



**Physik der  
Kondensierten Materie 2**

**Rudolf Gross**

**SS 2021**

**Teil 28**

**Vorlesungsstunde: 01.06.2021-2**

## • Phänomenologische Modelle: C. Ginzburg-Landau-Theorie

- London-Theorie gut geeignet zur Beschreibung von räumlich homogenem SL:  $n_s(r) = \text{const.}$   
 → Problem bei **Oberflächen** und **Grenzflächen**, **Typ-II SL**, .....
- GL-Theorie: Weiterentwicklung der Landau-Theorie der Phasenübergänge:
  - Ginzburg & Landau führen einen **komplexen, räumlich variierenden Ordnungsparameter**  $\Psi(\mathbf{r})$  ein
  - Absolutquadrat des Ordnungsparameters:  $|\Psi(\mathbf{r})|^2 = n_s(\mathbf{r})$

### homogener SL im Nullfeld (analog zur Diskussion von Ferroelektrizität und Ferromagnetismus)

→ Entwicklung der freien Enthalpiedichte  $\mathcal{G}_s$  nach Potenzen des **komplexen, räumlich variierenden Ordnungsparameters**  $\Psi$

$$\mathcal{G}_s = \mathcal{G}_n + \alpha |\Psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\Psi|^4 + \dots \quad \text{mit } \alpha(T) = \bar{\alpha} \left( \frac{T}{T_c} - 1 \right) \quad \text{und } \bar{\alpha} = \left[ \frac{B_{\text{cth}}^2(0)}{2\mu_0} \right] / n_s(0) \quad (\text{Kondensationsenergie pro supraleitendem LT})$$

### inhomogener SL im Magnetfeld:

$$\mathcal{G}_s = \mathcal{G}_n + \alpha |\Psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\Psi|^4 + \underbrace{\frac{1}{2\mu_0} (\mathbf{B}_{\text{ext}} - \mathbf{b})^2}_{\text{Feldverdrängungsarbeit}} + \underbrace{\frac{1}{2m_s} \left| \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - q_s \mathbf{A} \right) \Psi \right|^2}_{\text{räumliche Variation von } \Psi} + \dots$$

$\propto (\mathbf{B}_{\text{ext}} - \mathbf{b})^2$ : Differenz zwischen der von außen erzeugten Flussdichte  $\mathbf{B}_{\text{ext}}$  und der inneren Flussdichte  $\mathbf{b}(\mathbf{r})$   
 - Meißner-Zustand:  $\mathbf{b} = 0$   
 → Feldverdrängungsarbeit  $B_{\text{ext}}^2 / 2\mu_0$

entspricht Beitrag in niedrigster Ordnung von  $\nabla\Psi$ , der sowohl reell als auch eichinvariant ist

mit  $\Psi = |\Psi(\mathbf{r})| e^{i\theta(\mathbf{r})}$  kann Term umgeschrieben werden

in: 
$$\frac{1}{2m_s} \left[ \underbrace{\hbar^2 (\nabla|\Psi|)^2}_{\text{Amplitudengradient}} + \underbrace{(\hbar\nabla\theta - q_s A)^2}_{\text{Phasengradient}} |\Psi|^2 \right]$$

Amplitudengradient      Phasengradient

→ **räumliche Variation von Amplitude oder Phase des OP erhöht Energie** → **endliche „Steifigkeit“ des OPs**

## • Ginzburg-Landau (GL) Gleichungen

– Minimierung der freien Enthalpie durch Variation von  $A$  und  $\Psi$  führt auf **GL-Gleichungen**:

1. **GL-Gleichung**  $0 = \frac{1}{2m_s} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - q_s \mathbf{A} \right)^2 \Psi + \alpha \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi \Rightarrow$  **GL-Kohärenzlänge  $\xi_{GL}$**

2. **GL-Gleichung**  $\mathbf{J}_s = \frac{q_s \hbar}{2m_s} \frac{1}{i} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{q_s^2}{m_s} |\Psi|^2 \mathbf{A} \Rightarrow$  **Magnetfeld-Eindringtiefe  $\lambda_{GL}$**

➤ 2. GL-Gleichung entspricht für  $|\Psi(\mathbf{r})|^2 = n_s(\mathbf{r}) = const.$  der Strom-Phasen-Beziehung

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{r}, t) = q_s n_s \left\{ \frac{\hbar}{m_s} \nabla \theta(\mathbf{r}, t) - \frac{q_s}{m_s} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right\}$$

– **wichtig:**

**GL Theorie** kann Situationen mit räumlich variierendem OP beschreiben, aber keine zeitabhängigen Phänomene (GL-Gleichungen enthalten keine Zeitableitung)

**makroskopisches Quantenmodell** kann Situationen mit ortsabhängiger Dichte der supraleitenden Elektronen nicht beschreiben, dafür aber zeitabhängige Phänomene (Energie-Phasen-Beziehung  $\rightarrow$  z.B. Josephson Effekt)

## • charakteristische Längenskalen

(i) London-Eindringtiefe:  
Variation der Flussdichte

$$\lambda_{GL}(T) = \sqrt{-\frac{m_s \beta}{\mu_0 \alpha(T) q_s^2}} = \sqrt{-\frac{m_s \beta}{\mu_0 \bar{\alpha} q_s^2} \frac{1}{\sqrt{1 - T/T_C}}}$$

(ii) Kohärenzlänge:  
Variation des  
Ordnungsparameters

$$\xi_{GL}(T) = \sqrt{-\frac{\hbar^2}{2m_s \alpha(T)}} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m_s \bar{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{1 - T/T_C}}}$$

– **physikalische Interpretation der charakteristischen Längenskalen:**

➤  $\lambda_{GL}$ : räuml. Variation der lokalen Flussdichte  $b(r)$  auf Skala  $\Delta x < \lambda_{GL}$  kostet  $\Delta E > B_{cth}^2 / 2\mu_0$

➤  $\xi_{GL}$ : räuml. Variation der Amplitude oder Phase des OPs  $\Psi(r)$  auf Skala  $\Delta x < \xi_{GL}$  kostet  $\Delta E > B_{cth}^2 / 2\mu_0$

– typische Werte von  $\lambda_{GL}(0)$  und  $\xi_{GL}(0)$ : 10 nm bis 1  $\mu$ m

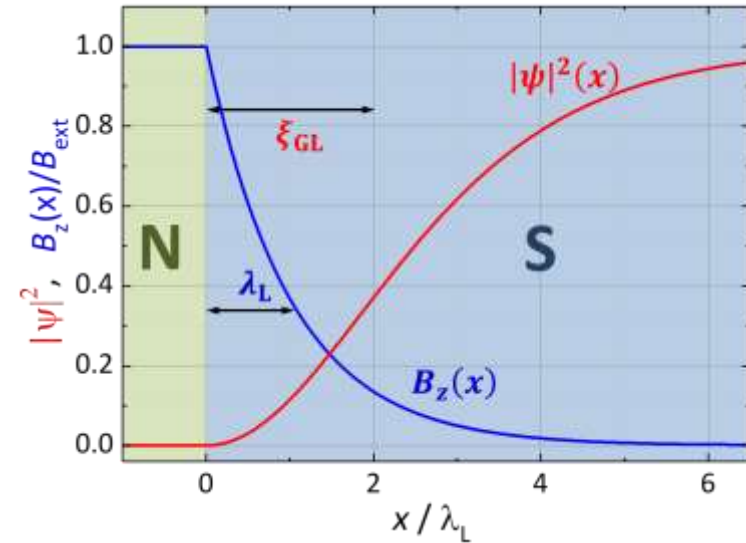
## Ginzburg-Landau Parameter

$$\kappa \equiv \frac{\lambda_{GL}}{\xi_{GL}} = \sqrt{\frac{2m_s^2\beta}{\mu_0\hbar^2q_s^2}} = \sqrt{\frac{\beta}{2\mu_0}} \frac{1}{\mu_B}$$

## Supraleiter/Normalleiter-Grenzfläche

$$|\psi(x)|^2 = \frac{n_s(x)}{n_s(\infty)} = \tanh^2\left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi_{GL}}\right)$$

$$\frac{b(x)}{B_{ext}} = \exp\left(-\frac{x}{\lambda_L}\right)$$



## Grenzflächenenergie

$$\Delta E_{Grenz} = \Delta E_C + \Delta E_B \approx \frac{B_{cth}^2}{2\mu_0} \left[ \xi_{GL} - \left(\frac{B_{ext}}{B_{cth}}\right)^2 \lambda_{GL} \right]$$

