



Physik der Kondensierten Materie 2

Rudolf Gross

SS 2021

Teil 20

Vorlesungsstunde: 11.05.2021-2

Zusammenfassung: Teil 19a, 11.05.2021/1

• Austauschwechselwirkung zwischen freien Elektronen

effektive Ladungsdichte, die von Spin-↑-Elektron gesehen wird:

$$\rho_{\text{eff}}(r) = en \left\{ 1 - \frac{9}{2} \frac{(\sin k_F r - k_F r \cos k_F r)^2}{(k_F r)^6} \right\}$$

➤ **Austauschloch durch Pauli-Prinzip**

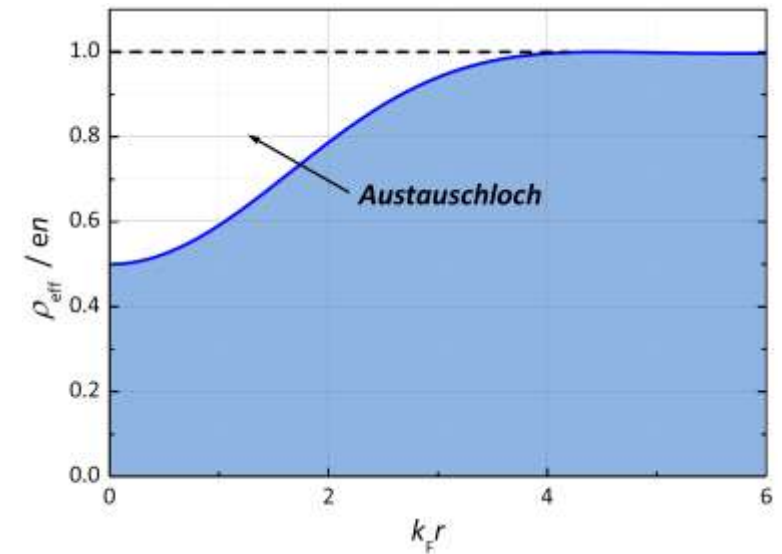
➤ **fehlende Spin-↑-Elektron**

Reduktion der Gesamtenergie durch Austauschloch:

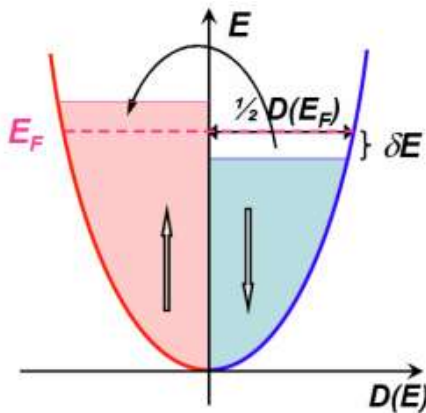
parallele Spin-Ausrichtung

Erhöhung der Gesamtenergie durch Austauschloch:

antiparallele Spin-Ausrichtung



• Bandferromagnetismus in Metallen: Stoner-Modell



- Erhöhung der Dichte einer Spin-Sorte um $\frac{\delta N}{V} = \frac{1}{2} \frac{D(E_F)}{V} \delta E$

→ Erhöhung von E_{kin}

$$\frac{\Delta E_{\text{kin}}}{V} = \frac{\delta N}{V} \delta E = \frac{1}{2V} D(E_F) \delta E^2$$

→ Erniedrigung von E_{pot}

$$\Delta E_{\text{pot}} = - \int_0^{B_A} M dB = - \mu_0 \gamma \int_0^{M_A} M dM = - \frac{1}{2} \mu_0 \gamma M_A^2$$

Molekularfeld $B_A = \mu_0 \gamma M_A$

Molekularfeldkonstante γ

$$\frac{\Delta E_{\text{pot}}}{V} = - \frac{1}{4} V U \left[\frac{D(E_F)}{V} \delta E \right]^2$$

Energiegewinn pro Elektronenpaar:

$$U = 2 \mu_0 \gamma \mu_B^2 / V$$

• Bandferromagnetismus in Metallen: Stoner-Modell

→ Änderung der Gesamtenergie: $\Delta E = \Delta E_{\text{kin}} + \Delta E_{\text{pot}} = \frac{1}{2V} D(E_F) (\delta E)^2 \left[1 - \frac{1}{2} UD(E_F) \right] < 0$ für $\frac{1}{2} UD(E_F) > 1$

Stoner-Kriterium

• Metall mit ferromagnetischer Austauschkopplung in externem Magnetfeld

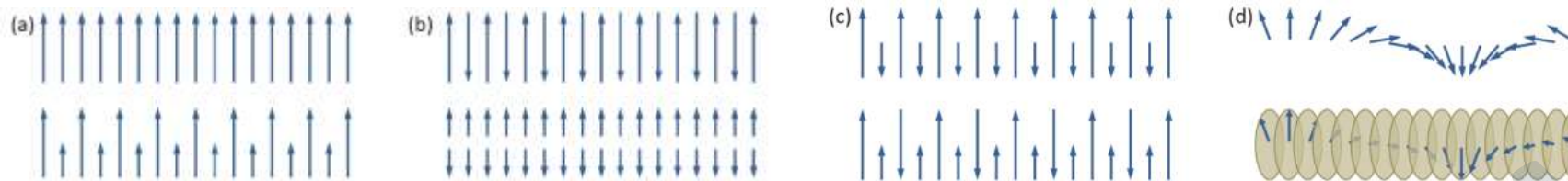
Suszeptibilität:
$$\chi = \frac{\mu_B^2 D(E_F)/V}{1 - \frac{1}{2} UD(E_F)} = \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{1}{2} UD(E_F)}}_{\text{Stoner-Faktor}} \chi_P$$

