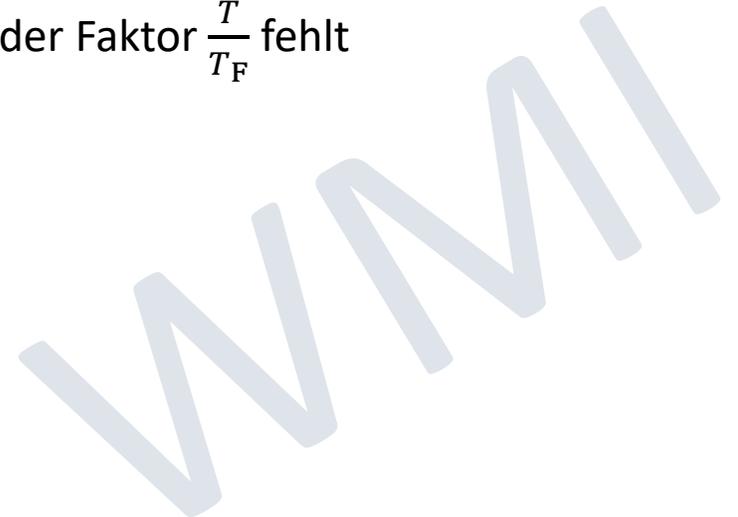


- Experimentelle Werte für Thermokraft

- Größenordnung $S = -1 \frac{\mu\text{V}}{\text{K}}$ wird für viele einfache Metalle tatsächlich beobachtet
- für manche Metalle wird aber auch ein positives Vorzeichen gemessen
 → Erklärung erfordert Einbeziehung des periodischen Gitterpotenzials → **Bändermodell**

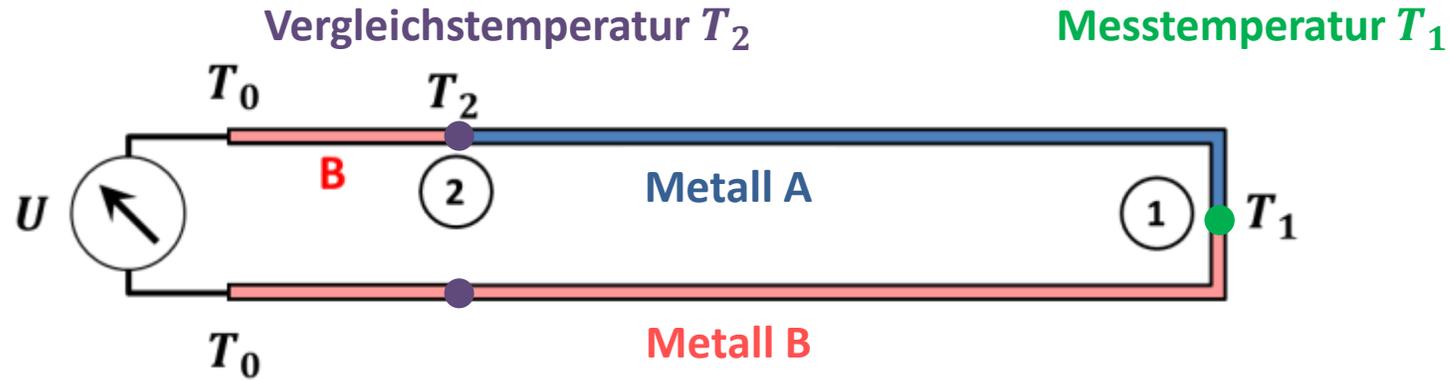
- Anmerkung zum Drude-Modell

- Drude-Modell liefert viel zu großen Wert für $S = -\frac{1}{3ne} c_V \simeq \frac{k_B}{e}$
- Problem: es wird $c_V = 3nk_B$ angenommen und nicht $c_V \simeq 3nk_B \frac{T}{T_F}$, d.h. der Faktor $\frac{T}{T_F}$ fehlt



7.3.3 Thermokraft

- Messung des Seebeck-Effekts



- gemessene Spannung

$$U = \int_0^1 E_B ds + \int_1^2 E_A ds + \int_2^0 E_B ds = \int_2^1 E_B ds + \int_1^2 E_A ds$$

$$U = \int_2^1 S_B \frac{\partial T}{\partial s} ds + \int_1^2 S_A \frac{\partial T}{\partial s} ds = \int_{T_1}^{T_2} (S_A - S_B) dT$$



Thomas Johann Seebeck

- es wird Differenz der Seebeck-Koeffizienten zweier Metalle gemessen
- übliches Bezugsmaterial: Platin
- gemessene Spannung $U \propto (T_2 - T_1)$
➔ **Thermoelement**

