Physik der Kondensierten Materie 2

Rudolf Gross

SS 2021

Teil 2

Vorlesungsstunde: 12.04.2021-2

- ***Quantisierung der Bahnen freier Ladungsträger ($q = +e$) im Magnetfeld***

Wellen auf geschlossenen Bahnen müssen Bohr-Sommerfeld-Quantisierung erfüllen

- Schrödinger-Gleichung: $$\frac{1}{2m}\underbrace{\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A}\right)}^{2}\Psi = \varepsilon\,\Psi$$ Eichung: $\mathbf{A} = (0, Bx, 0) \quad \rightarrow \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = (0,0,B)$

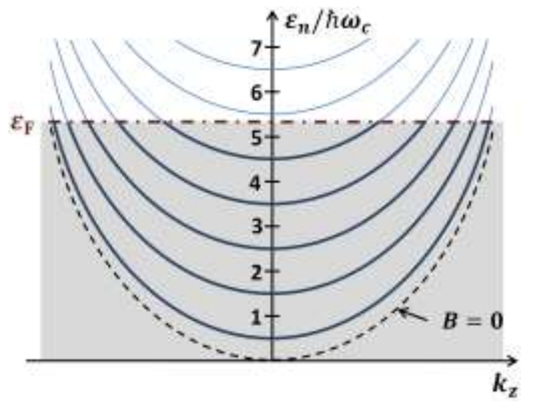
Operator des kinematischen Impulses: $p = \hbar k + qA \rightarrow \hbar k = p - qA = \frac{\hbar}{i}\nabla - qA$

- Lösung ergibt Eigenenergien:
Subbänder: Landau-Niveaus

$$\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$$

Kreisbewegung in Ebene senkrecht zu B   freie Bewegung || B

Zyklotron-Frequenz: $$\omega_c = \frac{eB}{m} = 1.758\,820\,174\,(71) \times 10^{11}\ \ \mathrm{s}^{-1} \times B\ [\mathrm{Tesla}]$$



- ***Entartung der Landau-Niveaus*** (für eine Spin-Richtung)

$$p = \left(\frac{m\omega_c}{\hbar}L_x\right)\Big/\left(\frac{2\pi}{L_y}\right) = \hbar\omega_c\, D_{2D} = \underbrace{L_x L_y B}_{\text{Fluss durch Fläche} \perp B} \cdot \underbrace{\frac{e}{2\pi\hbar}}_{2\Phi_0} = \frac{\Phi}{2\Phi_0}$$

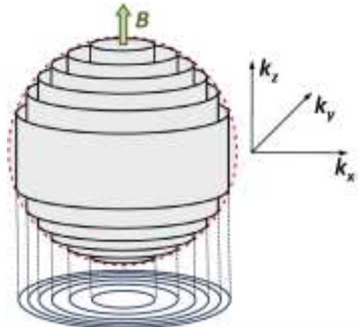
wie viele Zustände gibt es zu jedem möglichen Wert von k_z in $k_x k_y$-Ebene ?

$$D_{2D} = \frac{m}{2\pi\hbar^2}L_x L_y$$

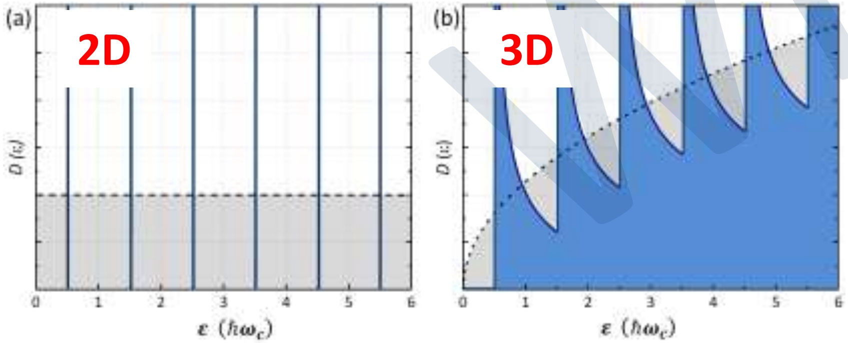
Fluss durch Fläche $\perp B$

$2\Phi_0 \quad (\Phi_0 = \frac{h}{2e} = \text{Flussquant})$

Landau-Zylinder:



Zustandsdichte im Magnetfeld:



- ***Bahnquantisierung für Kristallelektronen ($q = +e$)***

Korrekturfaktor γ

  - Quantisierungsbedingung wie für freie Ladungsträger: $$\frac{1}{2\pi}\oint \mathbf{p}\cdot d\mathbf{r} = \hbar(n+\gamma), \qquad n = 0,1,2,3,\ldots$$

    mit kanonischem Impuls $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} + q\mathbf{A} = q\mathbf{r}\times\mathbf{B} + q\mathbf{A}$ erhalten wir:

$$\oint \mathbf{p}\cdot d\mathbf{r} = -q\Phi = -q\,BA = 2\pi\,\hbar(n+\gamma), \qquad n = 0,1,2,3,\ldots$$

➔ ***von Bahnen umschlossene Flächen und der von ihnen eingeschlossene magnetische Fluss sind quantisiert !***

$$A_n = \frac{2\pi\hbar(n+\gamma)}{qB}, \qquad \Phi_n = BA_n = (n+\gamma)\frac{h}{q} = (n+\gamma)\,2\Phi_0$$ (mit $\Phi_0 = h/2e$)

  - aus $\hbar\boldsymbol{k} = e\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{B}$ folgt $|dr| = \frac{\hbar}{eB}|dk|$ folgt: $A_n = \left(\frac{\hbar}{qB}\right)^2 S_n \qquad S_n = \frac{(n+\gamma)2\pi qB}{\hbar}$

  - Fläche zwischen benachbarten Landau-Zylindern: $\Delta S = \frac{2\pi qB}{\hbar} = \frac{2\pi m_c}{\hbar}\,\hbar\omega_c$

- ***Welches ΔB führt zu gleichen Flächen aufeinanderfolgender Landau-Zylinder?***

aus $(n+\gamma+1)\frac{2\pi qB_{n+1}}{\hbar} = S_n = (n+\gamma)\frac{2\pi qB_n}{\hbar} = S$ folgt: $$\Delta = \left(\frac{1}{B_{n+1}} - \frac{1}{B_n}\right) = \frac{2\pi q}{\hbar S}$$

→ ***gleiche Zunahme in $1/B$ führt zu gleichen Bahnen im k-Raum***

→ ***$1/B$ -Oszillationen von physikalischen Größen***

- ***Voraussetzungen für experimentelle Beobachtung von 1/B Oszillationen***

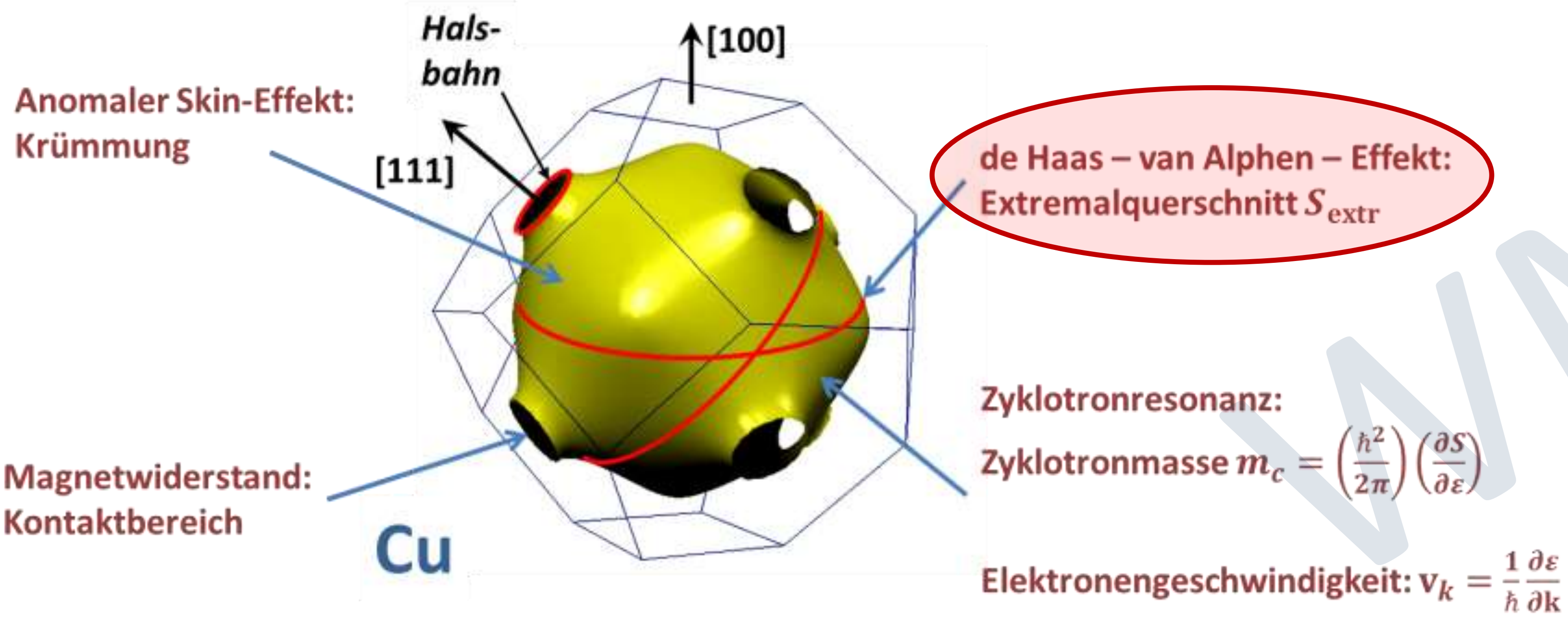
  - Abstand benachbarter Landau-Niveaus groß gegen k_BT: $\hbar\omega_c > k_BT$ ➔ $\frac{B}{T} > \frac{m_c k_B}{\hbar q} = 0.78\ \mathrm{T/K}$ ➔ ***hohe B/T***
  - genügend lange Streuzeit τ: $\Delta\varepsilon \simeq \frac{\hbar}{\tau} < \hbar\omega_c$ ➔ $\omega_c\tau = \frac{qB}{m_c}\tau > 1$ ➔ ***hohe B, tiefe T und reine Proben***

9.11 Exp. Bestimmung der Fermi-Fläche

- **Fermi-Fläche $\varepsilon = \varepsilon_{\mathrm{F}}$**
    - trennt bei Metallen für $T = 0$ die besetzten von den unbesetzten Zuständen
    - ist eng mit den Transporteigenschaften und den optischen Eigenschaften verknüpft

