Physik der Kondensierten Materie 2

Rudolf Gross

SS 2021

Teil 26

Vorlesungsstunde: 31.05.2021-2

Zusammenfassung: Teil 25a, 31.05.2021/1

- ***Grundlegende Eigenschaften***

d. ***Typ-I und Typ-II Supraleitung***, Shubnikov-Phase

➔ Typ-I Supraleiter zeigen perfekte Feldverdrängung für $B_{\mathrm{ext}} \leq B_{\mathrm{cth}}$

➔ Typ-II Supraleiter zeigen Mischzustand mit nur partieller Feldverdrängung in Feldbereich $B_{c1} < B_{\mathrm{ext}} < B_{c2}$ wobei $B_{c1} < B_{\mathrm{cth}} < B_{c2}$

e. ***Fluss-Quantisierung***:

➔ der in einem supraleitendem Hohlzylinder eingefangene magnetische Fluss ist quantisiert

$$\Phi = n \cdot \Phi_0, \qquad \Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2.067\,833\,636(81) \times 10^{-15}\ \mathrm{Vs}$$

f. ***Josephson-Effekt***:

➔ Suprastrom zwischen schwach gekoppelten Supraleitern (Tunneln von Cooper-Paaren)

Josephson-Gleichungen: $J_s = J_c \sin\varphi$, $\quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2eU}{\hbar}$ (φ = Phasendifferenz)

Zusammenfassung: Teil 25b, 31.04.2021/1

- ***Thermodynamische Eigenschaften von SL***

  - geeignetes thermodynamisches Potenzial: ***freie Enthalpie G_s, freie Enthalpiedichte $g_s = G_s/V$***

$$dG_s = -SdT + Vdp - \mathbf{m}\cdot d\mathbf{B}_{\rm ext} \qquad \textit{(unabhängige Variablen: } T, p, B_{\rm ext}\textit{)},\ \mathbf{m} = V\,\mathbf{M}$$

  - thermodynamische Größen (*Entropie, Volumen, magnetisches Moment*)

$$-\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{p,B} = S \qquad \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_{T,B} = V \qquad -\left(\frac{\partial G}{\partial B}\right)_{p,T} = m \qquad \Rightarrow \quad c_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{p,B} = -T\left(\frac{\partial^2 G}{\partial T^2}\right)_{p,B}$$ *Wärmekapazität*

- ***Typ-I Supraleiter im Magnetfeld***

  – $B_{\rm ext} < B_{\rm cth}$: $\qquad \mathbf{M} = \frac{\mathbf{m}}{V} = -\mathbf{H}_{\rm ext} = -\frac{\mathbf{B}_{\rm ext}}{\mu_0}$

  – Differenzial der freien Enthalpie: $\quad dG_s = -SdT + Vdp - \underbrace{\mathbf{m}\cdot d\mathbf{B}_{\rm ext} = -\mathbf{m}\cdot d\mathbf{B}_{\rm ext}}_{@\, p\, =\, const.,\quad T\, =\, const.}$

mit $m = -VB_{\rm ext}/\mu_0$ folgt: $\qquad dg_s = -\mathbf{M}\cdot d\mathbf{B}_{\rm ext} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}_{\rm ext}\cdot d\mathbf{B}_{\rm ext}$

  – Integration ergibt: $\qquad g_s(B_{\rm cth}, T) - g_s(0,T) = \int_0^{B_{\rm cth}} B'\, dB' = B_{\rm cth}^2/2\mu_0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta g(T) = g_n(0,T) - g_s(0,T) = B_{\rm cth}^2(T)/2\mu_0}$$ ***Kondensationsenergiedichte***

  – Entropiedichte:

$$\Delta s(T) = s_n(T) - s_s(T) = -\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial T}\right)_{p,B_{ext}} = -\frac{B_{\rm cth}}{\mu_0}\frac{\partial B_{\rm cth}}{\partial T}\begin{cases} - \; T \to T_c: & B_{\rm cth} \to 0 \\ - \; T \to 0: & \frac{\partial B_{\rm cth}}{\partial T} \to 0 \\ - \; 0 < T < T_c: & \frac{\partial B_{\rm cth}}{\partial T} > 0 \end{cases}$$

➔ $\Delta s \to 0$ und $\frac{\Delta Q}{V} = T_c \Delta s \to 0$

➔ $\Delta s \to 0$ gemäß 3. Hauptsatz

➔ $\Delta s > 0$, d.h. $s_n > s_s$

- ***Typ-I Supraleiter im Magnetfeld***
  - Wärmekapazität: aus $\Delta g(T) = g_n(0,T) - g_s(0,T) = B_{\mathrm{cth}}^2/2\mu_0$ und $c_p = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{p,B_{\mathrm{ext}}} = -T\left(\frac{\partial^2 g}{\partial T^2}\right)_{p,B_{\mathrm{ext}}}$ folgt

$$\Delta c = c_n - c_s = -\frac{T}{\mu_0}\left[B_{\mathrm{cth}}\frac{\partial^2 B_{\mathrm{cth}}}{\partial T^2} + \left(\frac{\partial B_{\mathrm{cth}}}{\partial T}\right)^2\right]$$

Rutgers-Formel

- $T = T_c$: ***Sprung der spezifischen Wärme***

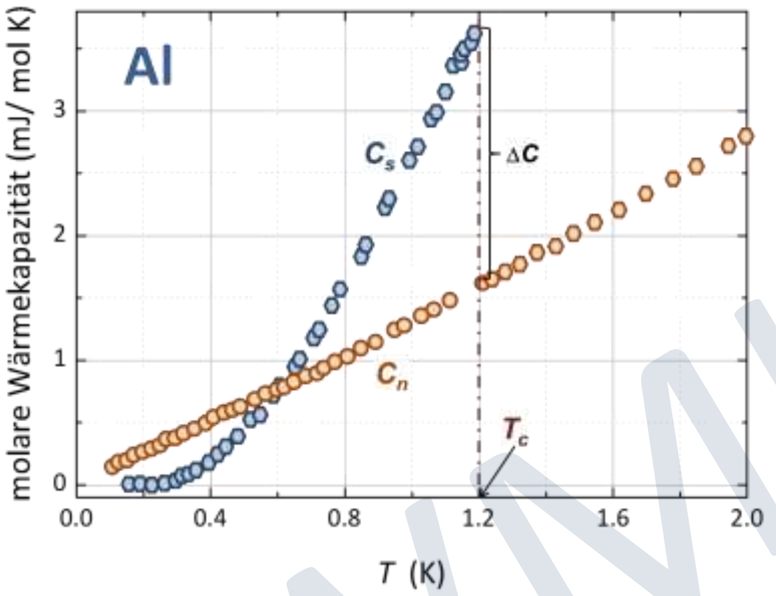
$$\Delta c_{T=T_c} = (c_n - c_s)_{T=T_c} = -\frac{T_c}{\mu_0}\left(\frac{\partial B_{\mathrm{cth}}}{\partial T}\right)^2_{T=T_c}$$