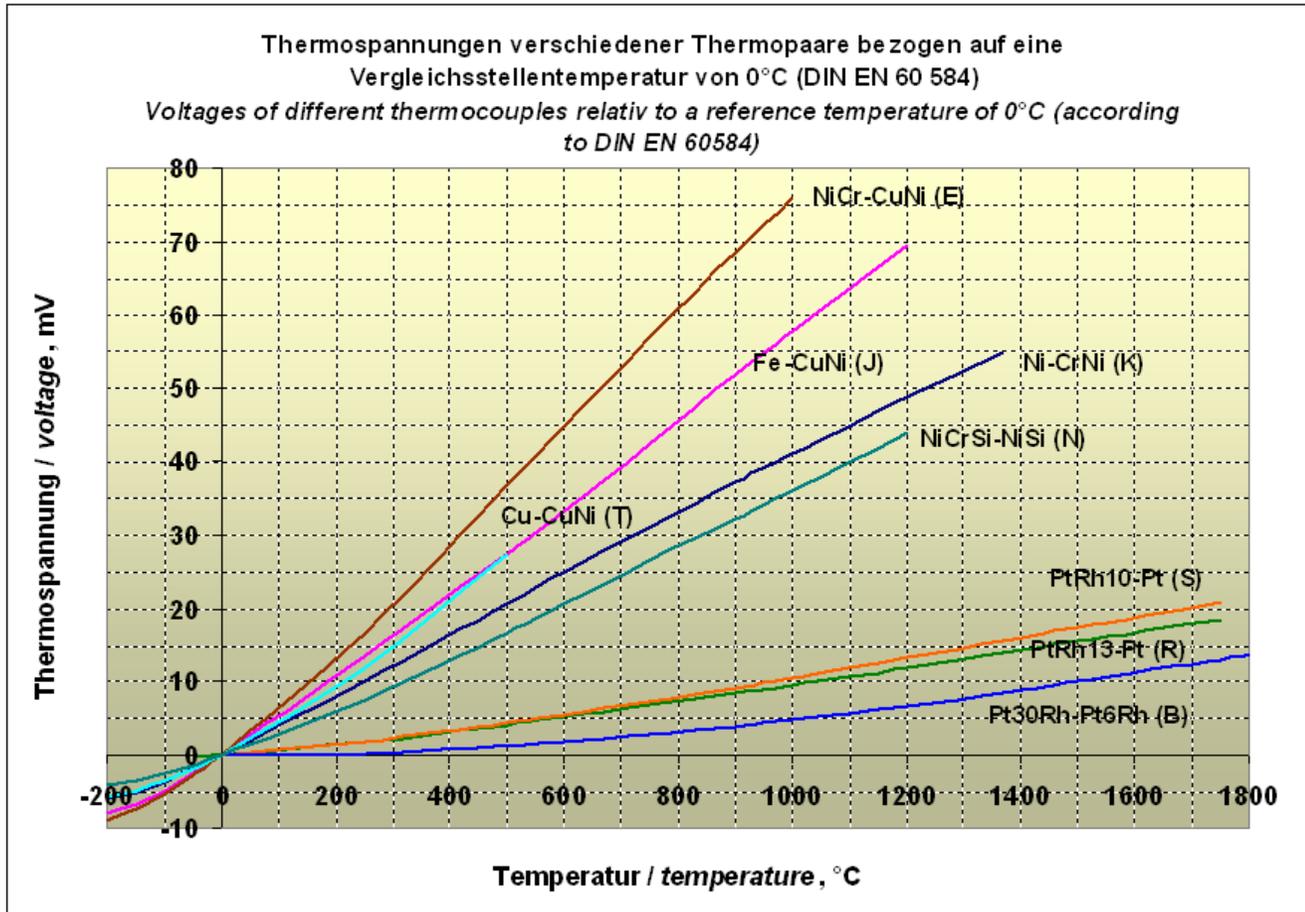
Th. J. Seebeck

"[Magnetische Polarisation der Metalle und Erze durch Temperaturdifferenz](#)", (1822-23)
in [Ostwald's Klassiker der Exakten Wissenschaften Nr. 70](#) (1895).

7.3.3 Thermokraft

- Thermoelektrische Spannungsreihe

die zur industriellen Temperaturmessung geeigneten Werkstoffe sind in der DIN EN 60584-1 genormt (die angegebenen Thermospannungen beziehen sich immer auf eine Vergleichsstellentemperatur von 0°C).



mV	Material
50,00	Tellur
45,00	Silizium
27,00	Silit
4,80	Antimon
2,55	Nickel-Chrom (85Ni, 10Cr)
1,90	Eisen
1,50	Platin-Rhenium
1,20	Molybdän, Uran
1,10	Messing
1,00	Iridium-Rodium (40Ir, 66Rh)
0,80	Wolfram, VA/1.4301
0,75	Kupfer
0,70	Silber, Gold, Zink
0,68	Manganin (86Cu, 12Mn, 2Ni)
0,65	Rhodium
0,64	Iridium-Rhodium (40Ir, 66Rh)
0,64	Platin-Rhodium (10%)
0,63	Iridium
0,52	Phosphorbronze
0,50	Tantal, Cäsium
0,45	Blei, Iridium-Rhutenium
0,40	Aluminium, Magnesium, Zinn
0,20	Graphit
0,00	Platin
-0,10	Thorium
-0,21	Natrium
-0,30	Palladium
-0,94	Kallium
-1,00	Neusilber (CuNiZn)
-1,55	Nickel
-1,60	Kobalt
-3,50	Konstantan (55Cu, 45Ni)
-5,20	Wismut

Referenzmetall: Platin

@ 100 °C

- ① NiCr-Ni: 2,55 mV - (-1,55 mV) = 4,1 mV
- ② PtRh-Pt: 0,64 mV - 0,00 mV = 0,64 mV