➔ ***großes Interesse an experimenteller Bestimmung***

- **zahlreiche physikalische Größen liefern Information über Fermi-Fläche**



9.11.1 de Haas – van Alphen – Effekt

- **Gemessen wird Oszillation der Magnetisierung eines Metalls als Funktion des angelegten Magnetfeldes**

  → Entdeckung durch **de Haas** und **van Alphen** im Jahr 1930 an Wismut

  → **Oszillation entsteht durch das Schieben der Landau-Zylinder über die Fläche $\varepsilon = \varepsilon_F$ bei Variation von B**

W.J. de Haas (1878 – 1960)

P.M. van Alphen (1906 – 1967)

- **Magnetisierung eines Festkörpers**
  (Ausrichtung von magnetischen Momenten durch B, wird erst später im Detail behandelt)

  - Definition: $$M = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial F}{\partial B}\right)_{T,V=const}$$

  - bei genügend tiefen Temperaturen ist freie Energie $F = U - TS \simeq U$

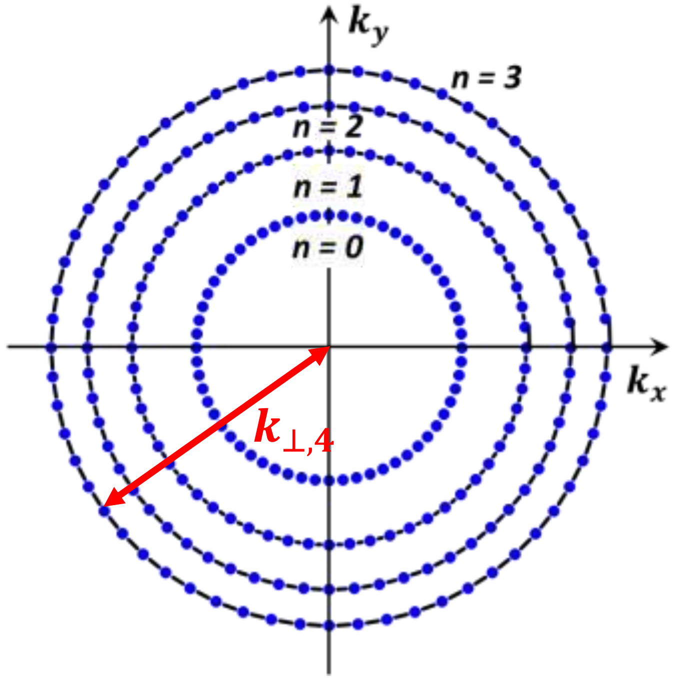
$$M \simeq -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial U}{\partial B}\right)_{T,V=const}$$

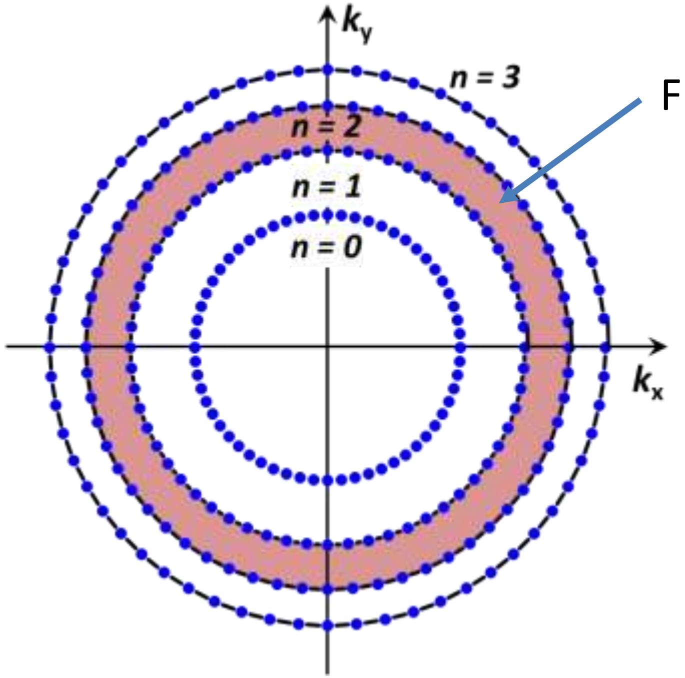
➔ ***wir müssen $U(B)$ kennen, um $M(B)$ zu berechnen***

➔ ***im Folgenden Berechnung für 2D freies Elektronengas***

9.11.1 de Haas – van Alphen – Effekt

- **2D freies Elektronengas im Magnetfeld (Wiederholung)**





Flächendifferenz: $\Delta S = \frac{2\pi e B}{\hbar}$

Eigenenergien: $\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c = \frac{\hbar^2 k_{\perp,n}^2}{2m}$

Kreisradius: $k_{\perp,n} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c} = \sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{2eB}{\hbar}}$

***B*-Änderung führt zu Änderung von $k_{\perp,n}$**

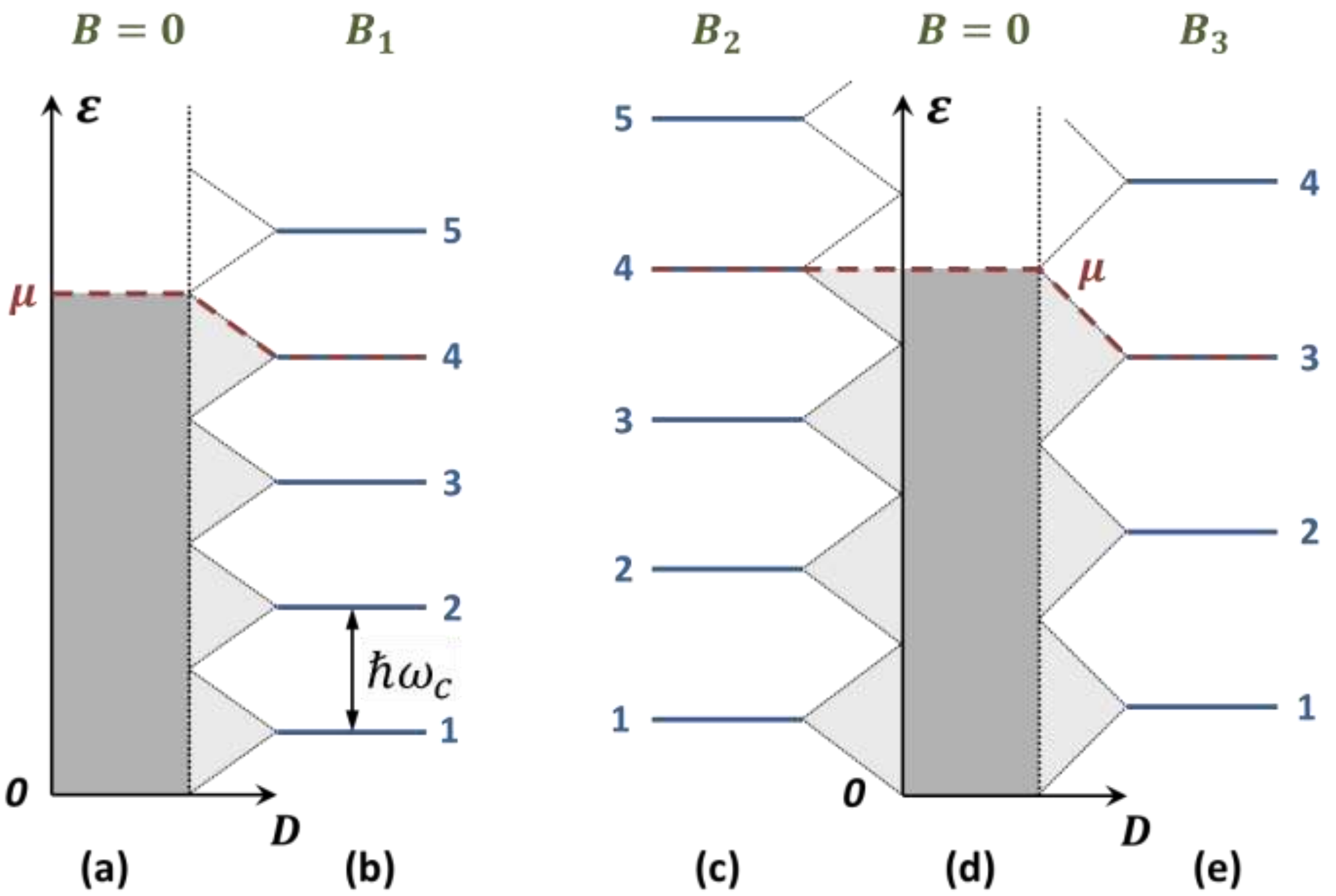
Entartung der Landau-Niveaus (Zahl der Punkte auf Kreisen):

$$p = \frac{L_x L_y}{(2\pi)^2}\Delta S = \frac{L_x L_y}{(2\pi)^2}\frac{2\pi e B}{\hbar} = \rho\, B$$

***B*-Änderung führt zu Änderung der maximalen Zahl der Zustände pro Landau-Niveau**

9.11.1 de Haas – van Alphen – Effekt

- **Was passiert mit den Landau-Niveaus und der Fermi-Energie von 2D-Elektronengas, wenn wir B variieren?**



a) $B = 0$, alle Zustände bis $\varepsilon = \mu$ besetzt (bei $T = 0$ ist chemisches Potenzial $\mu = \varepsilon_\mathrm{F}$)

b) $B = B_1$, Zustände werden auf Landau-Niveaus umverlagert, μ liegt im 4. Landau-Niveau