χ_P = Paulische Spin-Suszeptibilität

→ Divergenz der magnetischen

Suszeptibilität für $\frac{1}{2} UD(E_F) \rightarrow 1$: „**Magnetisierungskatastrophe**“

• Magnetische Ordnungsphänomene



- **gebundene Elektronen:** Ordnungsstruktur der lokalisierten magnetischen Momente

- **itinerante Elektronen:** Beschreibung der Ordnungsstruktur durch Spin-Dichte

$$s_z(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} [n_{\uparrow}(\mathbf{r}) - n_{\downarrow}(\mathbf{r})]$$

Kapitel 12

Magnetismus



12.6 Magnetische Ordnungphänomene

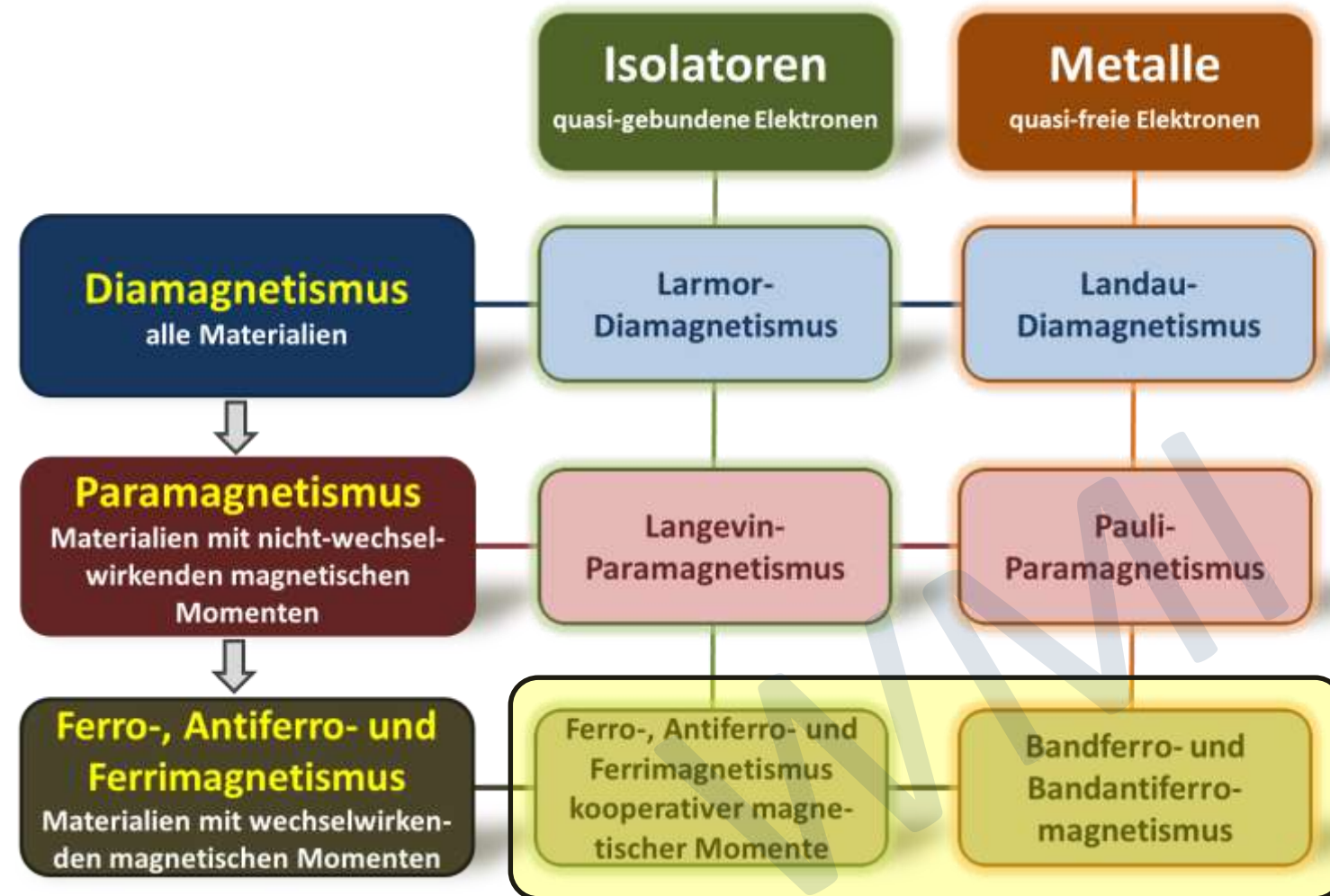
- Diskussion von ferro-, antiferro- und ferrimagnetischer Ordnung

Verwendung starker Vereinfachungen:

z.B. **Molekularfeld-Näherung**

→ Beschreibung der Wechselwirkung eines magnetischen Moments mit allen anderen durch ein mittleres **Austausch-** oder **Molekularfeld** (Pierre Weiss, 1907)

Welche Magnetfeld- und Temperaturabhängigkeit haben die Ordnungsphänomene?