7.3.4 Elektronenbewegung im Magnetfeld

- Diskussion der elektrischen Transporteigenschaften in gekreuztem E- und B-Feld

- Kraftwirkung auf Elektronen: $\mathbf{F} = (-e) [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]$ es wirkt zusätzlich **Lorentz-Kraft** $\mathbf{F} = (-e)\mathbf{v} \times \mathbf{B}$
- zeitliche Änderung des mittleren Wellenvektors $\langle \mathbf{k} \rangle$ durch wirkende Kraft

mit $\mathbf{F} = (-e) [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] = m \frac{\partial \langle \mathbf{v} \rangle}{\partial t} = \hbar \frac{\partial \langle \mathbf{k} \rangle}{\partial t}$ erhalten wir

$$\left. \frac{\partial \langle \mathbf{k} \rangle}{\partial t} \right|_{\text{Kraft}} = \frac{\mathbf{F}}{\hbar} = \frac{(-e) [\mathbf{E} + \langle \mathbf{v} \rangle \times \mathbf{B}]}{\hbar}$$

- zeitliche Änderung des mittleren Wellenvektors $\langle \mathbf{k} \rangle$ durch Relaxationsprozesse (Streuung)

$$\left. \frac{\partial \langle \mathbf{k} \rangle}{\partial t} \right|_{\text{Streuung}} = -\frac{\langle \mathbf{k} \rangle - \langle \mathbf{k} \rangle^0}{\tau} = -\frac{\delta \mathbf{k}}{\tau}$$

- stationärer Zustand

$$\left. \frac{\partial \langle \mathbf{k} \rangle}{\partial t} \right|_{\text{Kraft}} + \left. \frac{\partial \langle \mathbf{k} \rangle}{\partial t} \right|_{\text{Streuung}} = 0 \Rightarrow \frac{(-e) [\mathbf{E} + \langle \mathbf{v} \rangle \times \mathbf{B}]}{\hbar} - \frac{\delta \mathbf{k}}{\tau} = 0 \Rightarrow \delta \mathbf{k} = -\frac{e\tau}{\hbar} [\mathbf{E} + \langle \mathbf{v} \rangle \times \mathbf{B}]$$

- resultierende mittlere Driftgeschwindigkeit $\mathbf{v}_D = \langle \mathbf{v} \rangle$

$$\mathbf{v}_D = \frac{\hbar}{m} \delta \mathbf{k} = -\frac{e\tau}{m} [\mathbf{E} + \mathbf{v}_D \times \mathbf{B}]$$

Anmerkung:

In der Lorentz-Kraft erscheint nur die mittlere Driftgeschwindigkeit \mathbf{v}_D , da diese ja eine mittlere Kraft auf alle Elektronen darstellt.
Für $\mathbf{E} = 0$ können wir zu jedem Elektron mit Geschwindigkeit \mathbf{v} auch ein Elektron mit Geschwindigkeit $-\mathbf{v}$ finden, so dass die mittlere Lorentz-Kraft verschwindet

7.3.4 Elektronenbewegung im Magnetfeld

- Ausschreiben der kartesischen Komponenten von \mathbf{v}_D für $\mathbf{B} \parallel \hat{z}$

$$\mathbf{v}_D = \frac{\hbar}{m} \delta \mathbf{k} = -\frac{e\tau}{m} [\mathbf{E} + \mathbf{v}_D \times \mathbf{B}]$$

$$v_{D,x} = -\omega_c \tau \left[\frac{E_x}{B} + v_{D,y} \right]$$

$$v_{D,y} = -\omega_c \tau \left[\frac{E_y}{B} - v_{D,x} \right]$$

$$v_{D,z} = -\omega_c \tau \left[\frac{E_z}{B} \right]$$

mit

$$\omega_c = \frac{eB}{m} = 1.76 \times 10^{11} \text{ s}^{-1} \cdot B \text{ [T]}$$

Zyklotronfrequenz

- Elektronen beschreiben Kreisbahnen in Ebene $\perp B$, ω_c ist Umlauffrequenz
- für Metalle ist $\tau \simeq 10^{-14} \text{ s}$ @ 300 K $\rightarrow \omega_c \tau \ll 1$ @ $B = 1 \text{ T}$

- auflösen des Gleichungssystems nach $v_{D,i}$ und benutzen der Stromdichte $\mathbf{J}_q = -ne\mathbf{v}_D$ führt auf

$$\begin{pmatrix} J_{q,x} \\ J_{q,y} \\ J_{q,z} \end{pmatrix} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\omega_c \tau & 0 \\ +\omega_c \tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \omega_c^2 \tau^2 \end{pmatrix}}_{\text{Leitfähigkeitstensor}} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

mit $\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$

Leitfähigkeitstensor

7.3.4 Elektronenbewegung im Magnetfeld

- Hall-Effekt

- Ladungsfluss nur in x -Richtung
 \rightarrow **Randbedingung:** $J_{q,y} = 0$

$$\begin{pmatrix} J_{q,x} \\ J_{q,y} \\ J_{q,z} \end{pmatrix} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c \tau & 0 \\ +\omega_c \tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \omega_c^2 \tau^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

$$J_{q,y} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} [\omega_c \tau E_x + E_y] = 0 \Rightarrow \omega_c \tau E_x + E_y = 0$$

$$E_y = -\omega_c \tau E_x = -\frac{eB}{m} \tau E_x = -\mu B E_x \quad \text{Hall-Feld}$$

