Physik der Kondensierten Materie 2

Rudolf Gross

SS 2021

Teil 27

Vorlesungsstunde: 01.06.2021-1

- ***Phänomenologische Modelle: A. London-Modell und London-Gleichungen***

Zweiflüssigkeiten-Modell: $n = n_n + n_s$ für $T \to 0$: $n_s \to n$, für $T \to T_c$: $n_s \to 0$

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\mathbf{v}}{\tau} = q\,\mathbf{E} \quad \text{mit } \tau \to \infty \text{ und } J_s = n_s q_s v_s \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\Lambda\mathbf{J}_s = \mathbf{E}}$$

1. London-Gleichung

$$\Lambda = \frac{m_s}{n_s q_s^2}$$

London-Parameter

Einsetzen von 1. London-Gl. in $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{b}/\partial t \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{\nabla} \times (\Lambda\mathbf{J}_s) + \mathbf{b}] = 0$

Experiment: Klammerausdruck […] selbst muss verschwinden, nicht nur $\frac{\partial}{\partial t}$[…]

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\nabla} \times (\Lambda\mathbf{J}_s) + \mathbf{b} = \mathbf{0}}$$

2. London-Gleichung

mit $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{b} = \mu_0\mathbf{J}_s \Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{b} = \boldsymbol{\nabla} \times (\mu_0\mathbf{J}_s) = \frac{\mu_0}{\Lambda}\mathbf{b}$
und $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{b} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{b}) - \nabla^2\mathbf{b} = -\nabla^2\mathbf{b}$ folgt

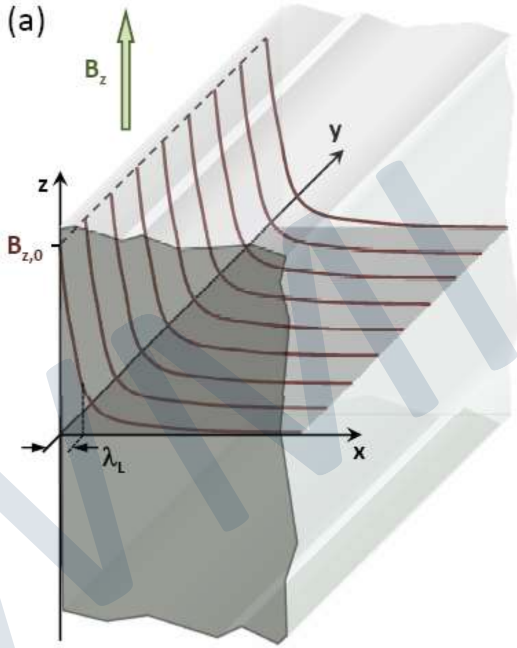
$$\boxed{\nabla^2\mathbf{b} - \frac{\mu_0}{\Lambda}\mathbf{b} = \nabla^2\mathbf{b} - \frac{1}{\lambda_{\mathrm{L}}^2}\mathbf{b} = 0}$$

$\Rightarrow$ exponentielles Abklingen von B_{ext} in SL:

$$\lambda_{\mathrm{L}} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{m_s}{\mu_0 n_s q_s^2}}$$

Londonsche Eindringtiefe

(typische Werte: 0.01 – 1 µm, klein wegen hoher LT-Dichte n_s)



Zusammenfassung: Teil 26b, 31.05.2021/2

- ***Phänomenologische Modelle:*** ***B. Supraleitung als makroskopisches Quantenphänomen***
  - Beschreibung von SL mit makroskopischer Wellenfunktion $\psi(\mathbf{r},t) = \psi_0(\mathbf{r},t)\, e^{i\theta(\mathbf{r},t)}$

    → beschreibt ***Gesamtheit aller supraleitenden Elektronen***
  - Normierung: $\int \psi_s^\star(\mathbf{r},t)\psi_s(\mathbf{r},t)\; \mathrm{d}V = N_s$ $\quad |\psi_s(\mathbf{r},t)| = \psi_s^\star(\mathbf{r},t)\psi_s(\mathbf{r},t) = n_s$
  - Schrödinger-Gleichung für geladenes Teilchen in em-Feld

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right)^2 \Psi(\mathbf{r},t) + [q\phi_{\mathrm{el}}(\mathbf{r},t) + \mu(\mathbf{r},t)]\, \Psi(\mathbf{r},t) = i\hbar\frac{\partial \Psi(\mathbf{r},t)}{\partial t}$$

$$\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \underbrace{\left(\phi_{\mathrm{el}} + \frac{\mu}{q}\right)}_{\text{elektrochemisches Potenzial } \phi}$$

  - Einsetzen von makroskopischer Wellenfunktion in Schrödinger-Gl. → ***Madelung-Transformation***
  - Aufspalten in Real- und Imaginärteil ergibt

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{r},t) = q_s n_s(\mathbf{r},t) \underbrace{\left\{\frac{\hbar}{m_s}\nabla\theta(\mathbf{r},t) - \frac{q_s}{m_s}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right\}}_{\text{Geschwindigkeit } \mathbf{v}_s}$$

Strom-Phasen-Beziehung

eichinvarianter Phasengradient $\nabla\theta' - \frac{q_s}{\hbar}\mathbf{A}' = \nabla\theta - \frac{q_s}{\hbar}\mathbf{A}$

$$\theta' \equiv \theta + \frac{q_s}{\hbar}\chi$$

$$\mathbf{A}' \equiv \mathbf{A} + \nabla\chi$$

$$\hbar\frac{\partial\theta(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -\underbrace{\left\{\frac{1}{2n_s}\Lambda J_s^2(\mathbf{r},t) + q_s\phi_{\mathrm{el}}(\mathbf{r},t) + \mu(\mathbf{r},t)\right\}}_{\text{Gesamtenergie}}$$

Energie-Phasen-Beziehung

$\hbar\theta = S =$ Wirkung → $\partial S/\partial t = -H$: Äquivalenz zur ***Hamilton-Jacobi-Gleichung*** der klassischen Physik

  - Anwendung auf geladenen und ungeladenen Quantenflüssigkeiten: $q_s = k\cdot q,\ m_s = k\cdot m,\ n_s = n/k$

    → Supraleiter: $q = -e,\ k = 2,$ $\quad$ ^{3}He: $q = 0,\ k = 2$

Zusammenfassung: Teil 26c, 31.05.2021/2

- *Folgerungen aus Strom-Phasen- und Energie-Phasen-Beziehung*

1. ***Herleitung der London-Gleichungen durch Bildung der Rotation und partiellen Zeitableitung von***

$$\Lambda \mathbf{J}_s(\mathbf{r},t) = -\left\{\mathbf{A}(\mathbf{r},t) - \frac{\hbar}{q_s}\nabla\theta(\mathbf{r},t)\right\}$$

➢ Bildung von Rotation: ***2. London-Gleichung*** $\nabla \times \Lambda \mathbf{J}_s(\mathbf{r},t) + \mathbf{b}(\mathbf{r},t) = 0$

➢ Bildung von partieller Zeitableitung: ***1. London-Gleichung*** $\frac{\partial}{\partial t}\Lambda \mathbf{J}_s(\mathbf{r},t) = -\left\{\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t} - \frac{1}{q_s}\nabla\left(\frac{\hbar\partial\theta(\mathbf{r},t)}{\partial t}\right)\right\}$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\Lambda \mathbf{J}_s(\mathbf{r},t) = \mathbf{E} - \frac{1}{n_s q_s}\nabla\left(\frac{1}{2}\Lambda J_s^2\right)$$

wichtig:

➢ *direkte Ableitung der London-Gleichungen aus makroskopischem Quantenmodell*

➢ *London-Gl. beschreiben zusammen mit den Maxwell-Gleichungen das Verhalten von SL in elektrischen und magnetischen Feldern*