- $T \ll T_c$: ***Bestimmung des Sommerfeld-Koeffizienten*** $\gamma = \frac{c_n}{T} \simeq \frac{\Delta c}{T}$

$$\gamma \simeq \frac{\Delta c}{T} = -\frac{1}{\mu_0}B_{\mathrm{cth}}\frac{\partial^2 B_{\mathrm{cth}}}{\partial T^2} = \frac{2}{\mu_0}\frac{B_{\mathrm{cth}}(0)}{T_c^2}$$

aus T_c und $B_{\mathrm{cth}}(T=0)$ kann γ bestimmt werden:

$$\gamma = \frac{4}{T_c^2}\frac{B_{\mathrm{cth}}^2(0)}{2\mu_0} = \frac{\pi^2}{3}k_{\mathrm{B}}^2\frac{D(E_{\mathrm{F}})}{V}$$



- ***Typ-II Supraleiter im Magnetfeld***
  - gleiches Verhalten wie Typ-I SL für $B_{\mathrm{ext}} < B_{c1}$ (Meißner-Phase)
  - für $B_{c1} < B_{\mathrm{ext}} < B_{c2}$ (Shubnikov-Phase) etwas komplexeres Verhalten

Kapitel 13

Supraleitung

13.3 Phänomenologische Modelle

- Entwicklung der ersten mikroskopischen Theorie der Supraleitung dauerte mehr als 45 Jahre
  ➔ zuerst Beschreibung mit phänomenologischen Modellen

I. London-Modell (Zweiflüssigkeiten-Modell)

II. Supraleitung als makroskopisches Quantenphänomen

III. Ginzburg-Landau Theorie

Beschreibung der perfekten Leitfähigkeit und des Meißner-Ochsenfeld-Effekts mit London-Gleichungen (1935)

– Ausgangspunkt ist Bewegungsgleichung für Ladungsträger mit Masse m und Ladung q und mittlerer Streuzeit τ

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\mathbf{v}}{\tau} = q\,\mathbf{E}$$

– **Annahme**: Wir können Ladungsträger in „***zwei Flüssigkeiten***“ aufteilen

$$n = n_s + n_n \qquad \text{mit } n_n \rightarrow 0 \text{ und } n_s \rightarrow n \text{ für } T \rightarrow 0$$
$$\qquad\qquad\qquad \text{mit } n_n \rightarrow n \text{ und } n_s \rightarrow 0 \text{ für } T \rightarrow T_c$$

für Supraflüssigkeit wird $\tau \rightarrow \infty$ angenommen, damit $\sigma_s = \frac{n_s q_s^2 \tau}{m_s} \rightarrow \infty$

– mit allgemeinem Ausdruck $\mathbf{J}_s = n_s q_s \mathbf{v}_s$ ergibt sich sofort die ***1. London-Gleichung***

$$\boxed{\frac{m_s}{q_s^2 n_s}\frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t} = \mathbf{E}}$$

mit $\Lambda = \frac{m_s}{q_s^2 n_s} =$ London-Koeffizient

➔ beschreibt ***widerstandslosen Stromtransport***

Problem: für $\tau \rightarrow \infty$ geht auch $\ell = v_\mathrm{F}\tau \rightarrow \infty$

➔ Verwendung von lokalen Beziehungen zwischen $\mathbf{J}_s, \mathbf{E}$ und $\mathbf{b}$ ist problematisch

➔ nichtlokale Verallgemeinerung wurde von Pippard vorgenommen (1953)

Beschreibung der perfekten Leitfähigkeit und des Meißner-Ochsenfeld-Effekts mit London-Gleichungen (1935)

– mit Faradayschem Induktionsgesetz $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{b}/\partial t$ ergibt sich mit 1. London-Gleichung
(um besser zwischen der Flussdichte auf einer mikroskopischen Skala und makroskopischen Mittelwerten zu unterscheiden, wird für die lokale Flussdichte **b** und für den makroskopischen Mittelwert **B** verwendet)

$$\frac{\partial(\Lambda \mathbf{J}_s)}{\partial t} = \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}[\nabla \times (\Lambda \mathbf{J}_s) + \mathbf{b}] = 0$$

Gleichung gilt allgemein für alle idealen Leiter:
magnetischer Fluss durch eine beliebige Fläche innerhalb bleibt zeitlich unverändert

– Beobachtung von Meißner-Ochsenfeld-Effekt

➔ in Supraleiter muss nicht nur die zeitlich Änderung der Flussdichte, sondern diese selbst verschwinden

➔ Klammerausdruck [] selbst und nicht nur seine Zeitableitung muss verschwinden

2. London-Gleichung

$$\boxed{\nabla \times (\Lambda \mathbf{J}_s) + \mathbf{b} = \mathbf{0}}$$

➔ beschreibt ***perfekte Feldverdrängung***

zusammen mit den Maxwell-Gleichungen beschreiben die beiden London-Gleichungen das Verhalten von Supraleitern in elektrischen und magnetischen Feldern

13.3.1 London-Modell

Umformung der 2. London-Gleichung

- wir benutzen Maxwell-Gleichung $\nabla \times \mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{J}_s$ (wir vernachlässigen Verschiebungsstrom $\partial\mathbf{D}/\partial t$)
- wir bilden von Rotation und benutzen die 2. London-Gleichung:

$$\nabla \times (\Lambda \mathbf{J}_s) + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \left(\frac{\Lambda}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{b} \right) + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b} = -\frac{\Lambda}{\mu_0} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{b})$$

– mit $\nabla \times \nabla \times \mathbf{b} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \nabla^2 \mathbf{b}$ und $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$ erhalten wir

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{b} - \frac{\mu_0}{\Lambda} \mathbf{b} = \nabla^2 \mathbf{b} - \frac{1}{\lambda_\mathrm{L}^2} \mathbf{b} = \mathbf{0}} \qquad \text{mit} \qquad \boxed{\lambda_\mathrm{L} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{m_s}{\mu_0 n_s q_s^2}}}$$

Londonsche Eindringtiefe

(im Wesentlichen bestimmt durch Dichte der "supraleitenden" Ladungsträger)

– **Wichtig**: durch Messung von λ_L können wir nicht auf Cooper-Paare schließen!