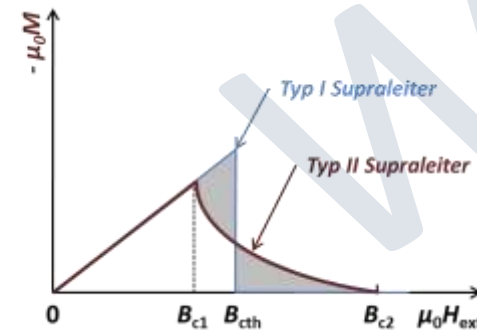
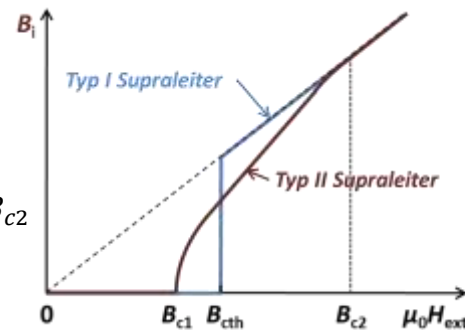
$\xi_{GL} > \lambda_{GL}$ :  $\Delta E_{Grenz} > 0$  für  $0 \leq B_{ext} \leq B_{cth}$   
 → Grenzflächen ungünstig → Meißner-Zustand für  $0 \leq B_{ext} \leq B_{cth}$  → **Typ-I-Supraleiter**

$\xi_{GL} < \lambda_{GL}$ :  $\Delta E_{Grenz} < 0$  für  $B_{c1} \leq B_{ext} \leq B_{c2}$   
 → Grenzflächen günstig → Mischzustand für  $B_{c1} \leq B_{ext} \leq B_{c2}$  → **Typ-II-Supraleiter**

## Typ-I und Typ-II Supraleiter

**Typ-I:**  $B_i = 0$  und  $-\mu_0 M = B_{ext}$  für  $B_{ext} \leq B_{cth}$   
 $B_i = B_{ext}$  und  $-\mu_0 M \approx 0$  für  $B_{ext} > B_{cth}$

**Typ-II:**  $B_i = 0$  und  $-\mu_0 M = B_{ext}$  für  $B_{ext} \leq B_{c1}$   
 $0 < B_i < B_{ext}$  und  $-\mu_0 M < B_{ext}$  für  $B_{c1} < B_{ext} < B_{c2}$   
 $B_i = B_{ext}$  und  $-\mu_0 M \approx 0$  für  $B_{ext} > B_{c2}$



genaue Rechnung:

$$\kappa = \frac{\lambda_{GL}}{\xi_{GL}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{Typ-I})$$

$$\kappa = \frac{\lambda_{GL}}{\xi_{GL}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{Typ-II})$$

# Kapitel 13

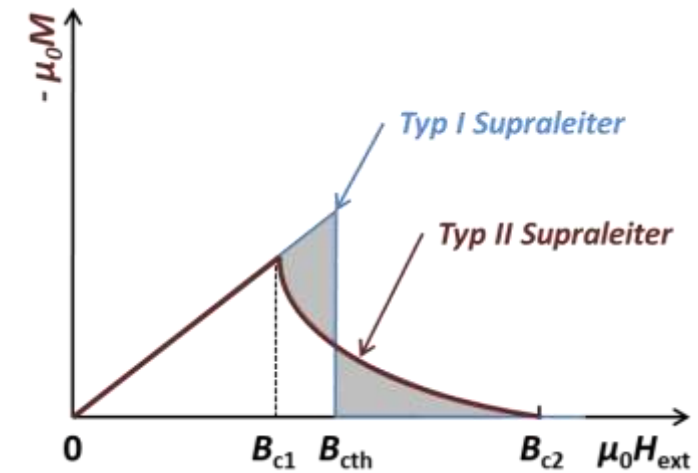
## Supraleitung



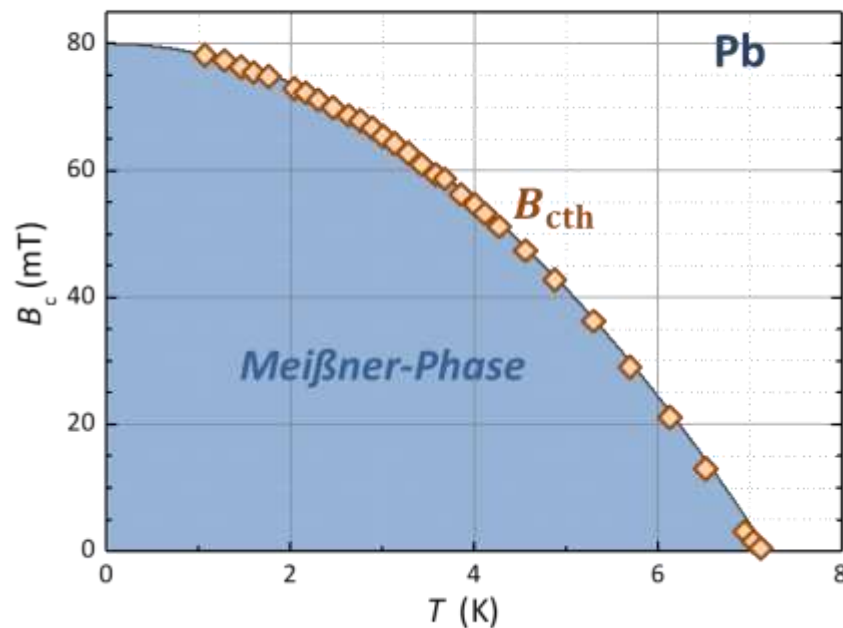
www

# 13.4.4 Kritische Magnetfelder

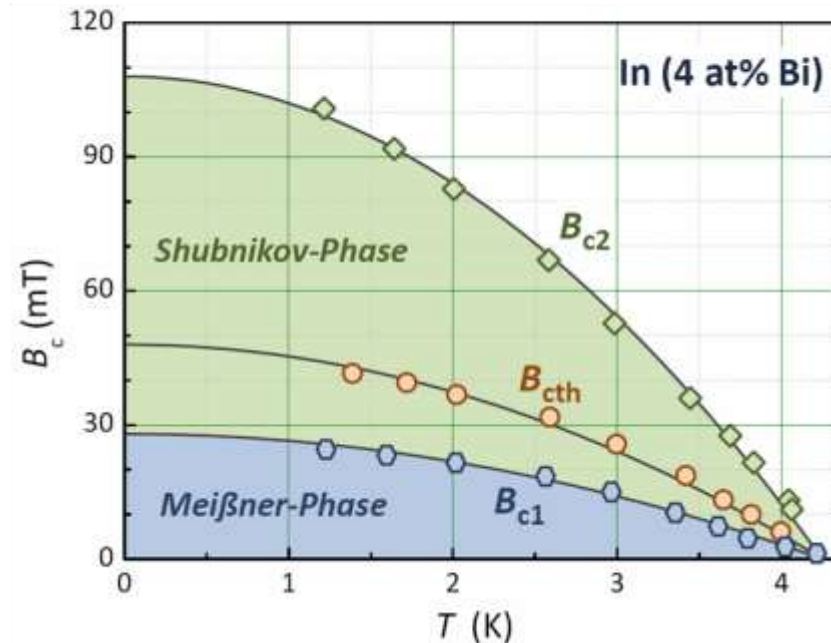
Was bestimmt die Größe des unteren ( $B_{c1}$ ) und oberen kritischen Magnetfeldes ( $B_{c2}$ ) in Typ-II Supraleitern?