2. ***Herleitung der Fluxoid-Quantisierung***

$$\Lambda \mathbf{J}_s(\mathbf{r},t) = -\left\{\mathbf{A}(\mathbf{r},t) - \frac{\hbar}{q_s}\nabla\theta(\mathbf{r},t)\right\} \xrightarrow{\text{Ringintegral}} \oint_C \Lambda \mathbf{J}_s \cdot d\ell + \oint_C \mathbf{A}\cdot d\ell = \frac{\hbar}{q_s}\oint_C \nabla\theta(\mathbf{r},t)\cdot d\ell$$

$$\oint_C \nabla\theta(\mathbf{r},t)\cdot d\ell = \lim_{r_2\to r_1}[\theta(\mathbf{r}_2,t) - \theta(\mathbf{r}_1,t)] = 2\pi\cdot n$$

$$\underbrace{\oint_C \Lambda \mathbf{J}_s \cdot d\ell + \int_F \mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{n}}\; dF}_{\text{Fluxoid}} = n\cdot\frac{h}{q_s} = n\cdot\Phi_0$$

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2.067\,833\,831(13)\times 10^{-15}\ \mathrm{Vs}$$ ***Fluss-Quant***

Fluss-Quantisierung: $\int_F \mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{n}}\; dF = \Phi = n\cdot\Phi_0$ (falls $J_s = 0$, z.B. entlang Integrationsweg tief in massivem SL)


Kapitel 13
Supraleitung
WMI

- Entwicklung der ersten mikroskopischen Theorie der Supraleitung dauerte mehr als 45 Jahre → zuerst Beschreibung mit phänomenologischen Modellen

I. London-Modell (Zweiflüssigkeiten-Modell)

II. Supraleitung als makroskopisches Quantenphänomen

⇒ III. Ginzburg-Landau Theorie

13.3.3 Ginzburg-Landau Theorie

Phänomenologische Beschreibung der Supraleitung im Rahmen der Landau-Theorie der Phasenübergänge

- Weiterentwicklung der Landau-Theorie der Phasenübergänge
- 1950: zur Beschreibung von räumlich inhomogenen Situationen haben **Ginzburg** und **Landau** einen
  komplexen, räumlich variierenden Ordnungsparameter $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{r})$
  eingeführt mit
  Absolutquadrat des Ordnungsparameters $|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{r})|^2 = n_s(\mathbf{r})$
- 1957: **Abrikosov** sagt mit Hilfe von Ginzburg-Landau Theorie das Flussliniengitter in der Shubnikov-Phase von Typ-II Supraleitern vorher
- 1959: **Gor´kov** zeigt, dass GL-Theorie einen rigoros ableitbaren Grenzfall der mikroskopischen BCS-Theorie darstellt

  Ginzburg-Landau-Abrikosov-Gor´kov (GLAG) Theorie
- GLAG-Theorie beschreibt Phänomen Supraleitung, gibt aber keine mikroskopische Erklärung

Beschreibung von räumlich homogenem Supraleiter ohne Magnetfeld

– Beschreibung des Übergangs in den supraleitenden Zustand im Rahmen der Landau-Theorie der Phasenübergänge (vergleiche Teil 14, Ferroelektrizität)

– Entwicklung der freien Enthalpiedichte nach Potenzen des Ordnungsparameters Ψ mit $|\Psi(\mathbf{r})|^2 = |\Psi_0(\mathbf{r})|^2 = n_s(\mathbf{r}) = const.$

$$g_s = g_n + \alpha|\Psi|^2 + \frac{1}{2}\beta|\Psi|^4 + \cdots \qquad \text{mit } \alpha(T) = \bar{\alpha}\left(\frac{T}{T_c} - 1\right) \text{ und } \bar{\alpha} > 0, \;\; \beta(T) = const.$$

– im thermodynamischen Gleichgewicht muss g_s minimal sein

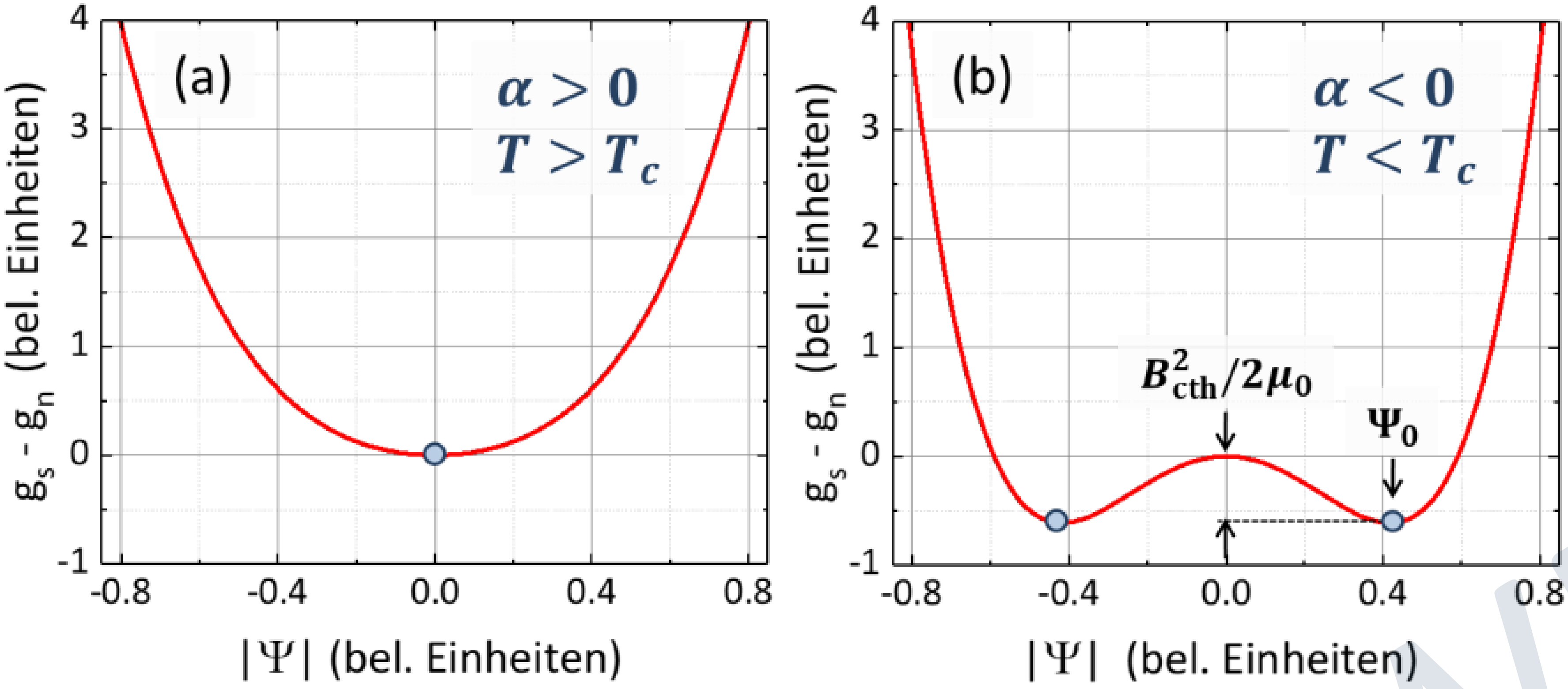
$$\frac{\partial g_s}{\partial|\Psi|} = 0 \;\; \Rightarrow |\Psi_0(T)|^2 = -\frac{\alpha(T)}{\beta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{n_s(T) = |\Psi_0(T)|^2 = -\frac{\alpha(T)}{\beta} = \frac{\bar{\alpha}}{\beta}\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)}$$

– physikalische Bedeutung der Entwicklungskoeffizienten

$$g_n - g_s = \underbrace{\frac{B_{\mathrm{cth}}^2(T)}{2\mu_0}}_{\textbf{Kondensationsenergie}} = -\alpha(T)|\Psi_0(T)|^2 - \frac{1}{2}\beta|\Psi_0(T)|^4 - \cdots = -\frac{1}{2}\frac{\alpha^2(T)}{\beta} = -\frac{\bar{\alpha}^2}{2\beta}\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^2 = n_s(0)\bar{\alpha}\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^2$$

➔ $\bar{\alpha} = \left[\frac{B_{\mathrm{cth}}^2(0)}{2\mu_0}\right]/n_s(0)$ entspricht der Kondensationsenergie pro supraleitendem Ladungsträger

Beschreibung von räumlich homogenem Supraleiter ohne Magnetfeld



$$g_s - g_n = -\frac{B_{cth}^2(T)}{2\mu_0} = \alpha(T)|\Psi_0(\mathrm{T})|^2 + \frac{1}{2}\beta|\Psi_0(T)|^4 + \cdots$$

