Physik der Kondensierten Materie 2

Rudolf Gross

SS 2021

Teil 30

Vorlesungsstunde: 07.06.2021-2

WMI

• *Attraktive Elektron-Elektron-Wechselwirkung*

– attraktive WW über Gitterschwingungen (Austausch virtueller Phononen: Fröhlich, Bardeen)

– Streumatrixelement: (i) reine Coulomb-WW: $V(\mathbf{q}) = \dfrac{e^2}{\epsilon_0 q^2}$ (immer positiv → rein repulsive WW)

(ii) abgeschirmte Coulomb-WW: $V(\mathbf{q},\boldsymbol{\omega}) = \dfrac{e^2}{\epsilon(\mathbf{q},\omega)\epsilon_0 q^2} = \left(\dfrac{e^2}{k_s^2 + q^2}\right)\left(1 + \dfrac{\omega^2}{\omega^2 - \widetilde{\Omega}^2(\mathbf{q})}\right)$

Thomas-Fermi-Wellenvektor

q-abh. Plasmafrequenz der abgeschirmten Ionen in Metall

für kleine Energiedifferenz $E_k - E_{k'} = \hbar\omega < \hbar\widetilde{\Omega}_p(\mathbf{q})$ der beteiligten Elektronen:

→ Nenner wird negativ → negatives Matrixelement → attraktive WW

→ Abschneidefrequenz: $\omega = \widetilde{\Omega}_p \simeq \omega_\mathrm{D}$ (Debye-Frequenz)

• *Cooper-Paare*

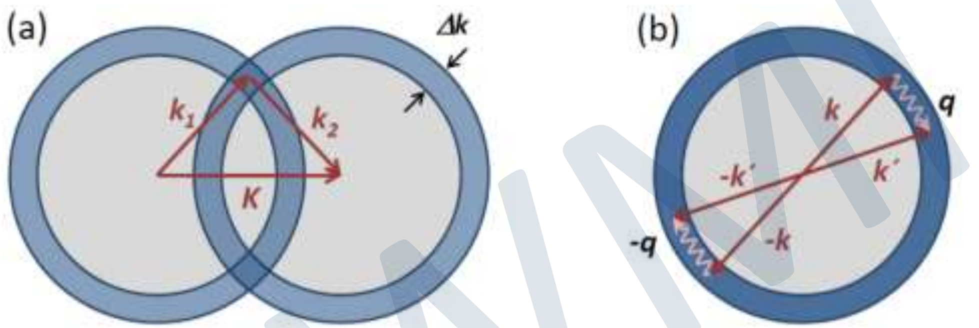
– ***Gedankenexperiment***:
wir addieren 2 zusätzliche Elektronen zu Fermi-Gas bei $T = 0$

– Elektronen können durch Austausch von Phononen mit Wellenzahl q wechselwirken

– Streuung: Elektron 1: $\mathbf{k_1} \to \mathbf{k}_1' = \mathbf{k_1} + \mathbf{q}$

Elektron 2: $\mathbf{k_2} \to \mathbf{k}_2' = \mathbf{k_2} - \mathbf{q}$

Gesamtimpuls $\mathbf{K} = \mathbf{k_1} + \mathbf{k_2} = \mathbf{k}_1' + \mathbf{k}_2' = \mathbf{K}'$



– nur Zustände mit $E > E_\mathrm{F}$ sind zugänglich, da $\omega_\mathrm{ph} < \omega_\mathrm{D}$ spielt sich WW in Intervall

$[E_\mathrm{F}, E_\mathrm{F} + \hbar\omega_\mathrm{D}]$ bzw. $k_\mathrm{F} \le k \le k_\mathrm{F} + \frac{m\omega_\mathrm{D}}{\hbar k_\mathrm{F}} = k_\mathrm{F} + \Delta k$ ab

– wegen Erhaltung des Gesamtimpulses müssen Wellenvektoren in Schnittfläche von zwei Kreisscheiben der Dicke Δk liegen → **maximale Schnittfläche/Phasenraum für $\mathbf{K} = \mathbf{0}$ bzw. $\mathbf{k_1} = -\mathbf{k_2}$**

→ ***Cooper-Paare*** $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$

© Rudolf Gross - Physik der Kondensierten Materie 2 – SS 2021

www.wmi.badw.de

Zusammenfassung: Teil 29b, 07.06.2021/1

- *Cooper-Paar-Wechselwirkung*
  - Ansatz: Paarwellenfunktion = Überlagerung aus Produktfunktionen $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{k=k_\mathrm{F}}^{k_\mathrm{F}+\Delta k} a_k \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}$
  - Schrödinger-Gleichung: $$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla_1^2 + \nabla_2^2\right)\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + V(\mathbf{r})\,\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = E\,\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$
  - Vereinfachung: $$V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = \begin{cases} -V_0 & \text{für } k' > k_F, k < k_F + \Delta k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{mit } \Delta k = \frac{m\omega_\mathrm{D}}{\hbar k_\mathrm{F}}$$
  - Gesamtenergie: $$\boxed{E \simeq 2E_\mathrm{F} - 2\hbar\omega_\mathrm{D}\exp\left(-\frac{4}{V_0 D(E_\mathrm{F})}\right)}$$ für schwache WW ($V_0 D(E_\mathrm{F}) \ll 1$)

    Energieabsenkung proportional zu Phononenenergie $\hbar\omega_\mathrm{D}$
  - Unschärfe-Relation: $\Delta k\,\Delta x \geq 1$ ➔ $\Delta x \leq \frac{1}{\Delta k} = \frac{v_\mathrm{F}}{\omega_\mathrm{D}} \simeq 100$ nm

- *Symmetrie der Paar-Wellenfunktion*
  - Fermionen → Gesamtwellenfunktion muss antisymmetrisch sein

Singulett-Paarung	$S = 0$	$L = 0, 2, 4, \ldots$
Triplett-Paarung	$S = 1$	$L = 1, 3, 5, \ldots$

$$S = \begin{cases} 0 \quad m_s = 0 \qquad \chi^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) & \textbf{Singulett-Paarung} \\ 1 \quad m_s = \begin{cases} -1 & \chi^s = \downarrow\downarrow \\ 0 & \chi^s = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) \\ +1 & \chi^s = \uparrow\uparrow \end{cases} & \textbf{Triplett-Paarung} \end{cases}$$

  - **Beispiele**: metallische SL: $S = 0,\; L = 0$, Hochtemperatur-SL: $S = 0,\; L = 2$, suprafluides ^{3}He: $S = 1,\; L = 1$

© Rudolf Gross - Physik der Kondensierten Materie 2 – SS 2021
www.wmi.badw.de
WMI


Kapitel 13
Supraleitung
WMI

13.5.2 BCS-Grundzustand

Wie sieht der Grundzustand des gesamten Elektronensystems bei Anwesenheit einer attraktiven WW aus?

– **Erwartung:**

  - Paar-Wechselwirkungsmechanismus geht so lange weiter, bis sich der Fermi-See signifikant geändert hat
  - Paarungsmechanismus stoppt, sobald die gewonnene Paarungsenergie gegen Null geht
  - detaillierte theoretische Beschreibung ist schwierig ➔ Diskussion von Grundlagen

© Rudolf Gross - Physik der Kondensierten Materie 2 – SS 2021
www.wmi.badw.de
WMI

Formalismus der 2. Quantisierung - Dirac, Fock, Jordan et al., ab 1927 (1)

– **Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren**:
  - fermionischer Erzeugungsoperator: $c_{k,\sigma}^{\dagger}$
  - fermionischer Vernichtungsoperator $c_{k,\sigma}$

– **Antikommutationsrelationen**:

$$\{c_{k,\sigma}, c_{k',\sigma'}^{\dagger}\} \equiv c_{k,\sigma}c_{k',\sigma'}^{\dagger} + c_{k',\sigma'}^{\dagger}c_{k,\sigma} = \delta_{kk'}\delta_{\sigma\sigma'}$$

$$\{c_{k,\sigma}, c_{k',\sigma'}\} = \{c_{k,\sigma}^{\dagger}, c_{k',\sigma'}^{\dagger}\} = 0$$

ferner gilt: $c_{k,\sigma}^{\dagger}|0\rangle = |1\rangle, \quad c_{k,\sigma}|0\rangle = 0, \quad c_{k,\sigma}^{\dagger}|1\rangle = 0, \quad c_{k,\sigma}|1\rangle = |0\rangle$