$$\mu = \frac{e\tau}{m} = \text{Beweglichkeit}$$

- wir drücken E_x durch $J_{q,x}$ aus und erhalten

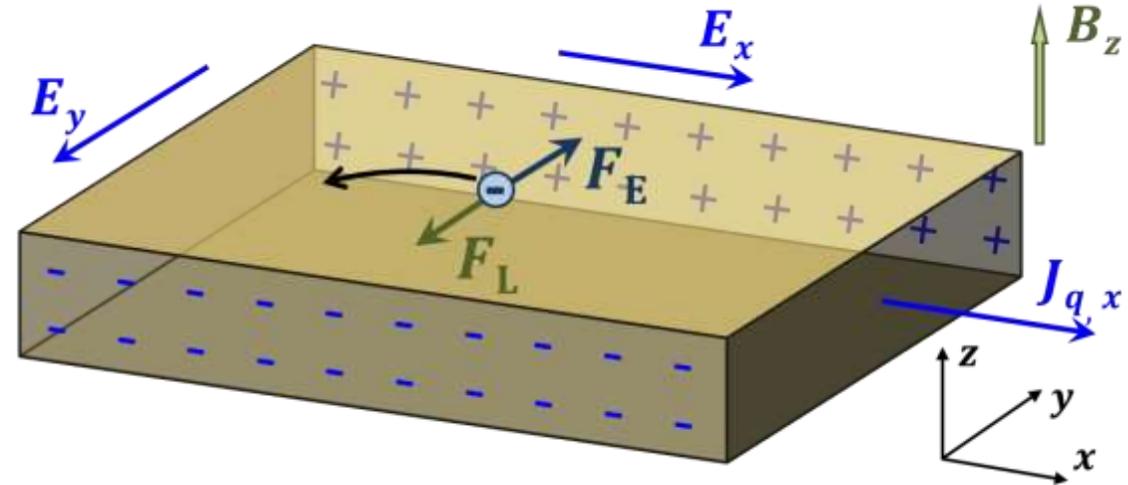
$$E_y = -\frac{eB\tau}{m} E_x = -\frac{eB\tau}{m} \frac{J_{q,x}}{\sigma_0} = -\frac{1}{ne} B J_{q,x} = R_H B J_{q,x}$$

$$\text{mit } \sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$$

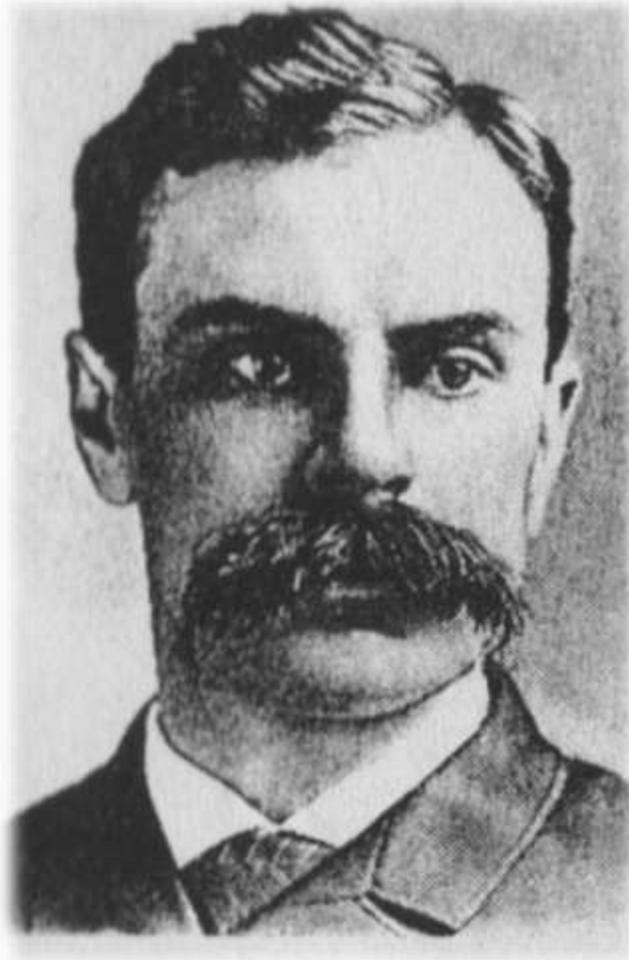
$$R_H = -\frac{1}{ne} \quad \text{Hall-Konstante}$$

$$\rho_{xy} = \frac{E_y}{J_{q,x}} = R_H B = -\frac{1}{ne} B \quad \text{spezifischer Hall-Widerstand}$$

$$\tan \theta_H = \frac{E_y}{E_x} = R_H \sigma_0 = -\frac{e\tau}{m} B = -\mu B \quad \text{Hall-Winkel}$$



7.3.4 Elektronenbewegung im Magnetfeld



(um 1920)

Edwin Herbert Hall

* 7. November 1855 in Great Falls (Maine), † 20. November 1938 in Cambridge (Massachusetts)

1879: Entdeckung des nach ihm benannten Hall-Effekts im Alter von 24 Jahren

1881 – 1921: Forschungsarbeiten zur Thermoelektrizität an der Harvard Universität

7.3.4 Elektronenbewegung im Magnetfeld

- Interpretation des Hall-Effekts

$$E_y = -\frac{1}{ne} B J_{q,x} = R_H B J_{q,x}$$

- Ursache der Proportionalität $E_y \propto 1/n$:

- bei vorgegebenem $J_{q,x}$ ist $v_{D,x} = -J_{q,x}/ne$ und damit $F_L \propto v_D \propto 1/n$