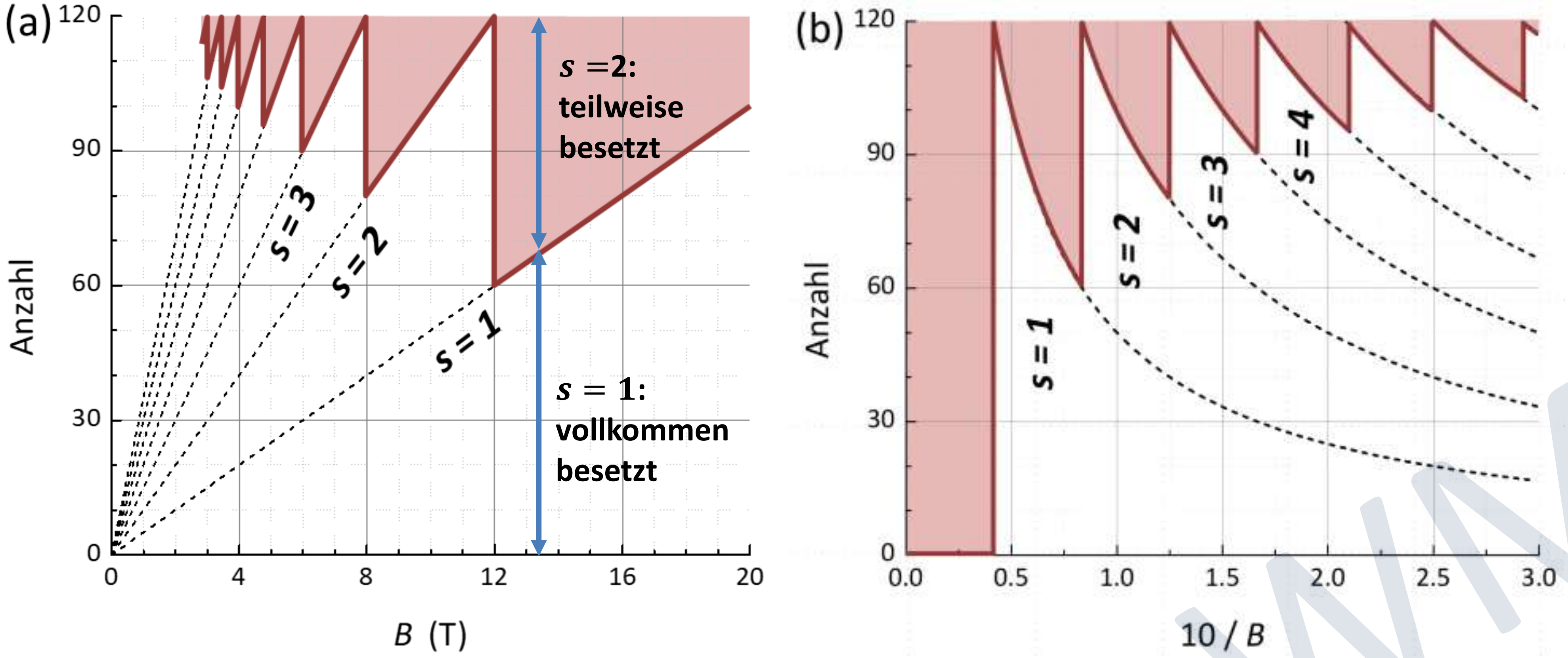
c) $B = B_2$, da $B_2 > B_1$ ist Abstand der Landau-Niveaus angewachsen, μ liegt immer noch im 4. Landau-Niveau

d) $B = 0$ (zum Vergleich)

e) $B = B_3$, da $B_3 > B_2$ ist Abstand der Landau-Niveaus nochmals angewachsen, Entartung $p \propto B$ ist jetzt so groß, dass alle Zustände in die 3 untersten Niveaus passen → μ rutscht ins 3. Landau-Niveau nach unten

Frage: Wie ändert sich die Gesamtenergie des Elektronensystems?

- **Beispiel: Besetzungszahl der Landau-Niveaus für Elektronengas mit $N = 120$ als Funktion von B bzw. $1/B$**



$(\rho = 5)$

Entartung der Landau-Niveaus $p = \frac{L_x L_y}{(2\pi)^2} \cdot \frac{2\pi q B}{\hbar} = \rho B$

- **Berechnung der Gesamtenergie aller N Elektronen im 2D Elektronengas als Funktion von B**

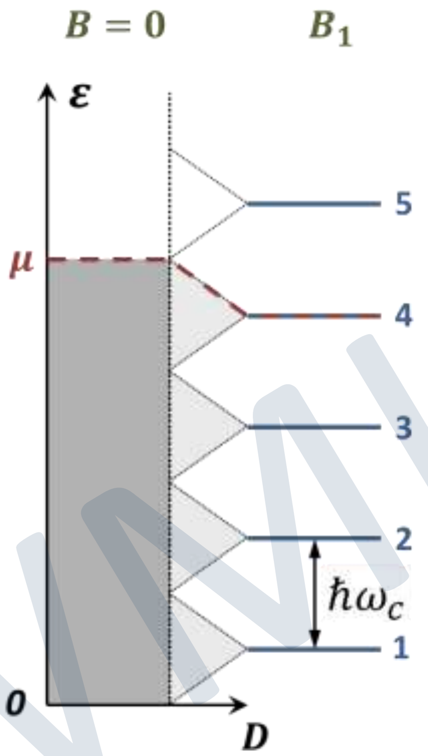
  - es werden s Niveaus vollkommen gefüllt, das oberste Niveau $s+1$ ist nur teilweise gefüllt

(1) vollkommen gefüllte Niveaus

$$\varepsilon_{\mathrm{tot},1} = \sum_{n=1}^{s} p\cdot\hbar\omega_c\left(n-\frac{1}{2}\right) = \sum_{n'=0}^{s-1} p\cdot\hbar\omega_c\left(n'+\frac{1}{2}\right) = p\cdot\hbar\omega_c\frac{s^2}{2}$$

(2) oberstes, teilweise gefülltes Niveau (besetzt mit $(N-sp)$ Zuständen)

$$\varepsilon_{\mathrm{tot},2} = \hbar\omega_c\left(s+\frac{1}{2}\right)(N-sp)$$

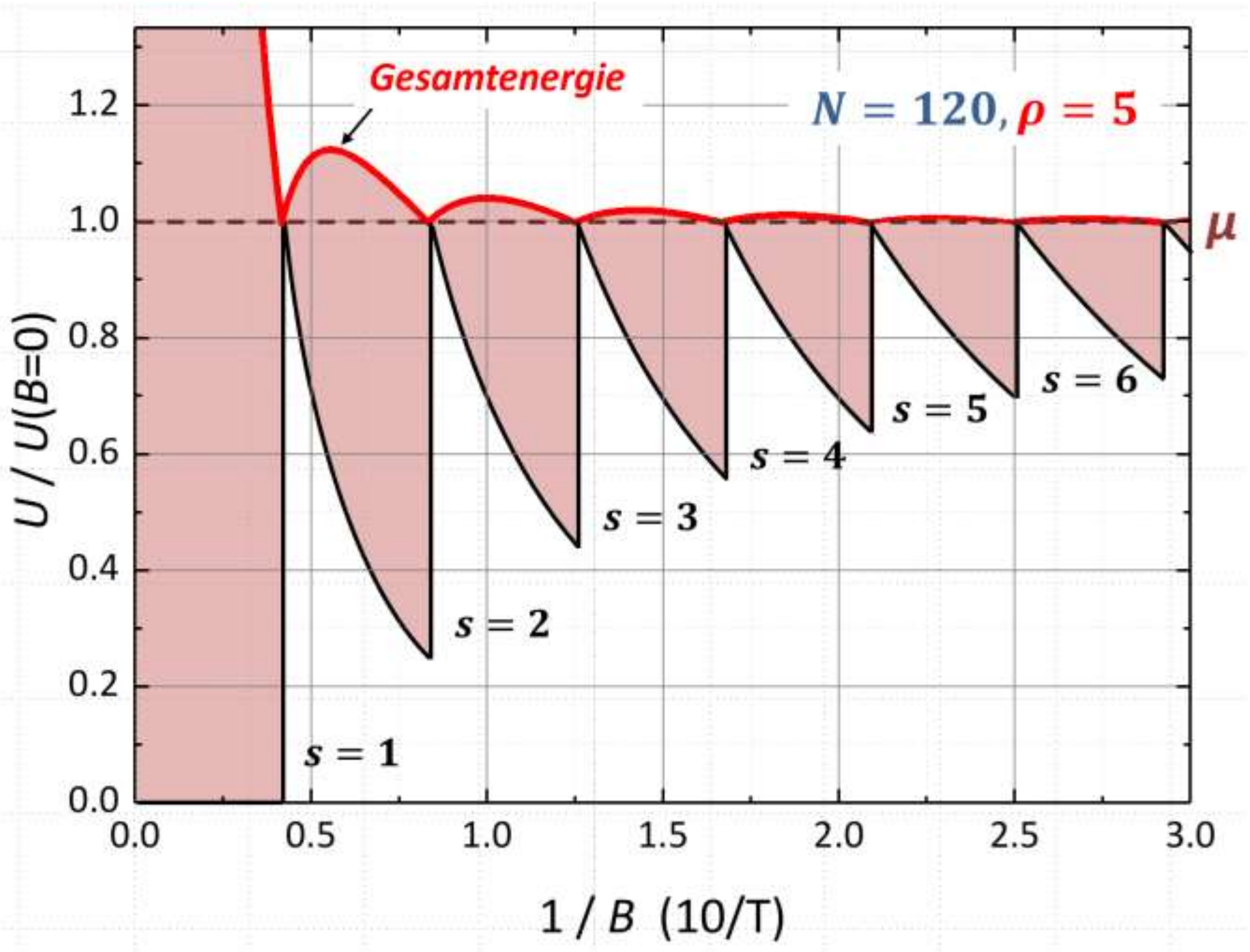


- ***Gesamtenergie***

$$U = p\cdot\hbar\omega_c\frac{s^2}{2} + \hbar\omega_c\left(s+\frac{1}{2}\right)(N-sp)$$

$$U = \hbar\omega_c\left[N\left(s+\frac{1}{2}\right) - p\frac{s^2}{2} - p\frac{s}{2}\right] \quad \text{mit} \quad p = \frac{L_x L_y}{(2\pi)^2}\cdot\frac{2\pi q B}{\hbar}$$

- *Gesamtenergie* $\quad U = \hbar\omega_c\left[N\left(s+\frac{1}{2}\right) - p\frac{s^2}{2} - p\frac{s}{2}\right]$ mit $p = \frac{L_x L_y}{(2\pi)^2}\cdot\frac{2\pi q B}{\hbar} = \rho\, B$