– **Teilchenzahloperator**: $c_{k,\sigma}^{\dagger}c_{k,\sigma} = n_{k,\sigma} \quad c_{k,\sigma}c_{k,\sigma}^{\dagger} = 1 - n_{k,\sigma}$

– **Pauli-Prinzip**: $c_{k,\sigma}^{\dagger}c_{k,\sigma}^{\dagger} = 0 \quad c_{k,\sigma}c_{k,\sigma} = 0$

© Rudolf Gross - Physik der Kondensierten Materie 2 – SS 2021
www.wmi.badw.de
WMI

13.5.2 BCS-Grundzustand

Formalismus der 2. Quantisierung (2)

– Operator zur Beschreibung der Streuung von Zustand $(\mathbf{k}'\boldsymbol{\sigma}_1, -\mathbf{k}'\boldsymbol{\sigma}_2)$ in Zustand $(\mathbf{k}\boldsymbol{\sigma}_1, -\mathbf{k}\boldsymbol{\sigma}_2)$

$$\sum_{\mathrm{k},\mathrm{k}',\sigma_1,\sigma_2} V_{\mathrm{k},\mathrm{k}'} \underbrace{c^\dagger_{\mathrm{k},\sigma_1} c^\dagger_{-\mathrm{k},\sigma_2}}_{P^\dagger_\mathrm{k}} \underbrace{c_{-\mathrm{k}',\sigma_2} c_{\mathrm{k}',\sigma_1}}_{P_{\mathrm{k}'}}$$

Paar-Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

Wechselwirkungspotenzial
$$V_{k,k'} = V(\mathbf{k}-\mathbf{k}') = V(\mathbf{q})$$
$$= \frac{1}{\Omega}\int V(\mathbf{r}) e^{i(\mathrm{k}-\mathrm{k}')\cdot \mathrm{r}} dV = \frac{1}{\Omega}\int V(\mathbf{r}) e^{i\mathrm{q}\cdot\mathrm{r}} dV$$

– ***Paar-Erzeugungs*** und ***Paar-Vernichtungsoperatoren*** gehorchen Kommutationsrelationen

$$[P_\mathrm{k}, P_{\mathrm{k}'}] = 0 \qquad \left[P^\dagger_\mathrm{k}, P^\dagger_{\mathrm{k}'}\right] = 0$$

$$[P_\mathrm{k}, P_{\mathrm{k}'}] = c_{-\mathrm{k},\sigma_2} c_{\mathrm{k},\sigma_1} c_{-\mathrm{k}',\sigma_2} c_{\mathrm{k}',\sigma_1} - c_{-\mathrm{k}',\sigma_2} c_{\mathrm{k}',\sigma_1} c_{-\mathrm{k},\sigma_2} c_{\mathrm{k},\sigma_1} = 0$$

– die beiden letzten Operatoren des 1. Terms auf der rechten Seite können durch einer gerade Permutation nach vorne gezogen werden

➔ Vorzeichen bleibt erhalten

© Rudolf Gross - Physik der Kondensierten Materie 2 – SS 2021
www.wmi.badw.de
WMI

Formalismus der 2. Quantisierung (3)

$$
\begin{aligned}
\left[P_k, P_k^\dagger\right] &= c_{-k,\sigma_2} c_{k,\sigma_1} c_{k,\sigma_1}^\dagger c_{-k,\sigma_2}^\dagger - c_{k,\sigma_1}^\dagger c_{-k,\sigma_2}^\dagger c_{-k,\sigma_2} c_{k,\sigma_1} \\
&= c_{-k,\sigma_2} \left(1 - c_{k,\sigma_1}^\dagger c_{k,\sigma_1}\right) c_{-k,\sigma_2}^\dagger - c_{k,\sigma_1}^\dagger c_{-k,\sigma_2}^\dagger c_{-k,\sigma_2} c_{k,\sigma_1} \\
&= \left(1 - c_{k,\sigma_1}^\dagger c_{k,\sigma_1}\right) c_{-k,\sigma_2} c_{-k,\sigma_2}^\dagger - c_{k,\sigma_1}^\dagger c_{-k,\sigma_2}^\dagger c_{-k,\sigma_2} c_{k,\sigma_1} \\
&= \left(1 - c_{k,\sigma_1}^\dagger c_{k,\sigma_1}\right) \left(1 - c_{-k,\sigma_2}^\dagger c_{-k,\sigma_2}\right) - c_{k,\sigma_1}^\dagger c_{-k,\sigma_2}^\dagger c_{-k,\sigma_2} c_{k,\sigma_1} \\
&= 1 - n_{k,\sigma_1} - n_{-k,\sigma_2}
\end{aligned}
$$

– **Man beachte**:
  - ➢ einige der Kommutationsrelationen der Paar-Operatoren sind denen von Bosonen ähnlich, obwohl die Paar-Operatoren nur aus fermionischen Operatoren bestehen
  - ➢ $[P_k, P_k^\dagger] \neq 0$ aber ungleich $\delta_{kk'}$ wie es für Bosonen der Fall ist
    ➔ Paar-Operatoren kommutieren nicht, sind aber keine bosonischen Operatoren

– **Potenzen der Paar-Operatoren**:

$$P_k^\dagger P_k^\dagger = \left(P_k^\dagger\right)^2 = c_{k,\sigma_1}^\dagger c_{-k,\sigma_2}^\dagger c_{k,\sigma_1}^\dagger c_{-k,\sigma_2}^\dagger = -\underbrace{c_{k,\sigma_1}^\dagger c_{k,\sigma_1}^\dagger}_{=0} \underbrace{c_{-k,\sigma_2}^\dagger c_{-k,\sigma_2}^\dagger}_{=0} = 0$$

→ Antisymmetrie der fermionischen Wellenfunktion erfordert, dass Potenzen der Paar-Operatoren verschwinden

© Rudolf Gross - Physik der Kondensierten Materie 2 – SS 2021
www.wmi.badw.de

13.5.2 BCS-Grundzustand

Grundlegende Definitionen und Annahmen

1. Schwache, isotrope WW: $V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = \begin{cases} -V_0 & \text{für } k' > k_\mathrm{F}, k < k_\mathrm{F} + \Delta k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ mit $\Delta k = \frac{m\omega_\mathrm{D}}{\hbar k_\mathrm{F}}$, $V_0 D(E_\mathrm{F}) \ll 1$

2. Paar- (Gorkov) Amplitude:

statistischer Mittelwert

$$g_{\mathrm{k}\sigma_1\sigma_2} \equiv \langle c_{-\mathrm{k}\sigma_1} c_{\mathrm{k}\sigma_2} \rangle \neq 0$$

$$g^\dagger_{\mathrm{k}\sigma_1\sigma_2} \equiv \langle c^\dagger_{-\mathrm{k}\sigma_2} c^\dagger_{\mathrm{k}\sigma_1} \rangle \neq 0$$

3. Pauli-Prinzip → Paaramplitude ist anti-symmetrisch bezüglich Vertauschung von k und σ

$$g_{-\mathrm{k}\sigma_2\sigma_1} = -g_{\mathrm{k}\sigma_1\sigma_2}$$

4. Spin-Anteil erlaubt die Unterscheidung zwischen Singulett- und Triplett-Paarung:

$$s = \begin{cases} 0, & m_s = 0 \\ 1, & m_s = -1, 0, +1 \end{cases}$$

Singulett-Paarung

Triplett-Paarung

5. Paar-Potenzial:

$$\Delta_{\mathrm{k}\sigma_1\sigma_2} \equiv -\sum_{k'} V_{\mathrm{k},\mathrm{k}'}\, g_{\mathrm{k}'\sigma_1\sigma_2}$$

$$\Delta^\dagger_{\mathrm{k}'\sigma_1\sigma_2} \equiv -\sum_{k} V_{\mathrm{k},\mathrm{k}'}\, g^\dagger_{\mathrm{k}\sigma_1\sigma_2}$$

statistischer Mittelwert der Paar-Wechselwirkung

© Rudolf Gross - Physik der Kondensierten Materie 2 – SS 2021
www.wmi.badw.de
WMI