Typ-I Supraleiter



Typ-II Supraleiter



Für Typ-I und Typ-II SL mit gleicher Kondensationsenergie gilt:

$$\int_0^{B_{c1h}} \mu_0 M dH_{ext} = \int_0^{B_{c2}} \mu_0 M dH_{ext} = \frac{B_{c1h}^2}{2\mu_0}$$

# 13.4.4 Kritische Magnetfelder

## Abschätzung des unteren kritischen Feldes $B_{c1}$

- **Grenzflächenenergie:** für  $B_{\text{ext}} > B_{c1}$  wird N/S-Grenzflächenenergie von Typ-II Supraleiter negativ

$$\Delta E_{\text{Grenz}} \simeq \frac{B_{\text{cth}}^2}{2\mu_0} \left[ \xi_{\text{GL}} - \left( \frac{B_{\text{ext}}}{B_{\text{cth}}} \right)^2 \lambda_{\text{GL}} \right] = 0 \Rightarrow B_{\text{ext}} = B_{c1} = B_{\text{cth}} \sqrt{\frac{\xi_{\text{GL}}}{\lambda_{\text{GL}}}} \quad \xrightarrow{B_{\text{cth}} = \frac{\Phi_0}{2\pi\sqrt{2} \xi_{\text{GL}} \lambda_{\text{GL}}}} \quad B_{c1} = \sqrt{\frac{\kappa}{2}} \frac{\Phi_0}{2\pi \lambda_{\text{GL}}^2}$$

- **Flussinhalt in N-Bereich:** der minimale magnetische Fluss in einem vom SL umschlossenen Bereich ist  $\Phi_0$ 
  - das Integral über die magnetische Flussdichte muss also mindestens  $\Phi_0$  ergeben
  - die Flussdichte klingt exponentiell mit charakteristischer Abklinglänge  $\lambda_L$  ab
  - wir nehmen zur Vereinfachung  $|\psi(r)|^2 = n_s(r) = \text{const.}$  an, obwohl  $n_s(r)$  im N-Bereich kontinuierlich auf Null abnimmt

$$\int_0^\infty B_{\text{ext}} e^{-r/\lambda_L} 2\pi r dr = \Phi_0 \quad \longrightarrow \quad B_{\text{ext}} = B_{c1} = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda_{\text{GL}}^2}$$

➔ **erst für  $B_{\text{ext}} \geq B_{c1}$  kann das äußere Feld in einem N-Bereich einen magnetischen Fluss der Größe  $\Phi_0$  erzeugen**

- **genaue Rechnung:** Berücksichtigung der räumlichen Variation von  $n_s(r)$

$$B_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi \lambda_{\text{GL}}^2} (\ln \kappa + 0.08) = \frac{1}{\sqrt{2} \kappa} (\ln \kappa + 0.08) B_{\text{cth}}$$

➔  $B_{c1} \ll B_{\text{cth}}$  für  $\kappa \gg 1$

# 13.4.4 Kritische Magnetfelder

## Abschätzung des oberen kritischen Feldes $B_{c2}$ (Abrikosov, 1957)

- wir benutzen 1. Ginzburg-Landau-Gleichung und linearisieren diese, da  $|\psi(r)|^2 \rightarrow 0$  für  $B_{\text{ext}} \rightarrow B_{c2}$

$$0 = \frac{1}{2m_s} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - q_s \mathbf{A} \right)^2 \Psi + \alpha \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2m_s} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - q_s \mathbf{A} \right)^2 \Psi = -\alpha \Psi$$

entspricht Gleichung von freien Teilchen mit Ladung  $q_s$  und Gesamtenergie  $-\alpha$  in externem Magnetfeld  $\rightarrow$  **Landau-Niveaus**

- Energieeigenwerte der Landau-Niveaus:

$$\varepsilon_n = \hbar \omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) = \frac{\hbar q_s B_{\text{ext},z}}{m_s} \left( n + \frac{1}{2} \right) = -\alpha - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_s} = \frac{\hbar^2}{2m_s} \left( \frac{1}{\xi_{\text{GL}}^2} - k_z^2 \right) \quad \text{mit } \alpha = -\frac{\hbar^2}{2m_s \xi_{\text{GL}}^2}$$

- Auflösen nach  $B_{\text{ext},z}$  ergibt:

$$B_{\text{ext},z} = \frac{\hbar}{2q_s} \left( \frac{1}{\xi_{\text{GL}}^2} - k_z^2 \right) \left( n + \frac{1}{2} \right)^{-1}$$

- unterstes Niveau ( $n = 0, k_z = 0$ ):

$$B_{\text{ext},z} = \frac{\hbar}{q_s \xi_{\text{GL}}^2} = \frac{h}{q_s} \frac{1}{2\pi \xi_{\text{GL}}^2} = \frac{\Phi_0}{2\pi \xi_{\text{GL}}^2} \quad \longrightarrow \quad B_{c2} = \frac{\Phi_0}{2\pi \xi_{\text{GL}}^2} = \sqrt{2} \kappa B_{\text{cth}}$$

$$B_{\text{cth}} = \frac{\Phi_0}{2\pi \sqrt{2} \xi_{\text{GL}} \lambda_{\text{GL}}}$$

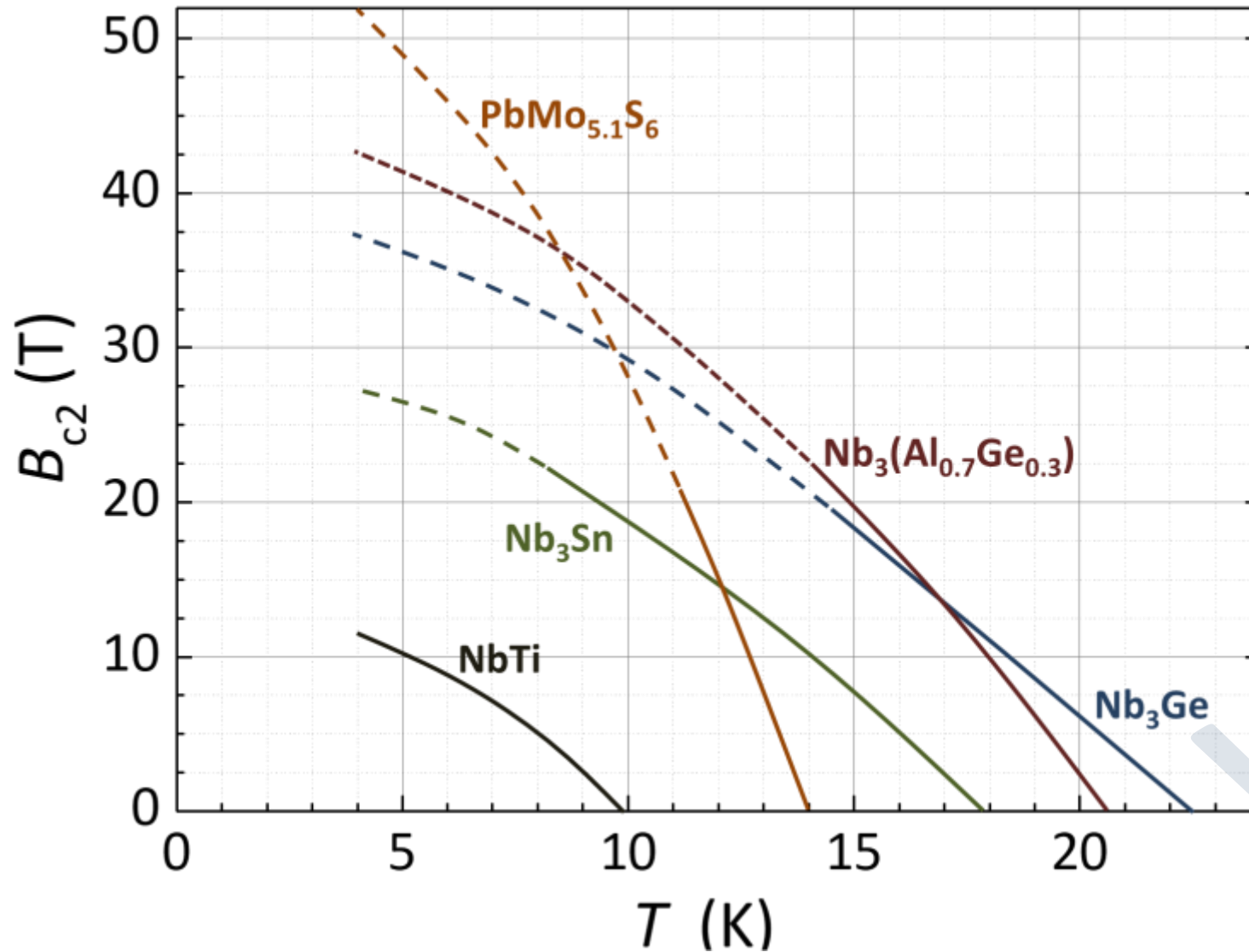
### Interpretation von $B_{c2}$ :