12.6.2 Ferromagnetismus

- Beschreibung ferromagnetischer Ordnung im Rahmen der Molekularfeld-Näherung

- Annahmen:

- gebundene Elektronen
- Heisenberg-Modell mit nur nächster Nachbar-Wechselwirkung

- Austauschenergie des i -ten Gitteratoms mit seinen z nächsten Nachbarn

$$E_{A,i} = -\frac{J_A}{\hbar^2} \sum_{j=1}^z \mathbf{J}_i \cdot \mathbf{J}_j$$

- Übergang zur **Molekularfeld-Näherung** (“Mean Field Theory”)

- ersetzen von $\mathbf{J}_j$ durch den Mittelwert $\langle \mathbf{J}_j \rangle$

$$\Rightarrow E_{A,i} = -z \frac{J_A}{\hbar^2} \mathbf{J}_i \cdot \langle \mathbf{J}_j \rangle \quad \Rightarrow \mathbf{M} = -n g_J \mu_B \frac{\langle \mathbf{J}_j \rangle}{\hbar} \quad \Rightarrow \frac{\langle \mathbf{J}_j \rangle}{\hbar} = -\frac{\mathbf{M}}{n g_J \mu_B}$$

- Einsetzen in Ausdruck $E_{A,i}$:

$$E_{A,i} = -z \frac{J_A}{\hbar^2} \mathbf{J}_i \cdot \left(-\frac{\mathbf{M}}{n g_J \mu_B} \right) = - \underbrace{\left(-\frac{g_J \mu_B \mathbf{J}_i}{\hbar} \right)}_{\mathbf{\mu}_i = -g_J \mu_B \mathbf{J}_i / \hbar} \cdot \underbrace{\frac{z J_A}{n g_J^2 \mu_B^2}}_{\mathbf{B}_A} \mathbf{M} = -\mathbf{\mu}_i \cdot \mathbf{B}_A$$

Produkt von Moment $\mathbf{\mu}_i$ mit fiktivem **Austauschfeld $\mathbf{B}_A$**

12.6.2 Ferromagnetismus

- Austauschfeld oder Molekularfeld B_A

$$B_A = \frac{zJ_A}{ng_J^2\mu_B^2} \mathbf{M} = \mu_0 \gamma \mathbf{M}.$$

$$\gamma = \frac{1}{\mu_0} \frac{zJ_A}{ng_J^2\mu_B^2} = \frac{|B_A|}{|\mu_0 \mathbf{M}|}$$

B_A ist **fiktives Magnetfeld**

→ kann nicht gemessen werden, geht nicht in Maxwell-Gleichungen ein, ...

B_A ist proportional zu M ,

Proportionalitätskonstante γ = **Molekularfeldkonstante**

- Interpretation von **fiktivem** Austauschfeld

→ B_A entspricht demjenigen Magnetfeld, das für nichtwechselwirkende magnetische Momente denselben Ordnungsgrad erzeugen würde, wie die tatsächlich vorhandene Austauschwechselwirkung zwischen den Momenten

- Vorteil von fiktivem Austauschfeld

→ wenn wir zusätzliches externes Feld B_{ext} anlegen, können wir so tun, als ob insgesamt ein effektives Magnetfeld $B_{\text{eff}} = B_{\text{ext}} + B_A$ wirkt

12.6.2 Ferromagnetismus

- Ferromagnet in äußerem Magnetfeld (Molekularfeld-Näherung)

$$\mathbf{B}_{\text{eff}} = \mathbf{B}_{\text{ext}} + \mathbf{B}_A = \mathbf{B}_{\text{ext}} + \mu_0 \gamma \mathbf{M}$$

- wir behandeln Ferromagnet als System nichtwechselwirkender Momente mit Dichte n in zusätzlichem Molekularfeld
 ➔ Magnetisierung ist durch **Brillouin-Funktion** B_J gegeben

$$M = n g_J \mu_B J B_J(y) \quad \text{mit} \quad y = \frac{g_J \mu_B J B_{\text{eff}}}{k_B T} = \frac{g_J \mu_B J (B_{\text{ext}} + \mu_0 \gamma M)}{k_B T}$$

$$\chi = \mu_0 \left(\frac{\partial M}{\partial B_{\text{ext}}} \right)_{T,V}$$

Problem: M und χ können nicht als Funktion von T und B_{ext} ermittelt werden, da M jetzt auch im Argument der Brillouin-Funktion steht

grafische Lösung anhand von zwei Bestimmungsgleichungen für M :

(1) Auflösen des Ausdrucks für y nach M :	$M = \frac{k_B T}{\mu_0 g_J \mu_B \gamma J} y - \frac{B_{\text{ext}}}{\mu_0 \gamma}$	} Auftragen der beiden Ausdrücke als Funktion von y ➔ Schnittpunkt liefert M
(2) Verwenden der Brillouin-Funktion $B_J(y)$:	$M = n g_J \mu_B J B_J(y)$	