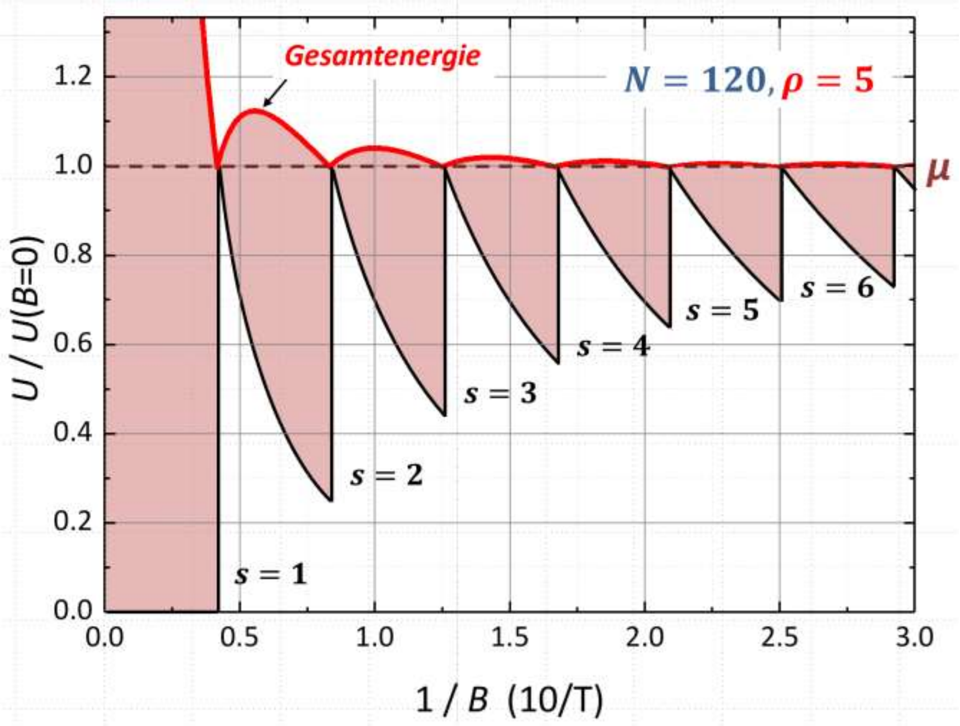
- U variiert periodisch auf $1/B$ – Skala
- $M \simeq -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial U}{\partial B}\right)_{T,V=const}$ variiert ebenfalls periodisch auf $1/B$ – Skala
- Phänomen heißt ***de Haas – van Alphen – Effekt***
- bei hohen T ist oszillatorisches Verhalten durch großes $k_\mathrm{B}T$ vollkommen verschmiert und nicht beobachtbar, es bleibt aber kontinuierliche Zunahme von U zu kleinen $1/B$ bzw. großen B

➔ $\chi = -\frac{\mu_0}{V}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial B^2}\right)_{T,V=const} < 0$

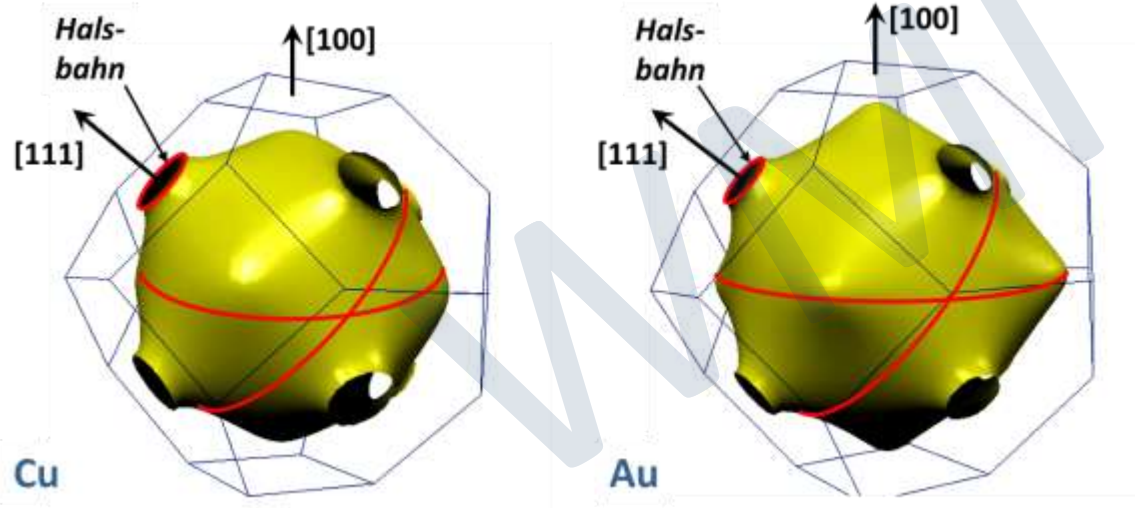
➔ **Landau-Diamagnatismus**

9.11.1 de Haas – van Alphen – Effekt

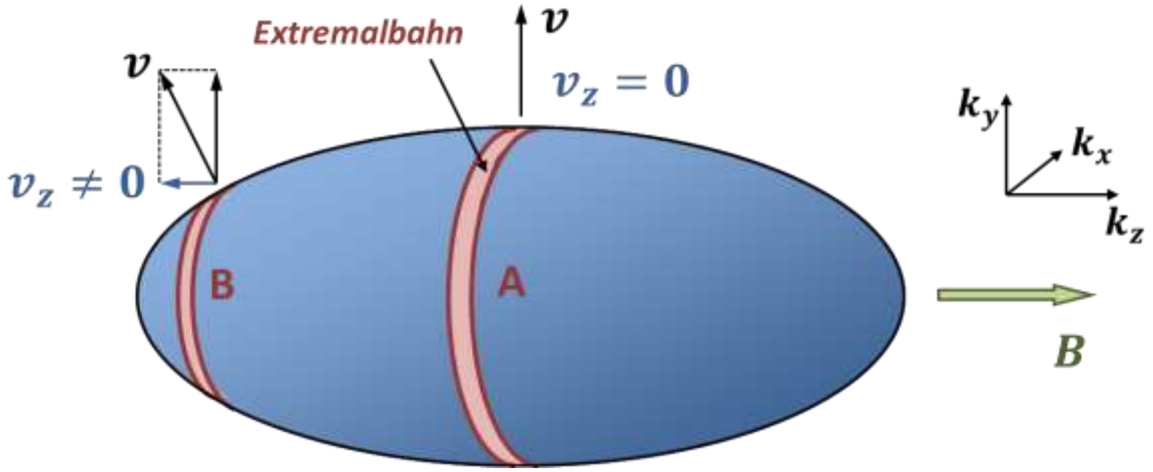
- ***Welche Information erhalten wir durch Messung der Oszillationsperiode Δ auf $1/B$ – Skala?***



- Oszillationsperiode: $\Delta = \left(\frac{1}{B_{n+1}} - \frac{1}{B_n}\right) = \frac{2\pi q}{\hbar S}$
- Messung von Δ liefert S ohne Fitparameter (da q und $\hbar$ Naturkonstanten)
- S ist Extremalfläche $\perp B$



- *Warum spielen nur die extremalen Querschnittsflächen eine Rolle?*



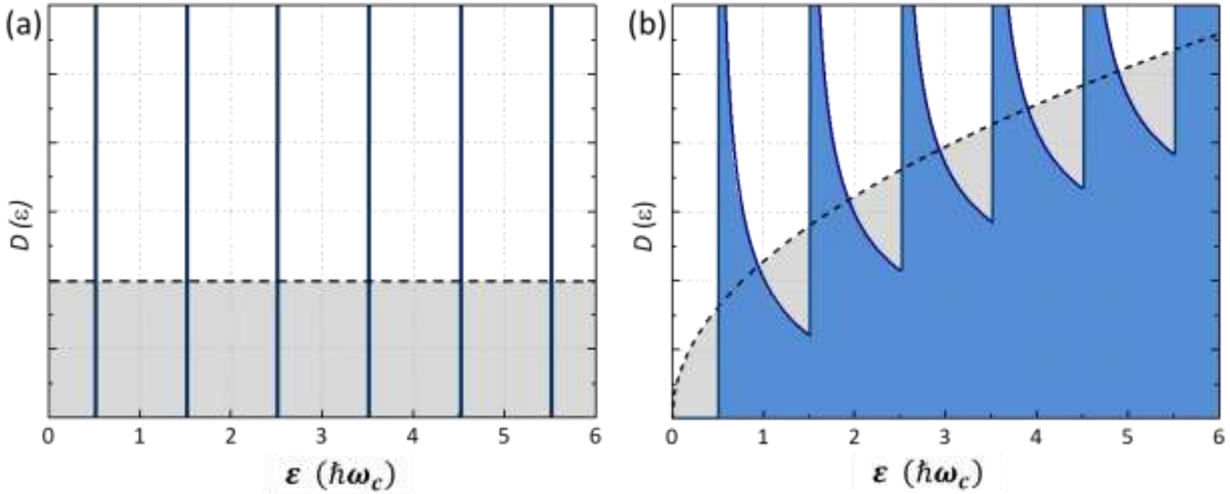
für 3D Fermi-Fläche gibt es unendlich viele Schnittflächen $S \perp B$ durch den Fermi-Körper

➔ unterschiedliche Perioden Δ

➔ nur extremale Bahnen werden im Experiment beobachtet

(Phasenfaktoren benachbarter Bahnen variieren hier nur wenig → ihre Beiträge interferieren sich deshalb nicht weg)

- *Voraussetzungen für die experimentelle Beobachtung des de Haas – van Alphen – Effekts (Wiederholung)*



➔ der energetische Abstand der Landau-Niveaus muss größer als die thermische Energie sein

$$\hbar\omega_c = \frac{\hbar q B}{m_c} > k_\mathrm{B} T \qquad \boxed{\frac{B}{T} > \frac{m_c k_\mathrm{B}}{q\hbar} = 0.78 \left[\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{K}}\right]}$$

→ ***hohe B und niedrige T***

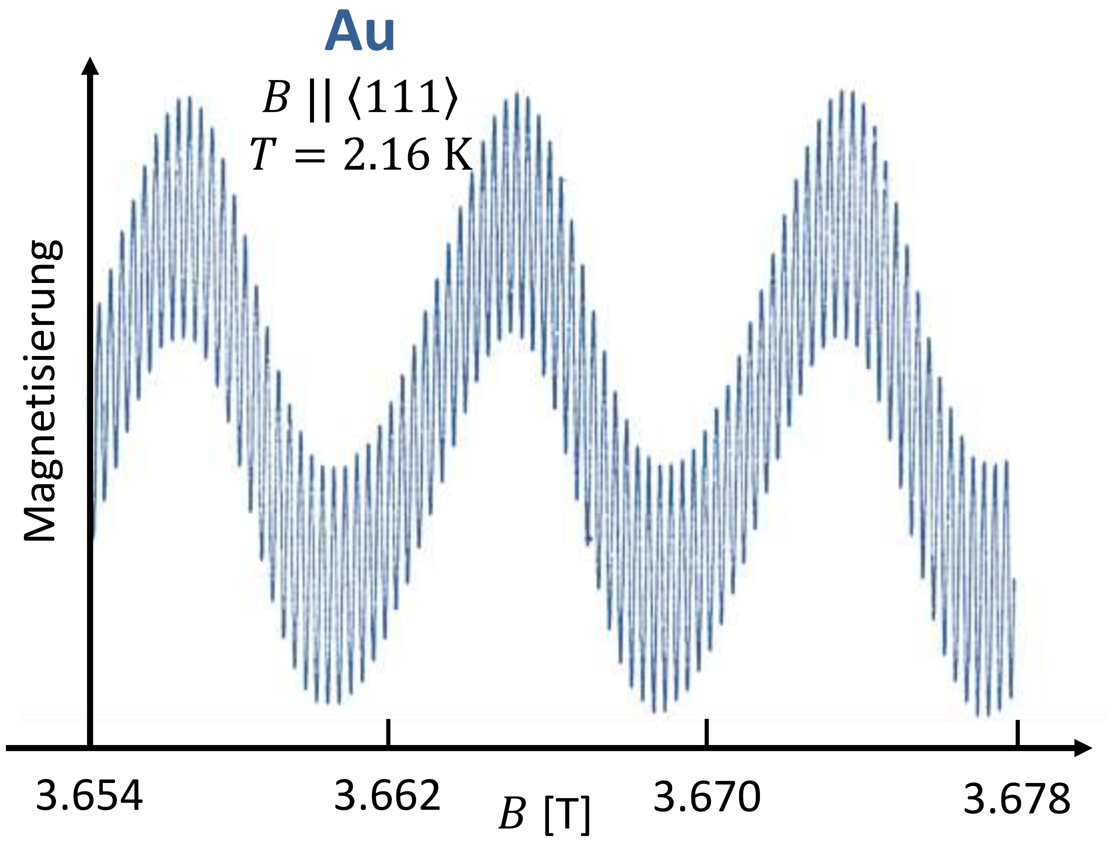
➔ die energetische Verbreiterung der Landau-Niveaus durch die endliche Streuzeit τ der Ladungsträger muss kleiner als $\hbar\omega_c$ sein