Beschreibung von räumlich inhomogenem Supraleiter im externen Magnetfeld

– Entwicklung der freien Enthalpiedichte nach Potenzen des Ordnungsparameters Ψ mit $|\Psi(\mathbf{r})|^2 = n_s(\mathbf{r}) \neq const.$

$$g_s = g_n + \alpha|\Psi|^2 + \frac{1}{2}\beta|\Psi|^4 + \underbrace{\frac{1}{2\mu_0}(\mathbf{B}_{\text{ext}} - \mathbf{b})^2}_{(\mu_0 \mathbf{M})^2} + \underbrace{\frac{1}{2m_s}\left|\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q_s\mathbf{A}\right)\Psi\right|^2}_{\frac{1}{2m_s}[\hbar^2(\nabla|\Psi|)^2 + (\hbar\nabla\theta - q_s A)^2|\Psi|^2]} + \cdots$$

$$\frac{1}{2m_s}\Big[\underbrace{\hbar^2(\nabla|\Psi|)^2}_{\text{Amplitudengradient}} + \underbrace{(\underbrace{\hbar\nabla\theta - q_s A}_{m_s v_s})^2|\Psi|^2}_{\text{Phasengradient}}\Big] \quad \text{für } \Psi = |\Psi|\mathrm{e}^{i\theta}$$

Phasengradient $\frac{1}{2}m_s v_s^2 \cdot n_s$

Differenz zwischen innerer Flussdichte $\mathbf{b}$ und von außen erzeugter Flussdichte $\mathbf{B}_{\text{ext}}$

➔ für Meißner-Phase: $\mathbf{b} = 0$,
Beitrag ergibt Feldverdrängungsarbeit $B_{\text{ext}}^2/2\mu_0$

➔ für Shubnikov-Phase: $\mathbf{b} > 0$,
Beitrag ist kleiner als $B_{\text{ext}}^2/2\mu_0$

Beitrag verhindert, dass starke räumliche Variationen der Amplitude oder Phase des OP auf kurzen Längenskalen auftreten können

➔ räumliche Variationen des OP kosten Energie
➔ Steifigkeit des Ordnungsparameters

13.3.3 Ginzburg-Landau Theorie

Herleitung der Ginzburg-Landau Gleichungen durch Minimierung der freien Enthalpie

– Integration der freien Enthalpiedichte g_s über gesamtes Volumen von Supraleiter

$$\mathcal{G}_s = \int_V g_s \, dV = \int_V g_n + \alpha|\Psi|^2 + \frac{1}{2}\beta|\Psi|^4 + \frac{1}{2\mu_0}(\mathbf{B}_{\mathrm{ext}} - \mathbf{b})^2 + \frac{1}{2m_s}\left|\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q_s\mathbf{A}\right)\Psi\right|^2 + \cdots \; \mathrm{d}V$$

– Minimierung von $\mathcal{G}_s$ bezüglich Änderungen von Ψ und $\mathbf{A}$ unter Berücksichtigung von Randbedingungen (z.B. keine Ströme durch Oberfläche)

– Rechnung (siehe z.B. Gross & Marx, Festkörperphysik, 3. Auflage, S. 818 ff) führt auf Ginzburg-Landau Gleichungen

$$0 = \frac{1}{2m_s}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q_s\mathbf{A}\right)^2 \Psi + \alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi$$

1. Ginzburg-Landau Gleichung

$$\mathbf{J}_s = \frac{q_s\hbar}{2m_s}\frac{1}{i}(\Psi^\star\boldsymbol{\nabla}\Psi - \Psi\boldsymbol{\nabla}\Psi^\star) - \frac{q_s^2}{m_s}|\Psi|^2\mathbf{A}$$

2. Ginzburg-Landau Gleichung

– GL-Gleichungen sind invariant unter Eichtransformationen $\mathbf{A}' \to \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi$, $\phi' \to \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}$, $\theta' \to \theta + \frac{q_s}{\hbar}\chi$

– GL-Gleichungen sind nichtlinear ➔ reichhaltiges Lösungsspektrum

Vergleich der Ergebnisse von Ginzburg-Landau Theorie und makroskopischem Quantenmodell

makroskopisches Quantenmodell

i. Strom-Phasen-Beziehung

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{r},t) = q_s n_s(\mathbf{r},t)\left\{\frac{\hbar}{m_s}\nabla\theta(\mathbf{r},t) - \frac{q_s}{m_s}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right\}$$

bei Herleitung wird $|\Psi(r,t)|^2 = n_s(r,t)$ als räumlich konstant angenommen

ii. Energie-Phasen-Beziehung

$$\hbar\frac{\partial\theta(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -\left\{\frac{1}{2n_s}\Lambda J_s^2(\mathbf{r},t) + q_s\phi_{\mathrm{el}}(\mathbf{r},t) + \mu(\mathbf{r},t)\right\}$$

iii. ……………………………………….

keine entsprechende Gleichung, da $\Psi(r,t)$ als räumlich constant angenommen wurde

Ginzburg-Landau Theorie

i. 2. Ginzburg-Landau Gleichung

$$\mathbf{J}_s = \frac{q_s\hbar}{2m_s}\frac{1}{i}(\Psi^\star\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^\star) - \frac{q_s^2}{m_s}|\Psi|^2\mathbf{A}$$

geht für $|\Psi(r)|^2 = n_s(r) = const.$ in Strom-Phasen-Beziehung über

ii. ……………………………………….

keine entsprechende Gleichung, da $\Psi(r)$ nur räumliche aber keine zeitliche Variation enthält

iii. 1. Ginzburg-Landau Gleichung

$$0 = \frac{1}{2m_s}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q_s\mathbf{A}\right)^2\Psi + \alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi$$

GL Theorie kann Situationen mit räumlich variierendem OP beschreiben, aber keine zeitabhängigen Phänomene (Gleichungen enthalten keine Zeitableitung)

makroskopisches Quantenmodell kann Situationen mit ortsabhängiger Dichte der supraleitenden Elektronen nicht beschreiben, dafür aber zeitabhängige Phänomene (z.B. Josephson Effekt)

Charakteristische Längenskalen

2. Ginzburg-Landau Gleichung

$$\mathbf{J}_s = \frac{q_s \hbar}{2m_s}\frac{1}{i}\left(\Psi^\star \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^\star\right) - \frac{q_s^2}{m_s}|\Psi|^2 \mathbf{A}$$

⇒ liefert 1. und 2. London-Gleichung

⇒ charakteristische Abschirmlänge für magnetische Flussdichte

$$\lambda_{\mathrm{GL}} = \sqrt{-\frac{m_s \beta}{\mu_0 \alpha q_s^2}} = \sqrt{\frac{m_s}{\mu_0 n_s q_s^2}}$$

Ginzburg-Landau Eindringtiefe

mit $-\alpha(T) = \bar{\alpha}\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)$ und $n_s(T) = -\alpha(T)/\beta$

1. Ginzburg-Landau Gleichung

$$0 = \frac{1}{2m_s}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q_s \mathbf{A}\right)^2 \Psi + \alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi$$

Normalisierung ($\psi = \Psi/\Psi_0$) und benutzen von $n_s = |\Psi_0|^2 = -\alpha/\beta$ liefert

$$0 = \frac{1}{2m_s}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q_s \mathbf{A}\right)^2 \psi + \alpha\psi + \alpha|\psi|^2\psi \quad \Rightarrow \quad 0 = \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m_s\alpha}}\left(\frac{1}{i}\nabla - \frac{q_s}{\hbar}\mathbf{A}\right)^2 \psi + \psi + |\psi|^2\psi$$

$$\xi_{\mathrm{GL}} = \sqrt{-\frac{\hbar^2}{2m_s\alpha}}$$

Ginzburg-Landau Kohärenzlänge

mit $-\alpha(T) = \bar{\alpha}\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)$

– **physikalische Interpretation der charakteristischen Längenskalen**:

- ***GL-Eindringtiefe λ_{GL}:*** Abschirmung von räumlichen Variationen der lokalen Flussdichte auf Skala $< \lambda_{\mathrm{L}}$ kostet Energie, welche die Kondensationsenergiedichte $B_{\mathrm{cth}}^2/2\mu_0$ übersteigt
- ***GL-Kohärenzlänge ξ_{GL}:*** räumlichen Variation der Amplitude oder Phase des OPs auf Skala $< \xi_{\mathrm{GL}}$ kostet Energie, welche die Kondensationsenergiedichte $B_{\mathrm{cth}}^2/2\mu_0$ übersteigt

13.3.3 Ginzburg-Landau Theorie

Charakteristische Längenskalen

Supraleiter	$\xi_{GL}(0)$ (nm)	$\lambda_L(0)$ (nm)	κ
Al	1600	50	0.03
Cd	760	110	0.14
In	1100	65	0.06
Nb	106	85	0.8
NbTi	4	300	75
Nb_3Sn	2.6	65	25
NbN	5	200	40
Pb	100	40	0.4
Sn	500	50	0.1

typische Werte der charakteristischen Längenskalen liegen im Bereich zwischen wenigen Nanometern und 1 μm

Ginzburg-Landau-Parameter

– Verhältnis der charakteristischen Längenskalen:

$$\boxed{\kappa \equiv \frac{\lambda_{\rm GL}}{\xi_{\rm GL}} = \sqrt{\frac{2m_s^2\beta}{\mu_0\hbar^2 q_s^2}} = \sqrt{\frac{\beta}{2\mu_0}}\,\frac{1}{\mu_{\rm B}}}$$

Ginzburg-Landau-Parameter κ

$$\mu_{\rm B} = q_s\hbar/2m_s$$

$$\lambda_{\rm GL}(0) = \sqrt{\frac{m_s\beta}{\mu_0\bar{\alpha}q_s^2}} \qquad \xi_{\rm GL}(0) = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m_s\bar{\alpha}}}$$

$$\beta = \frac{\mu_0\bar{\alpha}\,q_s^2}{m_s}\lambda_{\rm GL}^2(0) \qquad \bar{\alpha} = \frac{\hbar^2}{2m_s\xi_{\rm GL}^2(0)}$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{\alpha}^2}{\beta} = \frac{\hbar^2}{2q_s^2\,\xi_{\rm GL}(0)\,\lambda_{\rm GL}(0)}$$

– wir benutzen:

$$g_n - g_s = \frac{B_{\rm cth}^2(T)}{2\mu_0} = \frac{\bar{\alpha}^2}{2\beta}\left(1-\frac{T}{T_c}\right)^2 \quad \Rightarrow B_{\rm cth}^2(T) = \frac{\mu_o\bar{\alpha}^2}{\beta}\left(1-\frac{T}{T_c}\right)^2$$

– Auflösen nach $B_{\rm cth}$ ergibt:

$$\boxed{B_{\rm cth}(T) = \frac{\Phi_0}{2\pi\sqrt{2}\;\xi_{\rm GL}(0)\,\lambda_{\rm GL}(0)}\left(1-\frac{T}{T_c}\right)}$$

Veranschaulichung der Bedeutung von ξ_{GL} anhand von Supraleiter-Normalleiter-Grenzfläche

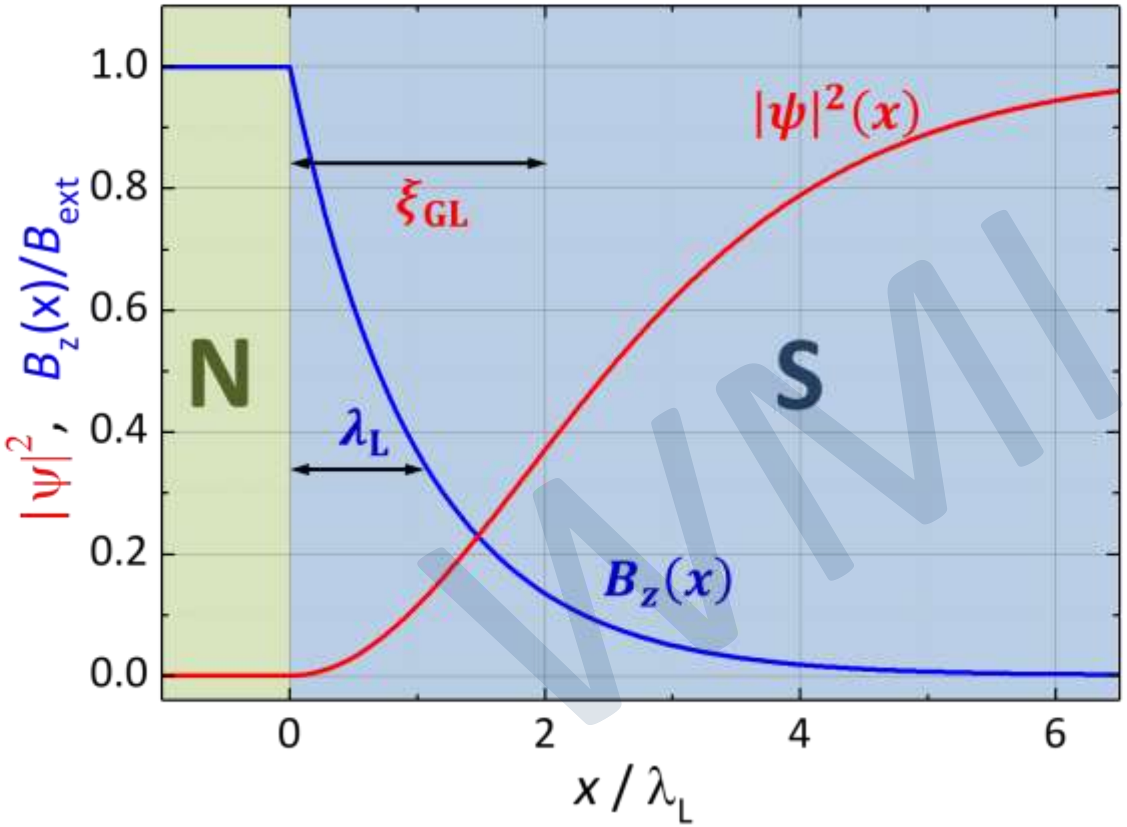
– Annahmen: Supraleiter erstreckt sich in Halbraum $x > 0$, $\psi(x = 0) = 0$, kein Magnetfeld: $\mathbf{A} = 0$

$$0 = \frac{\hbar^2}{2m_s\alpha}\left(\frac{1}{i}\boldsymbol{\nabla} - \frac{q_s}{\hbar}\mathbf{A}\right)^2\psi + \psi + |\psi|^2\psi \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{\xi_{\mathrm{GL}}^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \psi - |\psi|^2\psi$$

– mit Randbedingungen $\psi(x = 0) = 0$ und $\psi(x = \infty) = 1$ erhalten wir die Lösung (Beweis durch Einsetzen in DGL)

$$\psi(x) = \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\,\xi_{\mathrm{GL}}}\right)$$