13.5.2 BCS-Grundzustand

Hamilton-Operator und BCS-Wellenfunktion

– Hamilton Operator:

$$\mathcal{H}_{\mathrm{BCS}} = \sum_{k,\sigma} \xi_k \, n_{k,\sigma} + \sum_{k,k'} V_{k,k'} \, c^\dagger_{k\uparrow} c^\dagger_{-k\downarrow} \, c_{-k'\downarrow} c_{k'\uparrow}$$

mit $\xi_k = \varepsilon_k - \mu = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu$

$n_{k,\sigma} = c^\dagger_{k\sigma} c_{k\sigma}$ = Teilchenzahl-Operator

– Lösung der Schrödinger-Gleichung

→ allgemeinste Form der N-Elektron-Wellenfunktion:

$$|\Psi_N\rangle = \sum g(\mathbf{k}_i, \ldots, \mathbf{k}_l) c^\dagger_{\mathbf{k}_i\uparrow} c^\dagger_{-\mathbf{k}_i\downarrow} \cdots c^\dagger_{\mathbf{k}_l\uparrow} c^\dagger_{-\mathbf{k}_l\downarrow} |0\rangle$$

$N/2$ Teilchen auf M Plätzen:

$$\frac{M!}{[M-(N/2)]!\,(N/2)!}$$

Problem: riesige Zahl von Realisierungen, typischerweise $10^{10^{20}}$

➔ "***Mean Field" Ansatz:*** Besetzungswahrscheinlichkeit von Zustand **k** hängt nur von ***mittlerer Bestzungswahrscheinlichkeit*** der anderen Zustände ab

– ***Bardeen, Cooper*** und ***Schrieffer*** benutzten folgenden Ansatz:

$$\psi_{\mathrm{BCS}} = \prod_{k=k_1,k_2,\ldots,k_M} (u_k + v_k c^\dagger_{k\uparrow} c^\dagger_{-k\downarrow})|0\rangle$$

$|u_k|^2$ = Wahrscheinlichkeit, dass Paarzustand $(\mathbf{k}\uparrow, -\mathbf{k}\downarrow)$ nicht besetzt ist

$|v_k|^2$ = Wahrscheinlichkeit, dass Paarzustand $(\mathbf{k}\uparrow, -\mathbf{k}\downarrow)$ besetzt ist

$|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1$

© Rudolf Gross - Physik der Kondensierten Materie 2 – SS 2021

www.wmi.badw.de

Wie könnte man die BCS-Vielteilchen-Wellenfunktion erraten?

$$\psi_{\mathrm{BCS}} = \prod_{k=k_1,k_2,\dots,k_M} \left(u_k + v_k c_{k\uparrow}^{\dagger} c_{-k\downarrow}^{\dagger}\right)|0\rangle$$

➔ Wir machen die Annahme, dass die makroskopische Wellenfunktion $\psi(\mathbf{r},t) = \psi_0(\mathbf{r},t)e^{i\theta(\mathbf{r},t)}$ durch einen ***kohärenten Vielteilchen-Zustand von Fermionen*** beschrieben werden kann

– ***kohärenter bosonischer Vielteilchen-Zustand***

wurde zuerst von ***Erwin Schrödinger*** (1926) diskutiert, als er nach einem Zustand für den quantenmechanischen harmonischen Oszillator suchte, der am besten das Verhalten eines klassischen harmonischen Oszillators beschreibt

E. Schrödinger, Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik, Die Naturwissenschaften 14, 664-666 (1926).

Weiterentwicklung durch ***Roy J. Glauber*** ➔ Übertragung auf Fock-Raum

R. J. Glauber, Coherent and Incoherent States of the Radiation Field, Phys. Rev. 131, 2766-2788 (1963).

Nobel Prize in Physics 2005 "***for his contribution to the quantum theory of optical coherence***", with the other half shared by John L. Hall and Theodor W. Hänsch.

© Rudolf Gross - Physik der Kondensierten Materie 2 – SS 2021

www.wmi.badw.de

WMI

13.5.2 BCS-Grundzustand

Fock-Zustands-Darstellung eines kohärenten bosonischen Zustands

– **kohärenter Zustand $|\alpha\rangle$** wird durch eine Linearkombination von unendlich vielen Fock-Zuständen $|\phi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(a^\dagger\right)^n |0\rangle$ dargestellt

bosonischer Erzeugungsoperator Vakuum-Zustand

$$|\alpha\rangle = \underbrace{e^{-\frac{|\alpha^2|}{2}}}_{\text{Normalisierung}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\phi_n\rangle = e^{-\frac{|\alpha^2|}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!} |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha^2|}{2}} e^{(\alpha a^\dagger)} |0\rangle$$

Schrödinger (1926)

$\alpha = |\alpha| e^{i\varphi}$ ist eine komplexe Zahl

– Wahrscheinlichkeit für die Besetzung von n Teilchen ist durch Poisson-Verteilung gegeben

$$P(n) = |\langle \phi_n | \alpha \rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}$$

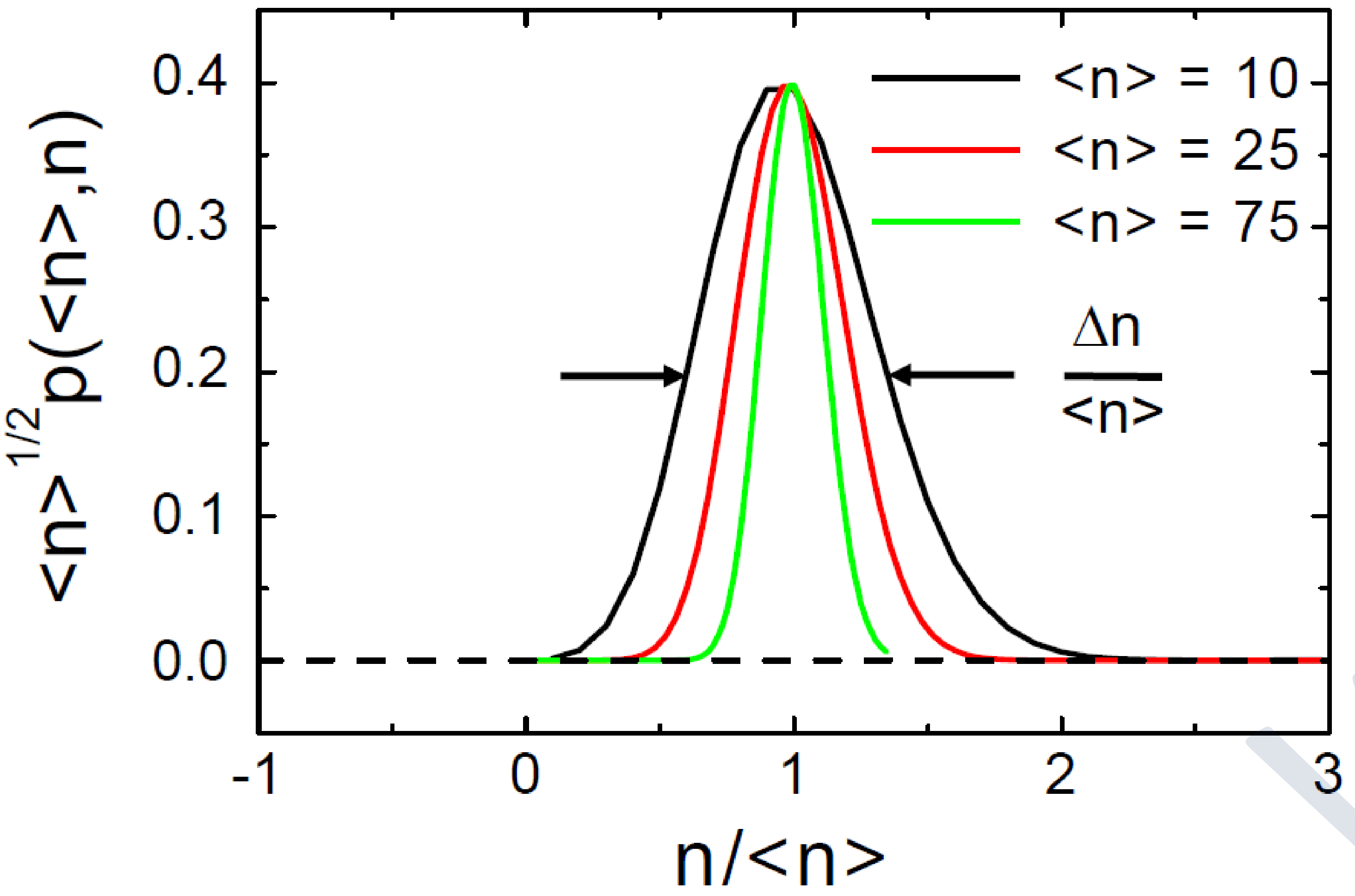
- Erwartungswert des Teilchenzahl-Operators: $N = |\alpha|^2, \quad \Delta N = |\alpha| = \sqrt{N} \gg 1$
- relative Standardabweichung: $\frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \ll 1 \qquad$ (da $N \gg 1$)
- Unschärferelation: $\Delta N\, \Delta\varphi \geq \frac{1}{2}, \quad \Delta\varphi \ll 1$