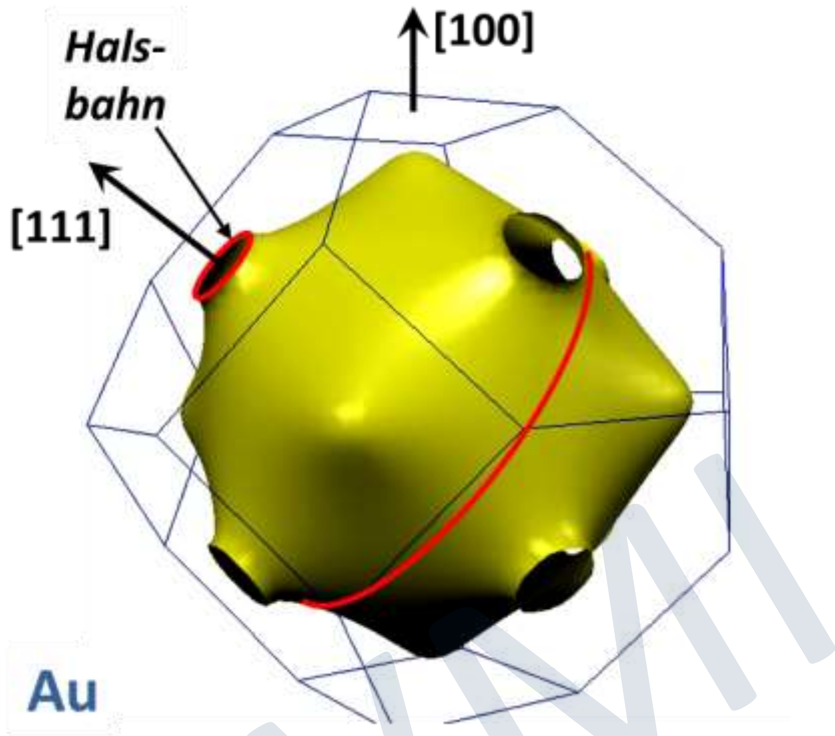
$$\Delta\varepsilon \simeq \frac{\hbar}{\tau} < \hbar\omega_c \qquad \boxed{\omega_c\tau = \frac{qB}{m_c}\tau > 1}$$

→ ***hohe B und reine Proben***

9.11.1 de Haas – van Alphen – Effekt

- ***Beispiel: de Haas – van Alphen – Effekt in Gold***

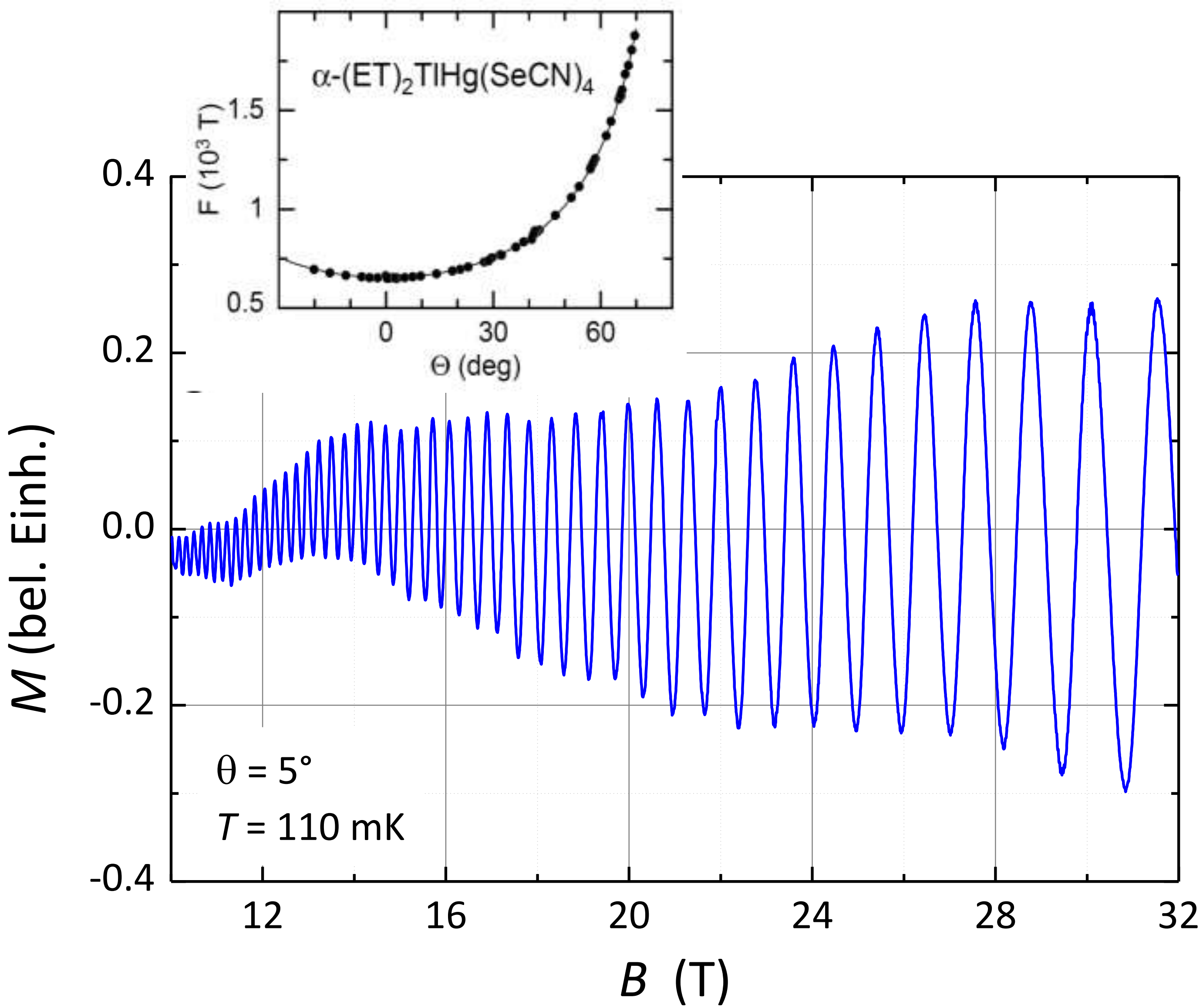




für $B \,||\langle 111 \rangle$ werden auf B-Skala eine niederfrequente (kleine Halsbahn, $\Delta_{\text{Hals}} = \frac{2\pi q}{\hbar S_{\text{Hals}}}$) und eine hochfrequente (große Bauchbahn, $\Delta_{\text{Bauch}} = \frac{2\pi q}{\hbar S_{\text{Bauch}}}$) beobachtet