- bei vorgegebenem $J_{q,x}$ müssen sich die LT umso schneller bewegen, je kleiner n ist und werden deshalb durch B umso stärker abgelenkt

- ➔ das kompensierende Hall-Feld muss also mit abnehmendem n größer werden

- wichtige Anwendung: Messung des Vorzeichens und der Dichte der Ladungsträger

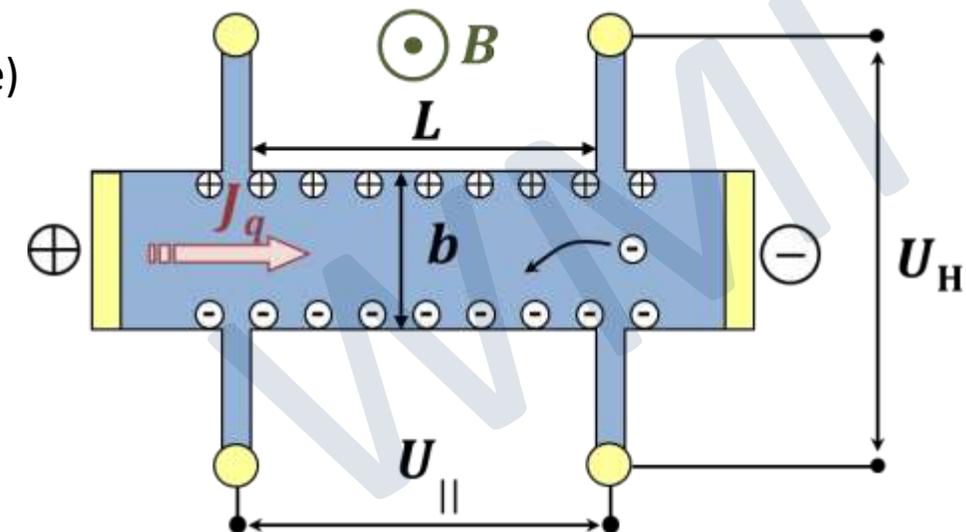
- Messung des Hall-Effekts

$$U_H = E_y b = R_H B J_{q,x} b = \rho_{xy} J_{q,x} b = \rho_{xy} \frac{I_x}{d} \quad (d = \text{Probendicke})$$

- im Experiment können B und $J_{q,x}$ (Heizeffekte) nicht beliebig erhöht werden, um großes U_H zu bekommen

- ➔ **große Probenbreite b**

- ➔ keine Versetzung der Spannungsabgriffe in Längsrichtung



7.3.4 Elektronenbewegung im Magnetfeld

- Vertiefungsthema: Magnetwiderstand

- Beobachtung: Widerstand von elektrischen Leitern hängt von B ab: $\rho = \rho(B)$

longitudinaler Magnetwiderstand	$\rho_{ }$	$\mathbf{B} \mathbf{J}_q$
transversaler Magnetwiderstand	ρ_{\perp}	$\mathbf{B} \perp \mathbf{J}_q$

- Magnetowiderstandseffekt (MR-Effekt)

$$\text{MR} = \frac{\rho(B) - \rho(0)}{\rho(0)} = \frac{\Delta\rho}{\rho(0)}$$

große Bedeutung für Anwendungen
(z.B. Leseköpfe für Festplatten, Magnetfeldsensoren,...)

$\Delta\rho < 0$: **negativer MR**, $\Delta\rho > 0$: **positiver MR**

- nichtmagnetische Metalle zeigen üblicherweise einen positiven MR
- magnetische Metalle zeigen auch einen positiven MR (aufgrund von Lorentz-Kraft), der aber häufig durch einen größeren negativen MR überlagert wird
 - ➔ große MR-Effekte auch bei kleinem B und bei Raumtemperatur möglich
 - ➔ großes Anwendungsfeld: **Magnetoelektronik**

7.3.4 Elektronenbewegung im Magnetfeld

- **Transversaler Magnetwiderstand, $B \perp J_q$**
 - Ladungsfluss nur in x -Richtung \rightarrow **Randbedingung:** $J_{q,y} = 0$

$$\begin{pmatrix} J_{q,x} \\ J_{q,y} \\ J_{q,z} \end{pmatrix} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c \tau & 0 \\ +\omega_c \tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \omega_c^2 \tau^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

$$J_{q,y} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} [\omega_c \tau E_x + E_y] = 0 \Rightarrow E_y = -\omega_c \tau E_x$$

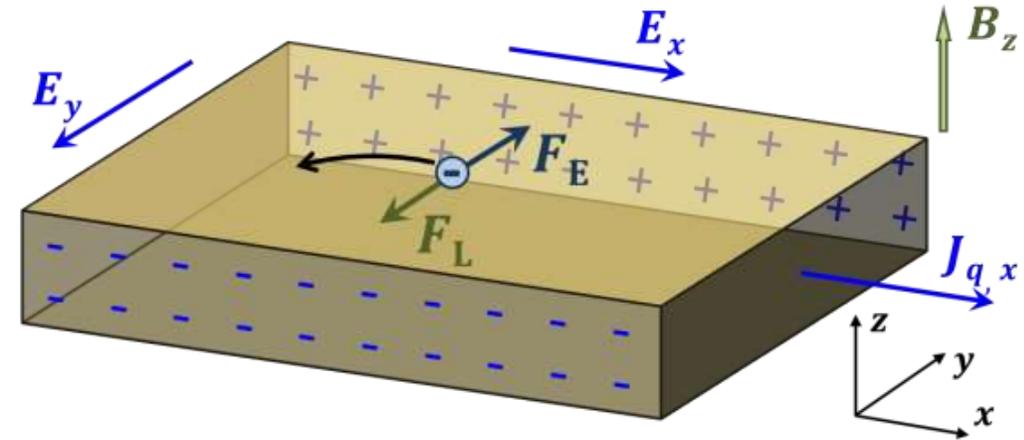
$$J_{q,x} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} [E_x - \omega_c \tau E_y] = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} [E_x + \omega_c^2 \tau^2 E_x] = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} (1 + \omega_c^2 \tau^2) E_x = \sigma_0 E_x$$