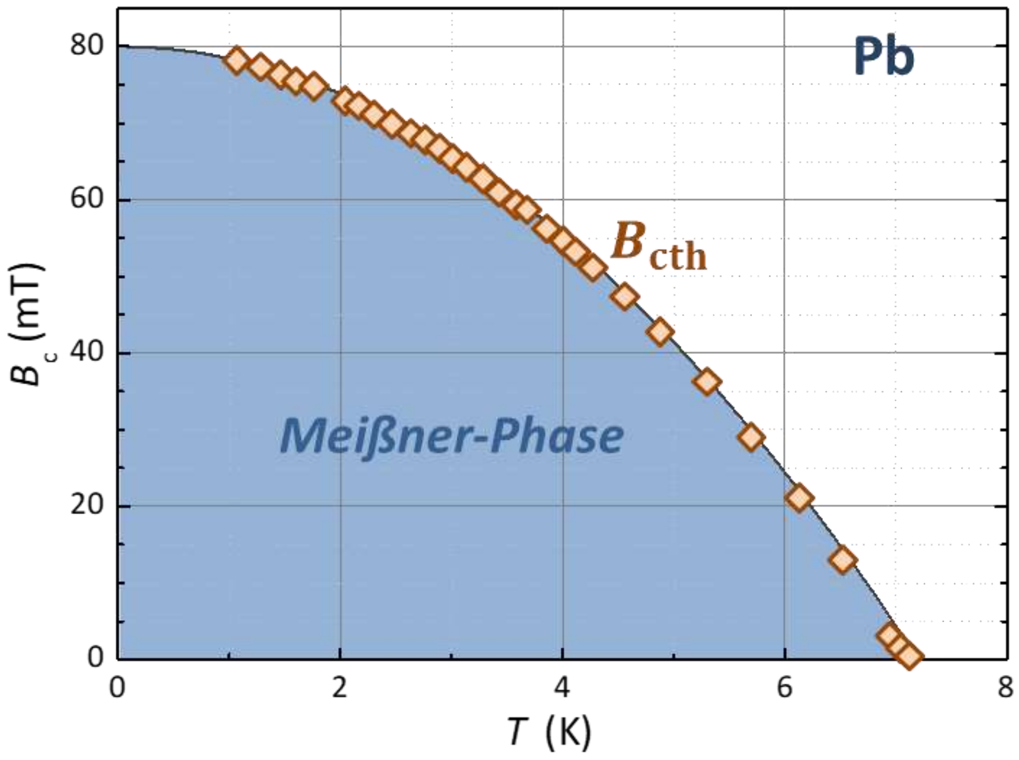
$$\frac{n_s(x)}{n_s(\infty)} = |\psi(x)|^2 = \tanh^2\left(\frac{x}{\sqrt{2}\,\xi_{\mathrm{GL}}}\right)$$



– **Wichtig**:
$|\psi(x)|^2$ steigt auf charakteristischer Längenskala ξ_{GL} von Null auf eins an, $B_{\mathrm{ext,z}}$ klingt in SL exponentiell auf charakteristischer Längenskala λ_{GL} ab

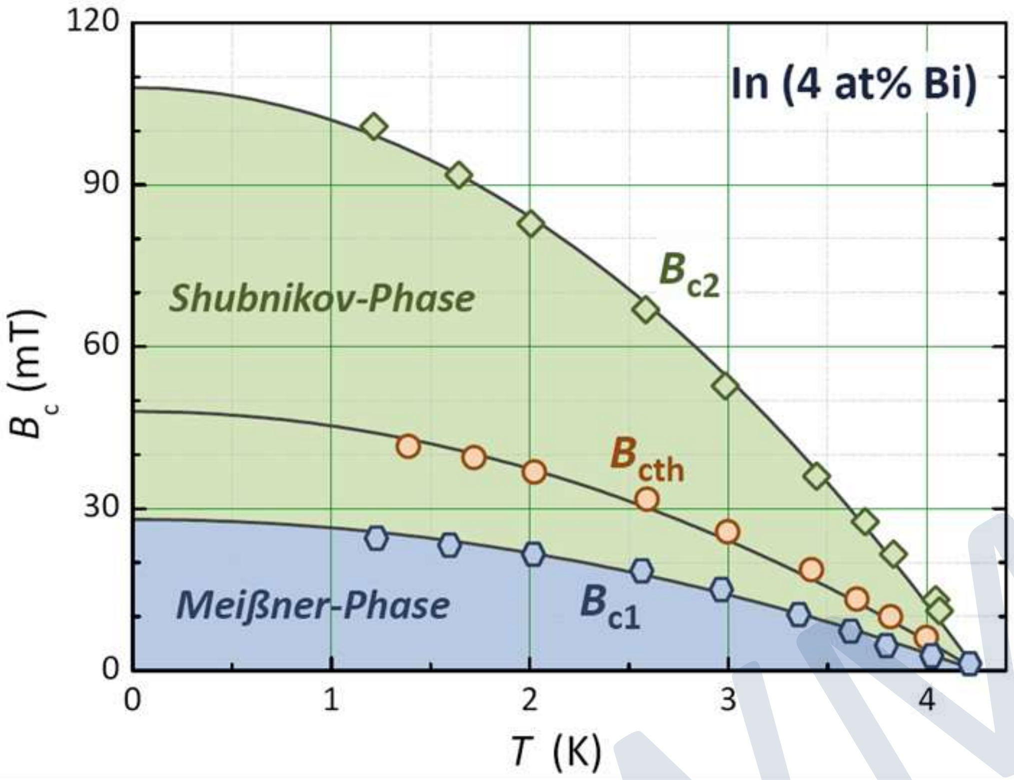
13.4 Typ-I und Typ-II Supraleiter

Typ-I Supraleiter



- Meißner-Phase für $B_{\text{ext}} < B_{\text{cth}}$
- keine Shubnikov-Phase

Typ-II Supraleiter

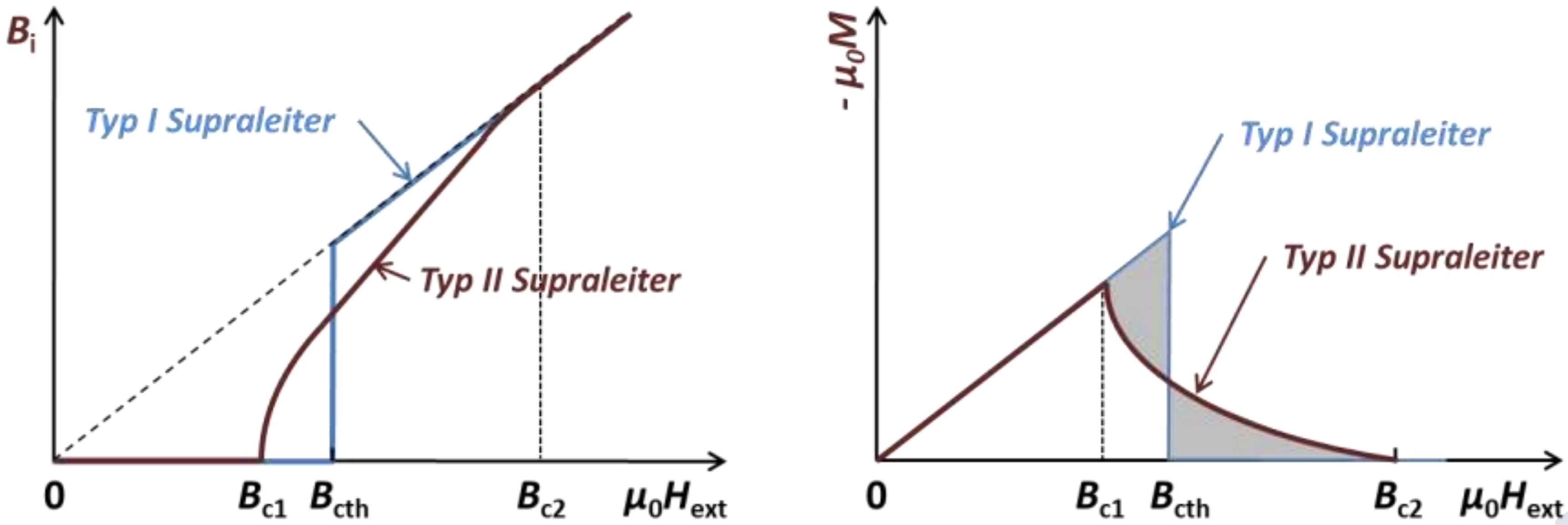


- Meißner-Phase für $B_{\text{ext}} < B_{c1}$
- Shubnikov-Phase für $B_{c1} < B_{\text{ext}} < B_{c2}$

$$B_{c1} < B_{\text{cth}} < B_{c2}$$

13.4.1 Mischzustand und kritische Felder

- **Typ-I Supraleiter** zeigen perfekte Feldverdrängung (Meißner-Phase) für $B_{\text{ext}} \leq B_{\text{cth}}$
- **Typ-II Supraleiter** zeigen perfekte Feldverdrängung (Meißner-Phase) nur für $B_{\text{ext}} \leq B_{\text{c1}}$ und partielle Feldverdrängung in Feldbereich $B_{c1} < B_{\text{ext}} < B_{c2}$ (Mischzustand) , wobei $B_{c1} < B_{\text{cth}} < B_{c2}$



