



Physik der Kondensierten Materie 2

Rudolf Gross

SS 2021

Teil 23

Vorlesungsstunde: 18.05.2021-1

• magnetische Anisotropie

- Magnetisierung hat
 - (i) bevorzugte Achse: **leichte Achse**
 - (ii) vermiedene Achse: **schwere Achse**

- Anisotropieenergie

Energieaufwand, um $\mathbf{M}$ aus der leichten in die schwere Achse zu drehen

• magnetokristalline Anisotropie

- Ursache: Spin-Bahn-Kopplung, asphärische Ladungsverteilung
- phänomenologische Beschreibung:
Entwicklung der magnetischen freien Energiedichte nach Richtungskosinussen $m_i = M_i/|\mathbf{M}|$

uniaxiale Anisotropie: $f_{\text{mc}}^{\text{uni}} = K_0^{\text{uni}} + K_1^{\text{uni}} m_z^2 + K_2^{\text{uni}} m_z^4 + \dots$

kubische Anisotropie: $f_{\text{mc}}^{\text{uni}} = K_0^{\text{kub}} + \frac{1}{2} K_1^{\text{kub}} \left[1 - (m_x^4 + m_y^4 + m_z^4) \right] + \dots$

z.B. kubisches Fe, leichte Achsen: $\langle 100 \rangle$ -Achsen

• Formanisotropie

- Minimierung der magnetostatischen Selbstenergie
→ Magnetisierung von dünnen Schichten liegt in Filmebene

• induzierte magnetische Anisotropie

- elastische Verspannungen (z.B. epitaxiale Gitterfehlanpassung)
- Austauschanisotropie an Grenzflächen (engl. exchange bias)

mehrere Hauptbeiträge zur magnetischen freien Energiedichte (@ $B_{\text{ext}} = 0$)

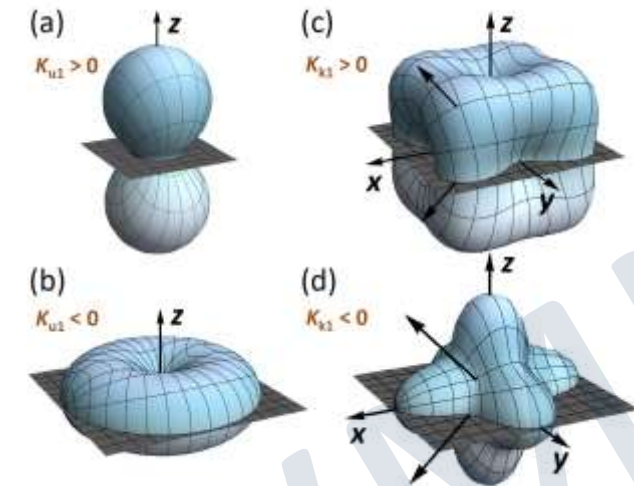
$$\mathcal{F}/V = \mathcal{f} = \mathcal{f}_{\text{mc}} + \mathcal{f}_{\text{form}} + \mathcal{f}_{\text{ind}} + \mathcal{f}_{\text{wand}} + \dots$$

magnetokristalline Anisotropie
(Spin-Bahn-Kopplung)

Form-Anisotropie
(Selbstenergie)

induzierte Anisotropie
(Verspannung, Austauschkopplung, ...)

Domänenwände



$$E_M = \frac{1}{2} \mu_0 \int_{\text{Vol}} \mathbf{M} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{M} dV = \frac{1}{2} \mu_0 V N M^2$$

$$\mathcal{f}_{\text{ind}}^{\text{strain}} = \frac{\mu_0}{2} \int_{\text{Vol}} \frac{3}{2} \sigma \lambda_s dV$$

$$\mathcal{f}_{\text{ind}}^{\text{aus}} = B_b M_{\text{FM}} = \frac{n J_{\text{ex}} S_{\text{FM}} S_{\text{AFM}}}{2 \hbar^2 t_{\text{FM}}}$$

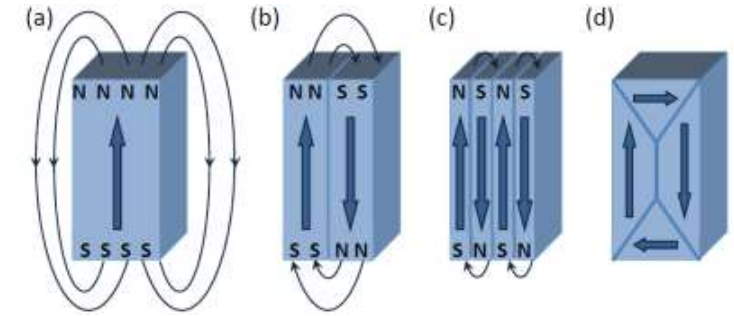
Zusammenfassung: Teil 22b, 17.05.2021/2

• magnetische Domänen

- Minimierung der gesamten freien Energie

$$\mathcal{F} = \int_{\text{Vol}} [\mathcal{f}_{\text{mc}} + \mathcal{f}_{\text{form}} + \mathcal{f}_{\text{ind}} + \mathcal{f}_{\text{wand}} + \dots - \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_{\text{ext}}] dV$$

Randbed.: $\nabla \cdot \mathbf{B}_s = 0$ (keine magnetischen Oberflächen-Monopole)
 $\nabla \times \mathbf{B}_s = 0$ (keine Oberflächenströme)



• ferromagnetische Domänen

- komplexe Domänenstruktur → numerische Behandlung notwendig
 → Abbildung: (i) Magnetooptik, (ii) spin-polarisiertes SEM, (iii) MFM

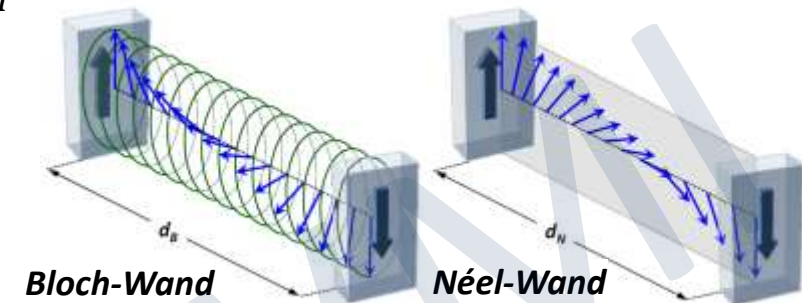
• antiferromagnetische Domänen

- keine Streufelder wegen antiparalleler Ausrichtung magnetischer Momente
- trotzdem Ausbildung von Domänen, Ursachen: (i) Defekte (ii) Entropieerhöhung → $d\mathcal{F} = -SdT$

• Domänenwände

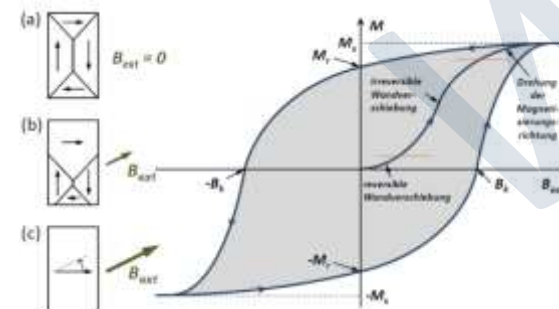
- Bloch- und Néel-Wände
- Wandenergie: Austauschenergie ($\propto J_A$) + Anisotropieenergie ($\propto K^{\text{ani}}$)
- Minimierung der Wandenergie:
 → Wanddicke ($\approx 50\text{nm}$ für Fe):

$$d_{\text{wand}} = n a = \left(\frac{\pi^2 J_A S^2}{2 \hbar^2 K a} \right)^{1/2}$$



• Magnetisierungskurve

- Remanenz M_r und Koerzitivfeld B_k
- Energiedissipation = Fläche der Hystereseschleife: $\oint M dB_{\text{ext}}$