$n_s \to \frac{n}{2}$, $q_s \to 2e$, $m_s \to 2m_e$ ➔ $\Lambda = \frac{m_s}{n_s q_s^2}$ bleibt unverändert

– **Beispiel**: $\mathbf{B}_{\text{ext}} \,||\, \hat{\mathbf{z}}$, Supraleiter in Halbraum $x \geq 0$:

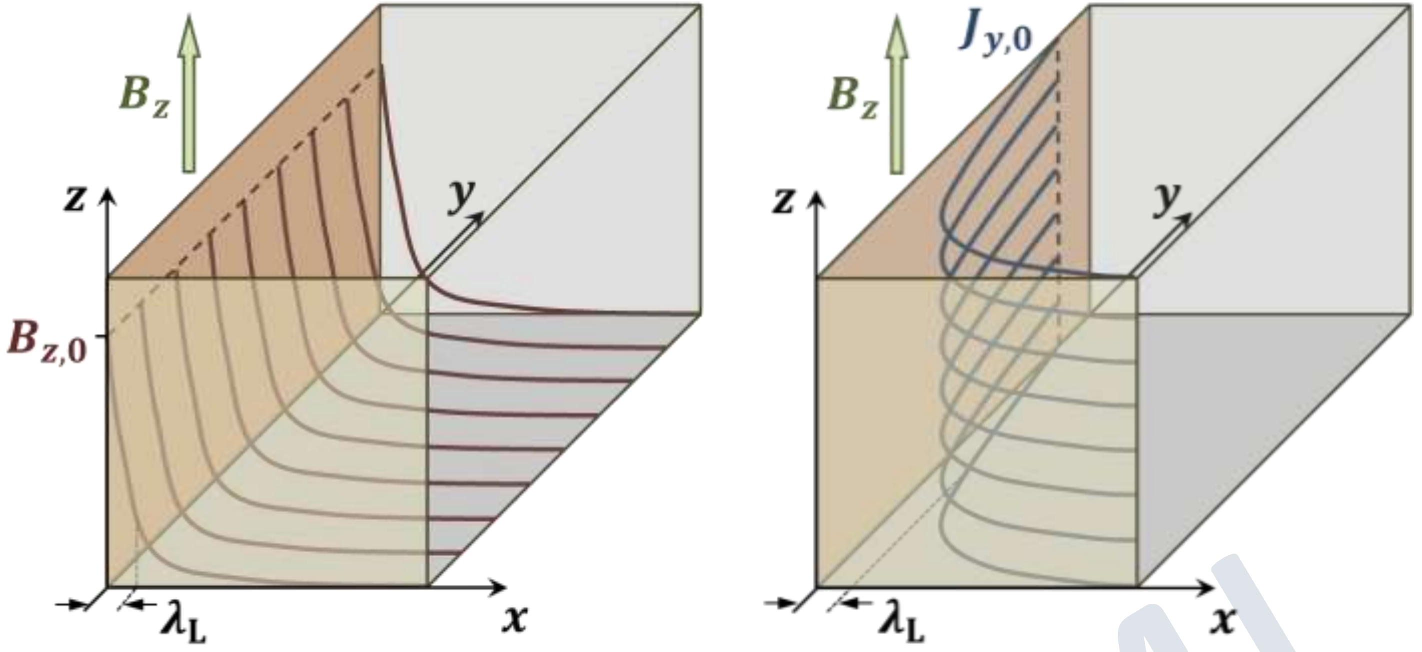
$$\frac{d^2 b_z}{dx^2} = \frac{1}{\lambda_{\mathrm{L}}^2}\, b_z$$

Lösung: $b_z(x) = B_{\text{ext},z} \exp(-x/\lambda_{\mathrm{L}})$

– aus $\boldsymbol{\nabla} \times (\Lambda \mathbf{J}_s) + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ folgt:

$$J_{s,y}(x) = J_{s,y}(0) \exp(-x/\lambda_{\mathrm{L}})$$

$$J_{s,y}(0) = \frac{B_{\text{ext,z}}/\mu_0}{\lambda_{\mathrm{L}}}$$



➔ sowohl Magnetfeld als auch Stromdichte klingen exponentiell im Inneren des Supraleiters ab