- da  $n_s(r)$  nur auf Längenskala  $r \geq \xi_{\text{GL}}$  variieren kann, ist minimale Größe eines N-Bereichs  $\approx \pi \xi_{\text{GL}}^2$
- bei  $B_{\text{ext}} = B_{c2}$  ist die Flächendichte der Flussquanten gerade  $B_{c2}/\Phi_0 \approx 1/\pi \xi_{\text{GL}}^2$ , d.h. für  $B_{\text{ext}} = B_{c2}$  füllen die N-Bereiche den gesamten SL voll aus



# 13.4.4 Kritische Magnetfelder

Obere kritische Magnetfelder von technisch relevanten Supraleitern



# 13.4.4 Kritische Magnetfelder

## Obere kritische Magnetfelder von technisch relevanten Supraleitern

Element	Al	In	Nb	Pb	Sn	Ta	Tl	V
$T_c$ [K]	1.19	3.408	9.25	7.196	3.722	4.47	2.38	5.46
$B_{cth}$ [mT]	10.49	28.15	206	80.34	30.55	82.9	17.65	140
$\lambda_L(0)$ [nm]	50	65	32–45	40	50	35		40

Element	Al	In	Nb	Pb	Sn	Ta	Tl	V
$\kappa_\infty$	0.03	0.06	~ 0.8	0.4	0.1	0.35	0.3	0.85

Verbindung	NbTi	Nb <sub>3</sub> Sn	NbN	PbIn (2–30%)	PbIn (2–50%)	Nb <sub>3</sub> Ge	V <sub>3</sub> Si	YBa <sub>2</sub> Cu <sub>3</sub> O <sub>7</sub> ( <i>ab</i> -Ebene)
$T_c$ [K]	≈ 10	≈ 18	≈ 16	≈ 7	≈ 8.3	23	16	92
$B_{c2}$ [T]	≈ 10.5	≈ 23–29	≈ 15	≈ 0.1–0.4	≈ 0.1–0.2	38	20	160±25

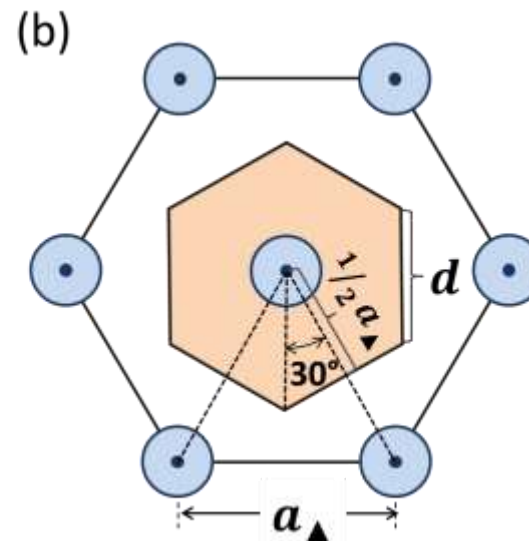
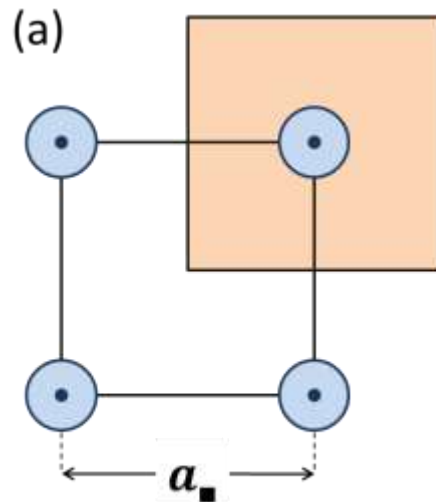
Verbindung	NbTi	Nb <sub>3</sub> Sn	NbN	PbIn (2–30%)	PbIn (2–50%)	Nb <sub>3</sub> Ge	V <sub>3</sub> Si	YBa <sub>2</sub> Cu <sub>3</sub> O <sub>7</sub> ( <i>ab</i> -Ebene)
$\lambda_L(0)$ [nm]	≈ 300	≈ 80	≈ 200	≈ 150	≈ 200	90	60	≈ 140 ± 10
$\kappa_\infty$	≈ 75	≈ 20–25	≈ 40	≈ 5–15	≈ 8–16	30	20	≈ 100 ± 20

# 13.4.6 Subnikov-Phase und Flussliniengitter

Wie sieht die räumlich Verteilung der magnetischen Flussdichte in der Shubnikov-Phase aus?

- nur qualitative Diskussion (quantitative Diskussion erfordert numerische Lösung der GL-Gleichungen)
  - da Grenzflächenenergie für  $B_{c1} \leq B_{\text{ext}} \leq B_{c2}$  negativ ist, wird Fluss in möglichst viele kleine Portionen aufgeteilt, um Grenzfläche groß zu machen
  - untere Schranke wird durch Flussquant  $\Phi_0$  festgelegt
  - Flussquanten verhalten sich wie parallel ausgerichtete Stabmagnete
    - stoßen sich ab
    - Anordnung mit möglichst großem Abstand wird bevorzugt
    - optimal ist **hexagonales Flusslinien-Gitter** → **Abrikosov Vortex-Gitter**

$$a_{\blacksquare} = \sqrt{\Phi_0 / B_{\text{ext}}}$$



$$\tan 30^\circ = \frac{d/2}{a_{\blacktriangle}/2} = \frac{d}{a_{\blacktriangle}} \Rightarrow d = a_{\blacktriangle} \tan 30^\circ$$

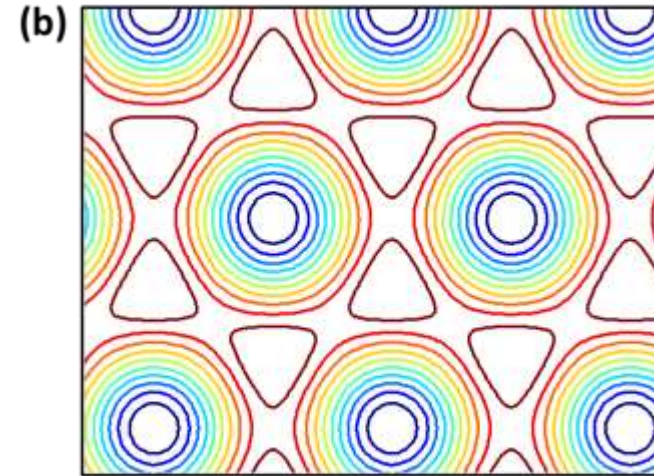
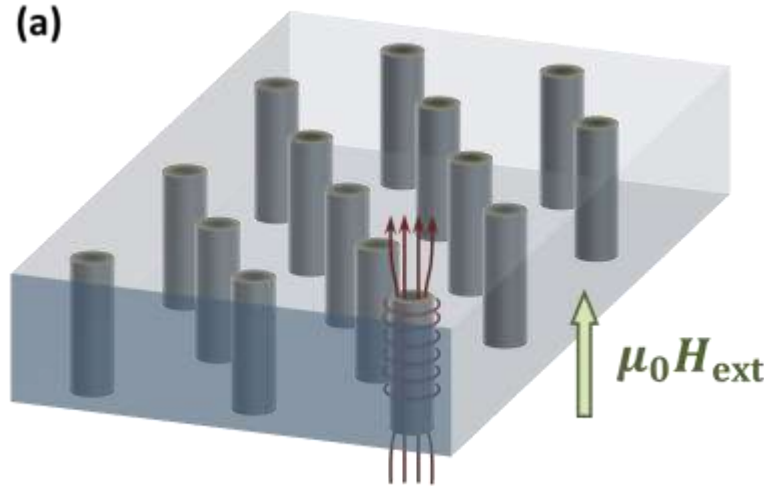
$$A_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2} d^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} (a_{\blacktriangle} \tan 30^\circ)^2 = \frac{\Phi_0}{B_{\text{ext}}}$$