• Magnetische Speichermedien

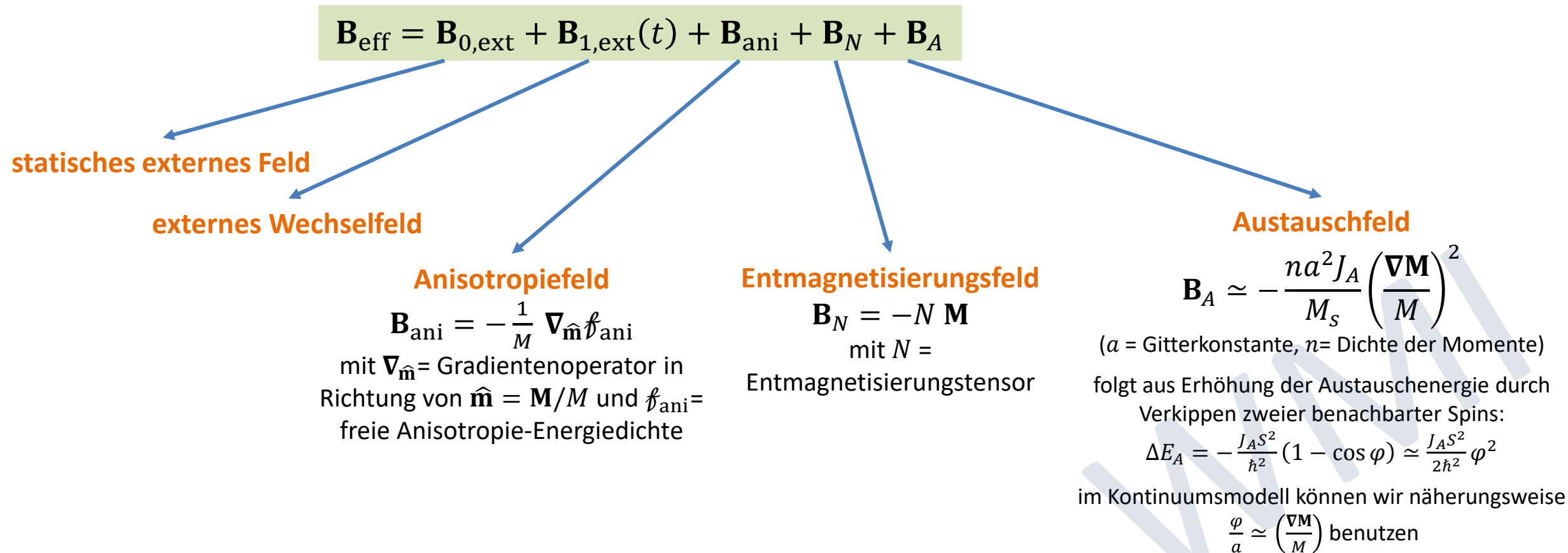
Kapitel 12

Magnetismus



12.9 Magnetisierungsdynamik

- Wie bewegen sich magnetische Momente in einem Festkörper unter Wirkung eines magnetischen Wechselfeldes ?
 - im thermischen Gleichgewicht zeigt die Magnetisierung in Richtung des **effektiven Magnetfeldes B_{eff}**



12.9 Magnetisierungsdynamik

- Behandlung von verschiedenen Grenzfällen der Magnetisierungsdynamik

i. **homogene Mode:** $q \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \infty$

- Austauschfeld $B_A \propto \nabla M$ kann vernachlässigt werden, da $\nabla M \rightarrow 0$
- homogene Präzession aller Momente beschrieben durch die Bewegung des Magnetisierungsvektors

Magnetisierungsdynamik

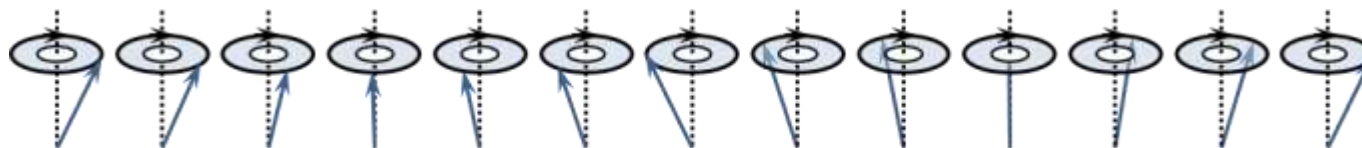
ii. **dipolare Spin-Wellen:** kleine q bzw. Große λ

- Austauschfeld $B_A \propto \nabla M$ kann immer noch vernachlässigt werden, da ∇M sehr klein
- Dynamik wird durch dipolare Felder bestimmt

Spin-Wellen

iii. **Austauschdominierte Spin-Wellen (Austauschmoden):** große q bzw. kleine λ

- Austauschfeld $B_A \propto \nabla M$ spielt dominierende Rolle, da jetzt ∇M groß



12.9 Magnetisierungsdynamik

- Zuerst Diskussion der homogenen Mode: Präzession der Magnetisierung

- für $q \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \infty$ liegt eine räumlich homogene Bewegung aller Momente vor (alle Momente bewegen sich in Phase)
→ Beschreibung durch Bewegungsgleichung für Magnetisierung

- Drehmoment $\mathbf{T}$ auf Magnetisierung $\mathbf{M}$ nach Auslenken aus Gleichgewichtslage parallel zu $\mathbf{B}_{\text{eff}}$

$$\mathbf{T} = V \mathbf{M} \times \mathbf{B}_{\text{eff}}$$

- gesamtes magnetisches Moment $\boldsymbol{\mu} = V\mathbf{M}$ ist mit Drehimpuls $\mathbf{L}$ verknüpft

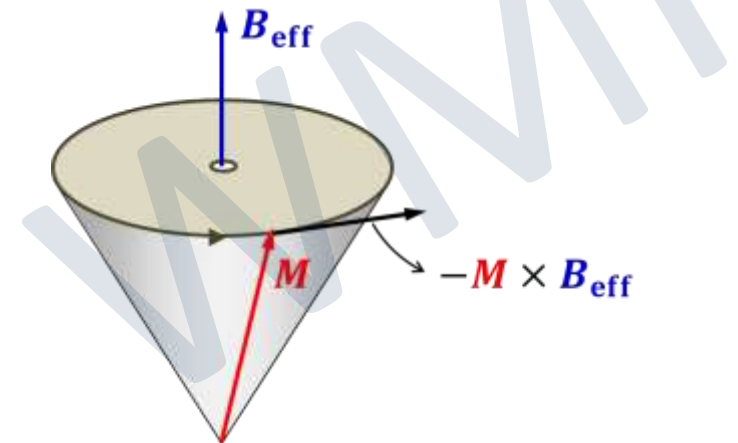
$$\mathbf{L} = -\frac{\boldsymbol{\mu}}{\gamma} = -\frac{V}{\gamma} \mathbf{M} \quad (\boldsymbol{\mu} = -\gamma \mathbf{L}, \gamma = \frac{g\mu_B}{\hbar} = \text{gyromagnetisches Verhältnis})$$

- aus $\mathbf{T} = d\mathbf{L}/dt$ folgt $\mathbf{T} = -\frac{V}{\gamma} d\mathbf{M}/dt$ und damit (*Landau & Lifshitz*, 1935)

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B}_{\text{eff}} \quad (\text{ohne Dämpfung})$$

- Betrag von $\mathbf{M}$ bleibt wegen fehlender Dämpfung konstant

$$\mathbf{M} \cdot \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} M^2 = -\gamma \mathbf{M} \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{B}_{\text{eff}}) = 0$$



12.9 Magnetisierungsdynamik

- Einführen von phänomenologischem Dämpfungsterm $\lambda \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{B}_{\text{eff}})$

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B}_{\text{eff}} - \lambda \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{B}_{\text{eff}})$$

Landau-Lifshitz (LL) Gleichung

- da Landau-Lifshitz-Gleichung zum Teil unphysikalische Lösungen besitzt, wurde später anderer Dämpfungsterm $\alpha \mathbf{M} \times d\mathbf{M}/dt$ eingeführt (viskose Dämpfung $\propto d\mathbf{M}/dt$)

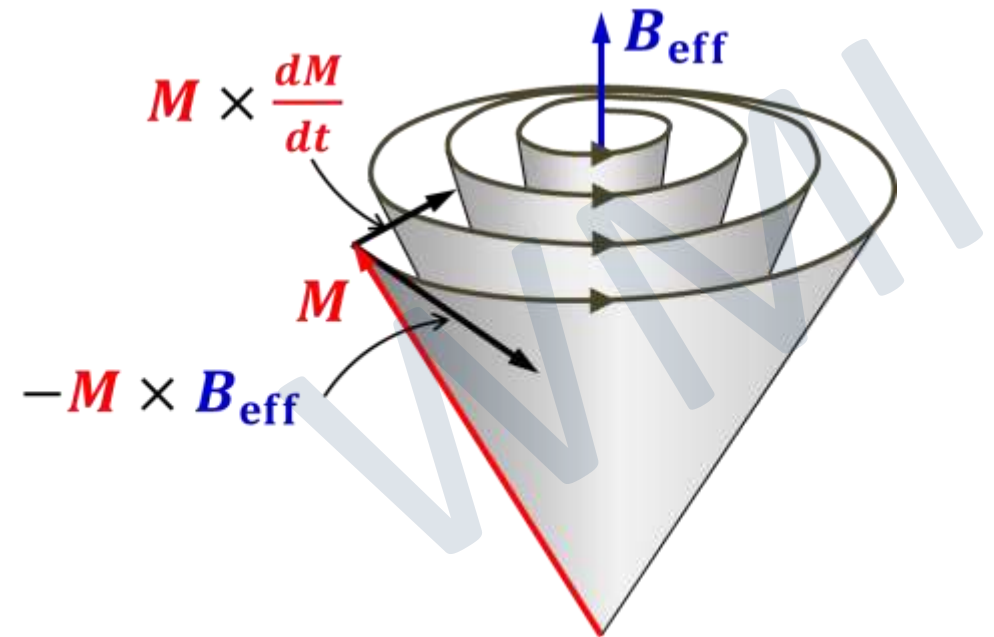
$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B}_{\text{eff}} + \alpha \mathbf{M} \times \frac{d\mathbf{M}}{dt}$$

Landau-Lifshitz-Gilbert (LLG) Gleichung

- Gleichung kann transformiert werden in

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\frac{\gamma}{1 + \alpha^2 M^2} \mathbf{M} \times \mathbf{B}_{\text{eff}} - \frac{\alpha \gamma}{1 + \alpha^2 M^2} \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{B}_{\text{eff}})$$

- dimensionsloser Gilbert-Dämpfungsparameter $G = \alpha M$ (rein phänomenologisch)
- für $G \ll 1$ geht LLG- in LL-Gleichung über