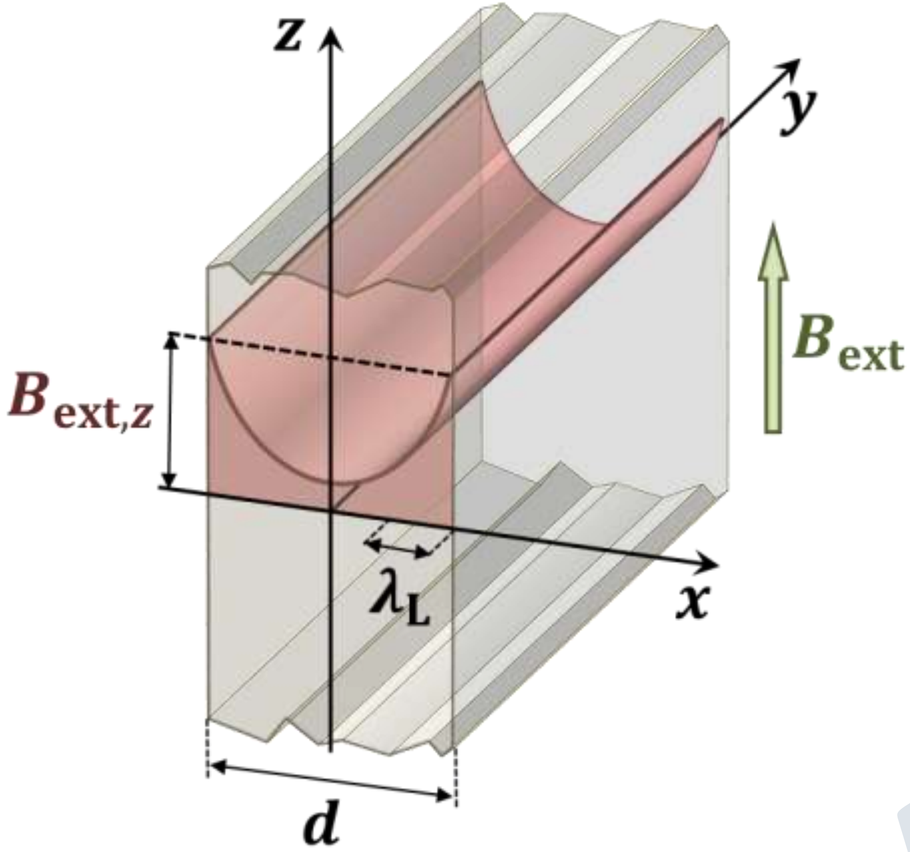
➔ charakteristische Längenskala ist London-Eindringtiefe: ***typische Werte liegen zwischen 0.01 und 1 µm***

– **Temperaturabhängigkeit**: $$\lambda_{\mathrm{L}} = \frac{\lambda_{\mathrm{L}}(0)}{\sqrt{1-(T/T_c)^4}}$$ (empirische Formel: Gorter & Kasimir, 1934)

$\lambda_{\mathrm{L}}(T)$ divergiert für $T \to T_c$

– **Beispiel**: dünner supraleitender Film

$$b_z(x) = B_{\mathrm{ext},z} \frac{\cosh(x/\lambda_\mathrm{L})}{\cosh(d/2\lambda_\mathrm{L})}$$



➔ supraleitender Film mit Dicke $d < \lambda_\mathrm{L}$ kann keine vollständige Feldverdrängung aufzeigen!

13.3.2 SL als makroskopisches Quantenphänomen

Beschreibung des supraleitenden Zustands durch eine makroskopische Wellenfunktion

- Herleitung der London-Gleichungen durch die Annahme möglich, dass der supraleitende Grundzustand mit einer ***makroskopischen Wellenfunktion*** beschrieben werden kann
- Fritz London (1948): Ableitung der London-Gleichungen mit grundlegenden quantenmechanischen Konzepten
- Beleg für Gültigkeit diesen Ansatzes: Fluss-Quantisierung, Josephson-Effekt
- Theoretische Begründung durch BCS-Theorie (1957)

- **Grundhypothese**: es existiert eine ***makroskopische Wellenfunktion***

$$\psi_s(\mathbf{r},t) = \psi_0(\mathbf{r},t)\, e^{i\theta(\mathbf{r},t)}$$

welche die Gesamtheit der supraleitenden Elektronen beschreibt

- **Normierung**:

$$\int \psi_s^\star(\mathbf{r},t)\psi_s(\mathbf{r},t)\ \mathrm{d}V = N_s$$

bzw.

$$|\psi_s(\mathbf{r},t)| = \psi_s^\star(\mathbf{r},t)\psi_s(\mathbf{r},t) = n_s$$

Wichtig: Im Gegensatz zur üblichen Interpretation von $|\psi_s(\mathbf{r},t)|^2$ als quantenmechanische Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen am Ort $\mathbf{r}$ zur Zeit t aufzufinden, assoziieren wir $|\psi_s(\mathbf{r},t)|^2$ jetzt mit der Teilchenzahldichte $n_s(\mathbf{r},t)$.

Wiederholung: Schrödinger-Gleichung für geladenes Teilchen in einem Magnetfeld

– wir verwenden:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\left(\phi_{\mathrm{el}} + \frac{\mu}{q}\right) = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\phi \qquad \phi(\mathbf{r},t) = \phi_{\mathrm{el}}(\mathbf{r},t) + \mu(\mathbf{r},t)/q$$

(elektrochemisches Potenzial)

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$$

– Schrödinger-Gleichung für geladenes Teilchen in Magnetfeld:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right)^2 \Psi(\mathbf{r},t) + [q\phi_{\mathrm{el}}(\mathbf{r},t) + \mu(\mathbf{r},t)]\,\Psi(\mathbf{r},t) = i\hbar\frac{\partial \Psi(\mathbf{r},t)}{\partial t}$$

– **Madelung-Transformation**: wir machen folgende Ersetzungen

$$\Psi(\mathbf{r},t) \rightarrow \psi_s(\mathbf{r},t) = \psi_0(\mathbf{r},t)\, e^{i\theta(\mathbf{r},t)}$$
$$m \rightarrow m_s$$
$$q \rightarrow q_s$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{2m_s}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q_s\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right)^2 \psi_s(\mathbf{r},t) + [q_s\phi_{\mathrm{el}}(\mathbf{r},t) + \mu(\mathbf{r},t)]\,\psi_s(\mathbf{r},t) = i\hbar\frac{\partial \psi_s(\mathbf{r},t)}{\partial t}}$$

Einsetzen der makroskopischen Wellenfunktion und Aufspalten in Real- und Imaginärteil liefert folgende Beziehungen

(längliche Rechnung: siehe Gross & Marx, Anhang H.1)

I. Imaginärteil:

$$\underbrace{\frac{\partial \psi_0^2(\mathbf{r},t)}{\partial t}}_{=\partial n_s/\partial t} = -\nabla \cdot \underbrace{\left(\frac{\psi_0^2}{m_s}[\hbar\nabla\theta(\mathbf{r},t) - q_s\mathbf{A}(\mathbf{r},t)]\right)}_{=n_s\mathbf{v}_s = \mathbf{J}_\rho}$$

➔ ***Kontinuitätsgleichung*** $\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_\rho = 0$ für die Teilchenstromdichte $\mathbf{J}_\rho$