$$a_{\blacktriangle} = 1.075 \sqrt{\Phi_0 / B_{\text{ext}}}$$

# 13.4.6 Subnikov-Phase und Flussliniengitter

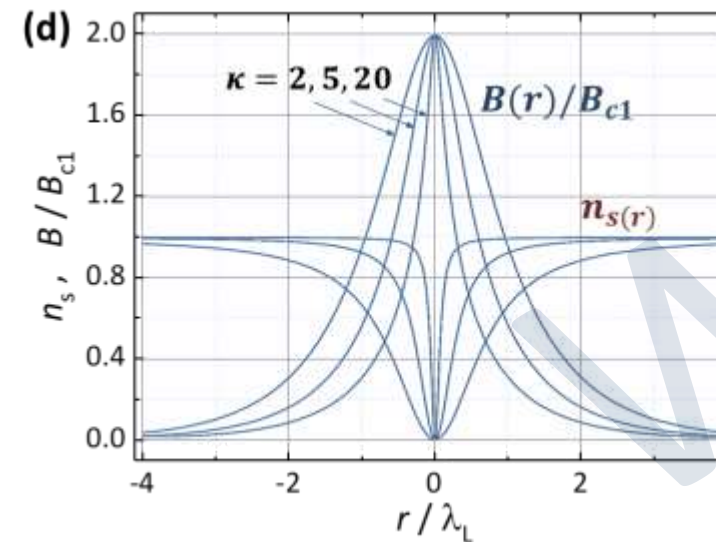
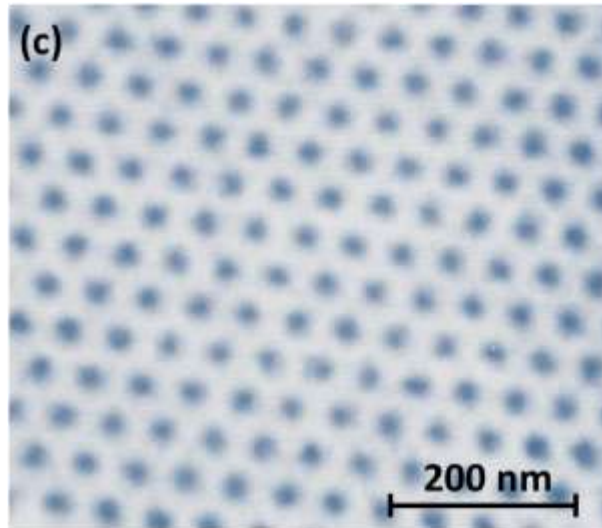
Wie sieht die räumlich Verteilung des magnetischen Flussdichte in der Shubnikov-Phase aus?

Schematische Darstellung des Flussliniengitters in einem Typ-II Supraleiter. Für eine einzelne Flusslinie sind exemplarisch der Flusslinienverlauf und die ringförmigen Abschirmströme skizziert.



Konturlinien von  $n_s = |\psi|^2$  in einem Abrikosov-Dreiecksgitter

Mit einem STM gewonnene Abbildung eines für  $B_{ext} = 1$  T erhaltenen Flussliniengitters in einem NbSe<sub>2</sub>-Einkristall (nach H. F. Hess et al., Phys. Rev. Lett. 62, 214 (1989), © (2012) American Physical Society).



radialer Verlauf von  $n_s(r)$  und  $B(r)/B_{c1}$  in einer isolierten Flusslinie (nach E. H. Brandt, Phys. Rev. Lett. 78, 2208 (1997))

# 13.4.6 Subnikov-Phase und Flussliniengitter

## Dekoration des Flussliniengitters



U. Essmann,  
H. Träuble (1968)  
MPI Metallforschung

**Nb**,  $T = 4 \text{ K}$   
1mm dicke Scheibe, 4 mm  $\phi$   
 $B_{\text{ext}} = 985 \text{ G}$ ,  $a = 170 \text{ nm}$



### *REM-Aufnahmen nach Dekoration mit Fe-Dampf (Bitter-Technik)*

D. Bishop, P. Gammel (1987)  
AT&T Bell Labs  
**YBCO**,  $T = 77 \text{ K}$   
 $B_{\text{ext}} = 20 \text{ G}$ ,  $a = 1200 \text{ nm}$

ähnliche Experimente:  
L. Ya. Vinnikov, ISSP Moscow  
G. J. Dolan, IBM NY

Flussliniengitter ist unregelmäßig durch viele Defekte

→ **Flusslinienverankerung durch Defekte**

# 13.4.7 Flusslinien in Typ-II Supraleitern

Wie sieht der radiale Verlauf der Dichte  $n_s(r)$  der supraleitenden LT und der magnetischen Flussdichte  $b(r)$  in einer Flusslinie aus?

## I. Radialer Verlauf von $n_s(r) = |\psi(r)|^2$

- wir verwenden den Ansatz  $\psi(r) = \psi_\infty f(r)e^{i\theta}$  (berücksichtigt axiale Symmetrie und Tatsache, dass sich Phase um  $2\pi$  ändert, wenn wir uns einmal um Kern der Flusslinie herumbewegen)
- Einsetzen in 1. GL-Gleichung liefert Lösung für  $f(r)$

$$f(r) = \tanh\left(c \frac{r}{\xi_{\text{GL}}}\right) \quad \text{mit } c \simeq 1$$

## II. Radialer Verlauf von $b(r)$

- wir diskutieren  $b(r)$  nur für den Fall  $\kappa = \frac{\lambda_{\text{GL}}}{\xi_{\text{GL}}} \gg 1$  (da  $\xi_{\text{GL}} \ll \lambda_{\text{GL}}$  können wir in guter Näherung  $\psi(r) = \psi_\infty = \text{const.}$  annehmen)
- wir berücksichtigen Flusslinienkern in 2. London-Gleichung mit 2D  $\delta_2$ -Funktion (Fluss in z-Richtung)

$$\nabla^2 \mathbf{b} - \frac{1}{\lambda_{\text{GL}}^2} \mathbf{b} = \hat{\mathbf{z}} \Phi_0 \delta_2(r)$$

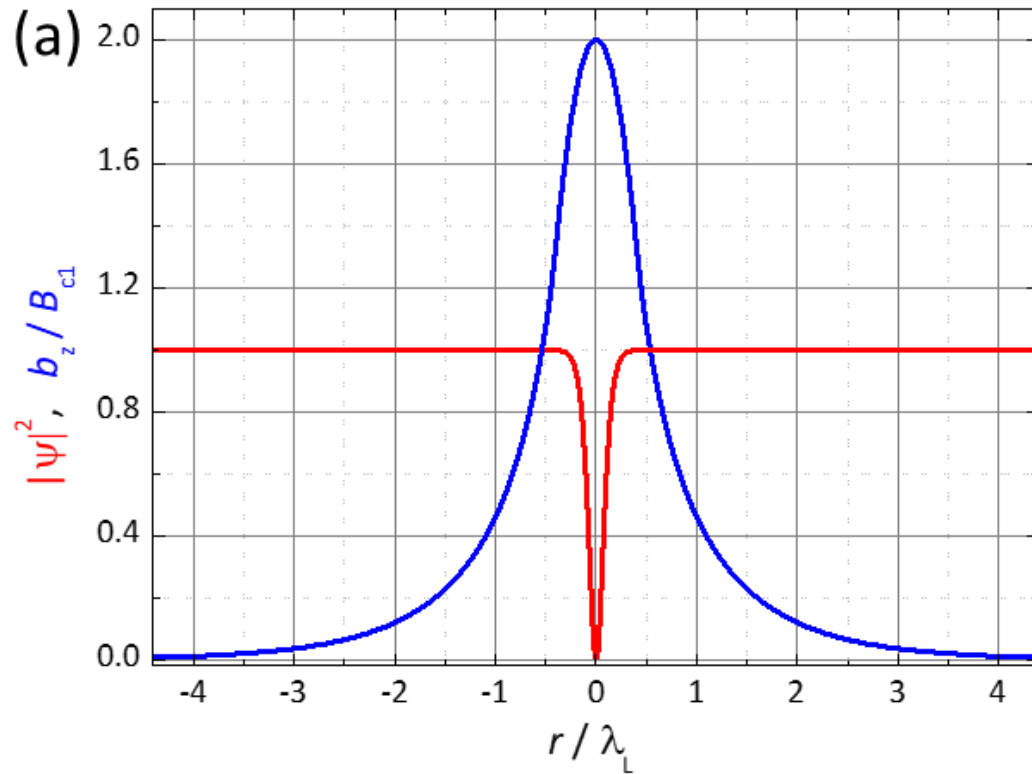
→ Lösung:

$$b(r) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda_{\text{GL}}^2} \mathcal{K}_0\left(\frac{r}{\lambda_{\text{GL}}}\right)$$