12.9 Magnetisierungsdynamik

- Umrechnung von Landau-Lifshitz-Gilbert (LLG) Gleichung

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B}_{\text{eff}} + \alpha \mathbf{M} \times \frac{d\mathbf{M}}{dt}$$

Landau-Lifshitz-Gilbert (LLG) Gleichung

- anwenden von $\mathbf{M} \times$

$$\mathbf{M} \times \frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{M} \times \mathbf{B}_{\text{eff}} + \alpha \mathbf{M} \times \mathbf{M} \times \frac{d\mathbf{M}}{dt}$$

- benutzen von $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

$$\mathbf{M} \times \frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{M} \times \mathbf{B}_{\text{eff}} + \alpha \mathbf{M} \underbrace{\left(\mathbf{M} \cdot \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right)}_{=0} - \alpha \frac{d\mathbf{M}}{dt} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{M})$$

- einsetzen in LLG-Gleichung

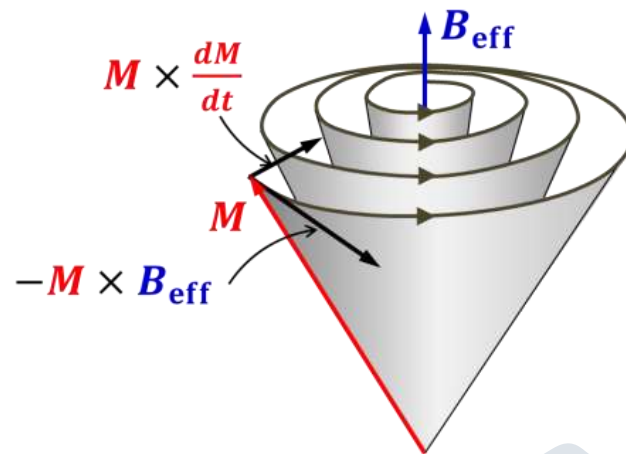
$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B}_{\text{eff}} + \alpha \left[-\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{M} \times \mathbf{B}_{\text{eff}} - \alpha \frac{d\mathbf{M}}{dt} M^2 \right]$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} (1 + \alpha^2 M^2) = -\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B}_{\text{eff}} - \alpha \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{M} \times \mathbf{B}_{\text{eff}}$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\frac{\gamma}{(1 + \alpha^2 M^2)} \mathbf{M} \times \mathbf{B}_{\text{eff}} - \frac{\alpha \gamma}{(1 + \alpha^2 M^2)} \mathbf{M} \times \mathbf{M} \times \mathbf{B}_{\text{eff}}$$

Landau-Lifshitz-Gilbert Gleichung

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B}_{\text{eff}} - \lambda \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{B}_{\text{eff}})$$

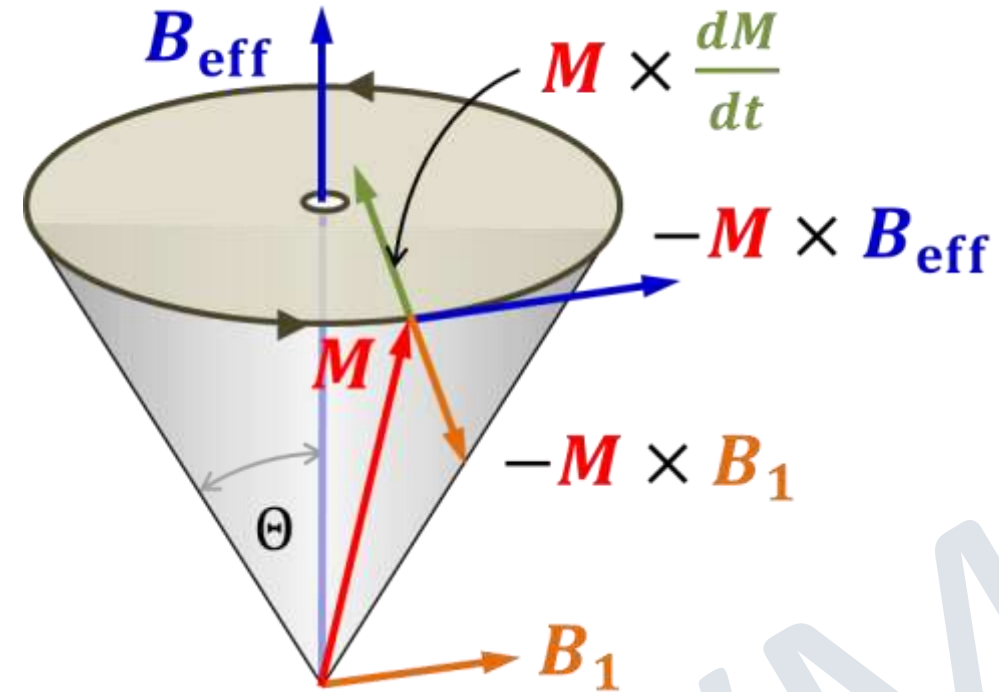
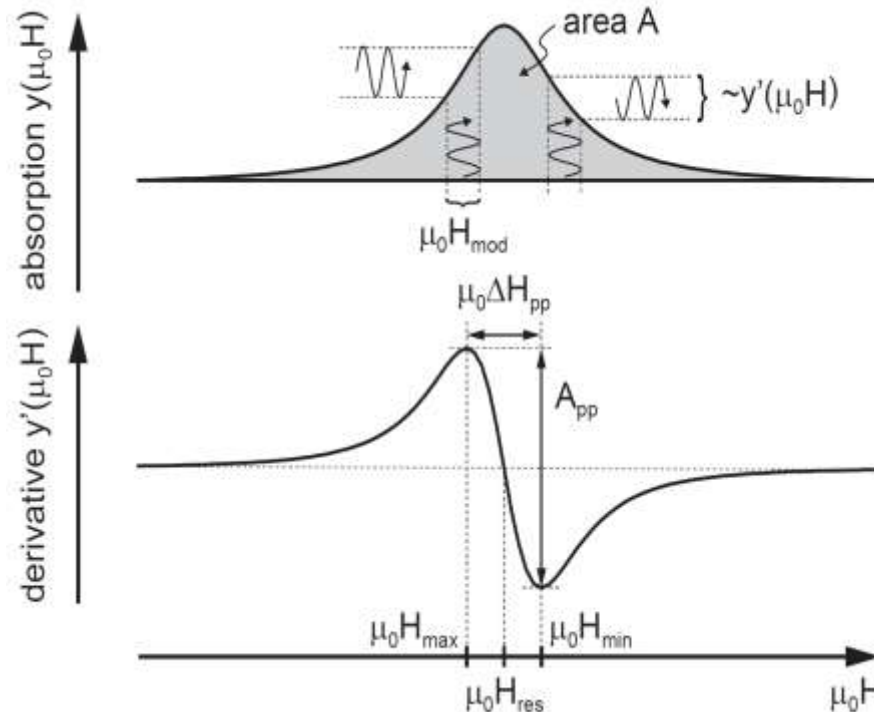


Landau-Lifshitz Gleichung

12.9.1 Ferromagnetische Resonanz (FMR)

- Resonante Anregung der Magnetisierungsdynamik mit hochfrequentem Magnetfeld

- Hochfrequenzfeld $\mathbf{B}_{1,\text{ext}}(t) = \mathbf{B}_1 \exp i\omega_1 t$,
 $\mathbf{B}_{1,\text{ext}} \perp \mathbf{B}_{\text{eff}}$
 verursacht Drehmoment $-\mathbf{M} \times \mathbf{B}_1$, das
 Dämpfung entgegengerichtet ist
- Resonanzabsorption für $\omega_1 = \gamma B_{\text{eff}}$



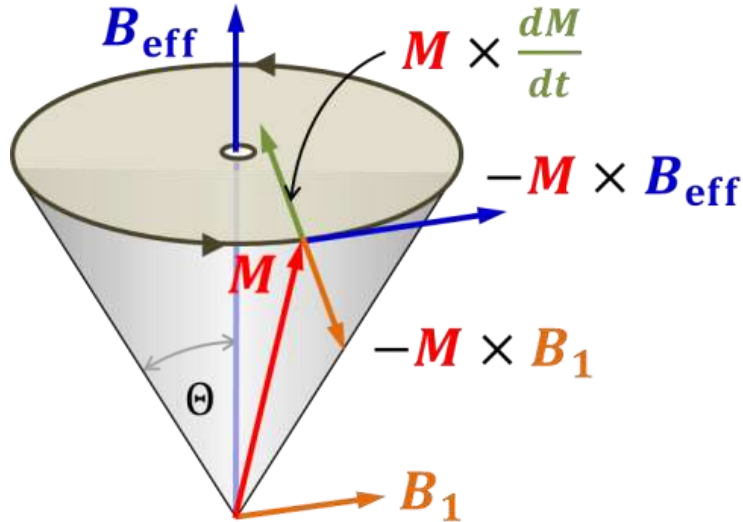
Brandlmaier, Doktorarbeit, WMI (2011)