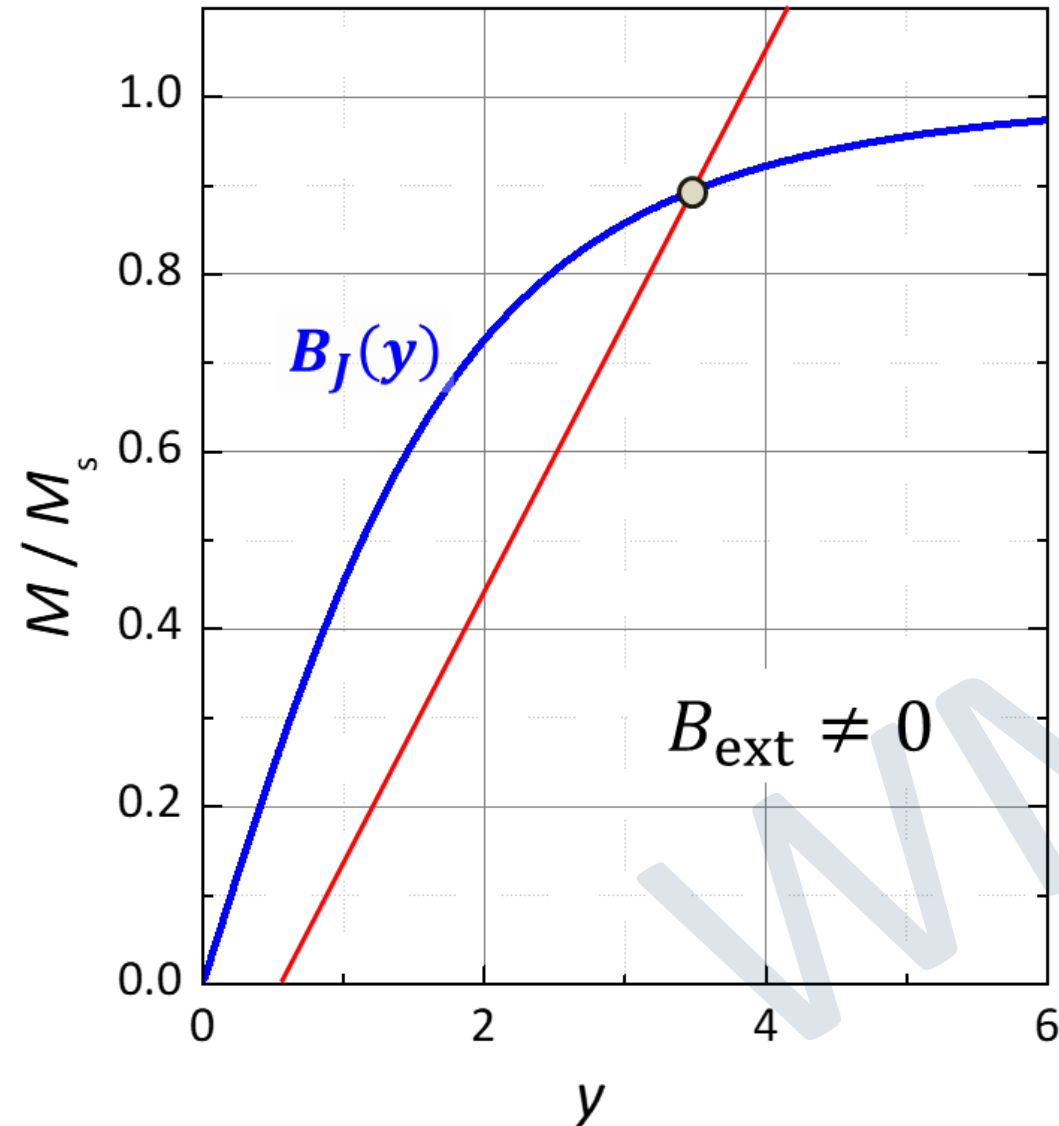
12.6.2 Ferromagnetismus

- Ferromagnet in äußerem Magnetfeld (Molekularfeld-Näherung)

$$M = \frac{k_B T}{\mu_0 g_J \mu_B \gamma J} y - \frac{B_{\text{ext}}}{\mu_0 \gamma}$$