9.11.1 de Haas – van Alphen – Effekt

- ***Beispiel: quasi-zweidimensionaler organischer Supraleiter***

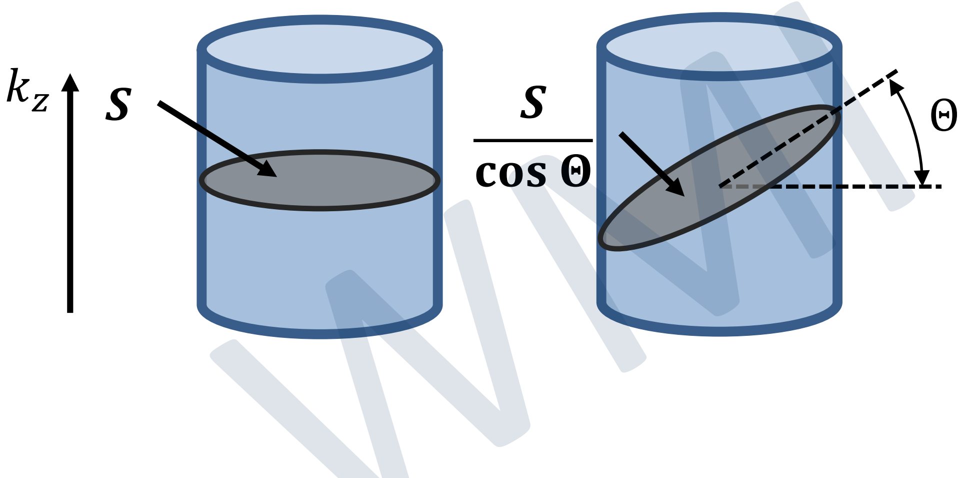


– quasi-2D-System, keine Dispersion in k_z-Richtung

– zylinderförmige Fermi-Fläche

– Schnittfläche $S \propto 1/\cos\Theta$

– Oszillationsperiode $\Delta = \frac{2\pi q}{\hbar S} \propto \cos\Theta$



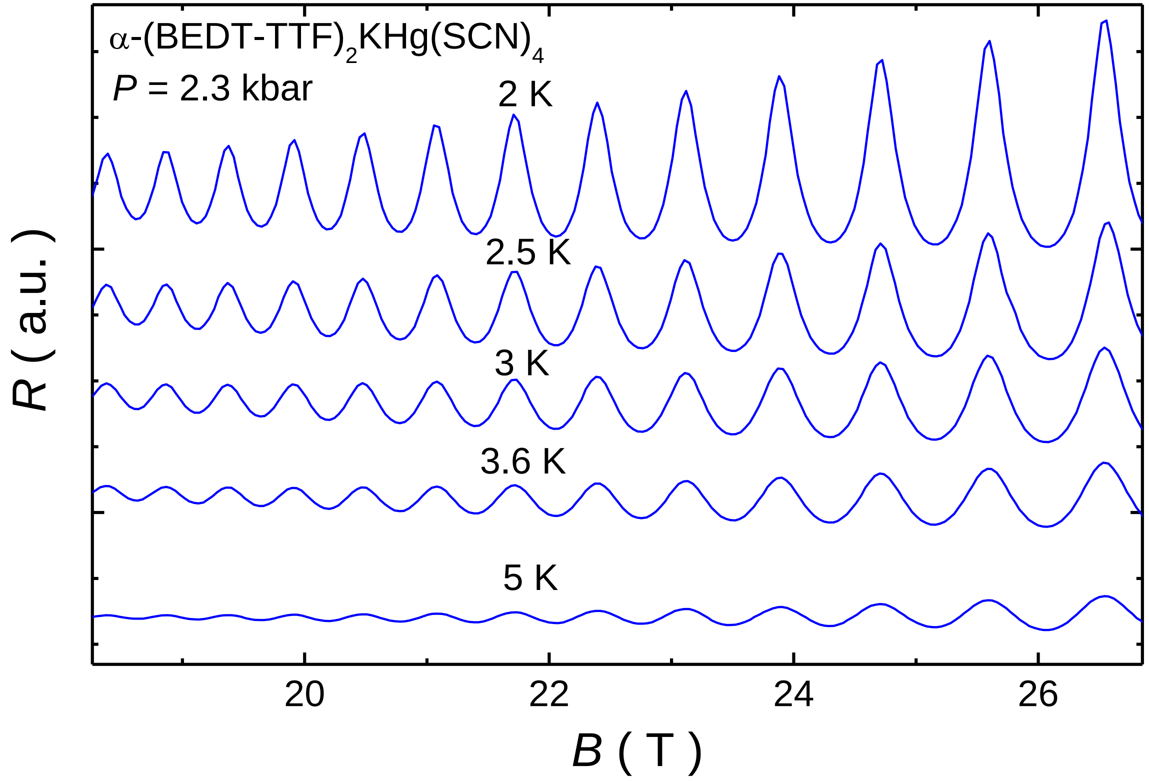
M. Kartsovnik et al., Walther-Meißner-Institut

9.11.2 Shubnikov – de Haas – Effekt

- *Oszillationen des elektrischen Widerstands als Funktion des angelegten Magnetfeldes*
  - erste Messungen von ***Shubnikov*** und ***de Haas*** im Jahr 1930
  - qualitative Erklärung: Widerstand ist proportional zur Streuwahrscheinlichkeit und diese wiederum proportional zur Zustandsdichte bei ε_F

$$D(\varepsilon_F) \propto \left(\frac{m_c B}{S_\mathrm{extr}}\right)\frac{\partial M}{\partial B}$$

S_extr: Fläche der Extremalbahn



Abnahme der Oszillationsamplitude durch thermische Verschmeirung

D. Andres, Doktorarbeit, WMI 2005

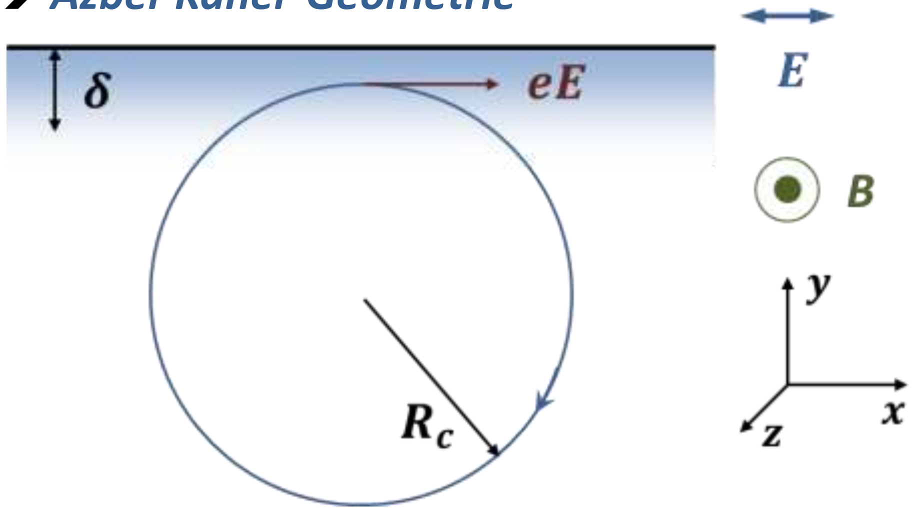
9.11.3 Zyklotron-Resonanz

- ***Messung der Frequenzabhängigkeit des Oberflächenwiderstandes, des Reflexionsvermögens oder der Absorption ergibt ω_c und damit m_c***

→ Information über S (Fermi-Fläche) aus Beziehung $m_c = \frac{\hbar^2}{2\pi}\frac{\partial S(k_\perp)}{\partial \epsilon}$

– **Zyklotronresonanz bei Metallen**:
  - Problem ist kleine Skintiefe: $\delta \sim 10$ nm bei 10 MHz
  - Skintiefe ist klein gegen Zyklotronradius $R_c \sim 10\ \mu$m @ 1T
  - niedrigere Frequenzen/Felder nicht möglich, da $\omega_c\tau \gg 1$ gelten muss

➔ ***Azbel-Kaner-Geometrie***



Resonanzabsorption für $\omega = n \cdot \omega_c = n \cdot \frac{eB}{m_c}, \quad n = 1,2,3, \ldots$

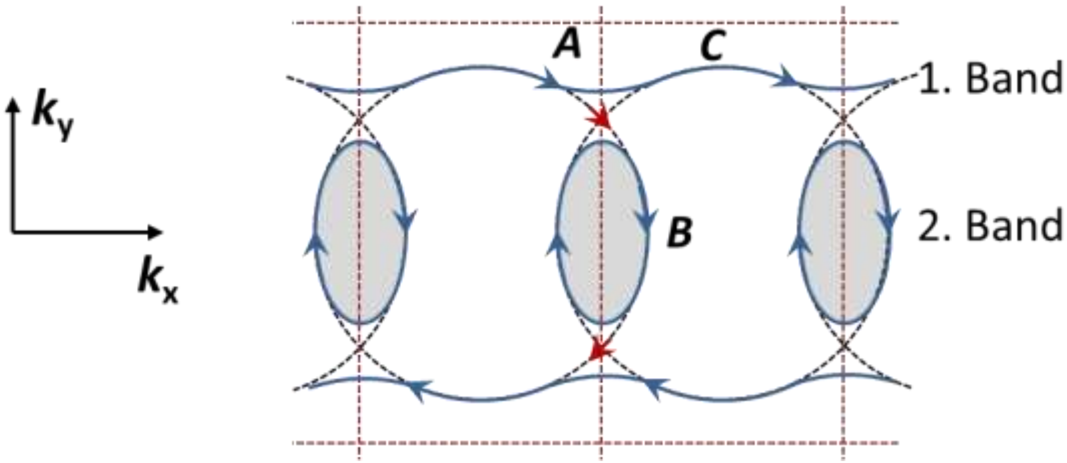
Experiment: $\omega = const.$, Variation von B

$$\frac{1}{B} = n \cdot \frac{e}{\omega m_c}, \quad n = 1,2,3, \ldots$$

Information über die senkrecht zu B verlaufenden Extremalbahnen

9.11.4 Magnetischer Durchbruch

- ***bei genügend hohen B können Elektronen Gebiete im k-Raum, welche unterschiedliche Bahnen trennen, durchtunneln → magnetischer Durchbruch***

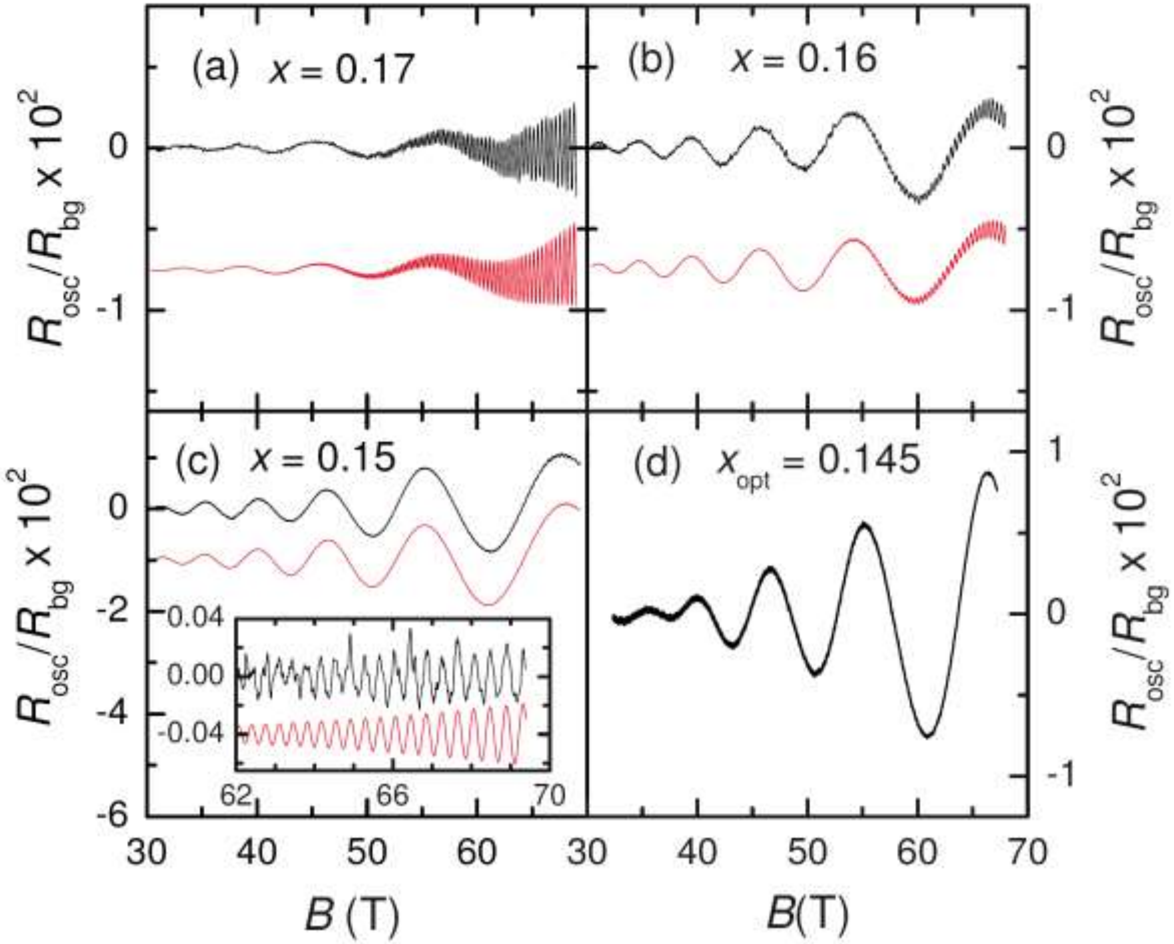


– durch den magnetischen Durchbruch entstehen zusätzlich zu den blau eingezeichneten Orbits die gestrichelten “Durchbruchsorbits”