12.9.1 Ferromagnetische Resonanz (FMR)

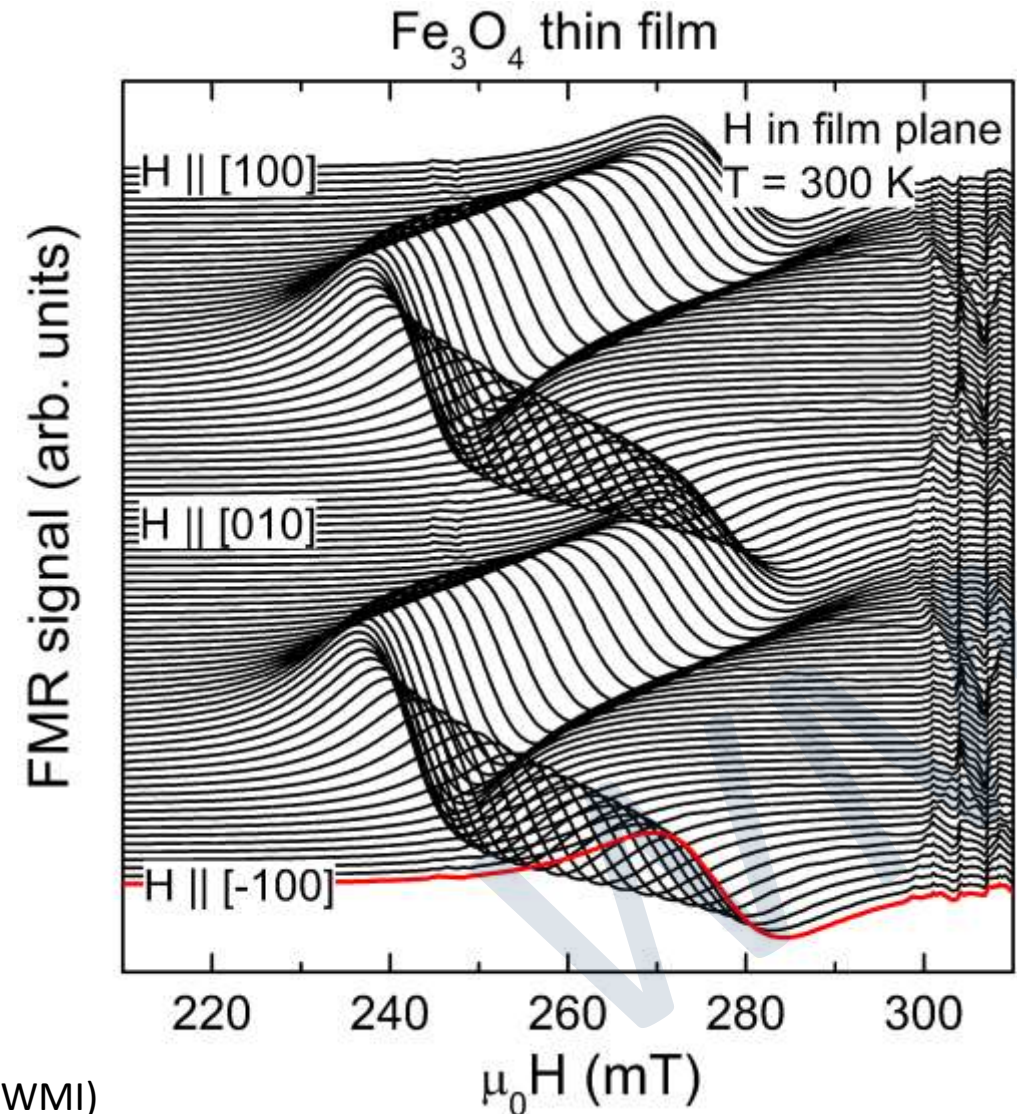
- Bestimmung der magnetischen Anisotropie mit Hilfe der Ferromagnetischen Resonanz

$$\mathbf{B}_{\text{eff}} = \mathbf{B}_{0,\text{ext}} + \mathbf{B}_{\text{ani}}$$

Resonanzbedingung: $B_{\text{eff}} = \omega_1 / \gamma$



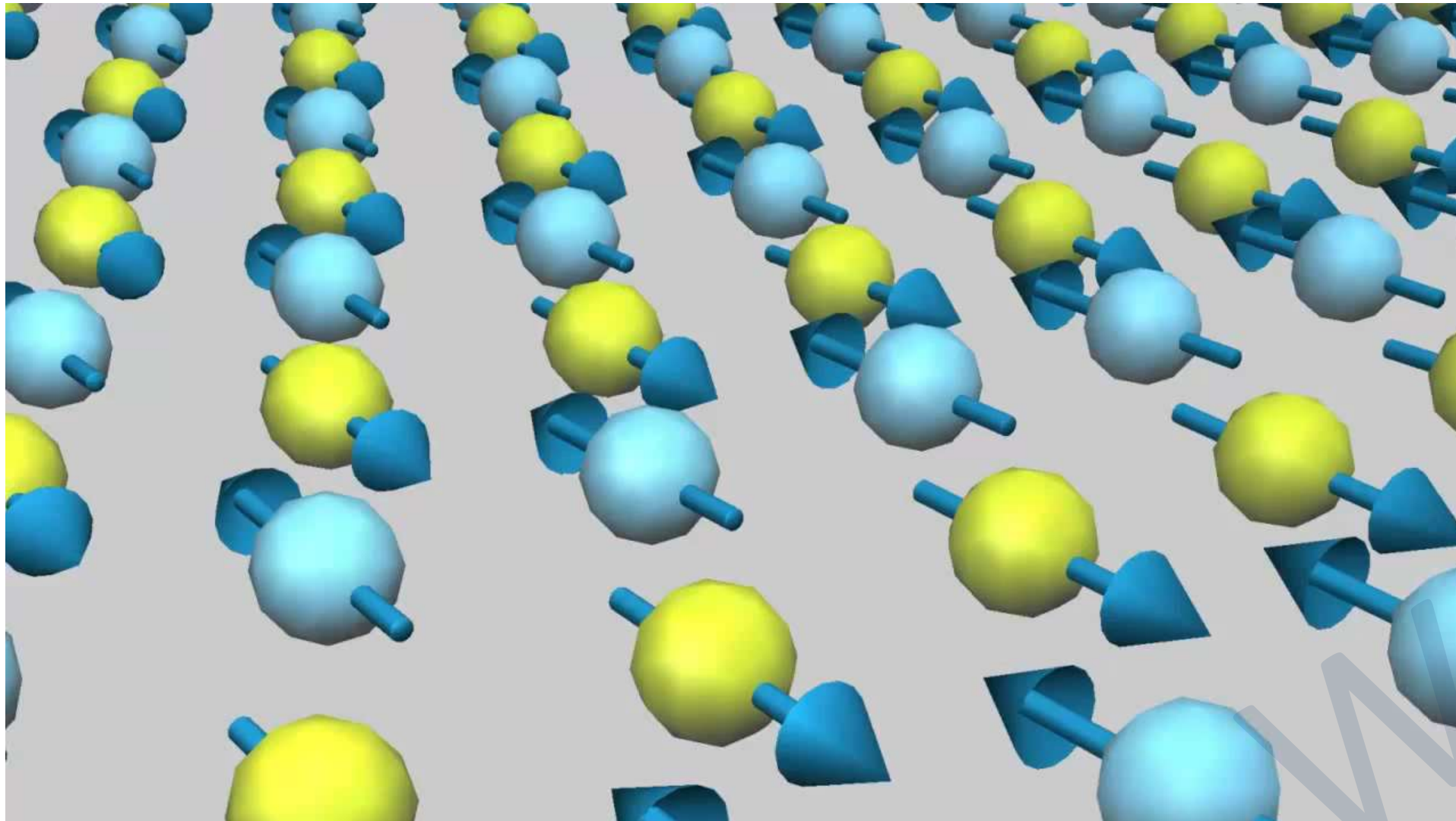
gemessenes Resonanzfeld $\mathbf{B}_{0,\text{ext}}$ variiert mit Richtung aufgrund der magnetischen Anisotropie



Ferromagnetische Resonanz in Magnetitfilm (WMI)

12.10 Spin-Wellen

Spin-Wellen



<https://www.youtube.com>

12.10.1 Austauschdominierte Spinwellen

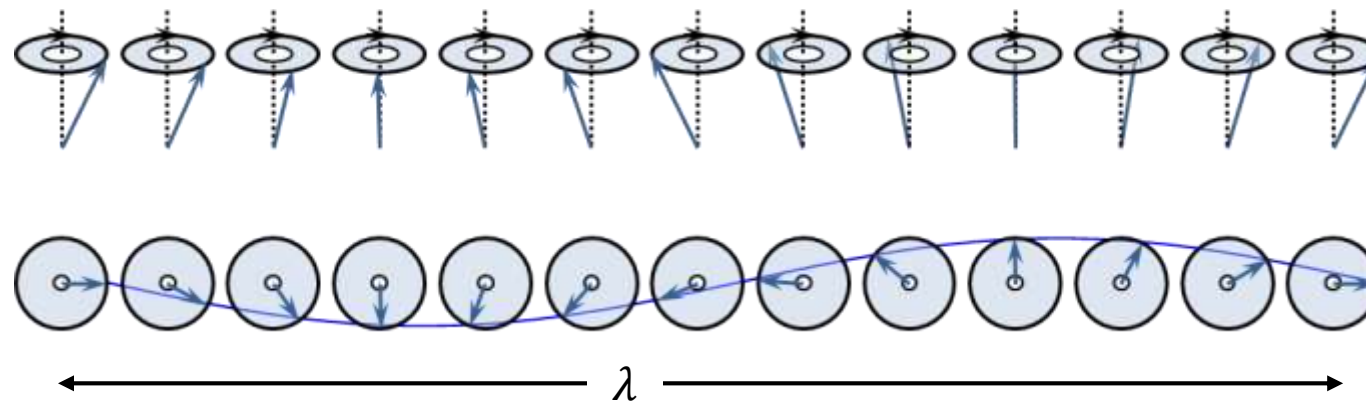
- Was sind Spin-Wellen?