$$M = n g_J \mu_B J B_J(y)$$

Bestimmung von M als Funktion von B_{ext} und T



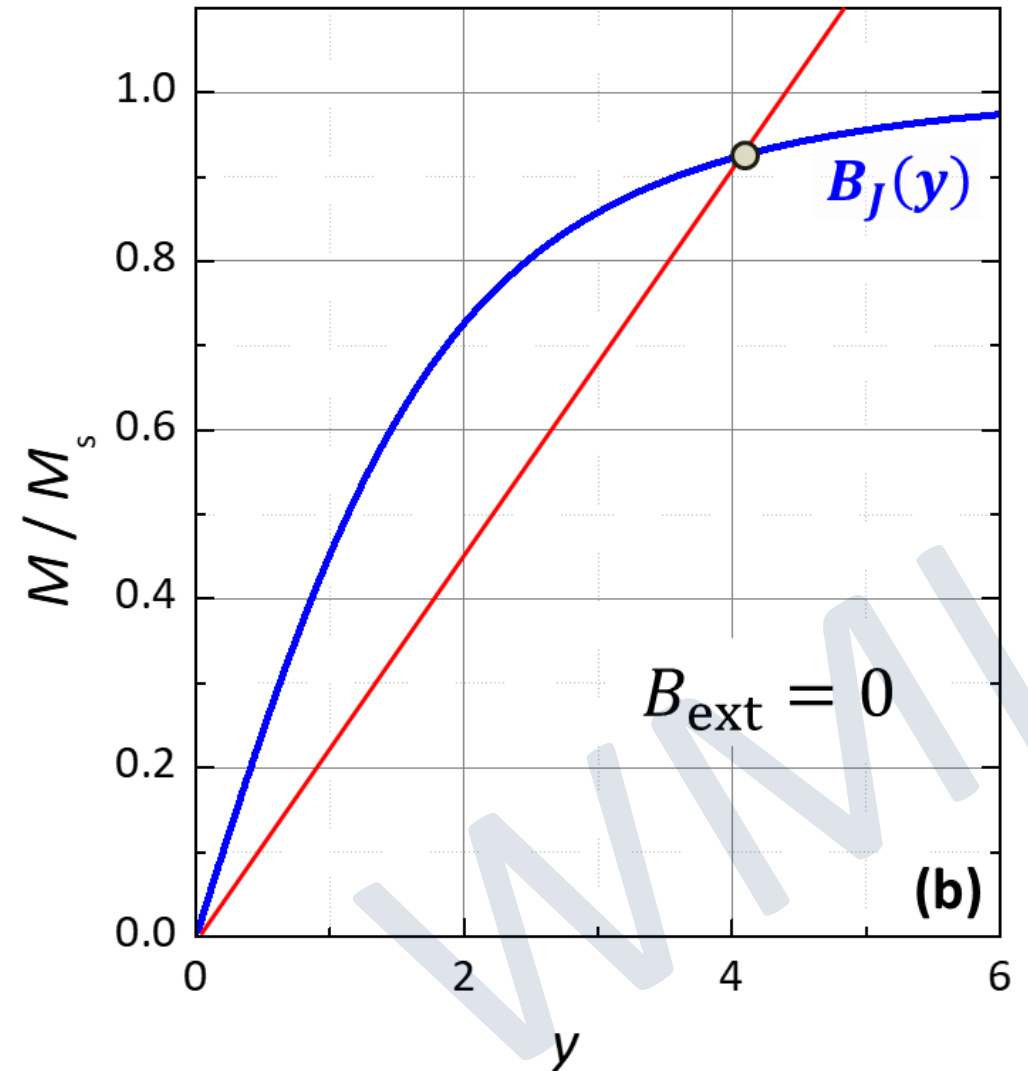
12.6.2 Ferromagnetismus

- Bestimmung der spontanen Magnetisierung für $B_{\text{ext}} = 0$

$$M = \frac{k_B T}{\mu_0 g_J \mu_B \gamma J} y - \frac{B_{\text{ext}}}{\mu_0 \gamma}$$

$$M = n g_J \mu_B J B_J(y) \quad y = \frac{g_J \mu_B J (B_{\text{ext}} + \mu_0 \gamma M)}{k_B T}$$

*Bestimmung der spontanen Magnetisierung
 $M(B_{\text{ext}} = 0)$ als Funktion von T*



12.6.2 Ferromagnetismus

- Temperaturabhängigkeit der Magnetisierung für $T \ll T_C$ und $B_{\text{ext}} = 0$

$$M = n g_J \mu_B J B_J(y) \quad y = \frac{g_J \mu_B J \mu_0 \gamma M}{k_B T}$$

- wir betrachten System mit $J = \frac{1}{2}$:

$$M = n g_J \mu_B J \tanh\left(\frac{g_J \mu_B J B_{\text{eff}}}{k_B T}\right) = M_s \tanh\left(\frac{g_J \mu_B J \mu_0 \gamma M}{k_B T}\right)$$

- für $T \ll T_C$ wird Argument von tanh-Funktion groß $\rightarrow \tanh x \simeq x - 2 \exp(-2x)$
und wir können $M \simeq M_s = n g_J \mu_B J$ verwenden

$$\rightarrow \Delta M = M(0) - M(T) \simeq 2 M_s \exp\left(-2 \frac{\mu_0 \gamma n g_J^2 J^2 \mu_B^2}{k_B T}\right)$$

$\rightarrow$ einsetzen von typischen Zahlenwerten liefert $\frac{\Delta M}{M_s} \sim 10^{-9}$ für $T = 0.1 T_C$

$\rightarrow$ im Experiment wird viel stärkere T -Abhängigkeit beobachtet:

$$\frac{\Delta M}{M_s} = A T^{3/2} \quad \text{Blochsches } T^{3/2}\text{-Gesetz (resultiert aus Anregung von Spin-Wellen)}$$

12.6.2 Ferromagnetismus

- Bestimmung der Curie-Temperatur T_C für $B_{\text{ext}} = 0$

$$M = \frac{k_B T}{\mu_0 g_J \mu_B \gamma J} y \quad M = n g_J \mu_B J B_J(y) \quad y = \frac{g_J \mu_B J \mu_0 \gamma M}{k_B T}$$

- Bedingung für endliche spontane Magnetisierung:
Steigung der roten Kurve < Steigung der blauen Kurve für $y \rightarrow 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{k_B T}{\mu_0 g_J \mu_B \gamma J}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = n g_J \mu_B J \frac{\partial B_J(y)}{\partial y} = n g_J \mu_B J \frac{J+1}{3J} = n g_J \mu_B \frac{J+1}{3}$$