Für Typ-I und Typ-II SL mit gleicher Kondensationsenergie gilt:

$$\int_0^{B_{\text{cth}}} \mu_0 M \, \mathrm{d}H_{\text{ext}} = \int_0^{B_{\text{c2}}} \mu_0 M \, \mathrm{d}H_{\text{ext}}$$

Typ-I:
- $B_i = 0$ und $\mu_0 M = -B_{\text{ext}}$ für $B_{\text{ext}} \leq B_{\text{cth}}$
- $B_i = B_{\text{ext}}$ und $\mu_0 M \simeq 0$ für $B_{\text{ext}} > B_{\text{cth}}$

Typ-II:
- $B_i = 0$ und $-\mu_0 M = B_{\text{ext}}$ für $B_{\text{ext}} \leq B_{c1}$
- $0 < B_i < B_{\text{ext}}$ und $0 < -\mu_0 M < B_{\text{ext}}$ für $\mathrm{B}_{\text{c1}} < B_{\text{ext}} < B_{c2}$
- $B_i = B_{\text{ext}}$ und $\mu_0 M \simeq 0$ für $B_{\text{ext}} > B_{c2}$

13.4 Typ-I und Typ-II Supraleiter

13.4.2 Grenzflächenenergie von Supraleiter-Normalleiter-Grenzfläche

– in der Shubnikov-Phase (Mischzustand) koexistieren supraleitende und normalleitende Bereiche

➔ *Wie sieht die räumliche Aufteilung aus? Welche Energie ist mit Grenzflächen verbunden?*

- möglichst große Grenzfläche, falls Grenzflächenenergie < 0 (Analogie: Alkohol/Wasser)
- möglichst kleine Grenzfläche, falls Grenzflächenenergie > 0 (Analogie: Öl/Wasser)

– **Abschätzung der Grenzflächenenergie**
(wir nehmen zur Vereinfachung den gestrichelten Verlauf von $|\psi(x)|^2$ und $B_z(x)$ an)

- Ersparnis an Feldverdrängungsarbeit (pro Flächeneinheit)

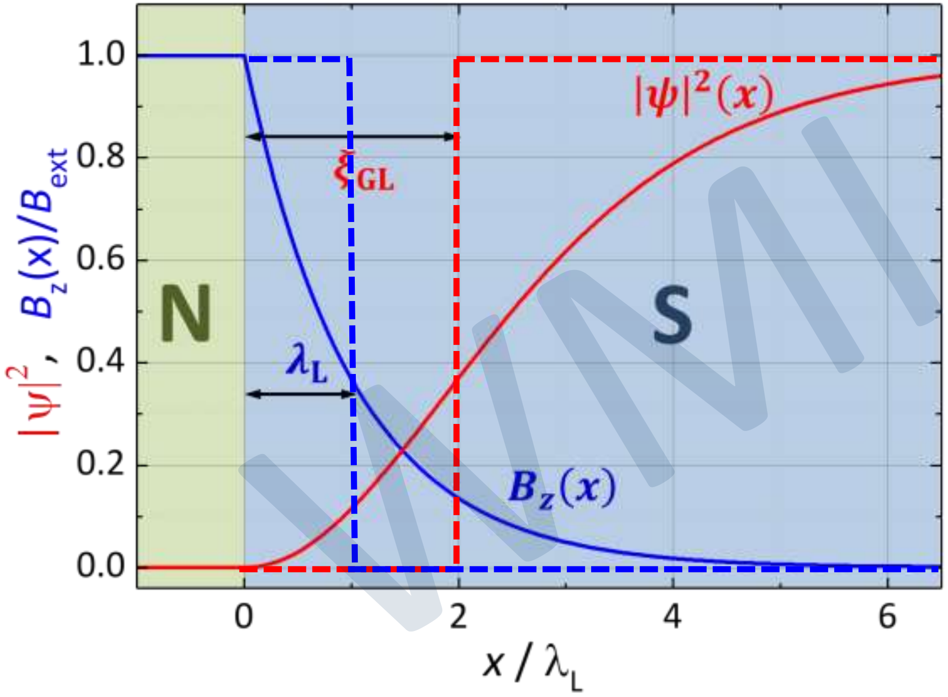
$$\Delta E_B \simeq -\frac{B_{\mathrm{ext}}^2}{2\mu_0}\frac{V}{F} = -\frac{B_{\mathrm{ext}}^2}{2\mu_0}\lambda_{\mathrm{GL}} = -\frac{B_{\mathrm{cth}}^2}{2\mu_0}\left(\frac{B_{\mathrm{ext}}}{B_{\mathrm{cth}}}\right)^2 \lambda_{\mathrm{GL}}$$

- Verlust an Kondensationsenergie (pro Flächeneinheit)

$$\Delta E_C \simeq [g_n - g_s]\frac{V}{F} = \frac{B_{\mathrm{cth}}^2}{2\mu_0}\xi_{\mathrm{GL}}$$

- Grenzflächenenergie

$$\Delta E_{\mathrm{Grenz}} = \Delta E_C + \Delta E_B \simeq \frac{B_{\mathrm{cth}}^2}{2\mu_0}\left[\xi_{\mathrm{GL}} - \left(\frac{B_{\mathrm{ext}}}{B_{\mathrm{cth}}}\right)^2 \lambda_{\mathrm{GL}}\right]$$



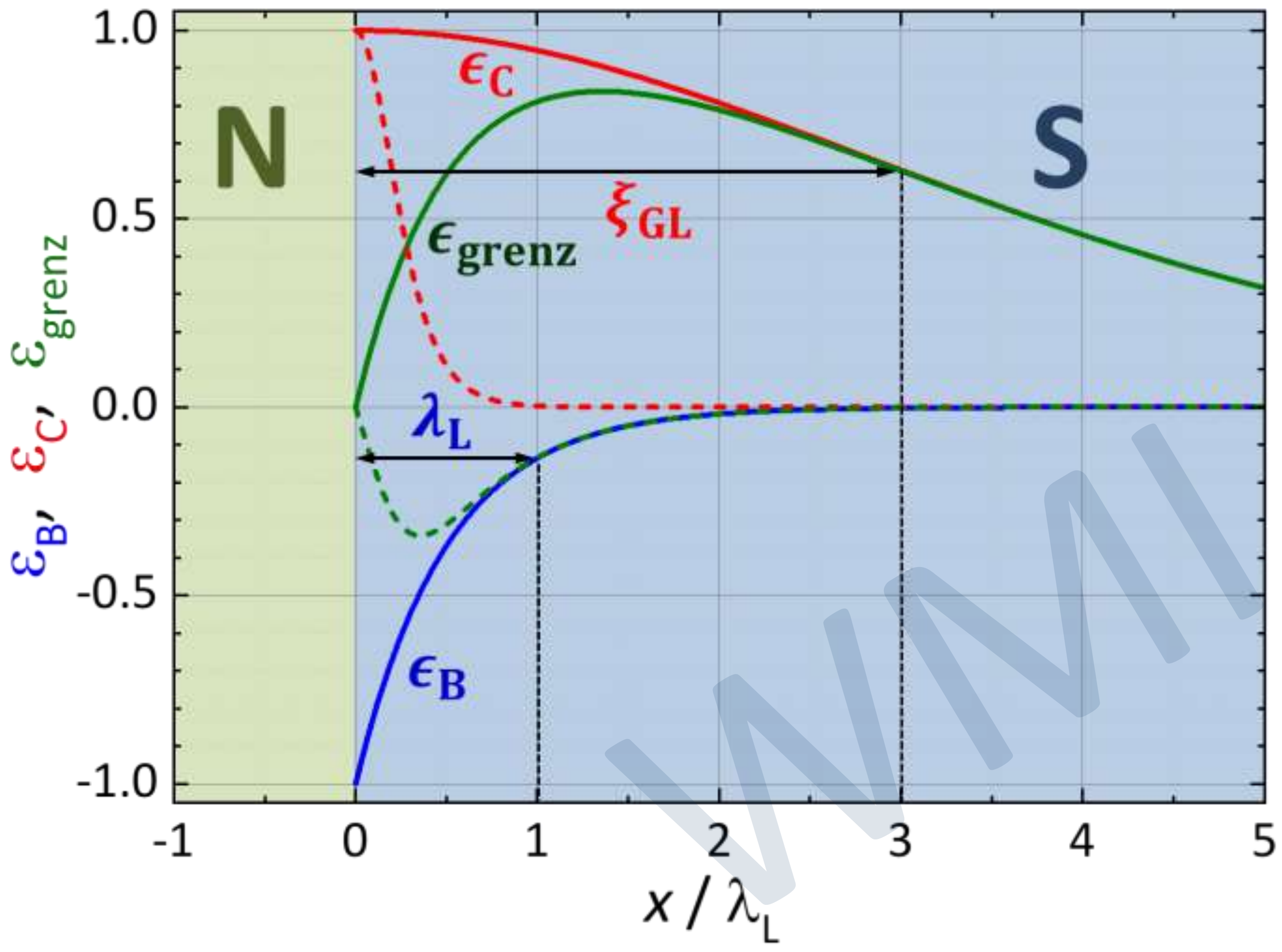
13.4.2 Normalisierte Grenzflächenenergie pro Längeneinheit (≡ Energiedichte)