- Übergang zur elektrischen Stromdichte $\mathbf{J}_s = q_s\mathbf{J}_\rho$

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{r},t) = q_s n_s(\mathbf{r},t) \underbrace{\left\{\frac{\hbar}{m_s}\nabla\theta(\mathbf{r},t) - \frac{q_s}{m_s}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right\}}_{\mathbf{v}_s}$$

Strom-Phasen-Beziehung (eichinvariant)

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{r},t) = \frac{q_s n_s(\mathbf{r},t)\hbar}{m_s} \underbrace{\left\{\nabla\theta(\mathbf{r},t) - \frac{q_s}{\hbar}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right\}}$$

eichinvarianter Phasengradient $\nabla\theta' - \frac{q_s}{\hbar}\mathbf{A}' = \nabla\theta - \frac{q_s}{\hbar}\mathbf{A}$

- ***Suprastromdichte ist proportional zu eichinvariantem Phasengradienten*** (im Normalleiter ist $\mathbf{J}_n \propto -\nabla\phi = \mathbf{E}$)

II. Realteil:

$$\hbar\frac{\partial\theta(\mathbf{r},t)}{\partial t}+\frac{1}{2n_s}\Lambda J_s^2(\mathbf{r},t)+q_s\phi(\mathbf{r},t)=\underbrace{\frac{\hbar^2\nabla^2\psi_0(\mathbf{r},t)}{2m_s\psi_0(\mathbf{r},t)}}_{\text{kann für räumlich homogene Systeme vernachlässigt werden}}$$

$$\Lambda=\frac{m_s}{q_s^2 n_s}=\text{ London-Koeffizient}$$

$$\hbar\frac{\partial\theta(\mathbf{r},t)}{\partial t}=-\underbrace{\left\{\frac{1}{2n_s}\Lambda J_s^2(\mathbf{r},t)+q_s\phi_{\mathrm{el}}(\mathbf{r},t)+\mu(\mathbf{r},t)\right\}}_{\text{Gesamtenergie}}$$

Energie-Phasen-Beziehung

➔ Beziehung wird Energie-Phasen-Beziehung genannt, da $\partial\theta/\partial t \propto$ Gesamtenergie

➔ da $\hbar\theta = S$ (Wirkung) folgt $\partial S/\partial t = -H$ (Äquivalenz zur Hamilton-Jacobi-Gleichung der klassischen Physik)

– Anwendung des makroskopische Quantenmodells sowohl für die Beschreibung von geladenen als auch von ungeladenen Quantenflüssigkeiten

$$q_s = k\cdot q \qquad m_s = k\cdot m \qquad n_s = n/k$$

i. $q=-e,\ k=2$: klassischer Supraleiter mit $q_s=-2e, m_s=2m$ und $n_s=n/2$

ii. $q=0,\ k=1$: neutrale Bose-Suprafluüssigkeit mit $n_s=n, m_s=m$ (suprafluides ^{4}He)

iii. $q=0,\ k=2$: neutrale Fermi-Suprafluüssigkeit mit $n_s=n/2, m_s=2m$ (suprafluides ^{3}He)

Herleitung der London-Gleichungen aus der Strom-Phasen- und der Energie-Phasen-Beziehung

– Ausgangspunkt ist $\mathbf{J}_s(\mathbf{r},t) = q_s n_s \left\{\frac{\hbar}{m_s}\nabla\theta(\mathbf{r},t) - \frac{q_s}{m_s}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right\}$ ➡ $\Lambda\mathbf{J}_s(\mathbf{r},t) = -\left\{\mathbf{A}(\mathbf{r},t) - \frac{\hbar}{q_s}\nabla\theta(\mathbf{r},t)\right\}$

$\Lambda = \frac{m_s}{q_s^2 n_s} =$ London-Koeffizient

– Anwenden von $\nabla\times$ auf beiden Seiten der Strom-Phasen-Beziehung:

$$\nabla\times\Lambda\mathbf{J}_s(\mathbf{r},t) + \nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \nabla\times\left\{\frac{\hbar}{q_s}\nabla\theta(\mathbf{r},t)\right\} = 0$$

➡ $\boxed{\nabla\times\Lambda\mathbf{J}_s(\mathbf{r},t) + \mathbf{b}(\mathbf{r},t) = 0}$ **2. London-Gleichung**

– Anwenden von $\partial/\partial t$ auf beiden Seiten der Strom-Phasen-Beziehung:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Lambda\mathbf{J}_s(\mathbf{r},t) = -\left\{\frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t} - \frac{1}{q_s}\nabla\left(\underbrace{\frac{\hbar\partial\theta(\mathbf{r},t)}{\partial t}}\right)\right\}$$

wir benutzen $\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\left(\phi_{\mathrm{el}} + \frac{\mu}{q}\right)$

und $\hbar\frac{\partial\theta(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -\left\{\frac{1}{2n_s}\Lambda J_s^2(\mathbf{r},t) + q_s\phi_{\mathrm{el}}(\mathbf{r},t) + \mu(\mathbf{r},t)\right\}$

➡ $\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\Lambda\mathbf{J}_s(\mathbf{r},t) = \mathbf{E} - \underbrace{\frac{1}{n_s q_s}\nabla\left(\frac{1}{2}\Lambda J_s^2\right)}}$ **1. London-Gleichung**