$B_J(y) \simeq \frac{J+1}{3J} y$ für $y \ll 1$

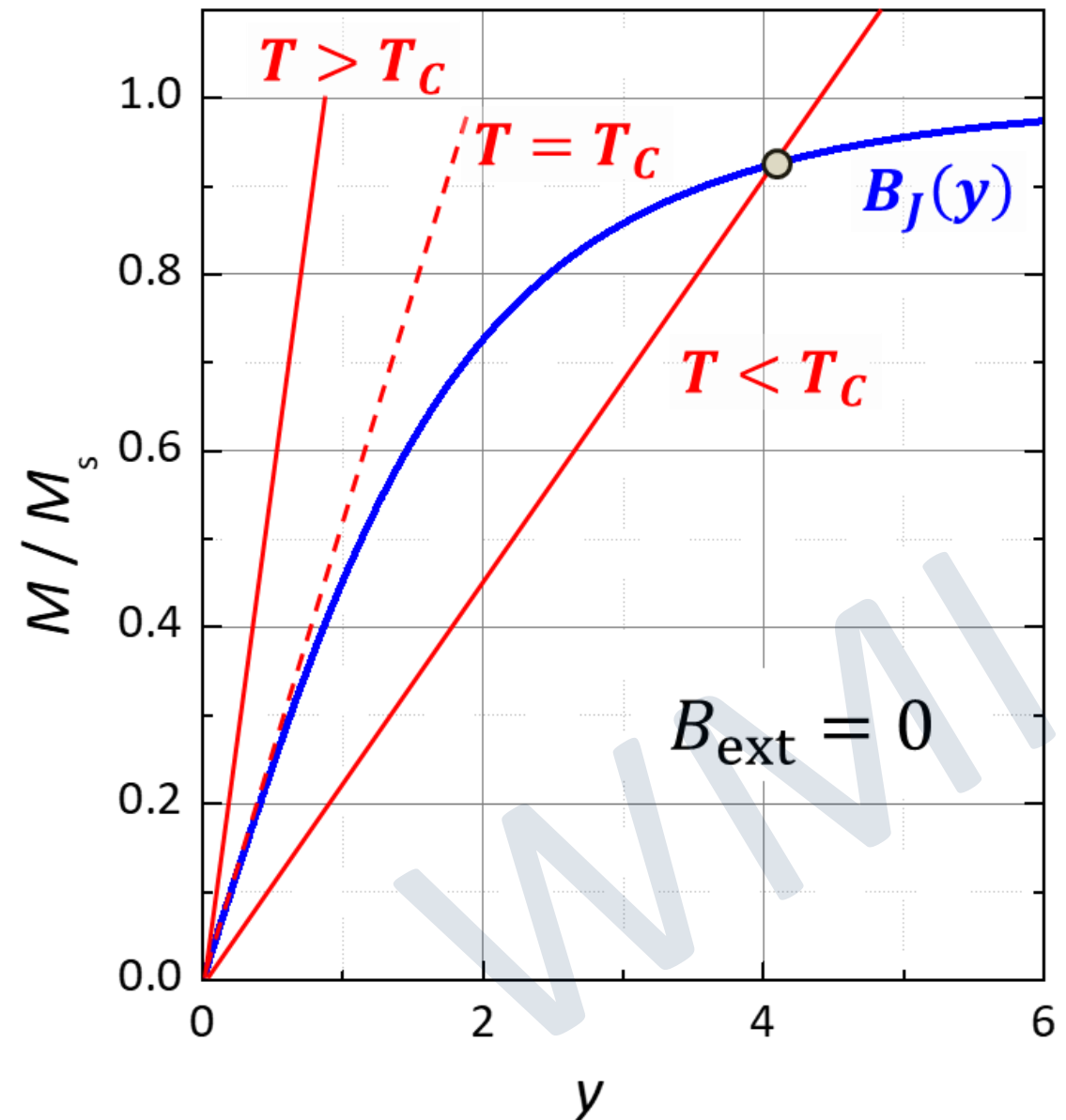
aus $\frac{k_B T}{\mu_0 g_J \mu_B \gamma J} = n g_J \mu_B \frac{J+1}{3}$ folgt:

$$T_C = \gamma \frac{n \mu_0 g_J^2 J(J+1) \mu_B^2}{3 k_B} = \gamma C$$

ferromagnetische
Curie-Temperatur

$$C = \frac{n \mu_0 g_J^2 J(J+1) \mu_B^2}{3 k_B}$$

Curie-Konstante



12.6.2 Ferromagnetismus

- Verhalten von Ferromagnet oberhalb der Curie-Temperatur T_C

- im paramagnetischen Bereich ist $y \ll 1$ und damit $B_J(y) \simeq \frac{J+1}{3J} y$ eine sehr gute Näherung
- wir verwenden wiederum

$$M = n g_J \mu_B J B_J(y) \simeq n g_J \mu_B J \frac{J+1}{3J} y = n g_J \mu_B \frac{J+1}{3} y$$

$$y = \frac{g_J \mu_B J (B_{\text{ext}} + \mu_0 \gamma M)}{k_B T}$$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{\mu_0} \frac{n \mu_0 g_J^2 J(J+1) \mu_B^2}{3 k_B T} (B_{\text{ext}} + \mu_0 \gamma M) = \frac{1}{\mu_0} \frac{C}{T} (B_{\text{ext}} + \mu_0 \gamma M)$$

$$\Rightarrow M \left(1 - \frac{\gamma C}{T} \right) = \frac{C}{T} \frac{B_{\text{ext}}}{\mu_0}$$

$T_C \stackrel{\uparrow}{=} \gamma C$

$$M = \frac{C}{T - T_C} \frac{B_{\text{ext}}}{\mu_0}$$

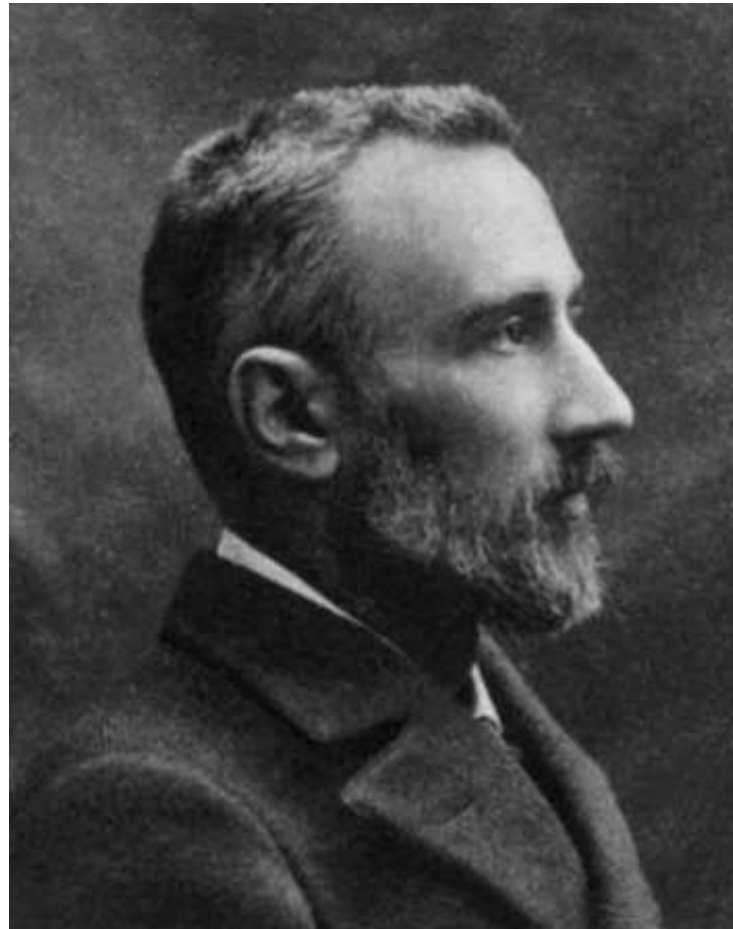
- Suszeptibilität

$$\chi = \mu_0 \left(\frac{\partial M}{\partial B_{\text{ext}}} \right)_{T,V} = \frac{C}{T - T_C}$$