$$\varepsilon_B \simeq -\frac{b^2(x)/2\mu_0}{B_{\text{ext}}^2/2\mu_0} = -\left[\mathrm{e}^{-x/\lambda_\mathrm{L}}\right]^2$$

$$\varepsilon_C \simeq \frac{(B_{\text{cth}}^2/2\mu_0)\left[n_{s(\infty)} - n_s(x)\right]}{(B_{\text{cth}}^2/2\mu_0)\, n_s(\infty)} = 1 - \frac{n_s(x)}{n_s(\infty)}$$

$$\varepsilon_C \simeq 1 - \tanh^2\left(\frac{x}{\sqrt{2}\,\xi_{\text{GL}}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{\text{Grenz}} \simeq 1 - \tanh^2\left(\frac{x}{\sqrt{2}\,\xi_{\text{GL}}}\right) - \left[\mathrm{e}^{-x/\lambda_\mathrm{L}}\right]^2$$



13.4.2 Diskussion der Grenzflächenenergie von Supraleiter-Normalleiter-Grenzfläche

$$\Delta E_{\text{Grenz}} = \Delta E_C + \Delta E_B \simeq \frac{B_{\text{cth}}^2}{2\mu_0}\left[\xi_{\text{GL}} - \left(\frac{B_{\text{ext}}}{B_{\text{cth}}}\right)^2 \lambda_{\text{GL}}\right]$$

I. Typ-I Supraleiter: $\xi_{\text{GL}} \geq \lambda_{\text{GL}}$

- Grenzflächenenergie ist immer positiv für $B_{\text{ext}} \leq B_{\text{cth}}$
  ➔ Vermeidung von Grenzflächen, perfekte Feldverdrängung (Meißner-Zustand) über gesamten Feldbereich bis zu $B_{\text{ext}} = B_{\text{cth}}$

II. Typ-II Supraleiter: $\xi_{\text{GL}} < \lambda_{\text{GL}}$

- Grenzflächenenergie ist immer positiv für $B_{\text{ext}} \leq B_{c1} < B_{\text{cth}}$
  ➔ Vermeidung von Grenzflächen, perfekte Feldverdrängung (Meißner-Zustand) über Feldbereich bis zu $B_{\text{ext}} = B_{c1}$
- Grenzflächenenergie ist negativ für $B_{\text{ext}} > B_{c1}$
  ➔ Bildung von Mischzustand, da durch Bildung von N/S-Grenzflächen Energie abgesenkt werden kann
  ➔ Aufteilung des magnetischen Flusses in möglichst kleine Portionen (Maximierung der Grenzfläche, untere Schranke wird durch Flussquant gesetzt)
  ➔ Typ-II SL kann bis zu Feld $B_{c2} > B_{\text{cth}}$ in supraleitendem Zustand bleiben, da Feldverdrängungsarbeit reduziert ist

– genaue Rechnung liefert

$$\kappa = \lambda_{\text{GL}}/\xi_{\text{GL}} \leq 1/\sqrt{2} \quad \text{Typ} - \text{I Supraleiter}$$
$$\kappa = \lambda_{\text{GL}}/\xi_{\text{GL}} \geq 1/\sqrt{2} \quad \text{Typ} - \text{II Supraleiter}$$

Zusammenfassung: Teil 27a, 01.06.2021/1

- ***Phänomenologische Modelle: C. Ginzburg-Landau-Theorie***

  – London-Theorie gut geeignet zur Beschreibung von räumlich homogenem SL: $n_s(r) = const.$

  → *Problem bei **Oberflächen** und **Grenzflächen**, **Typ-II SL**, ...*

  – GL-Theorie: Weiterentwicklung der Landau-Theorie der Phasenübergänge:

  ➢ Ginzburg & Landau führen einen ***komplexen, räumlich variierenden Ordnungsparameter*** $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r})$ ein

  ➢ Absolutquadrat des Ordnungsparameters: $|\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r})|^2 = \boldsymbol{n_s}(\boldsymbol{r})$

homogener SL im Nullfeld (analog zur Diskussion von Ferroelektrizität und Ferromagnetismus)

→ Entwicklung der freien Enthalpiedichte g_s nach Potenzen des ***komplexen, räumlich variierenden Ordnungsparameters* Y**

$$g_s = g_n + \alpha|\Psi|^2 + \frac{1}{2}\beta|\Psi|^4 + \cdots \quad \text{mit } \alpha(T) = \bar{\alpha}\left(\frac{T}{T_c} - 1\right) \text{ und } \bar{\alpha} = \left[\frac{B_{\mathrm{cth}}^2(0)}{2\mu_0}\right]/n_s(0)$$

(Kondensationsenergie pro supraleitendem LT)

inhomogener SL im Magnetfeld:

$$g_s = g_n + \alpha|\Psi|^2 + \frac{1}{2}\beta|\Psi|^4 + \underbrace{\frac{1}{2\mu_0}(\mathbf{B}_{\mathrm{ext}} - \mathbf{b})^2}_{\text{Feldverdrängungsarbeit} \quad (\mu_0\mathbf{M})^2} + \underbrace{\frac{1}{2m_s}\left|\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q_s\mathbf{A}\right)\Psi\right|^2}_{\text{räumliche Variation von } \Psi} + \cdots$$

$\propto (\mathbf{B}_{\mathrm{ext}} - \mathbf{b})^2$: Differenz zwischen der von außen erzeugten Flussdichte $\mathbf{B}_{\mathrm{ext}}$ und der inneren Flussdichte $\mathbf{b}(\mathbf{r})$

- Meißner-Zustand: $\mathbf{b} = 0$

→ Feldverdrängungsarbeit $B_{\mathrm{ext}}^2/2\mu_0$

entspricht Beitrag in niedrigster Ordnung von $\nabla\Psi$, der sowohl reell als auch eichinvariant ist

mit $\Psi = |\Psi(\mathbf{r})|e^{i\theta(\mathbf{r})}$ kann Term umgeschrieben werden in:

$$\frac{1}{2m_s}[\underbrace{\hbar^2(\nabla|\Psi|)^2}_{\text{Amplitudengradient}} + \underbrace{(\hbar\nabla\theta - q_sA)^2|\Psi|^2}_{\text{Phasengradient}}]$$

➔ ***räumliche Variation von Amplitude oder Phase des OP erhöht Energie*** ➔ ***endliche „Steifigkeit" des OPs***

- ***Ginzburg-Landau (GL) Gleichungen***

  – Minimierung der freien Enthalpie durch Variation von A und Ψ führt auf ***GL-Gleichungen***:

1. GL-Gleichung $$0 = \frac{1}{2m_s}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q_s\mathbf{A}\right)^2 \Psi + \alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi$$ ⇒ ***GL-Kohärenzlänge*** $\xi_{\rm GL}$

2. GL-Gleichung $$\mathbf{J}_s = \frac{q_s\hbar}{2m_s}\frac{1}{i}(\Psi^\star\boldsymbol{\nabla}\Psi - \Psi\boldsymbol{\nabla}\Psi^\star) - \frac{q_s^2}{m_s}|\Psi|^2\mathbf{A}$$ ⇒ ***Magnetfeld-Eindringtiefe*** $\lambda_{\rm GL}$