Spin-Wellen sind räumliche Oszillationen der Orientierung von magnetischen Momenten in Spin-Gitter

(analog zu elastischen Wellen: räumliche Oszillationen der Position von Atomen in Kristallgitter)

die Quanten der Spin-Wellen heißen Magnonen, sie sind Bosonen und gehorchen Bose-Einstein-Statistik

(analog zu Phononen)



- bereits diskutiert:

- *homogene Mode*: $q \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \infty$

- alle Spins bewegen sich in Phase → starres Spinsystem kann mit Magnetisierungsvektor beschrieben werden

- jetzt:

- endliche Wellenlängen λ bzw. nichtverschwindende Wellenzahl q

- *dipolare* oder *austauschdominierte Spin-Wellen*, je nachdem, ob dipolare oder Austauschkopplung dominiert

12.10.1 Austauschdominierte Spinwellen

- Herleitung der Dispersionsrelation $\omega(q)$ von austauschdominierten Spin-Wellen (Austauschmoden)

- **Annahmen:**

- klassische Beschreibung der Spin-Wellen: Spins werden als “Vektoren” der Länge $|\mathbf{S}| = S$ behandelt
- Auslenkung der Spins aus ihrer Gleichgewichtslage soll klein sein $\rightarrow$ Linearisierung
- nur WW zwischen nächsten Nachbarn
- Diskussion eindimensionaler Spin-Kette in x -Richtung

- Kopplungsenergie des i -ten Spins mit seinem linken und rechten Nachbarn:

$$E_{a,i} = -\frac{J_A}{\hbar^2} (\mathbf{S}_{i-1} \cdot \mathbf{S}_i + \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1}) = -\frac{J_A}{\hbar^2} \mathbf{S}_i \cdot (\mathbf{S}_{i-1} + \mathbf{S}_{i+1}) = -2 \frac{J_A}{\hbar^2} S^2 \quad (\text{für parallele Spin-Stellung})$$

- Umklappen des mittleren Spins liefert Energieerhöhung um

$$\Delta E_{a,i} = 4 \frac{J_A}{\hbar^2} S^2 \quad (\text{quantenmechanische Behandlung liefert gleiches Ergebnis})$$

- gesamte Austauschenergie zwischen allen nächsten Nachbarn für eindimensionale Spin-Kette mit N Spins

$$E_a = -\frac{J_A}{\hbar^2} \sum_{i=1}^N \mathbf{S}_i \cdot (\mathbf{S}_{i-1} + \mathbf{S}_{i+1}) \quad (\text{Faktor } 1/2, \text{ um Doppelzählung zu vermeiden})$$

12.10.1 Austauschdominierte Spinwellen

- **Austauschfeld** $\mathbf{B}_{A,i}$: Ausdrücken der Energie $E_{a,i}$ über ein effektives Magnetfeld

$$E_{a,i} = -\boldsymbol{\mu}_i \cdot \mathbf{B}_{A,i} = g_s \mu_B \frac{\mathbf{S}_i}{\hbar} \cdot \mathbf{B}_{A,i} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\mu}_i = -g_s \mu_B \frac{\mathbf{S}_i}{\hbar} \quad \longleftrightarrow \quad E_{a,i} = -\frac{J_A}{\hbar^2} \mathbf{S}_i \cdot (\mathbf{S}_{i-1} + \mathbf{S}_{i+1})$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}_{A,i} = -\frac{J_A}{g_s \mu_B \hbar} (\mathbf{S}_{i-1} + \mathbf{S}_{i+1})$$

mit zusätzlichem äußeren Feld $\Rightarrow$ **effektives Magnetfeld**

$$\Rightarrow \mathbf{B}_{\text{eff},i} = \mathbf{B}_{\text{ext}} + \mathbf{B}_{A,i} = \mathbf{B}_{\text{ext}} - \frac{J_A}{g_s \mu_B \hbar} (\mathbf{S}_{i-1} + \mathbf{S}_{i+1})$$

- **Bewegungsgleichung für Spin $\mathbf{S}_i$** : am Spin i angreifendes Drehmoment = Zeitableitung des Drehimpulses $\mathbf{S}_i$

$$\frac{d\mathbf{S}_i}{dt} = \boldsymbol{\mu}_i \times \mathbf{B}_{\text{eff},i} = -\frac{g_s \mu_B}{\hbar} (\mathbf{S}_i \times \mathbf{B}_{\text{eff},i}) = -\gamma (\mathbf{S}_i \times \mathbf{B}_{\text{eff},i})$$

$$\gamma = \frac{g_s \mu_B}{\hbar} \quad (\text{gyromagnetisches Verhältnis})$$

$$\frac{d\mathbf{S}_i}{dt} = -\frac{g_s \mu_B}{\hbar} (\mathbf{S}_i \times \mathbf{B}_{\text{ext}}) + \frac{J_A}{\hbar^2} [\mathbf{S}_i \times (\mathbf{S}_{i-1} + \mathbf{S}_{i+1})]$$

12.10.1 Austauschdominierte Spinwellen

- **Bewegungsgleichung** in kartesischen Koordinaten, $\mathbf{B}_{\text{ext}} = B_z \hat{\mathbf{z}}$

$$\frac{dS_{i,x}}{dt} = -\frac{g_s \mu_B}{\hbar} (S_{i,y} B_{\text{ext},z} - S_{i,z} B_{\text{ext},y}) + \frac{J_A}{\hbar^2} [S_{i,y} (S_{i-1,z} + S_{i+1,z}) - S_{i,z} (S_{i-1,y} + S_{i+1,y})]$$

- Gleichung ist nichtlinear in Spin-Komponenten
- **Linearisierung** bei tiefen Temperaturen möglich, da Momente nahezu $\parallel \hat{\mathbf{z}}$
 $|S_{i,x}|, |S_{i,y}| \ll |S_{i,z}|, \quad S_{i,z} \simeq -|\mathbf{S}| = -S$ (negatives Vorzeichen, da $\mathbf{M} \parallel \boldsymbol{\mu}_i \parallel \mathbf{B}_{\text{ext}} = B_z \hat{\mathbf{z}}$ und $\boldsymbol{\mu}_i \parallel -\mathbf{S}$)

$$\begin{aligned} \frac{dS_{i,x}}{dt} &= -\frac{g_s \mu_B B_z}{\hbar} S_{i,y} - \frac{J_A S}{\hbar^2} [2S_{i,y} - S_{i-1,y} - S_{i+1,y}] \\ \frac{dS_{i,y}}{dt} &= +\frac{g_s \mu_B B_z}{\hbar} S_{i,x} - \frac{J_A S}{\hbar^2} [2S_{i,x} - S_{i-1,x} - S_{i+1,x}] \\ \frac{dS_{i,z}}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

- **Lösungsansatz:**

$$S_{i,x} = S_x e^{i(qia - \omega t)}$$

$$S_{i,y} = S_y e^{i(qia - \omega t)}$$

ia = Position des i ten Spins in Kette mit Gitterabstand a

12.10.1 Austauschdominierte Spinwellen

- Einsetzen des Lösungsansatzes in DGL ergibt Gleichungssystem

$$\begin{aligned} i\omega S_x - \beta S_y &= 0 \\ \beta S_x + i\omega S_y &= 0 \end{aligned} \quad \text{mit } \beta = \frac{g_s \mu_B B_z}{\hbar} + \frac{2J_A S}{\hbar^2} (1 - \cos qa)$$

- Koeffizienten-Determinante = 0

$$\begin{vmatrix} i\omega & -\beta \\ \beta & i\omega \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \beta^2$$