– **Anwendung**: kohärenter photonischer Zustand (Laser-Licht)

© Rudolf Gross - Physik der Kondensierten Materie 2 – SS 2021
www.wmi.badw.de
WMI

13.5.2 BCS-Grundzustand

Poisson-Verteilung $P(n)$ für unterschiedliche Erwartungswerte $N = \langle n \rangle$



WMI

© Rudolf Gross - Physik der Kondensierten Materie 2 – SS 2021

13.5.2 BCS-Grundzustand

Fock-Zustands-Darstellung eines kohärenten fermionischen Zustands

– kohärenter bosonischer Zustand $|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha^2|}{2}} \exp\left(\alpha a^\dagger\right)|0\rangle$

– kohärenter fermionischer Zustand $|\Psi_{\mathrm{BCS}}\rangle = c_1 \exp\left(\sum_k \alpha_k P_k^\dagger\right)|0\rangle$

– wir nutzen aus, dass höhere Potenzen von fermionischen Erzeugungsoperatoren wegen Pauli-Prinzip verschwinden (*entscheidender Unterschied zu bosonischem System*):

$$P_k^\dagger P_k^\dagger = \left(P_k^\dagger\right)^2 = c_{k,\sigma_1}^\dagger c_{-k,\sigma_2}^\dagger c_{k,\sigma_1}^\dagger c_{-k,\sigma_2}^\dagger = -c_{k,\sigma_1}^\dagger c_{k,\sigma_1}^\dagger c_{-k,\sigma_2}^\dagger c_{-k,\sigma_2}^\dagger = 0$$

$$\Rightarrow \quad |\Psi_{\mathrm{BCS}}\rangle = c_1 \exp\left(\sum_k \alpha_k P_k^\dagger\right)|0\rangle = c_1 \prod_k \exp\left(\alpha_k P_k^\dagger\right)|0\rangle = c_1 \prod_k \left(1 + \alpha_k P_k^\dagger\right)|0\rangle$$

– **Normierung**: $\langle \Psi_{\mathrm{BCS}}^* | \Psi_{\mathrm{BCS}}\rangle = 1 = c_1 \left\langle 0 \middle| \prod_k \left(1 + \alpha_k^* P_k\right)\left(1 + \alpha_k P_k^\dagger\right) \middle| 0 \right\rangle$

$$\boxed{\psi_{\mathrm{BCS}} = \prod_k \frac{1}{1 + |\alpha_k|^2}\left(1 + \alpha_k P_k^\dagger\right)|0\rangle}$$

erfüllt, falls alle Faktoren = 1 ➔ $1 = c_1 \langle 0| \left(1 + \alpha_k^* P_k\right)\left(1 + \alpha_k P_k^\dagger\right)|0\rangle = c_1^2\left(1 + |\alpha_k|^2\right)$

© Rudolf Gross - Physik der Kondensierten Materie 2 – SS 2021
www.wmi.badw.de
WMI

13.5.2 BCS-Grundzustand

BCS-Grundzustand als kohärenter bosonischer Zustand

$$\Rightarrow \quad |\Psi_{\mathrm{BCS}}\rangle = \prod_{\mathrm{k}} \left(u_{\mathrm{k}} + v_{\mathrm{k}} c^{\dagger}_{\mathrm{k}\uparrow} c^{\dagger}_{-\mathrm{k}\downarrow} \right) |0\rangle$$

$$\left.\begin{aligned} u_{\mathrm{k}} &= \frac{1}{\sqrt{1+|\alpha_{\mathrm{k}}|^2}} \\ v_{\mathrm{k}} &= \frac{\alpha_{\mathrm{k}}}{\sqrt{1+|\alpha_{\mathrm{k}}|^2}} \end{aligned}\right\} \text{Kohärenzfaktoren}$$

$$|u_{\mathrm{k}}| + |v_{\mathrm{k}}|^2 = 1$$

kohärente Superposition von Paarzuständen

➔ ***nur mittlere Zahl von Paaren ist festgelegt***

$$\Delta N = \sqrt{N} \gg 1$$

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \ll 1$$ Unschärfe von N ist bei großer mittlerer Teilchenzahl $\overline{N}$ verschwindend klein

$$\Delta N \, \Delta\varphi \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta\varphi \ll 1$$ Unschärfe von φ ist bei großem $\overline{N}$ ebenfalls verschwindend klein

– u_k und v_k sind komplexe Wahrscheinlichkeitsamplituden

$|u_k|^2$ = Wahrscheinlichkeit, dass Paarzustand $(\mathbf{k}\uparrow, -\mathbf{k}\downarrow)$ nicht besetzt ist

$|v_k|^2$ = Wahrscheinlichkeit, dass Paarzustand $(\mathbf{k}\uparrow, -\mathbf{k}\downarrow)$ besetzt ist

© Rudolf Gross - Physik der Kondensierten Materie 2 – SS 2021
www.wmi.badw.de
WMI

13.5.2 BCS-Grundzustand

Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsamplituden

– **Aufgabe**: bestimme die Wahrscheinlichkeitsamplituden u_k und v_k in selbstkonsistenter Weise durch Minimerung von

$$\langle E_{\mathrm{BCS}}\rangle = \langle \psi_{\mathrm{BCS}} | \underbrace{\mathcal{H}_{\mathrm{BCS}} - \mu \mathcal{N}_p}_{\text{„Mean-Field" BCS Hamiltonian}} | \psi_{\mathrm{BCS}} \rangle$$

mit $\langle \mathcal{N}_p \rangle = \langle \sum_{k,\sigma} n_{k\sigma} \rangle = \overline{N}$

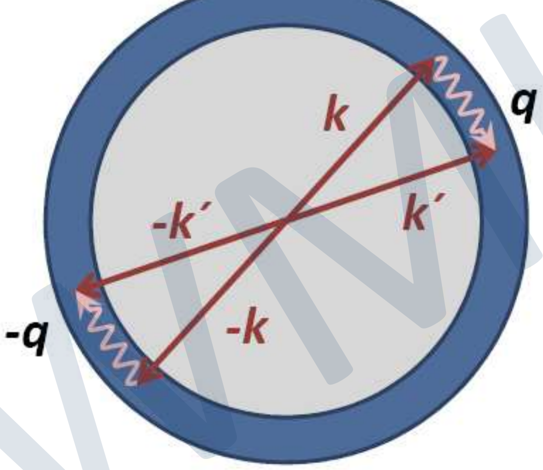
$$\mathcal{H}_{\mathrm{BCS}} = \sum_{k,\sigma} \varepsilon_k \, n_{k,\sigma} + \sum_{k,k'} V_{k,k'} \, c^\dagger_{k\uparrow} c^\dagger_{-k\downarrow} \, c_{-k'\downarrow} c_{k'\uparrow}$$

– Minimierung des Erwartungswerts mittels *Variationsrechnung*:

$$\delta \left\langle \psi_{\mathrm{BCS}} \middle| \underbrace{\textstyle\sum_{k,\sigma} \xi_k \, n_{k,\sigma}}_{\text{kinetische Energie}} + \underbrace{\textstyle\sum_{k,k'} V_{k,k'} \, c^\dagger_{k\uparrow} c^\dagger_{-k\downarrow} \, c_{-k'\downarrow} c_{k'\uparrow}}_{\text{Wechselwirkungsenergie}} \middle| \psi_{\mathrm{BCS}} \right\rangle = 0$$

hierbei ist ξ_k die Einteilchenenergie bezogen auf das chemische Potenzial

$$\xi_k = \varepsilon_k - \mu = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu$$