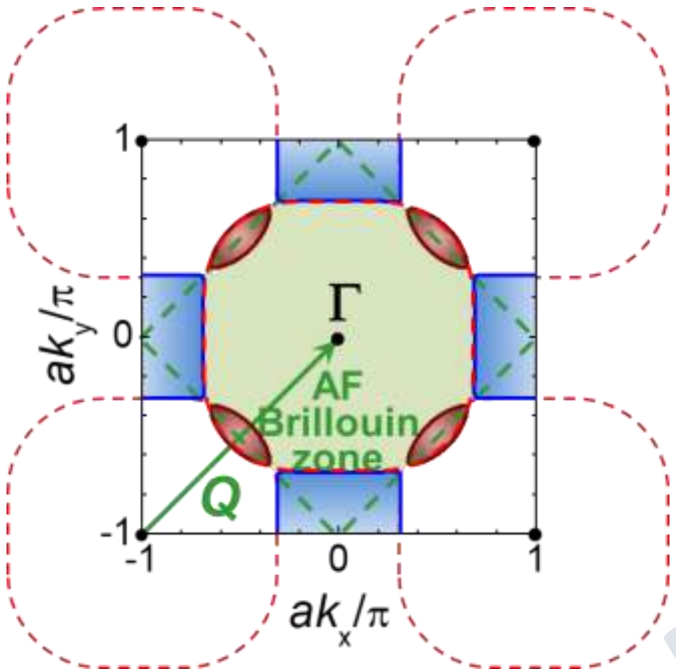
– in den Quantenoszillationen treten zusätzliche Frequenzen auf

– **Ursache**:
  Lorentz-Kraft $\mathbf{F}_L = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ kann durch Gleichsetzen mit $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$ mit $|\mathbf{E}| \simeq q|\mathbf{v} \times \mathbf{B}| = vB$ assoziiert werden
  → $E \perp v$ wächst mit B an und kann Tunneln verursachen

- *Beispiel: Hochtemperatur-Supraleiter $Nd_{2-x}Ce_xCuO_{4+x}$*



T. Helm, Doktorarbeit, WMI (2013)
Phys. Rev. Lett. 103, 157002 (2009)

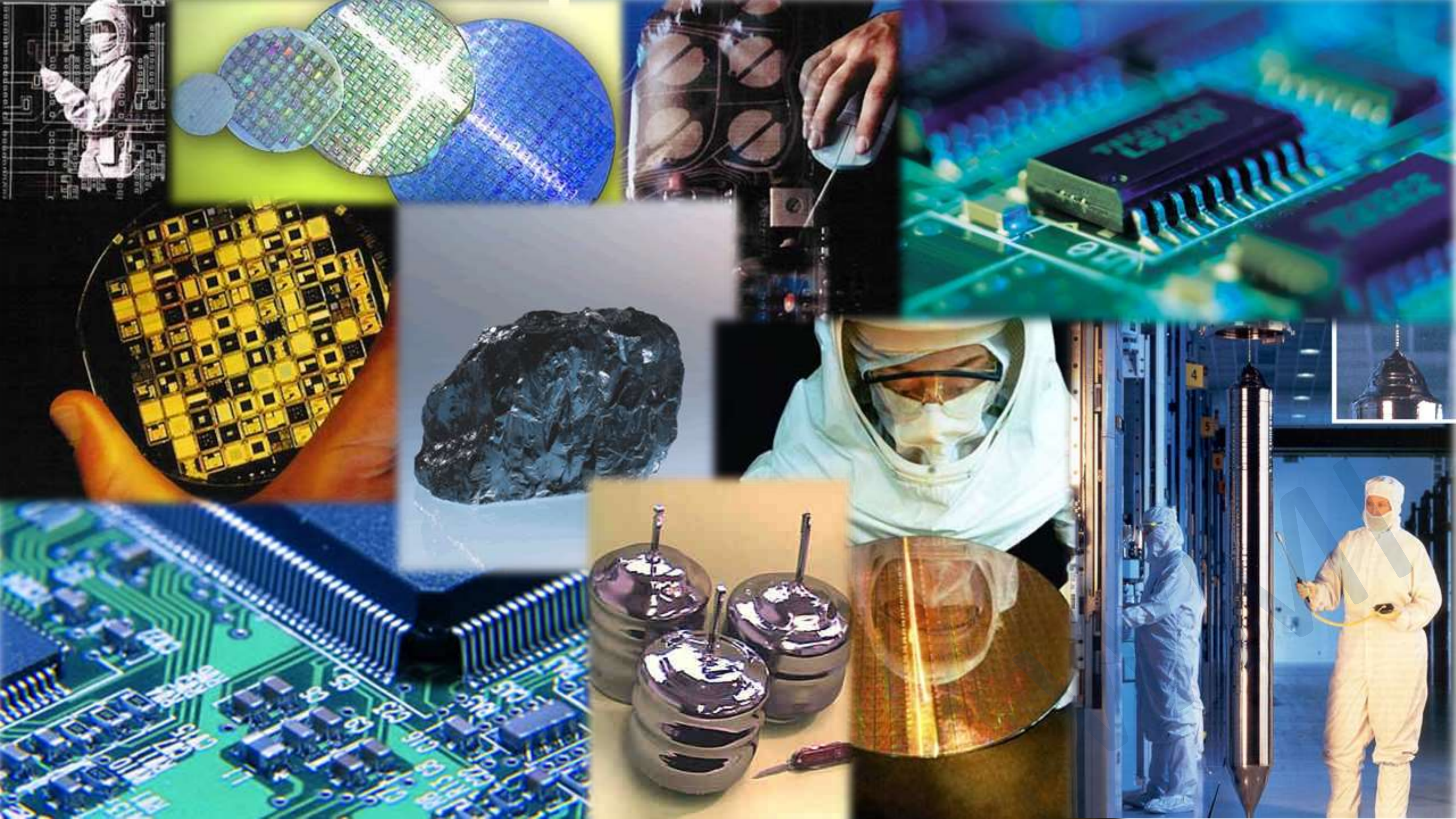


- rekonstruierte Fermi-Fläche von NCCO
- in den Subnikov – de Haas – Oszillationen wird eine niederfrequente (rot eingefärbte Taschen) und eine hochfrequente Komponente (gestrichelt gezeichnetes Durchbruchsorbit) gemessen
- die Lücken zwischen den roten und blauen Orbits können durchtunnelt werden


Shciffahrt

Kapitel 10

Halbleiter




WMI

- ***“alte” Definition***:
  - Isolator mit kleiner Bandlücke E_g
  - elektrische Leitfähigkeit liegt zwischen Metall und Isolator

    $\sigma \sim 10^2 - 10^{-9} \frac{1}{\Omega\mathrm{m}}$ ➔ ***große technische Bedeutung***

    Wahrscheinlichkeit für thermische Anregung von LT von VB ins LB

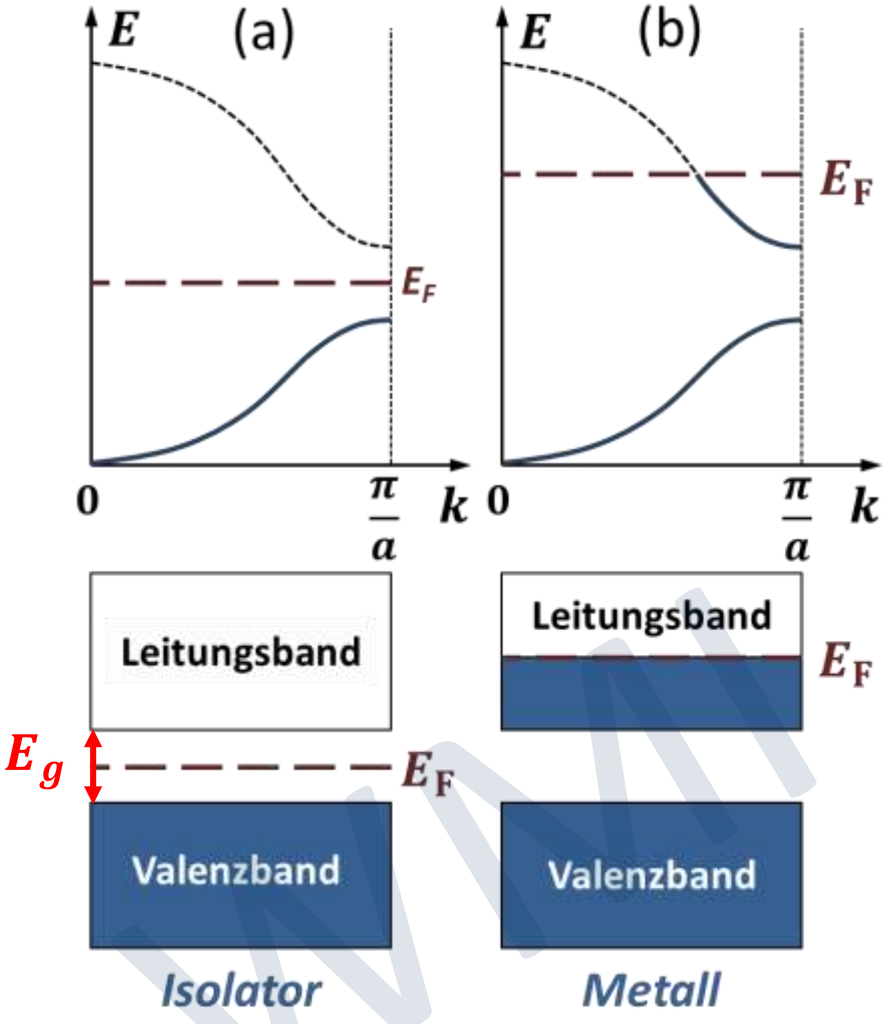
    $$\propto \exp\left(-\frac{E_g}{2k_\mathrm{B}T}\right) \sim 10^{-5} \quad @\, E_\mathrm{g} = 0.5\ \mathrm{eV}\ \text{und}\ T = 300\ \mathrm{K}$$

    $$\sim 10^{-60} \quad @\, E_\mathrm{g} = 3.0\ \mathrm{eV}\ \text{und}\ T = 300\ \mathrm{K}$$