➢ 2. GL-Gleichung entspricht für $|\Psi(\boldsymbol{r})|^2 = n_s(\boldsymbol{r}) = const.$ der Strom-Phasen-Beziehung $$\mathbf{J}_s(\mathbf{r},t) = q_s n_s\left\{\frac{\hbar}{m_s}\boldsymbol{\nabla}\theta(\mathbf{r},t) - \frac{q_s}{m_s}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right\}$$

  – **wichtig**:
  GL Theorie kann Situationen mit räumlich variierendem OP beschreiben, aber keine zeitabhängigen Phänomene (GL-Gleichungen enthalten keine Zeitableitung)

  makroskopisches Quantenmodell kann Situationen mit ortsabhängiger Dichte der supraleitenden Elektronen nicht beschreiben, dafür aber zeitabhängige Phänomene (Energie-Phasen-Beziehung → z.B. Josephson Effekt)

- ***charakteristische Längenskalen***

(i) London-Eindringtiefe: Variation der Flussdichte
$$\lambda_{\rm GL}(T) = \sqrt{-\frac{m_s\beta}{\mu_0\alpha(T)q_s^2}} = \sqrt{-\frac{m_s\beta}{\mu_0\bar{\alpha}q_s^2}\frac{1}{\sqrt{1-T/T_c}}}$$

(ii) Kohärenzlänge: Variation des Ordnungsparameters
$$\xi_{\rm GL}(T) = \sqrt{-\frac{\hbar^2}{2m_s\alpha(T)}} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m_s\bar{\alpha}}\frac{1}{\sqrt{1-T/T_c}}}$$

  – **physikalische Interpretation der charakteristischen Längenskalen**:
    ➢ $\boldsymbol{\lambda}_{\rm GL}$: räuml. Variation der lokalen Flussdichte $b(r)$ auf Skala $\Delta x < \lambda_{\rm GL}$ kostet $\Delta E > B_{\rm cth}^2/2\mu_0$
    ➢ $\boldsymbol{\xi}_{\rm GL}$: räuml. Variation der Amplitude oder Phase des OPs $\Psi(r)$ auf Skala $\Delta x < \xi_{\rm GL}$ kostet $\Delta E > B_{\rm cth}^2/2\mu_0$
  – typische Werte von $\lambda_{\rm GL}(0)$ und $\xi_{\rm GL}(0)$: 10 nm bis 1 µm

Zusammenfassung: Teil 27c, 01.06.2021/1

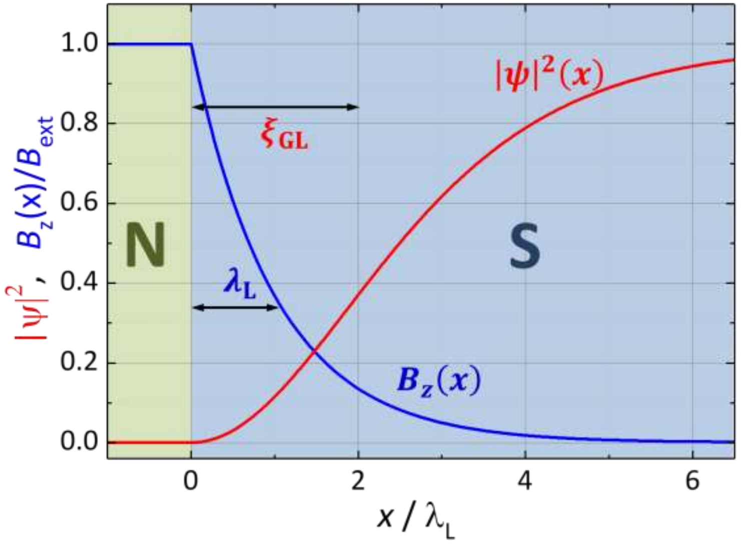
- ***Ginzburg-Landau Parameter***

$$\kappa \equiv \frac{\lambda_{\mathrm{GL}}}{\xi_{\mathrm{GL}}} = \sqrt{\frac{2m_s^2\beta}{\mu_0\hbar^2 q_s^2}} = \sqrt{\frac{\beta}{2\mu_0}}\,\frac{1}{\mu_{\mathrm{B}}}$$

- ***Supraleiter/Normalleiter-Grenzfläche***

$$|\psi(x)|^2 = \frac{n_s(x)}{n_s(\infty)} = \tanh^2\left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi_{\mathrm{GL}}}\right)$$

$$\frac{b(x)}{B_{\mathrm{ext}}} = \exp\left(-\frac{x}{\lambda_{\mathrm{L}}}\right)$$



- ***Grenzflächenenergie***

$$\Delta E_{\mathrm{Grenz}} = \Delta E_C + \Delta E_B \simeq \frac{B_{\mathrm{cth}}^2}{2\mu_0}\left[\xi_{\mathrm{GL}} - \left(\frac{B_{\mathrm{ext}}}{B_{\mathrm{cth}}}\right)^2 \lambda_{\mathrm{GL}}\right]$$

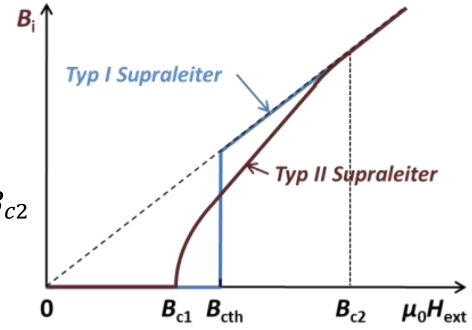
$\boldsymbol{\xi_{\mathrm{GL}} > \lambda_{\mathrm{GL}}}$: $\boldsymbol{\Delta E_{\mathrm{grenz}} > 0}$ für $0 \le B_{\mathrm{ext}} \le B_{\mathrm{cth}}$
➔ Grenzflächen ungünstig → Meißner-Zustand für $0 \le B_{\mathrm{ext}} \le B_{\mathrm{cth}}$ → ***Typ-I-Supraleiter***

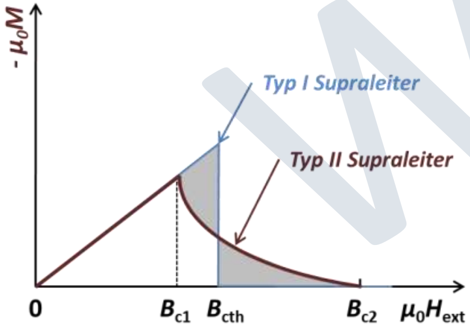
$\boldsymbol{\xi_{\mathrm{GL}} < \lambda_{\mathrm{GL}}}$: $\boldsymbol{\Delta E_{\mathrm{grenz}} < 0}$ für $B_{c1} \le B_{\mathrm{ext}} \le B_{c2}$
➔ Grenzflächen günstig → Mischzustand für $B_{c1} \le B_{\mathrm{ext}} \le B_{c2}$ → ***Typ-II-Supraleiter***

- ***Typ-I und Typ-II Supraleiter***

Typ-I: $B_i = 0$ und $-\mu_0 M = B_{\mathrm{ext}}$ für $B_{\mathrm{ext}} \le B_{\mathrm{cth}}$
$B_i = B_{\mathrm{ext}}$ und $-\mu_0 M \simeq 0$ für $B_{\mathrm{ext}} > B_{\mathrm{cth}}$

Typ-II: $B_i = 0$ und $-\mu_0 M = B_{\mathrm{ext}}$ für $B_{\mathrm{ext}} \le B_{c1}$
$0 < B_i < B_{\mathrm{ext}}$ und $-\mu_0 M < B_{\mathrm{ext}}$ für $B_{c1} < B_{\mathrm{ext}} < B_{c2}$
$B_i = B_{\mathrm{ext}}$ und $-\mu_0 M \simeq 0$ für $B_{\mathrm{ext}} > B_{c2}$





genaue Rechnung:

$$\kappa = \frac{\lambda_{\mathrm{GL}}}{\xi_{\mathrm{GL}}} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (Typ-I)}$$

$$\kappa = \frac{\lambda_{\mathrm{GL}}}{\xi_{\mathrm{GL}}} \ge \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (Typ-II)}$$