© Rudolf Gross - Physik der Kondensierten Materie 2 – SS 2021
www.wmi.badw.de

13.5.2 BCS-Grundzustand

Ergebnis (Herleitung siehe R. Gross & A. Marx, Festkörperphysik, 3. Auflage bzw. Spezialvorlesung „Supraleitung")

$$|v_k|^2 = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\xi_k}{E_k}\right]$$

$$|u_k|^2 = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\xi_k}{E_k}\right]$$

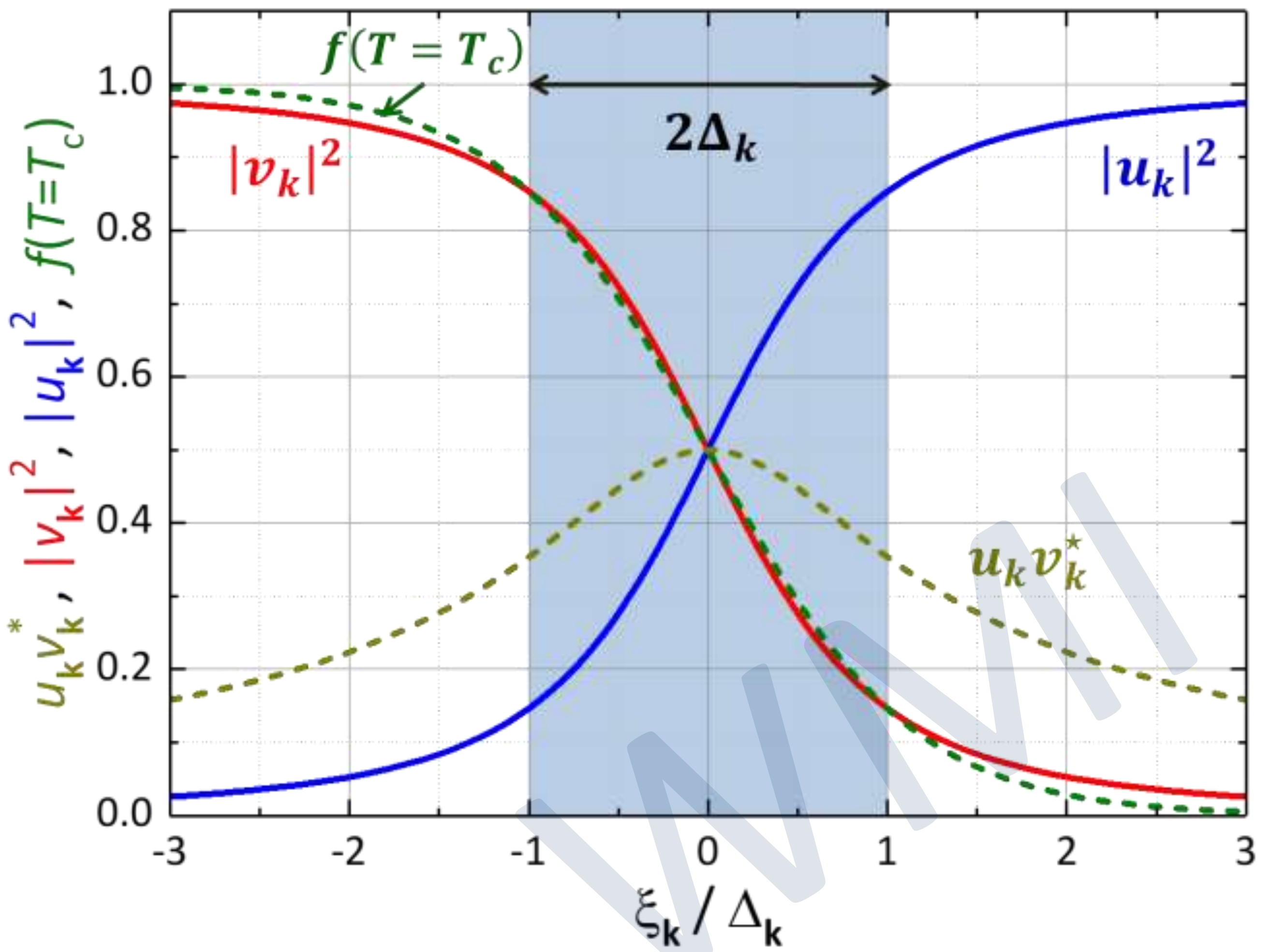
mit $E_k = \sqrt{\xi_k^2 + |\Delta_k|^2}$

$$u_k v_k^\star = g_k = \frac{\Delta_k^\dagger}{2E_k}$$

$$u_k^\star v_k = g_k^\dagger = \frac{\Delta_k}{2E_k}$$

Paaramplitude

- $|v_k|^2$: Wahrscheinlichkeit, dass Paarzustand $(\mathbf{k}\uparrow, -\mathbf{k}\downarrow)$ besetzt ist, ist auch bei $T = 0$ um E_F ausgeschmiert
  ➔ Erhöhung der kinetischen Energie
  (interessant: $|v_k|^2(\xi_k) \simeq f(\xi_k, T = T_c)$)
- Verschmierung ist notwendig, um Paarwechselwirkung zu ermöglichen
  ➔ Reduktion der potenziellen Energie > Erhöhung der kinetischen Energie



➔ vergleiche Bandferromagnetismus

© Rudolf Gross - Physik der Kondensierten Materie 2 – SS 2021

www.wmi.badw.de

Umschreiben des BCS-Hamiltonian mit Hilfe von Ausdrücken für u_k, v_k, E_k (Rechnung siehe Gross & Marx, Festkörperphysik)

$$\mathcal{H}_{\text{BCS}} = \sum_{k,\sigma} \xi_k \, n_{k,\sigma} + \sum_{k,k'} V_{k,k'} \, c^\dagger_{k\uparrow} c^\dagger_{-k\downarrow} \, c_{-k'\downarrow} c_{k'\uparrow}$$

$$\mathcal{H}_{\text{BCS}} = \underbrace{\sum_k \left[\xi_k - E_k + g^\dagger_k \Delta_k\right]} + \underbrace{\sum_k E_k \left[\alpha^\dagger_k \alpha_k \; - \beta^\dagger_k \beta_k\right]}$$

Bogoliubov-Transformation

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= u_k^* c_{k\uparrow} - v_k^* c^\dagger_{-k\downarrow} \\
\beta_k &= v_k^* c^\dagger_{k\uparrow} + u_k^* c_{-k\downarrow} \\
\alpha^\dagger_k &= u_k c^\dagger_{k\uparrow} - v_k c_{-k\downarrow} \\
\beta^\dagger_k &= v_k c_{k\uparrow} + u_k c^\dagger_{-k\downarrow}
\end{aligned}$$

- **Grundzustandsenergie**
- weicht von derjenigen des Normalzustands um Kondensationsenergie ab

- **spinlose Anregungen** aus dem Grundzustand mit Teilchenzahloperatoren $\alpha^\dagger_k \alpha_k$ und $\beta^\dagger_k \beta_k$ und Energien E_k und $-E_k$
- Anregungen (Quasiteilchen) sind spinlos, da sie Linearkombinationen von Elektronen und Löchern mit entgegengesetztem Spin sind
- 2 Spin-Freiheitsgrade → 2 Linearkombinationen von Elektron-Loch-Spin-Singuletts
- $E_k = \sqrt{\xi_k^2 + |\Delta_k|^2}$ ist Anregungsenergie von Quasiteilchen

  $|\Delta_k|$ ist Lücke im Anregungsspektrum

© Rudolf Gross - Physik der Kondensierten Materie 2 – SS 2021
www.wmi.badw.de
WMI

13.5.2 BCS-Grundzustand

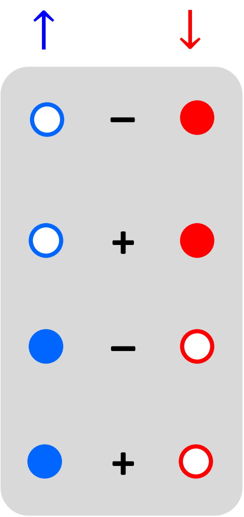
Quasiteilchenanregungen

$$
\begin{aligned}
\alpha_k &= u_k^* c_{k\uparrow} - v_k^* c_{-k\downarrow}^\dagger \\
\beta_k^\dagger &= v_k c_{k\uparrow} + u_k c_{-k\downarrow}^\dagger \\
\alpha_k^\dagger &= u_k c_{k\uparrow}^\dagger - v_k c_{-k\downarrow} \\
\beta_k &= v_k^* c_{k\uparrow}^\dagger + u_k^* c_{-k\downarrow}
\end{aligned}
$$