- **Ergebnis:**

- $\rho(B) = 1/\sigma_0 = const.$ \rightarrow **kein transversaler Magnetwiderstand im Modell des freien Elektronengases**
- Hall-Feld kompensiert F_L , so dass sich die Elektronen mit Driftgeschwindigkeit parallel zu E -Feldrichtung bewegen können
- freies Elektronengasmodell ist zu einfach, für Metalle wird eigentlich immer $\rho(B) \neq const.$ beobachtet

- **Longitudinaler Magnetwiderstand, $B \parallel J_q$**

- Verständnis benötigt Kenntnis der $E(k)$ -Abhängigkeit (Bandstruktur) für Elektronen im periodischem Festkörperpotenzial



7.3.4 Elektronenbewegung im Magnetfeld

- Plausibilitätsbetrachtung für Auftreten von Magnetwiderstand

- Elektronen werden durch Lorentz-Kraft zwischen zwei Streuprozessen auf kreisförmige Bahnen gezwungen
- bewirkt effektive Verkürzung der mittleren freien Weglänge

- mit $\ell_0 = v_F \tau$, $\frac{\ell_0}{R_c} = \varphi$, $R_c = v_F / \omega_c$ erhalten wir für $\ell_0 \ll R_c$

$$\frac{\ell/2}{R_c} = \sin \frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{6} \left(\frac{\varphi}{2}\right)^3$$

$$\ell \approx R_c \varphi - \frac{R_c}{12} \varphi^3 = \ell_0 - \frac{\varphi^2}{24} \ell_0 = \ell_0 - \frac{(\ell_0/R_c)^2}{24} \ell_0 = \ell_0 - \frac{[v_F \tau / (v_F / \omega_c)]^2}{24} \ell_0 = \ell_0 \left(1 - \frac{\omega_c^2 \tau^2}{24}\right)$$

- resultierende Änderung des spezifischen Widerstands

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} \approx \frac{\ell_0^{-1} (1 - \omega_c^2 \tau^2 / 24)^{-1} - \ell_0^{-1}}{\ell_0^{-1}} = 1 - (1 - \omega_c^2 \tau^2 / 24) = \omega_c^2 \tau^2 / 24$$

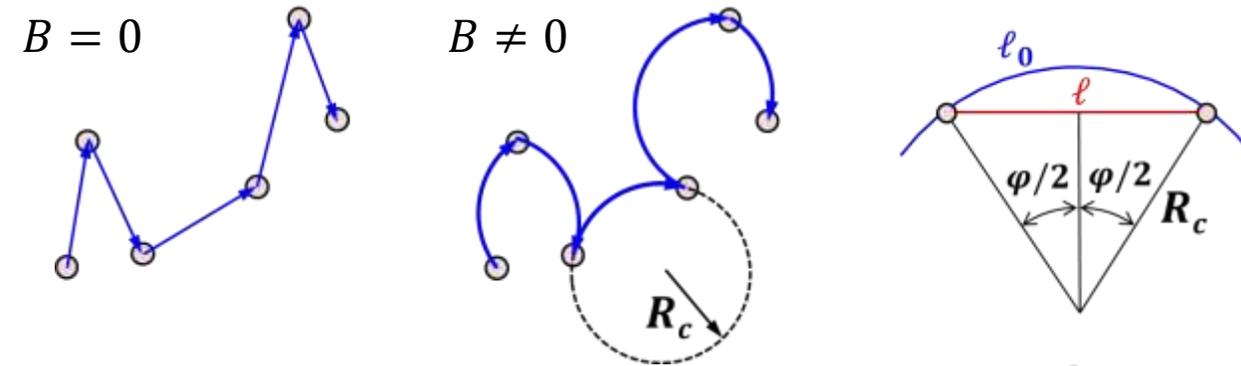
$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} \ll 1, \text{ da } \omega_c \tau \ll 1 \text{ für Metalle @ 300 K}$$

- mit $1/\rho_0 = \sigma = ne^2 \tau / m$ und $\omega_c = eB / m$ erhalten wir

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} \approx \frac{1}{24 n^2 e^2} \left(\frac{B}{\rho_0}\right)^2$$

Kohler-Regel

großer Effekt nur bei hohen B und kleinem ρ_0 (tiefe T , reine Proben)