kann fast immer vernachlässigt werden ➔ **linearisierte 1. London-Gleichung**

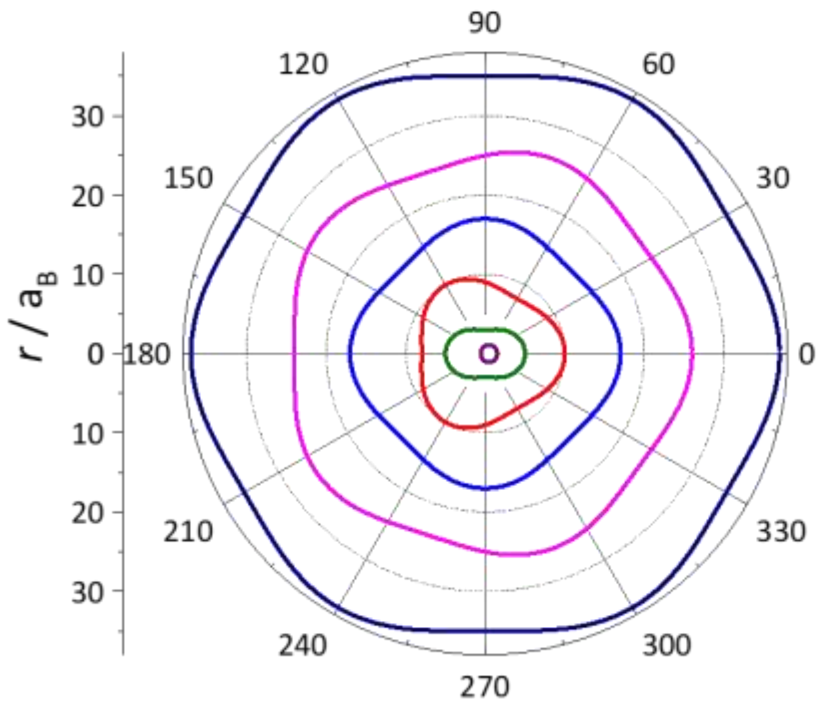
Interpretation und Bedeutung der London-Gleichungen

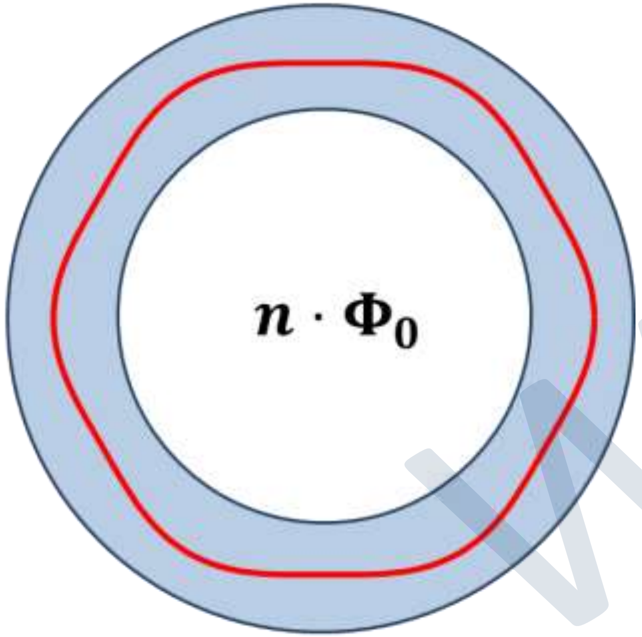
- Die London-Gleichungen können direkt aus dem allgemeinen Ausdruck für die Suprastromdichte $\mathbf{J}_s$ abgeleitet werden, der wiederum direkt aus der Tatsache folgt, dass der supraleitende Zustand durch eine makroskopische Wellenfunktion beschrieben werden kann.
- Die London-Gleichungen beschreiben zusammen mit den Maxwell-Gleichungen das Verhalten von Supraleitern in elektrischen und magnetischen Feldern
- London-Gleichungen beschreiben zeitabhängige Phänomene, sind aber nicht geeignet zur Beschreibung von räumlich inhomogenen Situationen (bei Herleitung wurde $|\psi_0(\mathbf{r},t)|^2 = const.$ angenommen)

Fluxoid- und Fluss-Quantisierung

– Konsequenz der makroskopischen Wellenfunktion:
Quantisierung des magnetischen Flusses in mehrfach zusammenhängendem Supraleiter (z.B. Hohlzylinder)

- ➢ Phase darf sich bei Umlauf nur um $n \cdot 2\pi$ ändern, damit stationärer Zustand erhalten wird
- ➢ Analogie zu Bohr-Sommerfeld-Quantisierung in Atommodell



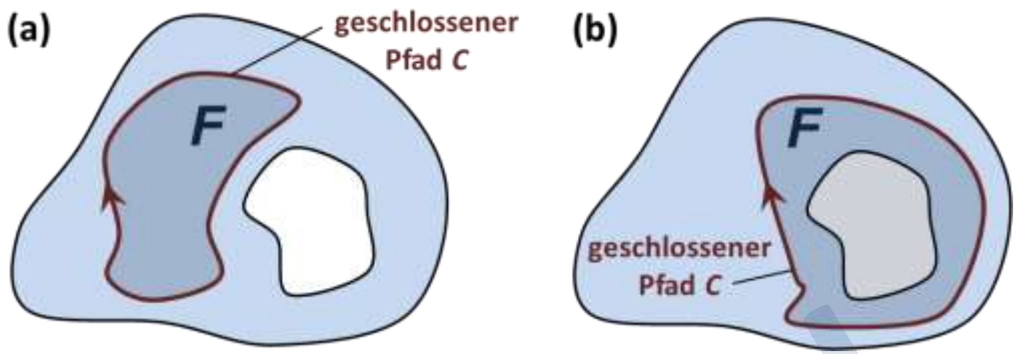


Herleitung der Fluxoid- und Fluss-Quantisierung aus der Strom-Phasen-Beziehung

– Ausgangspunkt ist wiederum $$\Lambda \mathbf{J}_s(\mathbf{r},t) = -\left\{\mathbf{A}(\mathbf{r},t) - \frac{\hbar}{q_s}\nabla\theta(\mathbf{r},t)\right\}$$

$$\Lambda = \frac{m_s}{q_s^2 n_s} = \text{London-Koeffizient}$$

– Ausführen von Ringintegral



$$\oint_C \Lambda \mathbf{J}_s \cdot d\ell + \oint_C \mathbf{A} \cdot d\ell = \frac{\hbar}{q_s}\oint_C \nabla\theta(\mathbf{r},t) \cdot d\ell$$

Stokesscher Satz:

$$\int_F (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\; dF = \int_F \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}}\; dF = \Phi$$

$$\oint_C \nabla\theta(\mathbf{r},t) \cdot d\ell = \lim_{r_2 \to r_1}[\theta(\mathbf{r}_2,t) - \theta(\mathbf{r}_1,t)] = 2\pi \cdot n$$

$$\underbrace{\oint_C \Lambda \mathbf{J}_s \cdot d\ell + \int_F \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}}\; dF}_{\text{Fluxoid}} = n \cdot \frac{h}{q_s} = n \cdot \Phi_0$$