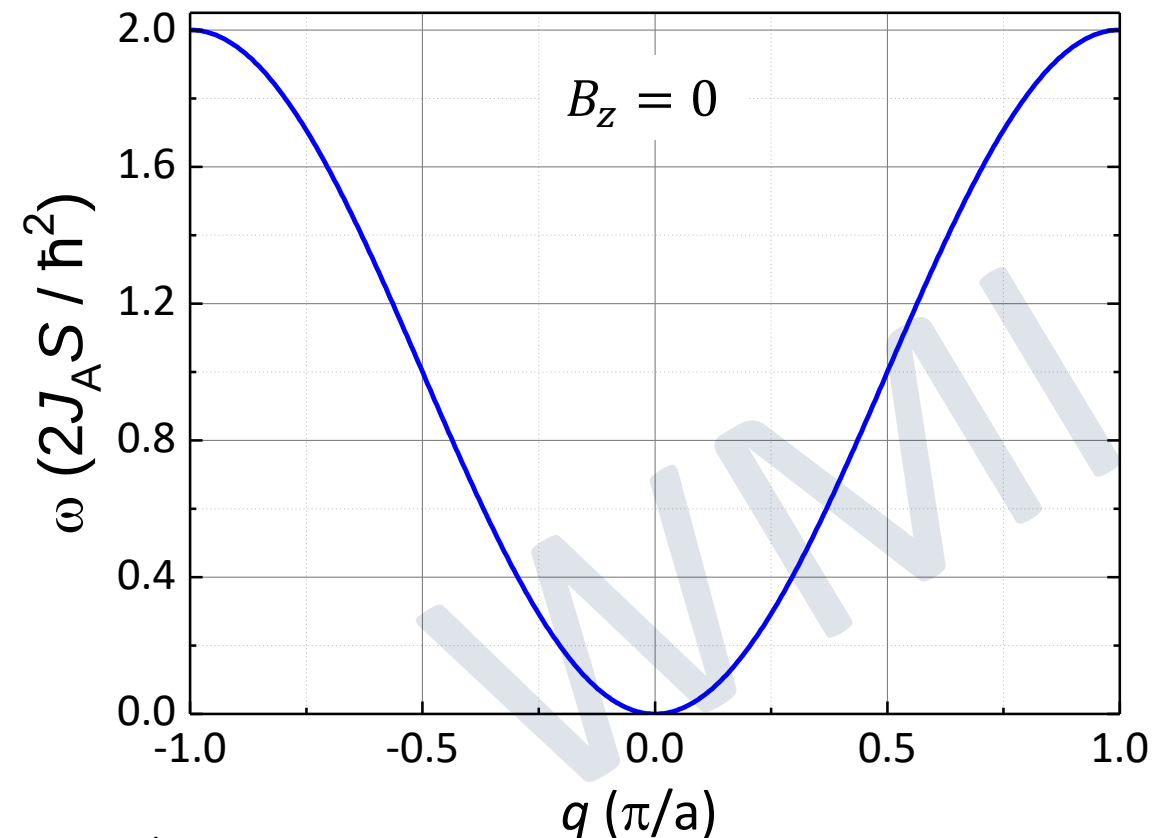
- Dispersionsrelation

$$\omega = \frac{g_s \mu_B B_z}{\hbar} + \frac{2J_A S}{\hbar^2} (1 - \cos qa)$$

- Näherung für kleine q und $B_z = 0$: $1 - \cos qa \simeq \frac{1}{2}(qa)^2$

$$\omega \simeq \frac{J_A S a^2}{\hbar^2} q^2 = A q^2 \quad A = \text{Spin-Steifigkeit}$$

→ quadratische Dispersion (zum Vergleich akustische Phononen: $\omega \propto q$)

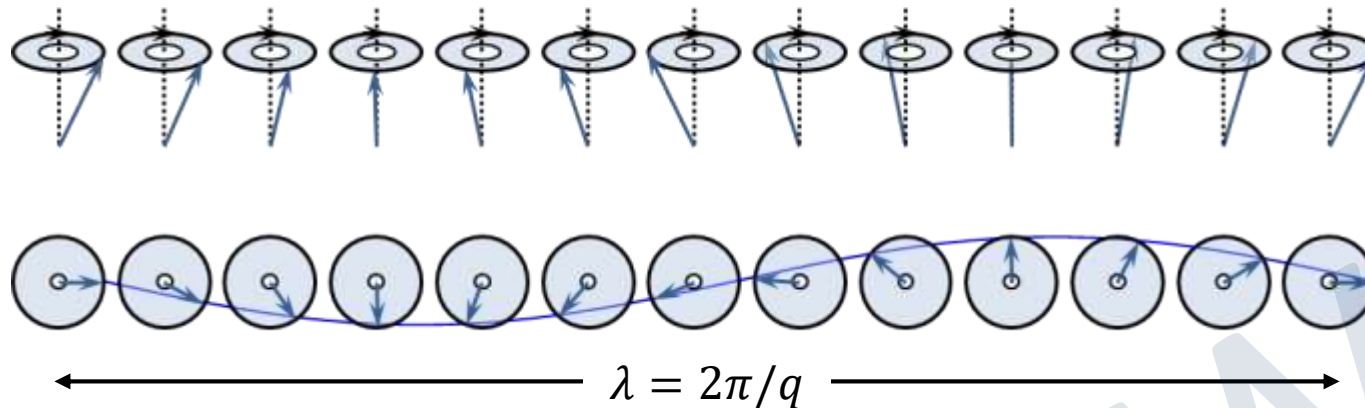


12.10.1 Austauschdominierte Spinwellen

- Präzisionsbewegung der Spins in Spin-Welle für kleine q

aus
$$\begin{aligned} i\omega S_x - \beta S_y &= 0 \\ \beta S_x + i\omega S_y &= 0 \end{aligned} \quad \text{und} \quad \omega^2 = \beta^2 \quad \text{folgt} \quad \mathbf{S}_y = i\mathbf{S}_x$$

- S_x und S_y haben gleiche Amplitude, aber relative Phasenschiebung von $\pi/2$
- zirkuläre Präzession um z-Achse mit $\omega \simeq g_s \mu_B B_z / \hbar$ und Phasenverschiebung qa zwischen Nachbarspins
- Phasenschiebung $qa \rightarrow 0$ für homogene Moden: alle Spins präzedieren in Phase



- Ausdehnung auf 3D-Fall:

$$\omega = \frac{J_A S}{\hbar^2} \sum_{i=1}^z (1 - \cos \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_i) \quad (B_z = 0) \quad \rightarrow \omega \propto q^2 \text{ für } qa \ll 1$$

12.10.1 Austauschdominierte Spinwellen

- T -Abhängigkeit der Magnetisierung in Ferromagneten durch Spin-Wellenanregung**

- Anregung von quantisierter Spin-Welle (Magnon) reduziert Gesamtdrehimpuls um $\hbar$

- Anregungswahrscheinlichkeit $\langle n_{\mathbf{q}} \rangle = \left[\exp\left(\frac{\hbar\omega_{\mathbf{q}}}{k_{\text{B}}T}\right) - 1 \right]^{-1}$ (Bose-Einstein-Verteilung)

- Gesamtzahl der angeregten Magnonen $\sum_{\mathbf{q}} \langle n_{\mathbf{q}} \rangle = \int d\omega D(\omega) \langle n(\omega) \rangle$

- Zustandsdichte $D(\omega)$ (Flächen konstanter Energie in q -Raum sind Kugeloberflächen)

$$D(\omega)d\omega = \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi q^2 dq = \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi q^2 \frac{dq}{d\omega} d\omega \quad \text{mit} \quad \frac{d\omega}{dq} = \frac{2J_A S a^2 q}{\hbar^2} = 2 \left(\frac{J_A S a^2}{\hbar^2} \right)^{1/2} \sqrt{\omega} \quad \text{da} \quad \omega \simeq \frac{J_A S a^2}{\hbar^2} q^2$$

$$\Rightarrow D(\omega) = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{\hbar^2}{J_A S a^2} \right)^{3/2} \sqrt{\omega}$$

$$\Rightarrow \sum_{\mathbf{q}} \langle n_{\mathbf{q}} \rangle = \int d\omega D(\omega) \langle n(\omega) \rangle = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{\hbar^2}{J_A S a^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} d\omega \frac{\sqrt{\omega}}{\exp(\hbar\omega_{\mathbf{q}}/k_{\text{B}}T) - 1} = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{k_{\text{B}}T}{J_A a^2 S / \hbar} \right)^{3/2} \underbrace{\int_0^{\infty} dx \frac{\sqrt{x}}{\exp(x) - 1}}_{= 0.0587 \cdot 4\pi^2}$$

$x = \hbar\omega_{\mathbf{q}}/k_{\text{B}}T$

$$\sum_{\mathbf{q}} \langle n_{\mathbf{q}} \rangle = 0.0587 \frac{V}{a^3} \left(\frac{k_{\text{B}}T}{J_A S / \hbar} \right)^{3/2}$$

12.10.1 Austauschdominierte Spinwellen

- T -Abhängigkeit der Magnetisierung in Ferromagneten durch Spin-Wellenanregung**

- Spin-Quantenzahl bei $T = 0$: $N \frac{S}{\hbar}$
- Spin-Quantenzahl bei $T > 0$: $N \frac{S}{\hbar} - \sum_q \langle n_q \rangle$

$$\frac{M_s(0) - M_s(T)}{M_s(0)} = \frac{\Delta M_s}{M_s(0)} = \frac{\sum_q \langle n_q \rangle}{NS/\hbar}$$

$$\frac{\Delta M_s}{M_s(0)} = 0.0587 \frac{V}{Na^3} \frac{\hbar}{S} \left(\frac{k_B T}{J_A S / \hbar} \right)^{3/2} = \frac{0.0587}{QS/\hbar} \left(\frac{k_B T}{J_A S / \hbar} \right)^{3/2}$$