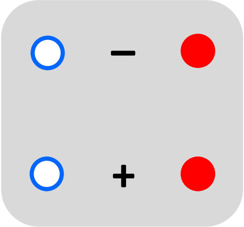
$$\xi_k = 0$$

$$|u_k|^2 = |v_k|^2 = \frac{1}{2}$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_k &= 1/\sqrt{2}\left(c_{k\uparrow} - c_{-k\downarrow}^\dagger\right) \\
\beta_k^\dagger &= 1/\sqrt{2}\left(c_{k\uparrow} + c_{-k\downarrow}^\dagger\right) \\
\alpha_k^\dagger &= 1/\sqrt{2}\left(c_{k\uparrow}^\dagger - c_{-k\downarrow}\right) \\
\beta_k &= 1/\sqrt{2}\left(c_{k\uparrow}^\dagger + c_{-k\downarrow}\right)
\end{aligned}
$$

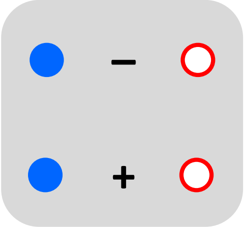


➔ symmetrische und anti-symmetrische Superposition von Elektron- und Lochzuständen mit entgegengesetzter Spin-Richtung



→ ***reduziert*** Gesamtimpuls um ***k*** und Gesamtspin um $\hbar/2$

lochartige Anregung



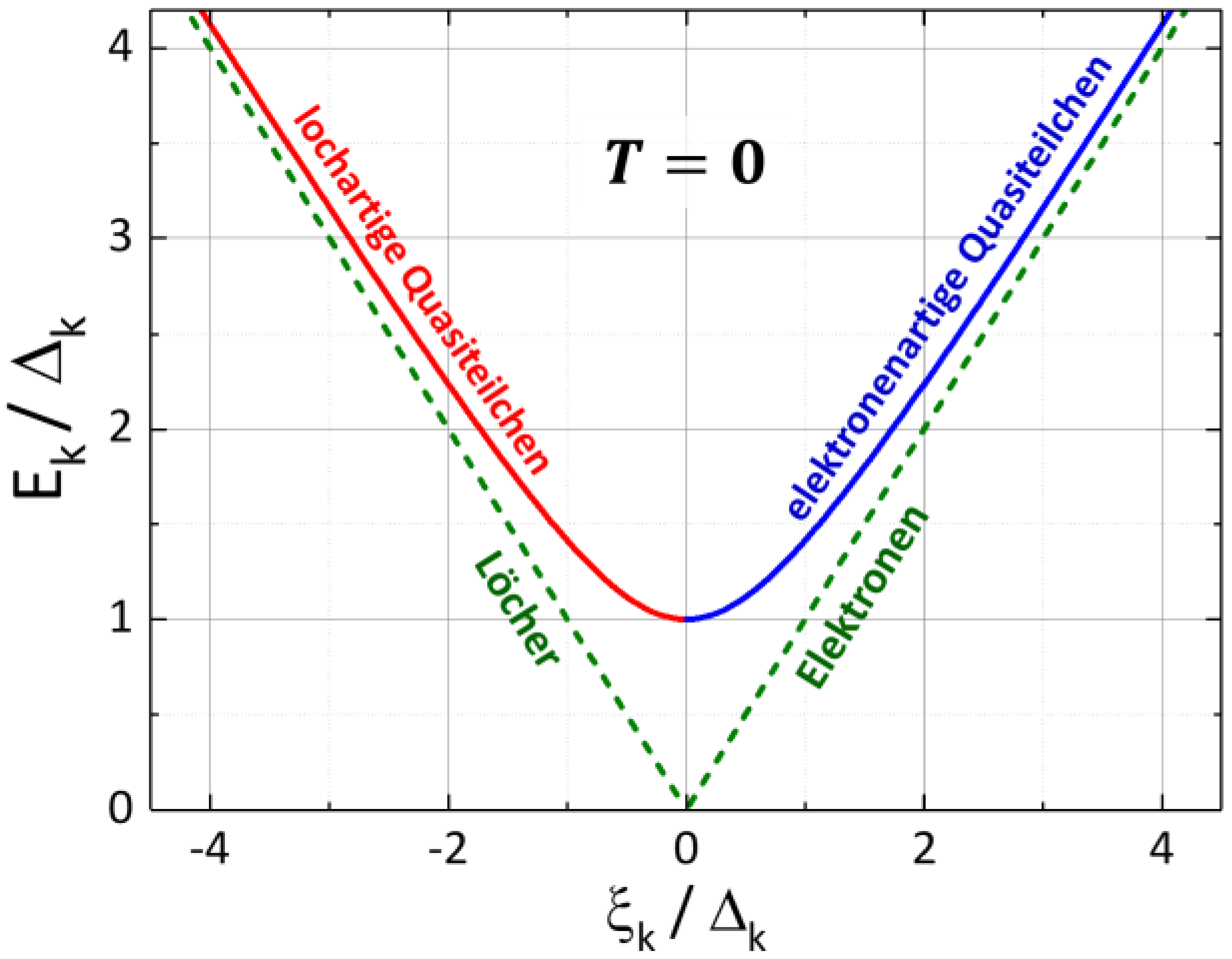
→ ***erhöht*** Gesamtimpuls um ***k*** und Gesamtspin um $\hbar/2$

teilchenartige Anregung

© Rudolf Gross - Physik der Kondensierten Materie 2 – SS 2021
www.wmi.badw.de
WMI

13.5.2 BCS-Grundzustand

Anregungsspektrum der Quasiteilchen und Energielücke



Quasiteilchenanregung: Superposition von Elektron- und Loch-Zuständen
Grund: *Einteilchenanregung mit **k** kann nur dann existieren, wenn gleichzeitig ein Loch mit –**k** existiert, ansonsten würde Paarzustand vorliegen*

Anregungsenergie

$$E_k = E_{-k} = \sqrt{\xi_k^2 + |\Delta_k|^2}$$

Energielücke $|\Delta_k|$ muss durch Minimierung der freien Energie hinsichtlich Variation von Δ_k bestimmt werden:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Delta_k} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Delta_k^\dagger} = 0$$