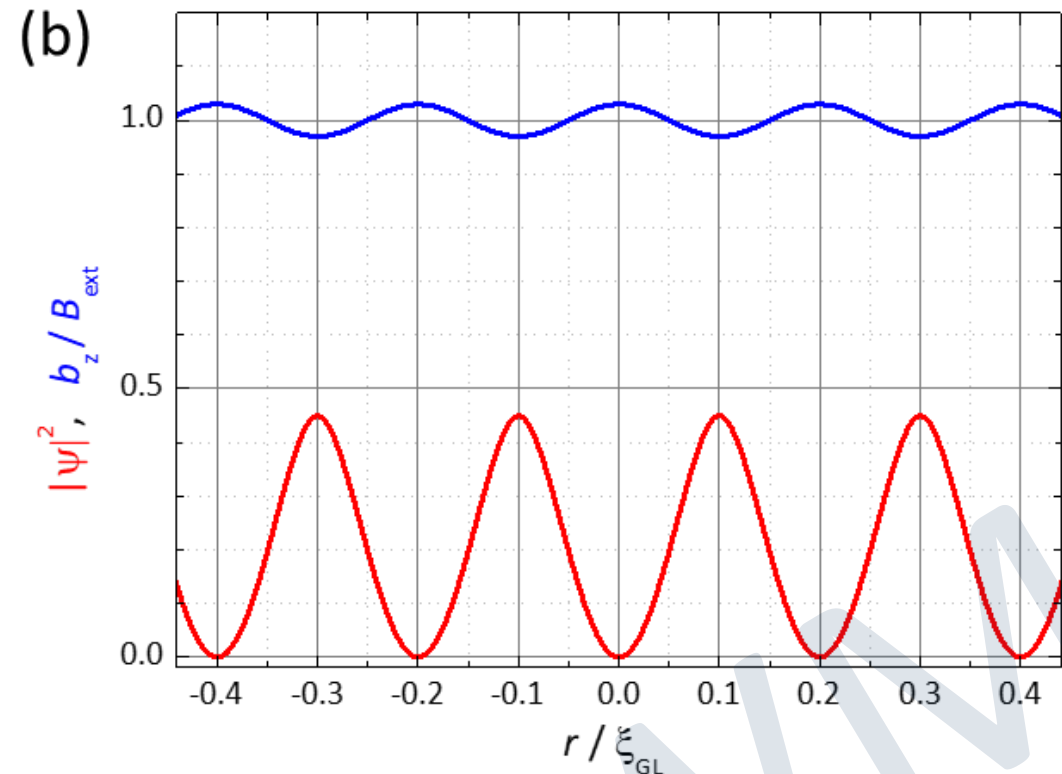
$\mathcal{K}_0$  = modifizierte Bessel-Funktion nullter Ordnung

# 13.4.7 Flusslinien in Typ-II Supraleitern

Radialer Verlauf von  $b(r)/B_{c1}$  und  $|\psi(r)|^2 = |\Psi(r)|^2/|\Psi_\infty|^2$  entlang eines Schnitts durch das Zentrum einer Flusslinie



einzelne Flusslinie  
 $\lambda_{GL} = 10 \xi_{GL}$

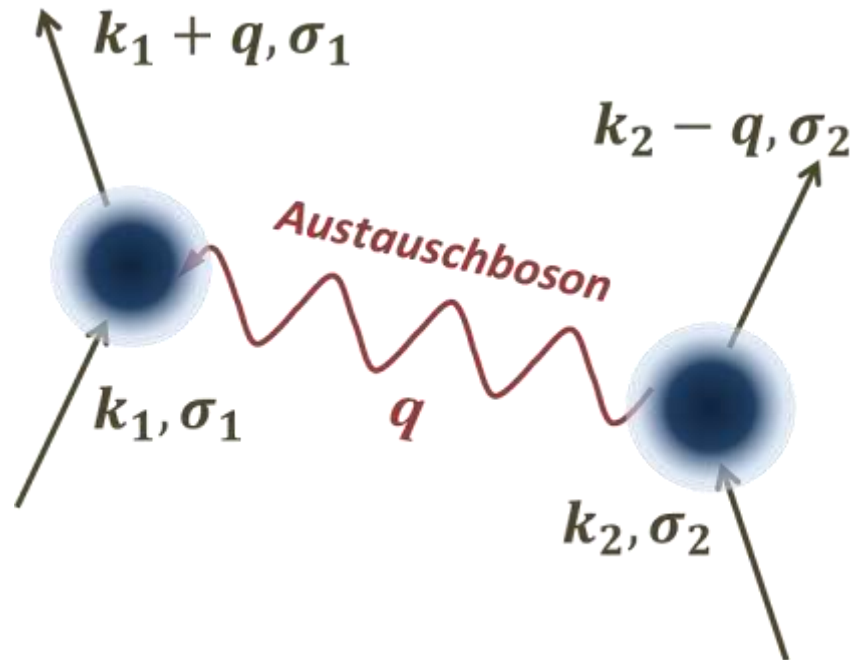


Flussliniengitter für  $B_{ext} = 0.6 B_{c2}$   
 $\lambda_{GL} = 10 \xi_{GL}$

für  $B_{ext} \rightarrow B_{c2}$  wird räumliche Variation der Flussdichte klein: Überlappung der Flusslinien

# 13.5 Mikroskopische Theorie

- Cooper (1956):
  - selbst schwache attraktive WW zwischen Leitungselektronen führt zu Instabilität des Fermi-Gases
  - Paarbildung, Kondensation von Paaren in kohärenten Grundzustand
- allgemeine Beschreibung von WW mit Feynman-Diagramm:
  - welches **Austauschboson** führt zu attraktiver WW?
  - *Phonon, Magnon, Polaron, Plasmon, etc. ??*