Q = Zahl der
Atome pro
Einheitszelle

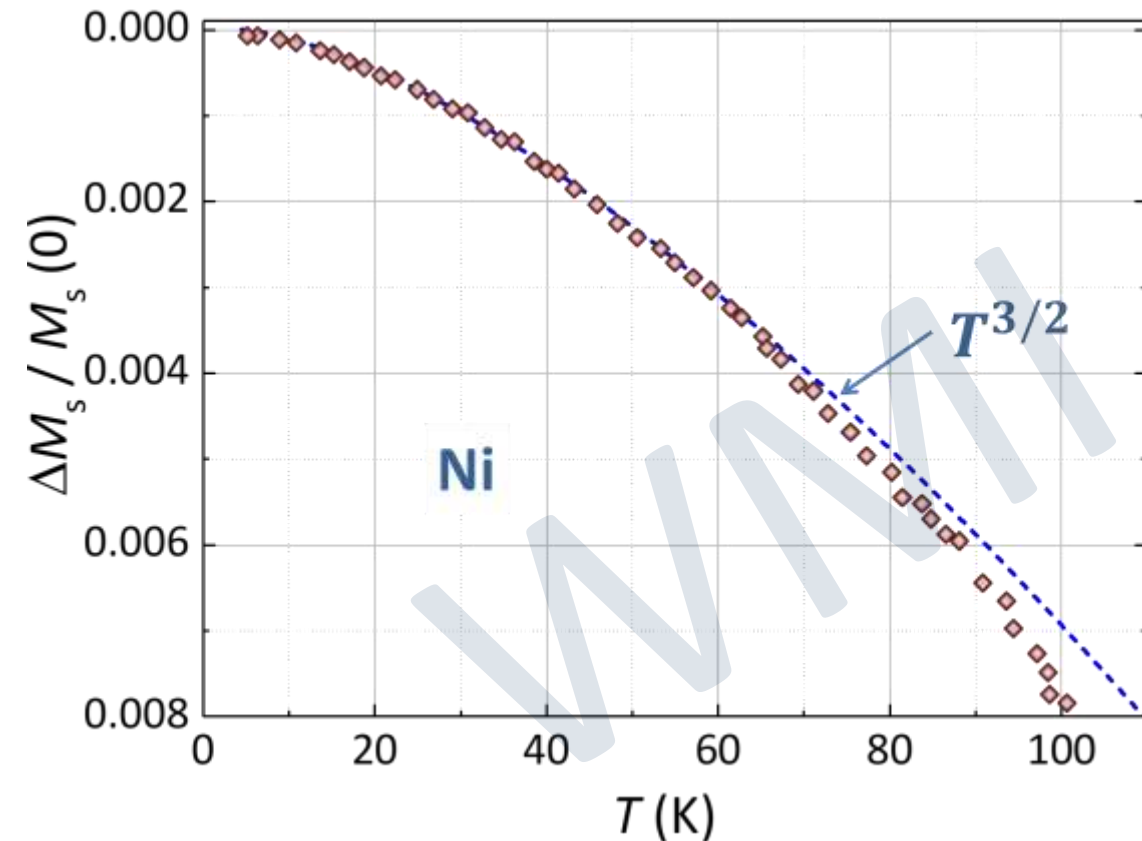
Blochsches $T^{3/2}$ -Gesetz

- Wichtig:**

$\sum_q \langle n_q \rangle = \int d\omega D(\omega) \langle n(\omega) \rangle$ divergiert für 1D- und 2D-Systeme

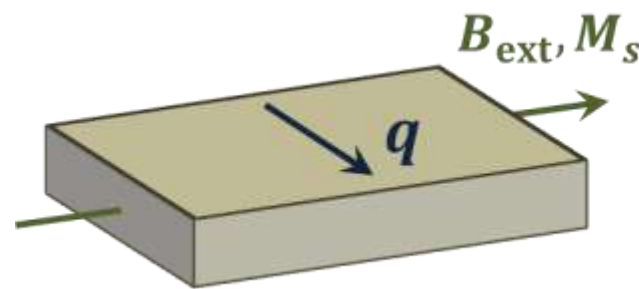
→ Ferromagnetischer Grundzustand sollte instabil sein

→ **Mermin-Wagner-Theorem**

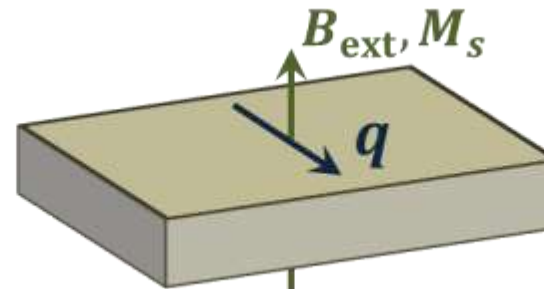


12.10.2 Dipolare Spin-Wellen

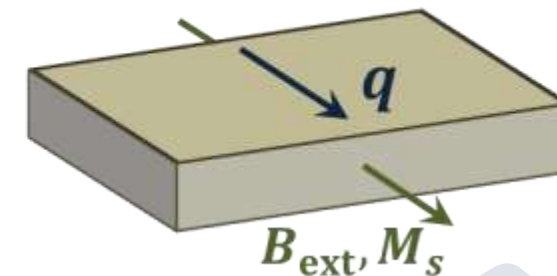
- Für größere Wellenlängen sind benachbarte Spins fast parallel → Änderung der Austauschkopplung vernachlässigbar
 - die auftretenden Spin-Wellen werden durch dipolare Wechselwirkungen bestimmt
 → *dipolare Spin-Wellen oder dipolare/magnetostatische Moden*
 - abhängig von relative Orientierung von $\mathbf{q}$ zu $\mathbf{M}$ bzw. $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ unterscheidet man drei Grundtypen



Damon-Eshbach-Mode
(dipolare Oberflächenmode)



Vorwärts-Volumenmode



Rückwärts-Volumenmode

- Herleitung der Dispersionsrelationen in Spezialvorlesung "Magnetismus"

12.10.3 Antiferromagnetische Spin-Wellen

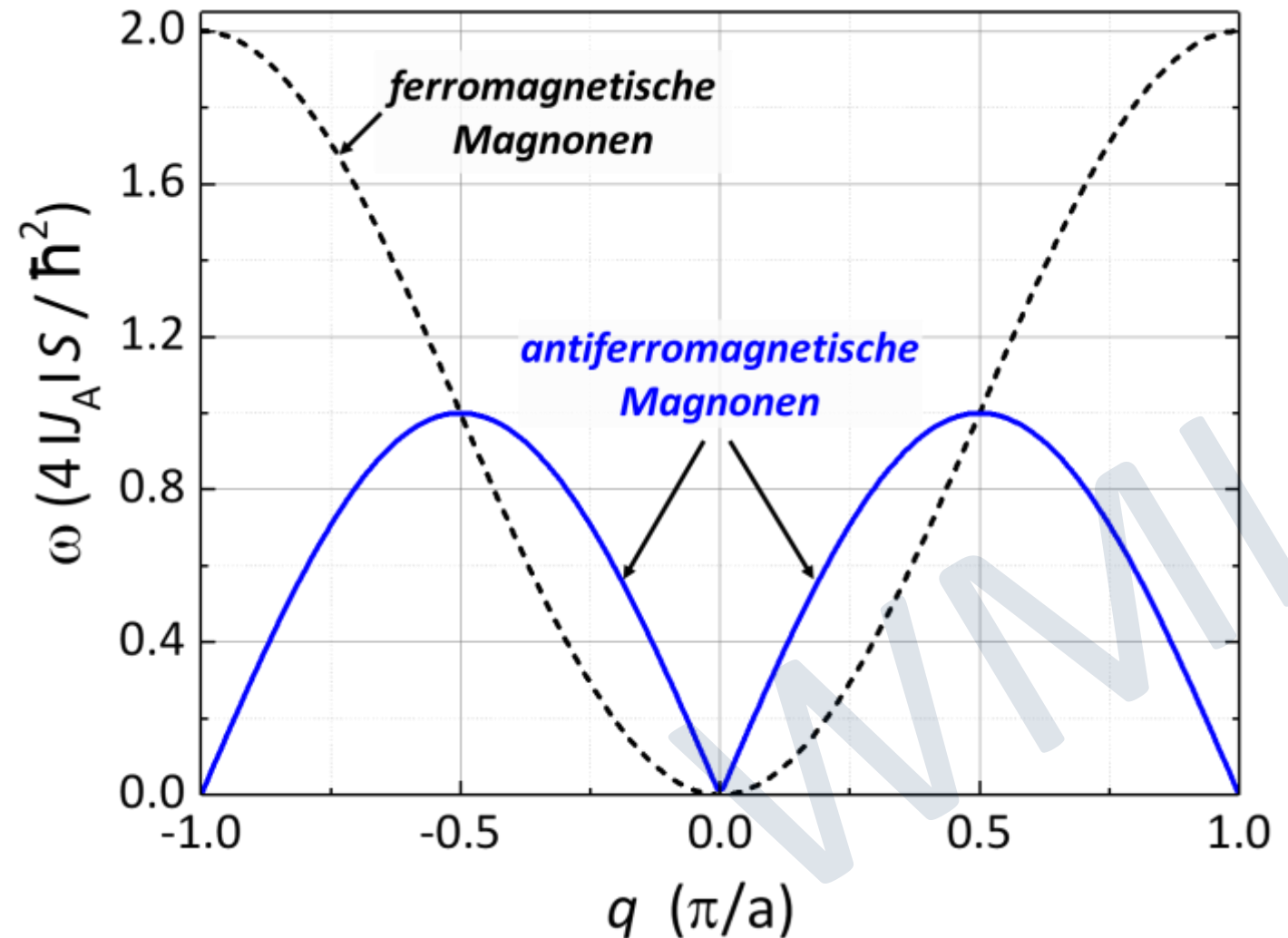
- Herleitung der Dispersionsrelation analog zu ferromagnetischen Spin-Wellen

$$\omega = \frac{2|J_A|S}{\hbar^2} |\sin qa|$$

– Näherung für kleine q : $\sin qa \approx qa$

$$\omega \approx \frac{2|J_A|Sa}{\hbar^2} q$$

→ lineare Dispersion für kleine q



Zusammenfassung: Teil 23a, 18.05.2021/1

• Magnetisierungsdynamik und Spin-Wellen

- Unterscheidung zwischen:
- **homogene Mode:** $q = 0, \lambda = \infty$ (starr gekoppelte Spin können mit $\mathbf{M}$ -Vektor beschreiben werden → **M-Dynamik**)
 - **Austauschmoden:** $q > 0, \lambda < \infty$ (Austauschkopplung dominiert bei kleinen λ)
 - **dipolare Moden:** $q > 0, \lambda < \infty$ (dipolare Kopplung dominiert bei größeren λ)
- **Spin-Wellen**