Fluxoid-Quantisierung

Flussquant: $\Phi_0 = h/|q_s| = h/2e = 2{,}067\,833\,831(13) \times 10^{-15}$ Vs

Fluss-Quantisierung vs. Fluxoid-Quantisierung

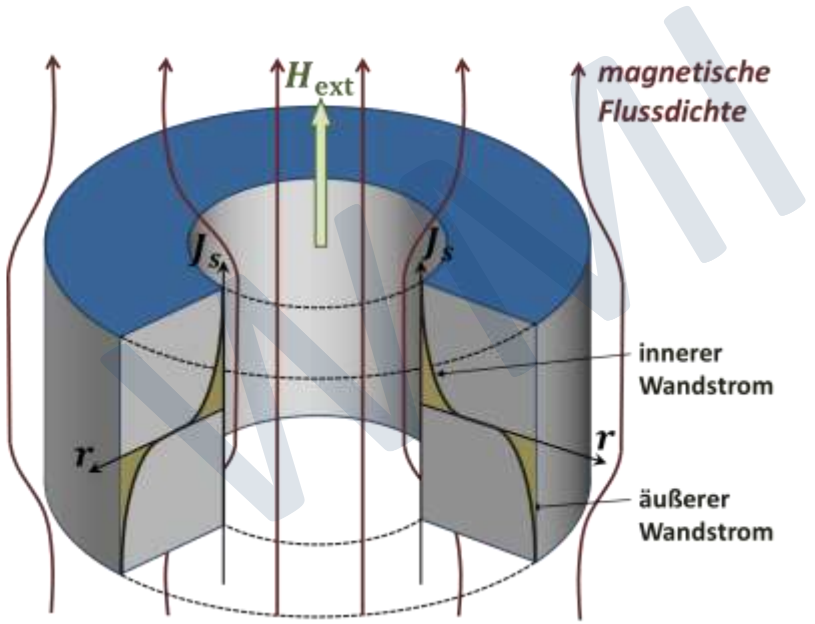
- **Wichtig**:
  - ➢ **Fluxoid-Quantisierung** gilt immer
  - ➢ **Fluss-Quantisierung** erhalten wir nur, wenn $\oint_C \Lambda \mathbf{J}_s \cdot d\ell = 0$

➔ Integrationspfad, entlang dem $\mathbf{J}_s = 0$, z.B. tief im Inneren eines Supraleiters

$$\oint_C \Lambda \mathbf{J}_s \cdot d\ell + \int_F \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}}\; dF = n \cdot \frac{h}{q_s} = n \cdot \Phi_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_F \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}}\; dF = \Phi = n \cdot \Phi_0}$$

Fluss-Quantisierung

- **Beispiel**: ***Supraleitender Hohlzylinder***, Wanddicke größer als λ_L
  - ➢ Anlegen von B_cool während des Abkühlens: Abschirmströme auf äußerer und innerer Zylinderwand
  - ➢ Menge des eingefrorenen Flusses muss Fluxoid-Quantisierung erfüllen
  - ➢ Wanddicke $\gg \lambda_L$: Integrationsweg kann tief im Inneren des SL gewählt werden, wo $J_s = 0$
  - ➢ Ausschalten des Feldes nach Herunterkühlen
    ➔ eingefrorener Fluss = ganzzahliges Vielfaches von Fluss-Quant



Zusammenfassung: Teil 26a, 31.05.2021/2

- ***Phänomenologische Modelle: A. London-Modell und London-Gleichungen***

Zweiflüssigkeiten-Modell: $n = n_n + n_s$ für $T \to 0$: $n_s \to n$, für $T \to T_c$: $n_s \to 0$

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\mathbf{v}}{\tau} = q\,\mathbf{E} \quad \text{mit } \tau \to \infty \text{ und } J_s = n_s q_s v_s \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\Lambda\mathbf{J}_s = \mathbf{E}}$$

1. London-Gleichung

$$\Lambda = \frac{m_s}{n_s q_s^2}$$

London-Parameter

Einsetzen von 1. London-Gl. in $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{b}/\partial t$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial}{\partial t}[\nabla \times (\Lambda\mathbf{J}_s) + \mathbf{b}] = 0$

Experiment: Klammerausdruck [...] selbst muss verschwinden, nicht nur $\frac{\partial}{\partial t}$[...]

$\Rightarrow$ $\boxed{\nabla \times (\Lambda\mathbf{J}_s) + \mathbf{b} = \mathbf{0}}$ ***2. London-Gleichung***

mit $\nabla \times \mathbf{b} = \mu_0\mathbf{J}_s \Rightarrow \nabla \times \nabla \times \mathbf{b} = \nabla \times (\mu_0\mathbf{J}_s) = \frac{\mu_0}{\Lambda}\mathbf{b}$
und $\nabla \times \nabla \times \mathbf{b} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \nabla^2\mathbf{b} = -\nabla^2\mathbf{b}$ folgt

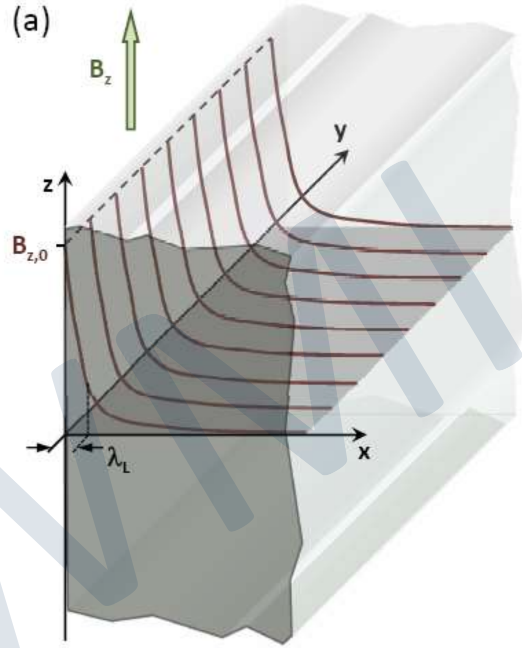
$$\boxed{\nabla^2\mathbf{b} - \frac{\mu_0}{\Lambda}\mathbf{b} = \nabla^2\mathbf{b} - \frac{1}{\lambda_L^2}\mathbf{b} = 0}$$