WMI

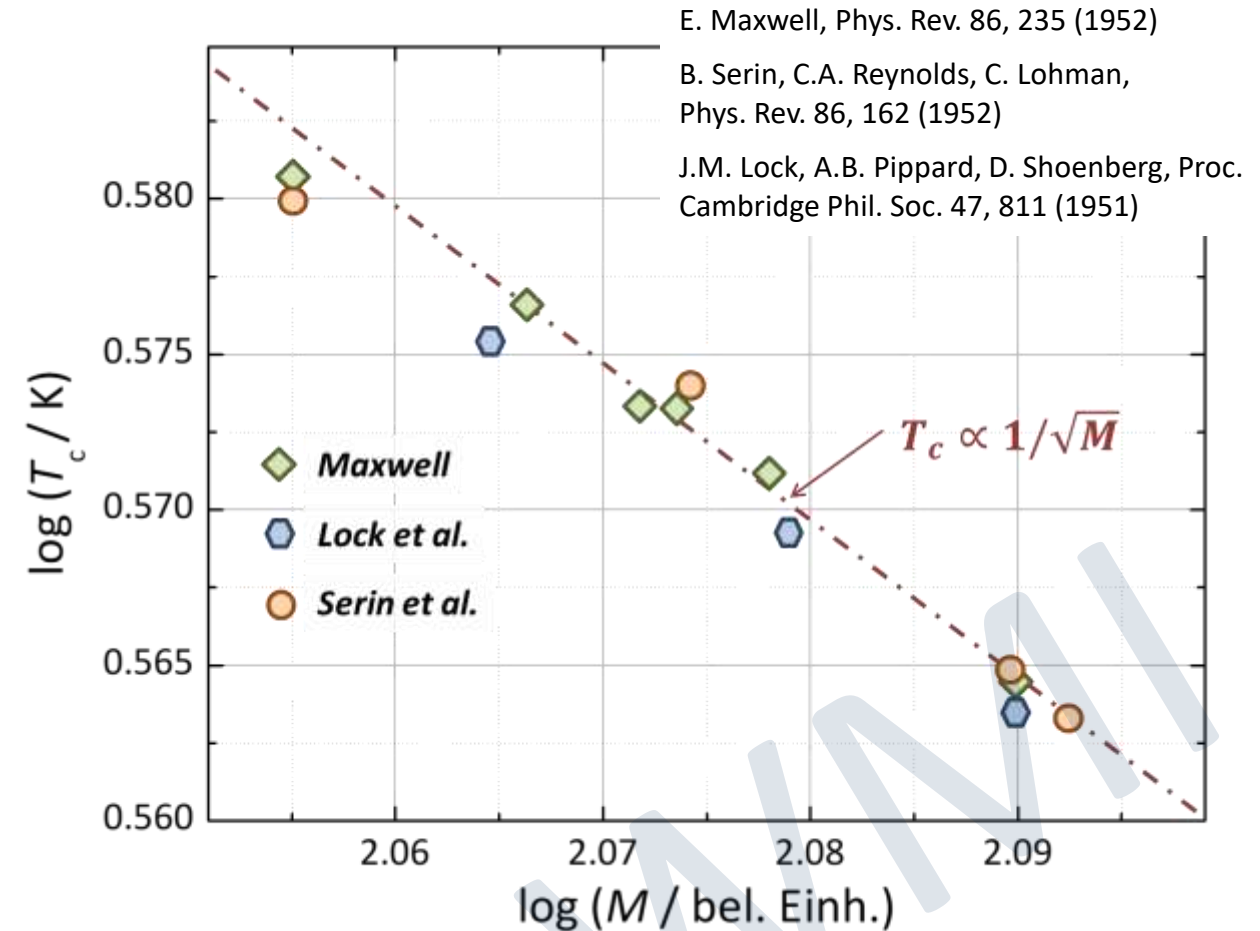


# 13.5 Mikroskopische Theorie

## Wichtiger Hinweis auf Austauschboson folgt aus Messung des Isotopeneffekts für Sn

- Messung der Sprungtemperatur  $T_c$  verschiedener Isotope von Sn (1950/51)
  - Sprungtemperatur  $T_c$  skaliert proportional zu  $1/\sqrt{M}$ 

$$T_c \propto 1/\sqrt{M}$$
  - da Phononenfrequenz  $\omega_{ph} \propto 1/\sqrt{M}$  konnte man folgern, dass
 
$$T_c \propto \omega_{ph}$$
  
- **Problem:**
  - kinetische Energie der Leitungselektronen im einige eV- bzw. 10 000 K Bereich
  - WW-Stärke liegt nur im einige meV- bzw. 1 K Bereich
    - ➔ finde WW, die trotz hoher kinetischer Energie zu Ordnung in Elektronensystem führt

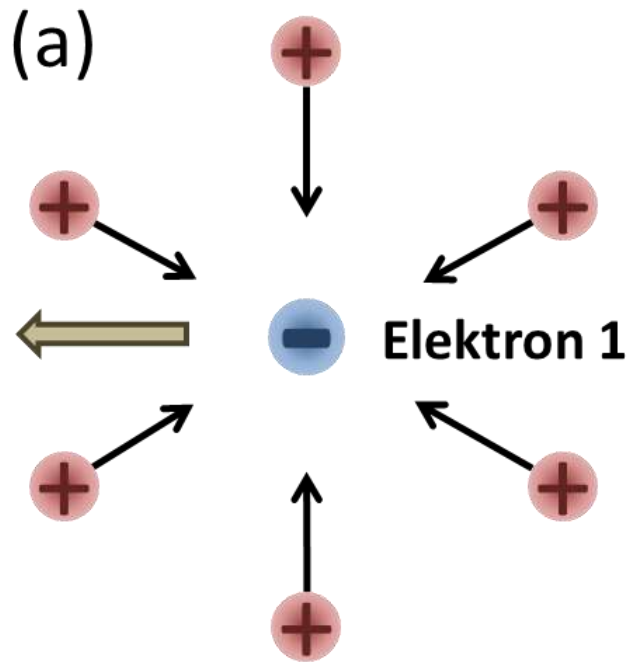


im Allgemeinen gilt:  $T_c \propto 1/M^{\beta^*}$

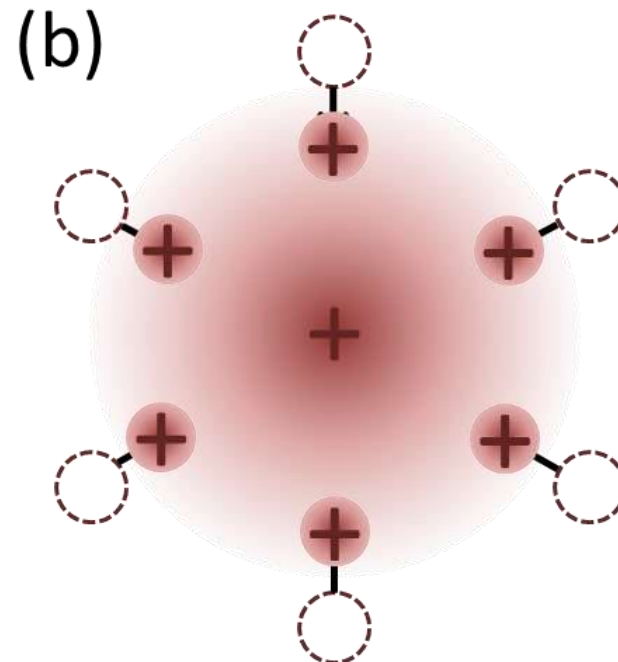
Element	Hg	Sn	Pb	Cd	Tl	Mo	Os	Ru
Isotopen-exponent $\beta^*$	0,50	0,47	0,48	0,5	0,5	0,33	0,2	0,0

# 13.5.1 Attraktive Elektron-Elektron-WW

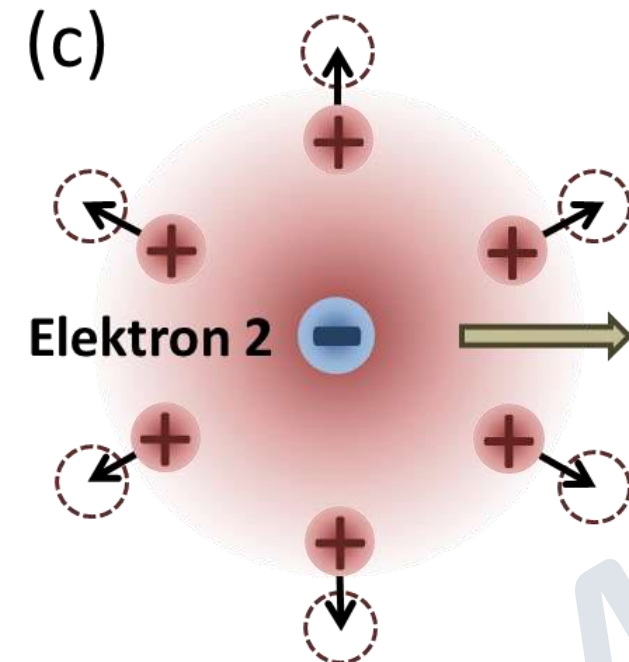
Physikalisches Bild der über Phononen vermittelten attraktiven Elektron-Elektron-Wechselwirkung



- erstes Elektron verzerrt Ionengitter  
→ positive Ladungsanhäufung



- Elektron bewegt sich schnell weiter ( $v_F$ ), Ionengitter relaxiert langsam ( $\tau \sim 1/\omega_{ph}$ ), **Retardierung**  
→ positive Ladungswolke bleibt zurück, nachdem El. längst weg ist:  
→ **Überabschirmung**



- zweites Elektron sieht positive Ladungswolke  
→ attraktive WW  
→ abstoßende WW mit erstem Elektron wird durch Retardierung umgangen

# 13.5.1 Attraktive Elektron-Elektron-WW

Grobe Abschätzung der Reichweite der über Phononen vermittelten attraktiven Elektron-Elektron-Wechselwirkung

- Geschwindigkeit der Elektronen:

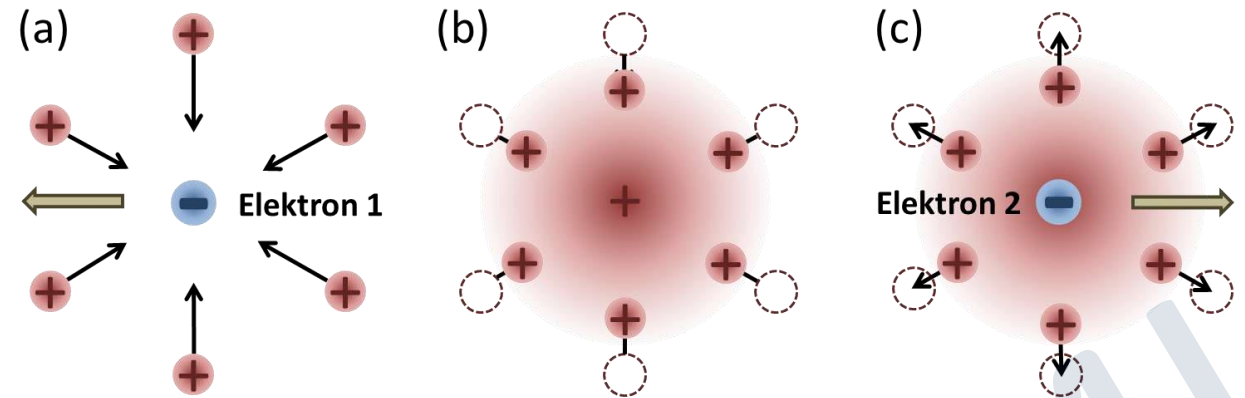
$$v_F \approx 10^6 \text{ m/s}$$

- Relaxationszeit der Ionen:

$$\tau \approx \frac{1}{\omega_{ph}} \approx \frac{1}{\omega_D} \approx 10^{-13} \text{ s}$$

- Reichweite:

$$v_F \tau \approx 100 \text{ nm}$$



## • oberes und unteres kritisches Feld

einfache Abschätzung:

$$B_{c1} \approx \frac{\Phi_0}{\pi \lambda_L^2}$$

$$B_{c2} \approx \frac{\Phi_0}{\pi \xi_{GL}^2}$$

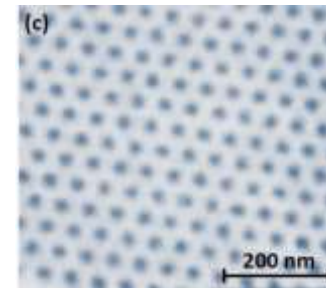
genaue Rechnung liefert:

$$B_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi \lambda_L^2} (\ln \kappa + 0.08) = \frac{1}{\sqrt{2} \kappa} (\ln \kappa + 0.08) B_{cth}$$

$$B_{c2} = \frac{\Phi_0}{4\pi \xi_{GL}^2} = \sqrt{2} \kappa B_{cth}$$

## • Flussliniengitter

- Fluss wird in möglichst viele kleine Portionen aufgeteilt, um Grenzfläche groß zu machen
- untere Schranke setzt Flussquant  $\Phi_0$
- Flusslinien stoßen sich ab  $\rightarrow$  möglichst großer Abstand
  - $\rightarrow$  hexagonales Flussliniengitter aus Flusslinien mit Flussinhalt  $\Phi_0$
  - $\rightarrow$  **Abrikosov-Vortex-Gitter**



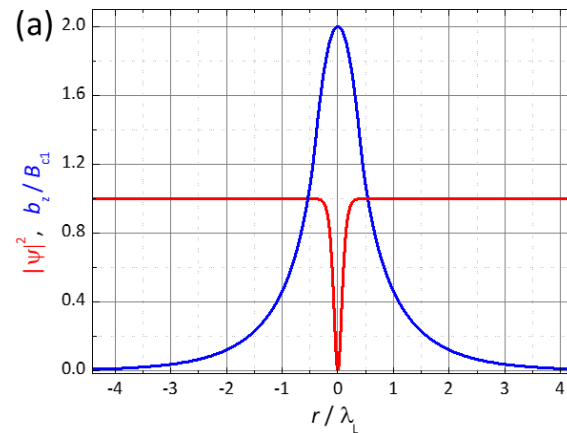
## • Flusslinien in Typ-II Supraleitern

- I. Radialer Verlauf von  $n_s(r) = |\Psi(r)|^2$

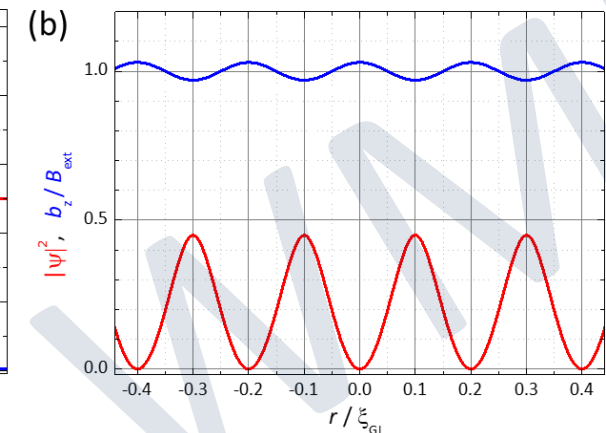
$$\Psi(r) = \Psi_\infty \tanh\left(c \frac{r}{\xi_{GL}}\right)$$

- II. Radialer Verlauf von  $b(r)$

$$b(r) = \frac{\Phi_0}{2\pi \lambda_{GL}^2} \mathcal{K}_0\left(\frac{r}{\lambda_{GL}}\right)$$



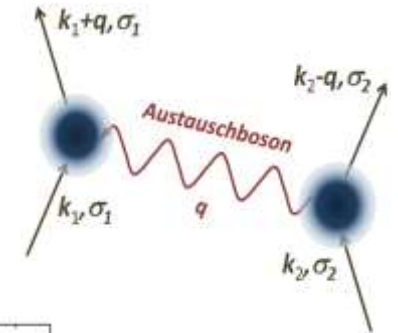
einzelne Flusslinie für  
 $\lambda_{GL} = 10 \xi_{GL}$



Flussliniengitter für  $B_{ext} = 0.6 B_{c2}$   
 $\lambda_{GL} = 10 \xi_{GL}$

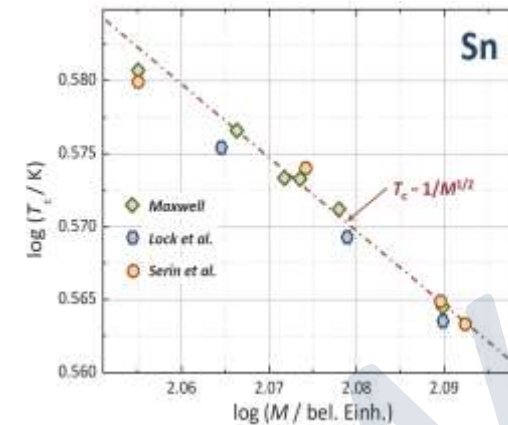
## • Mikroskopische Theorie

- Problem: (i) kinetische Energie der Leitungselektronen:  $\approx$  einige eV (bzw. einige 10 000 K)  
 (ii) WW-Stärke:  $\approx$  einige meV (bzw. einige Kelvin)  
 → finde WW, die trotz hoher kinetischer Energie zu Ordnung in Elektronensystem führt
- Cooper (1956): selbst schwache attraktive WW zwischen Leitungselektronen führt zu Instabilität des Fermi-Gases  
 → **Paarbildung** → **Cooper-Paare**
- allgemeine Beschreibung von WW mit Feynman-Diagramm:  
 → welches **Austauschbosen** führt in Festkörper zu attraktiver WW zwischen Leitungselektronen?  
 → **Phonon, Magnon, Polariton, Plasmon, Polaron, Bipolaron**, etc. ??



## • Isotopen-Effekt (1951/1952):

- Sprungtemperatur von Sn-Isotopen:  $T_c \propto 1/\sqrt{M}$   
 da Phononenfrequenz  $\omega_{ph} \propto 1/\sqrt{M}$   
 →  $T_c \propto \omega_{ph}$   
 falls attraktive WW auf Austausch virtueller Phononen basiert



## • BCS-Theorie

- qualitative Diskussion der WW: träge Reaktion der Ionen  
 → **retardierte Wechselwirkung**
- Reichweite der Wechselwirkung  $\approx v_F \tau \approx v_F / \Omega_D$   
 $v_F \approx 10^6 \text{ m/s}$ ,  $\Omega_D \approx 10^{13} \text{ s}^{-1}$  → Reichweite  $\approx 100 \text{ nm}$