7.3.4 Elektronenbewegung im Magnetfeld

- Heute gibt es einen ganzen Zoo von MR-Effekten mit unterschiedlichen Ursachen

- AMR (Anisotropic MagnetoResistance): 3 ... 4 %
- GMR (Giant MagnetoResistance): < 600 %
- CMR (Colossal MagnetoResistance)
- TMR (Tunneling MagnetoResistance): 6 ... 100 %
- BMR (Ballistic MagnetoResistance)
- EMR (Extraordinary MagnetoResistance)
- GMI (Giant MagnetoImpedance)
- SMR (Spin Hall Magnetoresistance)
-



7.3.4 Elektronenbewegung im Magnetfeld

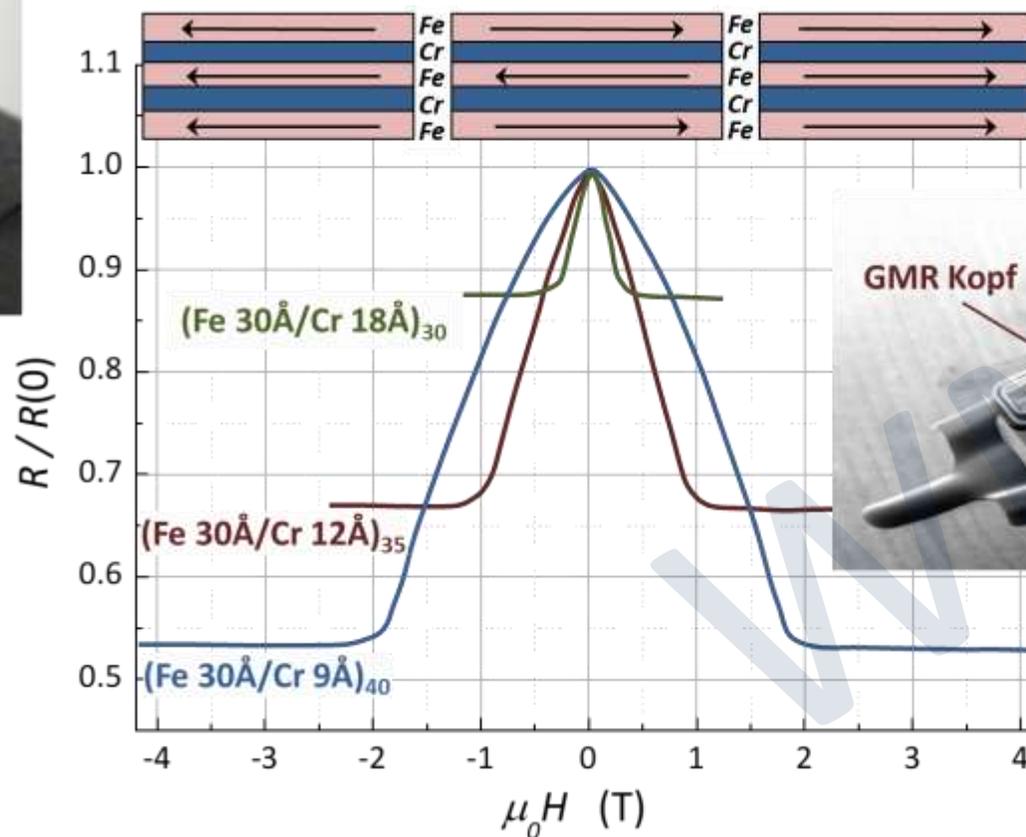


Albert Louis Francois Fert



Peter Andreas Grünberg

Nobelpreis für Physik 2007
 für die Entdeckung des
 Riesenmagnetwiderstands (GMR)“



• freies Elektronengas, thermische Leitfähigkeit:

$$\mathbf{J}_h = -\kappa \nabla T$$

$$\kappa = \frac{1}{3} c_V v^2 \tau \quad (\text{äquivalent zu Phononengas})$$

$$c_V = \frac{\pi^2}{2} \frac{n k_B^2}{E_F} T \quad v^2 \approx v_F^2 = \frac{2E_F}{m} = \frac{2k_B T_F}{m}$$

$$\rightarrow \kappa = \frac{\pi^2}{3} \frac{n k_B^2 \tau}{m} T$$

• freies Elektronengas, T-Abhängigkeit der thermischen Leitfähigkeit:

$$\kappa = \frac{\pi^2}{3} \frac{n k_B^2 \tau}{m} T$$

$$\sigma = \frac{n e^2 \tau}{m}$$

$\tau = \tau(T)$
(gleiche Streuprozesse bestimmen
Wärme- und Ladungstransport)

Wiedemann-Franz-
Gesetz:

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B}{e} \right)^2 T$$

Lorenz-Zahl: $L = 2.44 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\Omega \cdot \text{K}^2}$

T-Abhängigkeit

$$\kappa = L \sigma(T) \cdot T \propto \begin{cases} T & \text{für } T \ll \ll \Theta_D \\ T^{-4} & \text{für } T \ll \Theta_D \\ \text{const.} & \text{für } T \gg \Theta_D \end{cases}$$

• Thermokraft/Seebeck-Effekt:

Elektronen bewegen sich in T-Gradient im Mittel von heiß nach kalt

→ Elektronenmangel an heißem Ende

→ Elektronenüberschuss an kaltem Ende

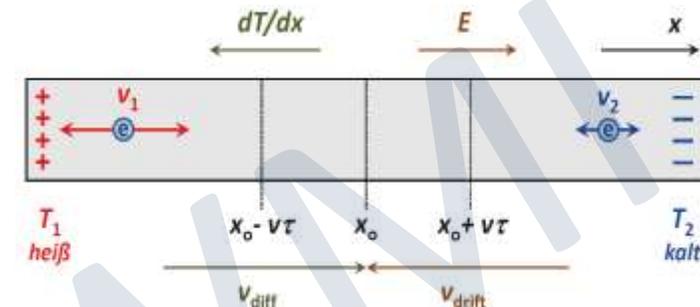
⇒ ∇T ist mit elektrischem Feld \mathbf{E} verknüpft: $\mathbf{E} \equiv \mathbf{S} \nabla T$ $\mathbf{S} = \text{Seebeck-Koeffizient}$

– im stationären Fall ist der Betrag der **Diffusionsgeschwindigkeit** und der **Driftgeschwindigkeit** gleich

$$\mathbf{v}_{\text{diff}} = -\frac{\tau}{6} \frac{dv^2}{dT} \nabla T = -\mathbf{v}_{\text{drift}} = -\mu \mathbf{E} = \frac{e\tau}{m} \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{3e} \frac{c_V}{n} \nabla T \quad \Rightarrow \quad S = -\frac{\pi^2}{6} \frac{k_B}{e} \frac{T}{T_F} = -142 \frac{\mu\text{V}}{\text{K}} \cdot \frac{T}{T_F}$$

– für einfache Metalle: $S < 0$ in Größenordnung von **-1 $\mu\text{V}/\text{K}$ @ 300 K**

– für einige Metalle: $S > 0$ → **Modell des freien Elektronengases zu einfach!!** → **Elektronen im periodischen Potenzial/Bändermodell**



• **freies Elektronengas - Elektronenbewegung in E- und B-Feld:**

Kraft $\mathbf{F} = -e [\mathbf{E} + \langle \mathbf{v} \rangle \times \mathbf{B}]$ stationärer Zustand: $\frac{d\langle \mathbf{k} \rangle}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\mathbf{F}}{\hbar} = \frac{\langle \delta \mathbf{k} \rangle}{\tau} = \frac{-e[\mathbf{E} + \langle \mathbf{v} \rangle \times \mathbf{B}]}{\hbar}$

$$\Rightarrow \langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}_D = \frac{\hbar \langle \delta \mathbf{k} \rangle}{m} = -\frac{e\tau}{m} [\mathbf{E} + \mathbf{v}_D \times \mathbf{B}] \quad \mathbf{J}_q = -en\mathbf{v}_D$$

Leitfähigkeitstensor für $B \parallel z$:

$$\begin{pmatrix} J_{q,x} \\ J_{q,y} \\ J_{q,z} \end{pmatrix} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\omega_c \tau & 0 \\ +\omega_c \tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \omega_c^2 \tau^2 \end{pmatrix}}_{\text{Leitfähigkeitstensor}} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

$$\omega_c = \frac{eB}{m} = 1.76 \times 10^{11} \text{ s}^{-1} \cdot B \text{ [T]}$$

Zyklotron-Frequenz

• **Hall-Effekt** (Randbedingung: $J_{q,y} = 0$)

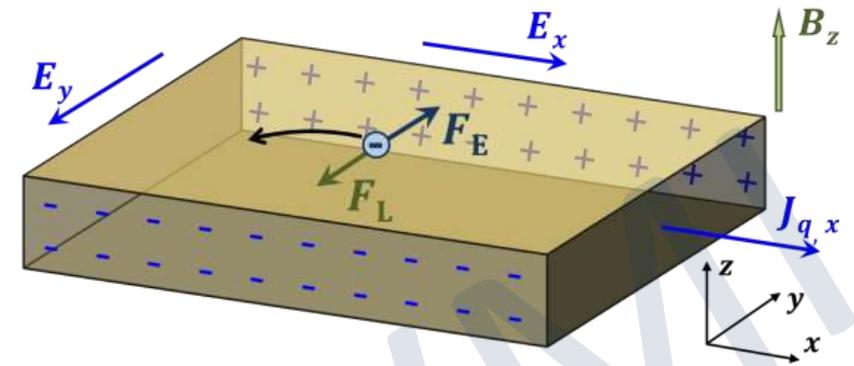
$$J_{q,y} = 0 = \omega_c \tau E_x + E_y \Rightarrow E_y = R_H B J_{q,x}$$

$$R_H = -\frac{1}{ne} \quad \text{Hall-Konstante}$$

$$\rho_{xy} = \frac{E_y}{J_{q,x}} = R_H B \quad \text{spez. Hall-Widerstand}$$

$$\tan \theta_H = \frac{E_y}{E_x} = R_H \sigma_0 = -\mu B$$

Hall-Winkel



• **Magnetwiderstand MR: $\rho = \rho(B)$**

$$\rightarrow \text{MR-Effekt: } \frac{\rho(B) - \rho(0)}{\rho(0)} = \frac{\Delta \rho}{\rho(0)}$$

kann positiv ($\Delta \rho > 0$) oder negativ ($\Delta \rho < 0$) sein

longitudinaler Magnetwiderstand $\rho_{\parallel} : B \parallel J_q$
 transversaler Magnetwiderstand $\rho_{\perp} : B \perp J_q$

kein transversaler MR für freies Elektronengas erwartet: $\rho(B) = \text{const}$

\rightarrow genauere Beschreibung notwendig: Bändermodell

\rightarrow zahlreiche MR-Effekte in magnetischen und nichtmagn. Materialien