• homogene Mode

- $\mathbf{M}$ zeigt in Richtung von effektivem Feld $\mathbf{B}_{\text{eff}} = \mathbf{B}_{0,\text{ext}} + \mathbf{B}_{1,\text{ext}}(t) + \mathbf{B}_{\text{ani}} + \mathbf{B}_N + \cancel{\mathbf{B}_A}$
- Auslenkung von $\mathbf{M}$ aus Gleichgewichtslage führt zu Präzessionsbewegung um $\mathbf{B}_{\text{eff}}$:
Drehmoment $\mathbf{T} = V\mathbf{M} \times \mathbf{B}_{\text{eff}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = -\frac{V}{\gamma} \frac{d\mathbf{M}}{dt}$ (γ = gyromagnetisches Verhältnis)

- Bewegungsgleichung:
$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B}_{\text{eff}} + \underbrace{\lambda \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{B}_{\text{eff}})}_{\text{phänomenologischer Dämpfungsterm}} \quad (\text{Landau \& Lifshitz})$$

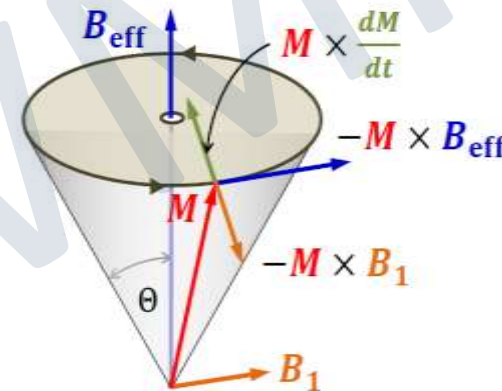
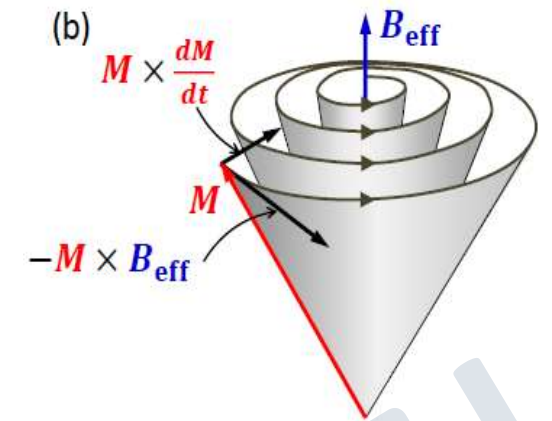
- verbesserte Bewegungsgleichung durch Einführung von Dissipationsterm → $\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B}_{\text{eff}} + \alpha \mathbf{M} \times \frac{d\mathbf{M}}{dt}$

➔
$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\frac{\gamma}{1 + \alpha^2 M^2} \mathbf{M} \times \mathbf{B}_{\text{eff}} + \frac{\alpha\gamma}{1 + \alpha^2 M^2} \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{B}_{\text{eff}}) \quad (\text{Landau-Lifshitz-Gilbert (LLG) Gleichung})$$

• Ferromagnetische Resonanz (FMR)

- resonante Anregung der Präzessionsbewegung durch äußeres Wechselfeld $\mathbf{B}_1(t) = \mathbf{B}_1 \exp(i\omega_1 t)$ senkrecht zu $\mathbf{B}_{\text{eff}}$

Resonanzbedingung: $\omega_1 = \omega_{\text{Präzession}} = \gamma B_{\text{eff}}$



• Änderung der Magnetisierung eines Ferromagneten

- **Umklappen eines Spins** in Spin-Kette: große Anregungsenergie $\sim 4J_A S^2 / \hbar^2$, reduziert Gesamtdrehimpuls um $\hbar$
- **Anregung von Spin-Wellen:** geringere Anregungsenergie $< 4J_A S^2 / \hbar^2$
kollektive Anregung des Spin-Systems, reduziert Gesamtdrehimpuls um $\hbar$

• Ferromagnetische Spin-Wellen: Austauschmoden

- **Spin-Wellen:** Oszillationen der Orientierung von magnetischen Momenten auf Spin-Gitter
- Magnonen:** Quanten der Spin-Wellen $\rightarrow$ Bosonen, gehorchen BE-Statistik
- klassische Beschreibung von Spin-Wellen: Spins = „Vektoren“ der Länge $|\mathbf{S}| = S$
- Bewegungsgleichung: Vereinfachungen $\rightarrow$ 1D Spin-Kette, nur NN-WW

am Spin $\mathbf{S}_i$ angreifendes Drehmoment = Zeitableitung des Drehimpulses $\mathbf{S}_i$

$$\frac{d\mathbf{S}_i}{dt} = \boldsymbol{\mu}_i \times \mathbf{B}_{\text{eff},i} = \frac{g_s \mu_B}{\hbar} (\mathbf{S}_i \times \mathbf{B}_{\text{eff},i}) = -\gamma (\mathbf{S}_i \times \mathbf{B}_{\text{eff},i})$$

$$\mathbf{B}_{\text{eff},i} = \mathbf{B}_{\text{ext}} + \mathbf{B}_{A,i} = \mathbf{B}_{\text{ext}} - \frac{J_A}{g_s \mu_B \hbar} (\mathbf{S}_{i-1} + \mathbf{S}_{i+1})$$

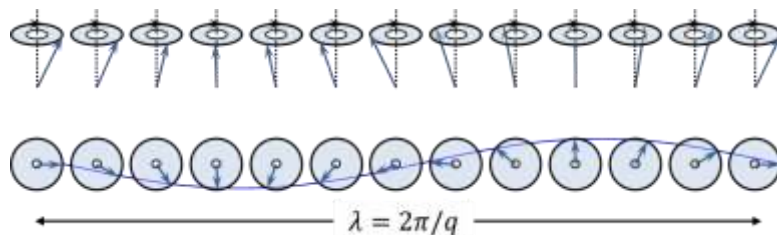
Lösungsansatz: $S_{i,x} = S_x e^{i(qia - \omega t)}$ $S_{i,y} = S_y e^{i(qia - \omega t)}$



$$\omega = \frac{g_s \mu_B B_z}{\hbar} + \frac{2J_A S}{\hbar^2} (1 - \cos qa)$$

für $qa \ll 1$ und $B = 0 \rightarrow \omega \simeq \frac{J_A S a^2}{\hbar^2} q^2 = A q^2$

$A = \text{Spin-Steifigkeit}$



• *T-Abhängigkeit von M_s*

➤ Gesamtzahl der Magnonen $\sum_q \langle n_q \rangle = \int d\omega D(\omega) \langle n(\omega) \rangle$

$$\Rightarrow \sum_q \langle n_q \rangle = 0.0587 \frac{V}{a^3} \left(\frac{k_B T}{J_A S / \hbar} \right)^{3/2}$$

➤ Spin-Quantenzahl bei $T = 0$: $NS/\hbar$
 $T > 0$: $NS/\hbar - \sum_q n_q$

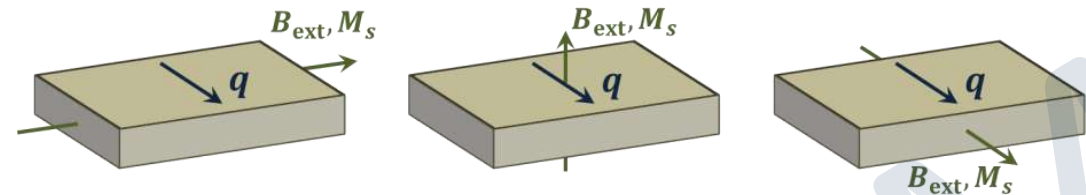
$$\Rightarrow \frac{M_s(0) - M_s(T)}{M_s(0)} = \frac{\Delta M_s}{M_s(0)} = \frac{\sum_q \langle n_q \rangle}{NS/\hbar}$$

$$\frac{\Delta M_s}{M_s(0)} = 0.0587 \frac{V}{Na^3} \frac{\hbar}{S} \left(\frac{k_B T}{J_A S / \hbar} \right)^{3/2}$$

Blochsches $T^{3/2}$ -Gesetz

• *Ferromagnetische Spin-Wellen: dipolare Moden*

➤ (a) Damon-Eshbach-Moden, (b) Vorwärts-Volumenmode
 (c) Rückwärts-Volumenmode



• *Antiferromagnetische Spin-Wellen*

$$\omega = \frac{2|J_A|S}{\hbar^2} |\sin qa|$$

lineare Dispersion für kleine q