$\Rightarrow$ exponentielles Abklingen von B_{ext} in SL:

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{\Lambda}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{m_s}{\mu_0 n_s q_s^2}}$$

Londonsche Eindringtiefe

(typische Werte: 0.01 – 1 µm, klein wegen hoher LT-Dichte n_s)



Zusammenfassung: Teil 26b, 31.05.2021/2

- ***Phänomenologische Modelle:*** ***B. Supraleitung als makroskopisches Quantenphänomen***
  - Beschreibung von SL mit makroskopischer Wellenfunktion $\psi(\mathbf{r},t) = \psi_0(\mathbf{r},t)\, \mathrm{e}^{i\theta(\mathbf{r},t)}$

    → beschreibt ***Gesamtheit aller supraleitenden Elektronen***
  - Normierung: $\int \psi_s^\star(\mathbf{r},t)\psi_s(\mathbf{r},t)\ \mathrm{d}V = N_s$ $\qquad |\psi_s(\mathbf{r},t)| = \psi_s^\star(\mathbf{r},t)\psi_s(\mathbf{r},t) = n_s$
  - Schrödinger-Gleichung für geladenes Teilchen in em-Feld

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right)^2 \Psi(\mathbf{r},t) + [q\phi_{\mathrm{el}}(\mathbf{r},t) + \mu(\mathbf{r},t)]\ \Psi(\mathbf{r},t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(\mathbf{r},t)}{\partial t}$$

$$\mathbf{b} = \nabla\times\mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\underbrace{\left(\phi_{\mathrm{el}} + \frac{\mu}{q}\right)}_{\text{elektrochemisches Potenzial } \phi}$$

  - Einsetzen von makroskopischer Wellenfunktion in Schrödinger-Gl. → ***Madelung-Transformation***
  - Aufspalten in Real- und Imaginärteil ergibt

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{r},t) = q_s n_s(\mathbf{r},t)\underbrace{\left\{\frac{\hbar}{m_s}\nabla\theta(\mathbf{r},t) - \frac{q_s}{m_s}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right\}}_{\text{Geschwindigkeit } \mathbf{v}_s}$$

Strom-Phasen-Beziehung

eichinvarianter Phasengradient $\nabla\theta' - \frac{q_s}{\hbar}\mathbf{A}' = \nabla\theta - \frac{q_s}{\hbar}\mathbf{A}$

$$\theta' \equiv \theta + \frac{q_s}{\hbar}\chi$$

$$\mathbf{A}' \equiv \mathbf{A} + \nabla\chi$$

$$\hbar\frac{\partial\theta(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -\underbrace{\left\{\frac{1}{2n_s}\Lambda J_s^2(\mathbf{r},t) + q_s\phi_{\mathrm{el}}(\mathbf{r},t) + \mu(\mathbf{r},t)\right\}}_{\text{Gesamtenergie}}$$

Energie-Phasen-Beziehung

$\hbar\theta = S =$ Wirkung → $\partial S/\partial t = -H$: Äquivalenz zur ***Hamilton-Jacobi-Gleichung*** der klassischen Physik

  - Anwendung auf geladenen und ungeladenen Quantenflüssigkeiten: $q_s = k\cdot q,\ m_s = k\cdot m,\ n_s = n/k$

    → Supraleiter: $q = -e,\ k = 2,$ $\quad$ ^{3}He: $q = 0,\ k = 2$

- *Folgerungen aus Strom-Phasen- und Energie-Phasen-Beziehung*

1. ***Herleitung der London-Gleichungen durch Bildung der Rotation und partiellen Zeitableitung von***

$$\Lambda \mathbf{J}_s(\mathbf{r},t) = -\left\{\mathbf{A}(\mathbf{r},t) - \frac{\hbar}{q_s}\nabla\theta(\mathbf{r},t)\right\}$$

- Bildung von Rotation: ***2. London-Gleichung*** $\nabla \times \Lambda \mathbf{J}_s(\mathbf{r},t) + \mathbf{b}(\mathbf{r},t) = 0$
- Bildung von partieller Zeitableitung: ***1. London-Gleichung*** $\frac{\partial}{\partial t}\Lambda \mathbf{J}_s(\mathbf{r},t) = -\left\{\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t} - \frac{1}{q_s}\nabla\left(\frac{\hbar\partial\theta(\mathbf{r},t)}{\partial t}\right)\right\}$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\Lambda \mathbf{J}_s(\mathbf{r},t) = \mathbf{E} - \frac{1}{n_s q_s}\nabla\left(\frac{1}{2}\Lambda J_s^2\right)$$

wichtig:
- ***direkte Ableitung der London-Gleichungen aus makroskopischem Quantenmodell***
- ***London-Gl. beschreiben zusammen mit den Maxwell-Gleichungen das Verhalten von SL in elektrischen und magnetischen Feldern***

2. ***Herleitung der Fluxoid-Quantisierung***

$$\Lambda \mathbf{J}_s(\mathbf{r},t) = -\left\{\mathbf{A}(\mathbf{r},t) - \frac{\hbar}{q_s}\nabla\theta(\mathbf{r},t)\right\} \xrightarrow{\text{Ringintegral}} \oint_C \Lambda \mathbf{J}_s \cdot d\ell + \oint_C \mathbf{A}\cdot d\ell = \frac{\hbar}{q_s}\oint_C \nabla\theta(\mathbf{r},t)\cdot d\ell$$

$$\oint_C \nabla\theta(\mathbf{r},t)\cdot d\ell = \lim_{r_2\to r_1}[\theta(\mathbf{r}_2,t) - \theta(\mathbf{r}_1,t)] = 2\pi\cdot n$$

$$\underbrace{\oint_C \Lambda \mathbf{J}_s \cdot d\ell + \int_F \mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dF}_{\text{Fluxoid}} = n\cdot\frac{h}{q_s} = n\cdot\Phi_0$$

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2.067\,833\,831(13)\times 10^{-15}\ \mathrm{Vs}$$ ***Fluss-Quant***

Fluss-Quantisierung: $\int_F \mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dF = \Phi = n\cdot\Phi_0$ (falls $J_s = 0$, z.B. entlang Integrationsweg tief in massivem SL)