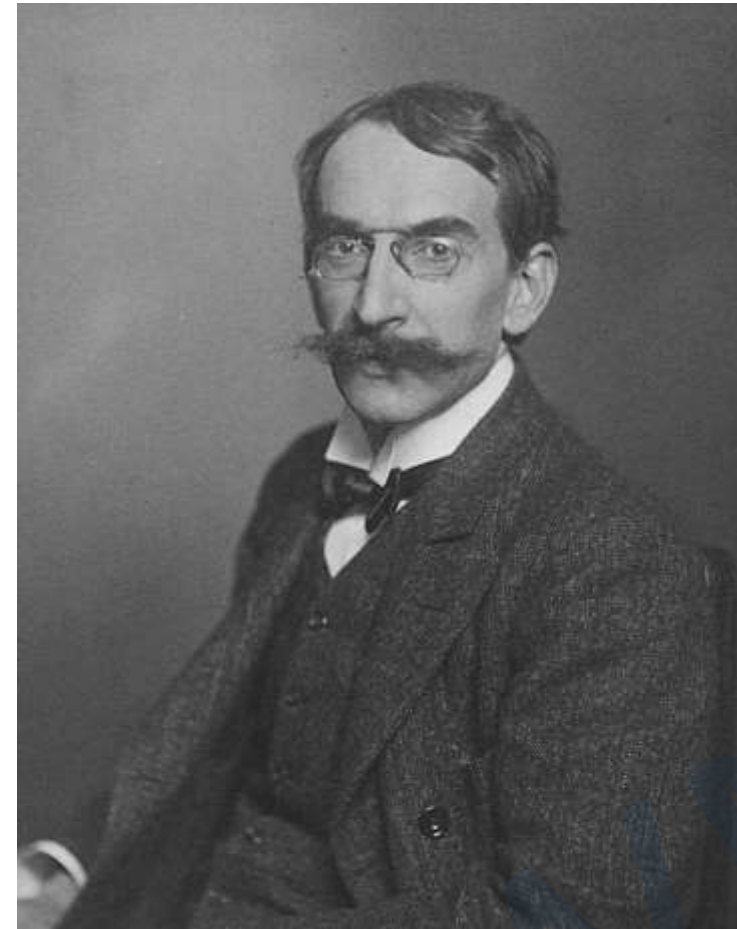
Curie-Weiss-Gesetz



12.6.2 Ferromagnetismus



Pierre Curie
(1859 – 1906)



Pierre Ernest Weiss
(1865 - 1940)

12.6.2 Ferromagnetismus

- Vergleich von Curie-Weiss-Gesetz mit experimentellen Befunden

$$\chi = \mu_0 \left(\frac{\partial M}{\partial B_{\text{ext}}} \right)_{T,V} = \frac{C}{T - T_C}$$

Curie-Weiss-Gesetz

– experimentelle Befunde:

- Suszeptibilität χ folgt Curie-Weiss-Gesetz, allerdings mit paramagnetischer Curie-Temperatur Θ

$$\chi(T) = \frac{C}{T - \Theta}$$

➔ Θ ist Maß für die Stärke der WW zwischen magnetischen Momenten

➔ WW ist auch für $T > T_C$ vorhanden

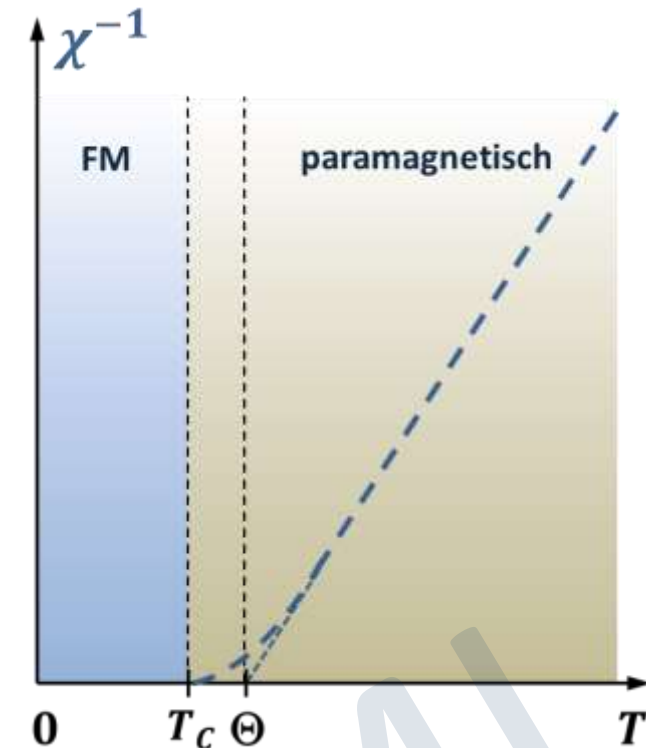
➔ Ordnungstemperatur $T_C < \Theta$ ➔ Relevanz von Fluktuationen nahe an Phasenübergang, reduzieren T_C

- $\chi(T)$ weicht nahe bei T_C von $1/T$ -Verhalten ab:

- $T > T_C$: $\chi(T) \propto (T - T_C)^{-\alpha}$ mit $\alpha = 4/3$

- $T < T_C$: $\chi(T) \propto (T_C - T)^{-\beta}$ mit $\beta = 1/3$

➔ „mean-field theory“ berücksichtigt keine kritischen Fluktuationen, kritische Exponenten α und β folgen aus Theorie der Phasenübergänge



12.6.2 Ferromagnetismus

Material	T_C (K)	Θ (K)	C (K)	M_s (kA/m)	p
Fe	1044	1100	2.22	1 750	2.22
Co	1360	1415	2.24	1 450	1.72
Ni	629	649	0.588	510	0.60
Gd	289	302	5.00	2 060	7.63
Dy	85	157	—	3 050	10.4
EuO	69.4	78	4.68	1 880	7.0
CrO ₂	396	—	—	325	2.0
MnAs	630	318	—	501	3.4

Austauschfeld $B_A = \mu_0 \gamma M_s(0)$
Molekularfeldkonstante $\gamma = T_C / C$

Fe: $B_A = 1030$ T
Ni: $B_A = 685$ T

Zusammenfassung: Teil 20a, 11.05.2021/2

• Ferromagnetismus: Diskussion im Rahmen der „Mean-Field“ Theorie

Wechselwirkung des i -ten Moments mit z nächsten Nachbarn

$$E_{A,i} = -\frac{J_A}{\hbar^2} \sum_{j=1}^z \mathbf{J}_i \cdot \mathbf{J}_j \quad \xrightarrow{\text{„mean-field“}} \quad E_{A,i} = -z \frac{J_A}{\hbar^2} \mathbf{J}_i \cdot \langle \mathbf{J}_j \rangle$$

$$\mathbf{M} = -n g_J \mu_B \langle \mathbf{J}_j \rangle / \hbar, \quad \boldsymbol{\mu}_i = g_J \mu_B \mathbf{J}_i / \hbar$$

$$E_{A,i} = -\boldsymbol{\mu}_i \cdot \mathbf{B}_A \quad \text{mit}$$

$$\mathbf{B}_A = \frac{z J_A}{n g_J^2 \mu_B^2} \mathbf{M} = \mu_0 \gamma \mathbf{M}$$

Austausch- oder Molekularfeld

γ : Molekularfeldkonstante

System wechselwirkender magnetischer Momente äquivalent zu System nichtwechselwirkender Momente in Molekularfeld

• Ferromagnetismus: T-Abhängigkeit der magnetischen Ordnung

$$-B_{\text{ext}} > 0:$$

$$\mathbf{B}_{\text{eff}} = \mathbf{B}_{\text{ext}} + \mathbf{B}_A = \mathbf{B}_{\text{ext}} + \mu_0 \gamma \mathbf{M}$$

$$M = n g_J \mu_B J B_J(y) \quad \text{mit } y = \frac{g_J \mu_B J B_{\text{eff}}}{k_B T}$$

$$M = \frac{k_B T}{\mu_0 g_J \mu_B \gamma J} y - \frac{B_{\text{ext}}}{\mu_0 \gamma}$$

graphische Lösung

$$\mathbf{B}_A = \frac{z J_A}{n g_J^2 \mu_B^2} \mathbf{M} = \mu_0 \gamma \mathbf{M}$$

(Austausch- oder Molekularfeld)

$$M(B_{\text{ext}})$$

$$-B_{\text{ext}} = 0:$$

$$T_C = \gamma \frac{n \mu_0 g_J^2 J(J+1) \mu_B^2}{3 k_B} = \gamma C \quad \text{(Curie-Temperatur)}$$

$$\text{Curie-Konstante } C = \frac{n \mu_0 g_J^2 J(J+1) \mu_B^2}{3 k_B}$$

$$-T > T_C:$$

$$B_J(y) \approx \frac{J+1}{3J} y \quad \text{für } y \ll 1$$

$$\chi = \frac{C}{T - T_C} \quad \text{(Curie-Weiss-Gesetz)}$$

$$\text{im Experiment gemessen: } \chi = \frac{C}{T - \Theta}$$

Θ = paramagnetische Curie-Temperatur, $\Theta > T_C$

• *Ferromagnetismus: T-Abhängigkeit der Suszeptibilität für $T \simeq T_c$*

- $T > T_c$: erwartet wird Curie –Weiss-Verhalten $\chi \propto (T - T_c)^{-1}$
beobachtet wird $\chi \propto (T - T_c)^{-\alpha}$ mit $\alpha = 4/3$
- $T < T_c$: erwartet wird (Landau-Theorie der PÜ) $\chi \propto (T_c - T)^{1/2}$
beobachtet wird $\chi \propto (T_c - T)^\beta$ mit $\beta = 1/3$

➔ in adäquater Beschreibung müssen kritische Fluktuationen berücksichtigt werden

• *Ferromagnetismus: T-Abhängigkeit der magnetischen Ordnung für $T \ll T_c$*

- mit Brillouin-Funktion und Austauschfeld erwartet man

$$\frac{\Delta M}{M_s} = \frac{M(0) - M(T)}{M_s} \simeq 2 \exp\left(-2 \frac{\mu_0 \gamma n g_f^2 J^2 \mu_B^2}{k_B T}\right) \quad (\text{sehr schwach } T\text{-Abhängigkeit von } M)$$

- experimentell beobachtet wird viel stärkere T -Abhängigkeit:

$$\frac{\Delta M}{M_s} = A T^{3/2} \quad \text{Blochsches } T^{3/2}\text{-Gesetz} \quad (\text{resultiert aus Anregung von Spin-Wellen, Erklärung folgt später})$$