    ➔ ***große Energielücke E_g ⇒ kleine LT-Dichte ⇒ kleines σ***

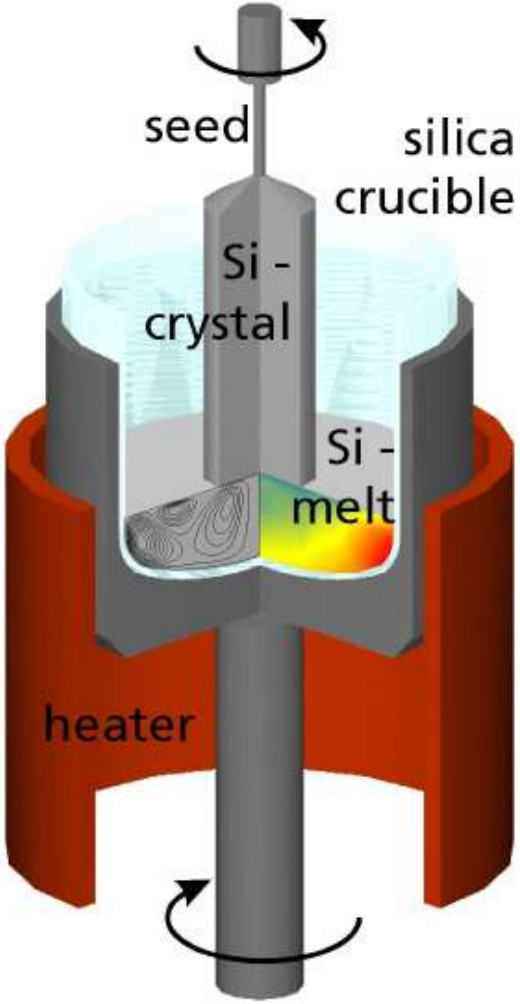
- ***“neue” Definition***:
  - Isolator, der dotiert werden kann (E_g ist nicht sehr relevant)
  - Variation der LT-Dichte durch gezieltes Einbringen von Dotieratomen

    ➔ ***LT-Dichte und σ hängen weniger mit Größe von E_g sondern mehr mit der Dichte der Dotieratome zusammen***



- *zahlreiche großtechnische Herstellungsverfahren*

z.B. Czochralski-Verfahren



10.1.1 Klassifizierung von Halbleitern

- *unabhängig von chemischer Zusammensetzung*

  – **intrinsisch:** keine Dotieratome, freie LT nur durch Anregung von VB ins LB

  – **dotiert:** endliche Dichte von Dotieratomen, freie LT hauptsächlich durch Ionisierung der Dortieratome

  – **kristallin:** streng periodische Anordnung der Atome

  – **amporph:** Atome besitzen nur Nahordnung, aber keine Fernordnung

  – **direkt:** Oberkante von VB bei gleichem k wie Unterkante von LB

  – **indirekt:** Oberkante von VB bei unterschiedlichem k wie Unterkante von LB

10.1.1 Klassifizierung von Halbleitern

- *abhängig von chemischer Zusammensetzung*

Element-Halbleiter	Verbindungshalbleiter		Organische Halbleiter
Ge, Si, α-Sn, C (Diamant, Fulleren), B, Se, Te ***unter Druck:*** Bi, Ca, Sr, Ba, Yb, P, S, I	**III-V**	GaAs, GaP, , InP, InSb, InAs, GaSb, GaN, AlN, InN, $Al_xGa_{1-x}As$	Tetracen, Pentacen, Phthalocyanine, Polythiophene, PTCDA ($C_{24}H_8O_6$), MePTCDI ($C_{26}H_{14}N_2O_4$), Chinacridon, Acridon, Indanthron, Flavanthron, Perinon, Alq3 ($C_{27}H_{18}AlN_3O_3$)
	II-VI	ZnO, ZnS, ZnSe, ZnTe, CdS, CdSe, CdTe, HgS, $Hg_{1-x}Cd_xTe$, BeSe, BeTe,	
	III-VI	GaS, GaSe, GaTe, InS, InSe, InTe	
	IV-VI	PbS, PbTe, SnS	
	IV-IV	SiC, SiGe	
	I-VII	CuCl	
	I-III-VI	$CuInSe_2$, $CuInGaSe_2$, $CuInS_2$, $CuInGaS_2$	

- ***Oxidische HL:*** ***ZnO, CuO***
- ***Schicht-HL:*** ***PbI_2, MoS_2, GaSe***
- ***Magnetische HL:*** ***(Ga,Mn)As***

- *experimentelle Bestimmung der Fermi-Flächen mit Bahnquantisierungeffekten*

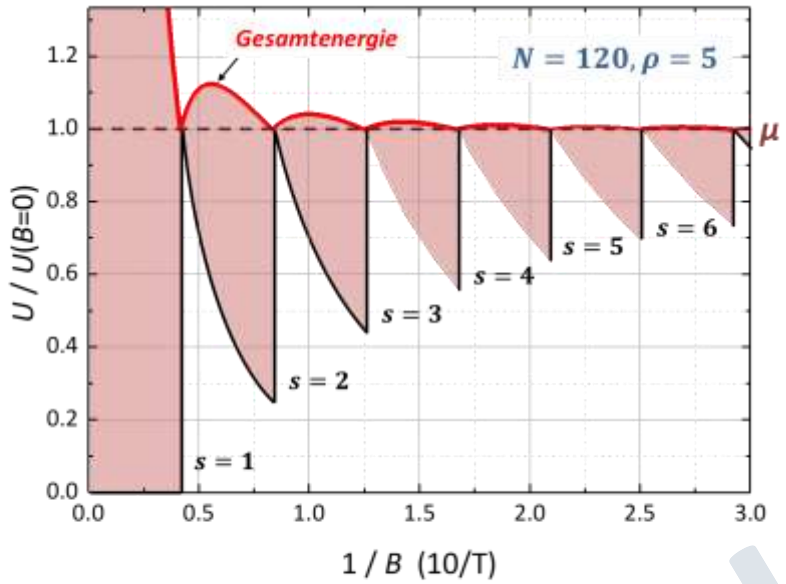
(i) ***de Haas – van Alphen – Effekt***: Oszillation von $M(B)$

$$M = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial F}{\partial B}\right)_{T,V} \simeq -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial U}{\partial B}\right)_{T,V}$$

$F = U - TS \simeq U$ bei tiefen T

$$U = \hbar\omega_c\left[N\left(s+\frac{1}{2}\right) - p\frac{s^2}{2} - p\frac{s}{2}\right]$$

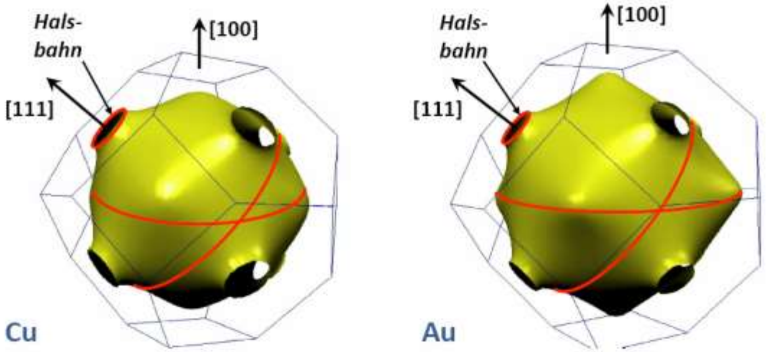
mit Entartung $p = \frac{L_x L_y}{(2\pi)^2} \cdot \frac{2\pi q B}{\hbar}$

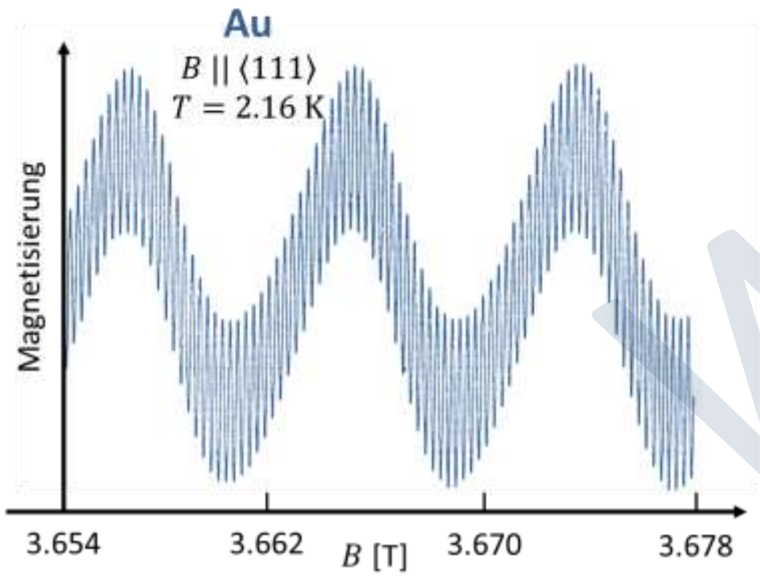


$$\Delta = \left(\frac{1}{B_{n+1}} - \frac{1}{B_n}\right) = \frac{2\pi q}{\hbar S}$$

Oszillationsperiode Δ liefert Größe der Extremalfläche $S \perp B$

Extremalbahnen





Zusammenfassung: Teil 2b, 12.04.2021/2

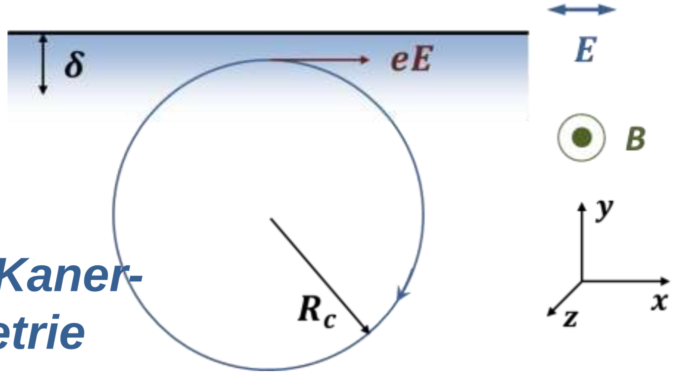
(ii) ***Shubnikov - de Haas - Effekt***:
Oszillation von R als Funktion von B

(iii) ***Zyklotronresonanz***:
resonante Mikrowellenabsorption bei

$$\omega = n \cdot \omega_c = n \cdot \frac{eB}{m_c}, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

➔ Zyklotronmasse $m_c = \frac{\hbar^2}{2\pi}\frac{\partial S(k_\perp)}{\partial \epsilon}$

Azbel-Kaner-Geometrie



- ***Klassifizierung von Halbleitern***
  - intrinsisch ↔ dotiert, kristallin ↔ amorph, direkt ↔ indirekt,
  - Element-HL, Verbindungs-HL (binär, ternär, ...), organische HL
  - oxidische HL, Schicht-HL, magnetische HL, ...