Energielückengleichung

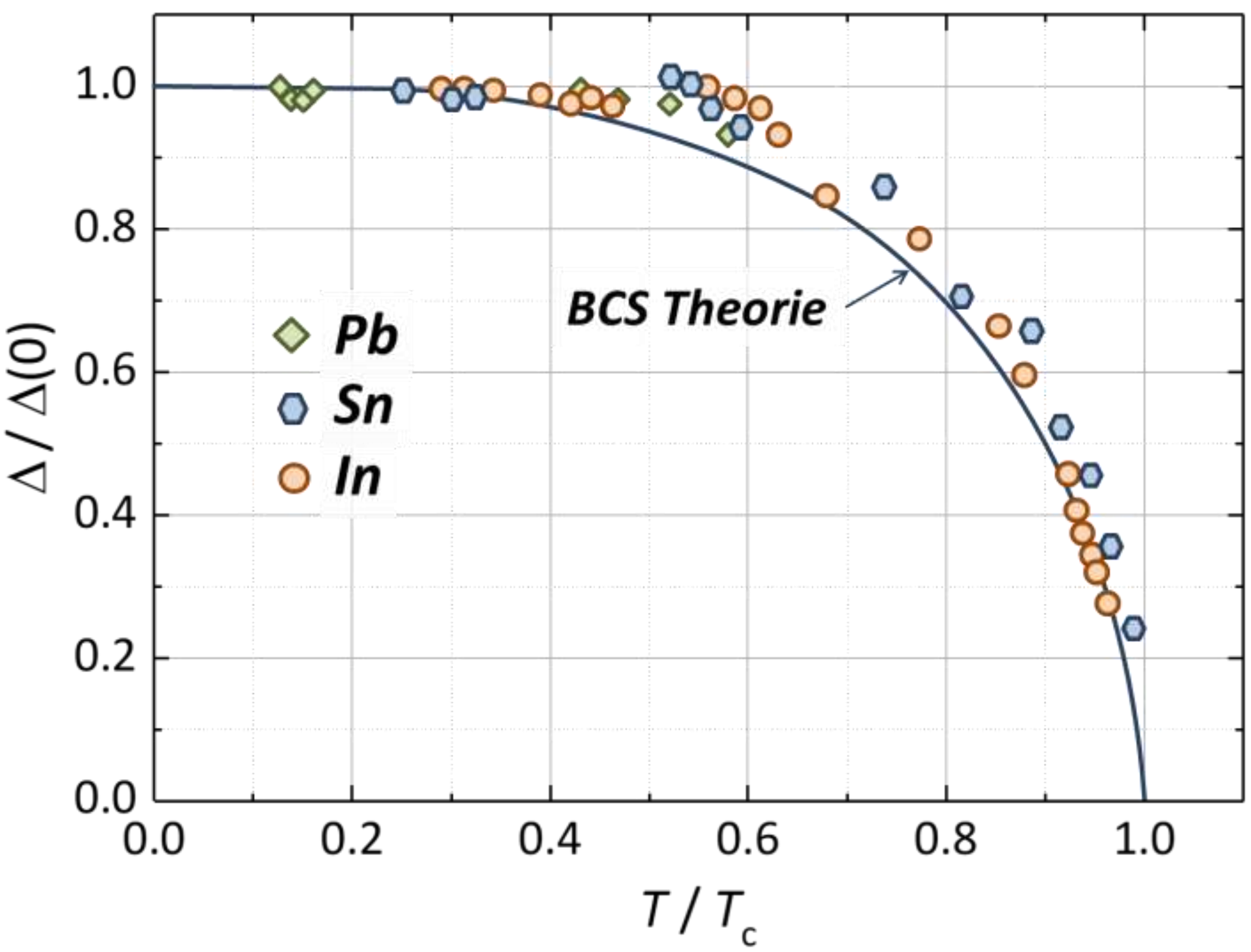
$$\Delta_k = -\sum_{k'} V_{k,k'} \Delta_{k'} \frac{\tanh(E_{k'}/k_B T)}{2E_{k'}}$$

WMI

© Rudolf Gross - Physik der Kondensierten Materie 2 – SS 2021

www.wmi.badw.de

Temperaturabhängigkeit der Energielücke



– für $V_{k,k'} = -V_0,\ \Delta_k = \Delta$:

Energielücke bei $T = 0$ $(V_0 D(E_\mathrm{F}) \ll 1)$

$$\Delta(0) \simeq 2\ \hbar\omega_\mathrm{D}\ \mathrm{e}^{-2/V_0 D(E_\mathrm{F})}$$

Sprungtemperatur T_c $(V_0 D(E_\mathrm{F}) \ll 1)$

$$k_\mathrm{B} T_c \simeq 1.134\ \hbar\omega_\mathrm{D}\ \mathrm{e}^{-2/V_0 D(E_\mathrm{F})}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta(0)}{k_\mathrm{B} T_c} \simeq 1.764$$

zentrale Vorhersage der BCS-Theorie

© Rudolf Gross - Physik der Kondensierten Materie 2 – SS 2021
www.wmi.badw.de

13.5.2 BCS-Grundzustand

Verhältnis von Energielücke und Sprungtemperatur

	T_c (K)	$2\Delta(0)$ (meV)	$2\Delta(0)/k_B T_c$		T_c (K)	$2\Delta(0)$ (meV)	$2\Delta(0)/k_B T_c$
Al	1.19	0.36	3.5 ± 0.1	In	3.4	1.05	3.5 ± 0.1
Nb	9.25	2.90	3.6	Hg	4.15	1.65	4.6 ± 0.1
Pb	7.2	2.70	4.3 ± 0.05	Sn	3.72	1.15	3.5 ± 0.1
Ta	4.29	1.30	3.5 ± 0.1	Tl	2.38	0.75	3.6 ± 0.1
NbN	16	4.65	3.6	Nb_3Sn	18	6.55	4.2
$NbSe_2$	7	2.2	3.7	MgB_2	40	3.6-15	1.1–4.5

Vorhersage der BCS-Theorie:

$$\frac{2\Delta(0)}{k_B T_c} \simeq 3.528$$

WMI

Grundzustandsenergie

$$E_{\text{kond}}(0) = \langle \mathcal{H}_{\text{BCS}} \rangle - \langle \mathcal{H}_n \rangle = -\frac{1}{4} D(E_{\text{F}}) \Delta^2(0)$$

$D(E_{\text{F}})$: DOS für beide Spin-Richtungen

– Zahl der Cooper-Paare: $\dfrac{D(E_{\text{F}})}{2} \Delta(0)$

– mittlerer Energiegewinn pro Cooper-Paar: $-\Delta(0)/2$

– Vergleich mit der Thermodynamik $g_s - g_n = B_{\text{cth}}^2(0)/2\mu_0 \Rightarrow$ $B_{\text{cth}}(0) = \sqrt{\dfrac{\mu_0 D(E_{\text{F}}) \Delta^2(0)}{2V}}$

– Abschätzung der mittleren Energieabsenkung pro Elektron in einem Metall

mit $\frac{D(E_{\text{F}})}{V} = \frac{3n}{2E_{\text{F}}}$ und $\frac{\Delta(0)}{k_{\text{B}} T_c} = 1.764$ folgt: $\dfrac{E_{\text{kond}}(0)}{V} = -\dfrac{3}{8} n \dfrac{\Delta^2(0)}{E_{\text{F}}} = 1.167\, n \dfrac{(k_{\text{B}} T_c)^2}{E_{\text{F}}}$

$$\frac{E_{\text{kond}}(0)}{nV} = \frac{E_{\text{kond}}(0)}{N} = k_{\text{B}} T_c \cdot \frac{k_{\text{B}} T_c}{E_{\text{F}}}$$

Energieskala der WW

Anteil der teilnehmenden Elektronen

© Rudolf Gross - Physik der Kondensierten Materie 2 – SS 2021
www.wmi.badw.de

Zusammenfassung: Teil 30a, 07.06.2021/2

© Rudolf Gross - Physik der Kondensierten Materie 2 – SS 2021

• *BCS Grundzustand*

- Benutzung der Schreibweise der 2. Quantisierung
  → ***Elektronenerzeugungs***- und ***Vernichtungsoperatoren***: $c_{k,\sigma'}^{\dagger}, c_{k,\sigma}$
- Operator für Streuung eines Elektronenpaars aus Zustand $(\mathbf{k}'\sigma_1, -\mathbf{k}'\sigma_2)$ Zustand $(\mathbf{k}\sigma_1, -\mathbf{k}\sigma_2)$

$$\sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\sigma_1,\sigma_2} V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \underbrace{c_{\mathbf{k},\sigma_1}^{\dagger} c_{-\mathbf{k},\sigma_2}^{\dagger}}_{P_{\mathbf{k}}^{\dagger}} \underbrace{c_{-\mathbf{k}',\sigma_2} c_{\mathbf{k}',\sigma_1}}_{P_{\mathbf{k}'}}$$

Paarerzeuger Paarvernichter

- Erwartungswerte für Paarerzeuger und Paarvernichter → ***Paaramplitude*** (kann als OP betrachtet werden)

$$g_{\mathbf{k}\sigma_1\sigma_2} \equiv \langle c_{-\mathbf{k}\sigma_2} c_{\mathbf{k}\sigma_1} \rangle \neq 0\,; \qquad g_{\mathbf{k}\sigma_1\sigma_2}^{\dagger} \equiv \langle c_{\mathbf{k}\sigma_1}^{\dagger} c_{-\mathbf{k}\sigma_2}^{\dagger} \rangle \neq 0$$

- Pauli-Prinzip erfordert (antisymmetrisch bezüglich Austausch von $\sigma_{1,2}$ und $k_{1,2}$)

$$g_{-\mathbf{k}\sigma_2\sigma_1} = -g_{\mathbf{k}\sigma_1\sigma_2}$$

→ Spin-Singulett: symmetrisch bez. Austausch von k_1 und k_2
Spin-Triplett: antisymmetrisch bez. Austausch von k_1 und k_2

- alternativ zu ***Paaramplitude*** kann ***Paarpotenzial*** als OP verwendet werden

$$\Delta_{\mathbf{k}\sigma_1\sigma_2} \equiv -\sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} g_{\mathbf{k}'\sigma_1\sigma_2}\,; \qquad \Delta_{\mathbf{k}'\sigma_1\sigma_2}^{\dagger} \equiv -\sum_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} g_{\mathbf{k}\sigma_1\sigma_2}^{\dagger}$$

• *BCS Vielteilchenwellenfunktion*

- phänomenologische Beschreibung war gut mit makroskopischer Wellenfunktion, also kohärentem Vielteilchenzustand, möglich:

$$\psi(\mathbf{r},t) = \psi_0(\mathbf{r},t)\mathrm{e}^{\imath\theta(\mathbf{r},t)}$$

- **Aufgabe**: konstruiere kohärenten Zustand für supraleitendes Elektronensystem

www.wmi.badw.de

WMI

– **Aufgabe**: konstruiere kohärenten Zustand für supraleitendes Elektronensystem

- Aufgabe wäre einfach für ***Bosonen***:
  - idealer kohärenter Zustand $|\alpha\rangle$ als Überlagerung von Zuständen fester Teilchenzahl (Fock-Zustände)
  - unendliche Linearkombination von Fock-Zuständen $|\phi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(a^\dagger\right)^n |0\rangle$ mit fester Teilchenzahl

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha^2|}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\phi_n\rangle = e^{-\frac{|\alpha^2|}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!} |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha^2|}{2}} e^{(\alpha a^\dagger)} |0\rangle$$

- Wahrscheinlichkeit für die Besetzung von n Teilchen entspricht Poisson-Verteilung
  → Erwartungswerte: $\bar{N} = |\alpha|^2$, Unschärfe: $\frac{\Delta N}{\bar{N}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{N}}}$ (wird klein bei großem $\bar{N}$), $\Delta N \, \Delta\varphi = \frac{1}{2}$
  → Verwendung von $|\alpha\rangle$ für bosonischen Grundzustand: e.g. Laserlicht, Bose-Einstein-Kondensat

– **Analoge Aufgabe**: konstruiere äquivalenten kohärenten Zustand aus den ***fermionischen Wellenfunktionen*** der Elektronen eines freien Elektronengases

- wir benötigen die Eigenschaften von Potenzen der Paarerzeuger

$$P_k^\dagger P_k^\dagger = \left(P_k^\dagger\right)^2 = c_{k,\sigma_1}^\dagger c_{-k,\sigma_2}^\dagger c_{k,\sigma_1}^\dagger c_{-k,\sigma_2}^\dagger = -c_{k,\sigma_1}^\dagger c_{k,\sigma_1}^\dagger c_{-k,\sigma_2}^\dagger c_{-k,\sigma_2}^\dagger = 0$$

- in Analogie zu Zustand $|\alpha\rangle$ erhalten wir unter Benutzung der Vertauschungsrelationen für die Paarerzeuger

$$|\Psi_{BCS}\rangle = c_1 \exp\left(\sum_k \alpha_k P_k^\dagger\right)|0\rangle = c_1 \prod_k \exp\left(\alpha_k P_k^\dagger\right)|0\rangle = c_1 \prod_k \left(1 + \alpha_k P_k^\dagger\right)|0\rangle$$

alle Terme mit Potenzen ≥ 2 verschwinden (Pauli-Prinzip)

- Normierung: $\langle \Psi_{BCS}^* | \Psi_{BCS}\rangle = 1 = c_1 \left\langle 0 \left| \prod_k (1 + \alpha_k^* P_k)\left(1 + \alpha_k P_k^\dagger\right) \right| 0 \right\rangle$

➔ ***BCS-Vielteilchenwellenfunktion***

$$|\Psi_{BCS}\rangle = \prod_k \left(u_k + v_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger\right)|0\rangle$$

mit so genannten „***Kohärenzfaktoren***" $u_k = \frac{1}{\sqrt{1+|\alpha_k|^2}}$ $v_k = \frac{\alpha_k}{\sqrt{1+|\alpha_k|^2}}$ $|u_k| + |v_k|^2 = 1$

Kohärenzfaktoren $|u_k|^2$ und $|v_k|^2$ geben die Wahrscheinlichkeiten dafür an, dass ein Paarzustand mit Wellenvektor k unbesetzt bzw. besetzt ist

© Rudolf Gross - Physik der Kondensierten Materie 2 – SS 2021
www.wmi.badw.de
WMI

– **Wichtig**:
  - die Wellenfunktion $|\Psi_{\mathrm{BCS}}\rangle$ stellt eine kohärente Superposition von Zuständen mit 0, 1, 2, 3, . . . Elektronenpaaren dar → nur die mittlere Teilchenzahl $\overline{\boldsymbol{N}}$ ist festgelegt!!
  - da $\frac{\Delta N}{\overline{\boldsymbol{N}}} = \frac{1}{\sqrt{\overline{\boldsymbol{N}}}}$, ist die relative Unschärfe von N bei großer mittlerer Teilchenzahl $\overline{\boldsymbol{N}}$ vernachlässigbar klein
  - es gilt ferner $\Delta N\, \Delta\varphi = \frac{1}{2}$, da ΔN sehr groß, ist Phasenunschärfe $\Delta\varphi$ sehr klein

• ***Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsamplituden u_k und v_k durch Variationsrechnung***

$$\mathcal{H}_{\mathrm{BCS}} = \sum_k [\varepsilon_k - E_k + g_k^\dagger \Delta_k] + \sum_k E_k [\alpha_k^\dagger \alpha_k - \beta_k^\dagger \beta_k]$$

$$\langle E_{\mathrm{BCS}}\rangle = \langle \psi_{\mathrm{BCS}} | \mathcal{H}_{\mathrm{BCS}} - \mu \mathcal{N}_p | \psi_{\mathrm{BCS}}\rangle$$

chemisches Potenzial Gesamtteilchenzahl

$$\delta \left\langle \psi_{\mathrm{BCS}} \middle| \sum_{k,\sigma} \xi_k\, n_{k,\sigma} + \sum_{k,k'} V_{k,k'}\, c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger\, c_{-k'\downarrow} c_{k'\uparrow} \middle| \psi_{\mathrm{BCS}} \right\rangle = 0 \qquad \xi_k = \varepsilon_k - \mu = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu$$

Ergebnis: $|u_k|^2 = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\xi_k}{E_k}\right]$ $\quad |v_k|^2 = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\xi_k}{E_k}\right]$ $\quad$ mit $E_k = \sqrt{\xi_k^2 + |\Delta_k|^2}$

• ***Anregungen aus dem Grundzustand (Quasiteilchen), Energielücke und Kondensationsenergie***

$$\mathcal{H}_{\mathrm{BCS}} = \underbrace{\sum_k [\xi_k - E_k + g_k^\dagger \Delta_k]}_{\text{Grundzustandsenergie}} + \underbrace{\sum_k E_k [\alpha_k^\dagger \alpha_k - \beta_k^\dagger \beta_k]}_{\text{spinlose Anregungen}}$$

Grundzustandsenergie

spinlose Anregungen aus dem Grundzustand: $E_k = E_{-k} = \sqrt{\xi_k^2 + |\Delta_k|^2}$

– für $V_{k,k'} = -V_0,\ \Delta_k = \Delta$:

Energielücke bei $T = 0$ $\quad \Delta(0) \simeq 2\, \hbar\omega_{\mathrm{D}}\, \mathrm{e}^{-2/V_0 D(E_{\mathrm{F}})}$

Sprungtemperatur T_c $\quad k_{\mathrm{B}} T_c \simeq 1.134\, \hbar\omega_{\mathrm{D}}\, \mathrm{e}^{-2/V_0 D(E_{\mathrm{F}})}$

$\Rightarrow \quad \frac{\Delta(0)}{k_{\mathrm{B}} T_c} \simeq 1.764$

Kondensationsenergie $\quad E_{\mathrm{kond}}(0) = \langle \mathcal{H}_{\mathrm{BCS}}\rangle - \langle \mathcal{H}_n \rangle = -D(E_{\mathrm{F}})\Delta^2(0)/4$

© Rudolf Gross - Physik der Kondensierten Materie 2 – SS 2021
www.wmi.badw.de