# Physik der Kondensierten Materie 2

Rudolf Gross

SS 2021

Teil 8

Vorlesungsstunde: 20.04.2021-2

# Zusammenfassung: Teil 7a, 20.04.2021/1

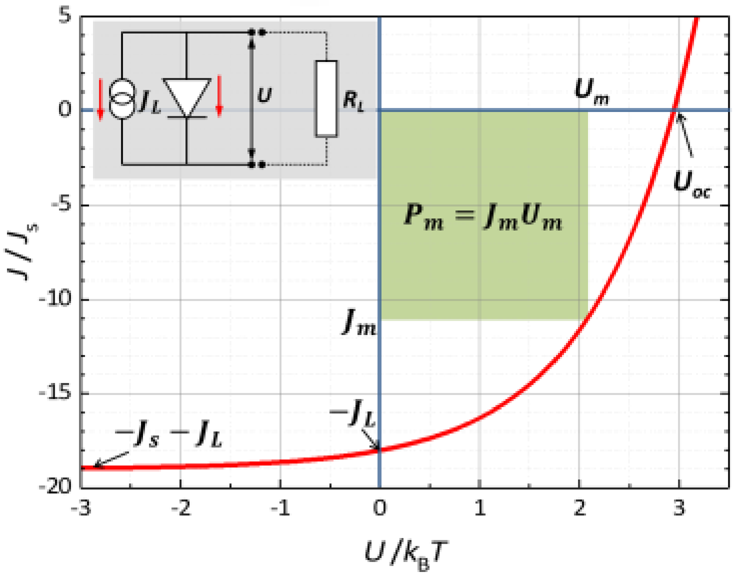
- ***Solarzelle***

IVC: $J = J_s\left[\exp\left(\frac{eU}{k_\mathrm{B}T}\right) - 1\right] - J_L$

zusätzlicher Driftstrom durch Beleuchtung

$U = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{J_{sc} = -J_L}$

$I = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{U_{oc}} = \frac{k_\mathrm{B}T}{e}\ln\left(\frac{J_L}{J_s} + 1\right)$




***maximale Flächenleistung:*** aus $dP/dU = 0$ folgt

$$U_m = \frac{k_\mathrm{B}T}{e}\ln\left(\frac{\frac{J_L}{J_s}+1}{\frac{eU_m}{k_\mathrm{B}T}+1}\right) \qquad J_m = -J_L\left(1 - \frac{1 - \frac{J_s}{J_L}\frac{eU_m}{k_\mathrm{B}T}}{\frac{eU_m}{k_\mathrm{B}T}+1}\right)$$

$$P_m = -J_m U_m = \frac{J_L}{e}\cdot E_m$$

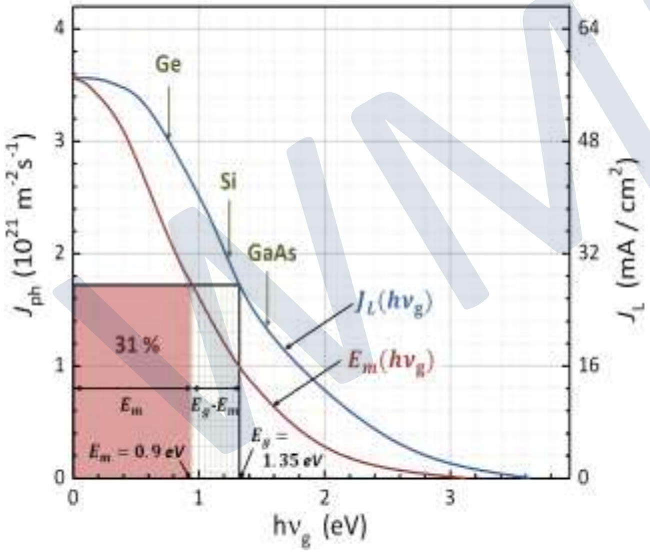
***Konversionseffizienz:*** max. Ausgangsleistung/einfallende Strahlungsleistung

$$\eta = \frac{P_m}{P_{in}} = \frac{J_L E_m/e}{P_{in}}$$

maximal 31% bei $E_g \simeq 1.35$ eV

$$J_L(\nu_g) = e\,J_\mathrm{ph}(\nu_g) = e\int_{\nu=\nu_g}^{\infty}\frac{dJ_\mathrm{ph}(\nu)}{d\nu}\,d\nu$$

durch Photonenstromdichte $J_\mathrm{ph}$ erzeugte elektrische Stromdichte $J_L$

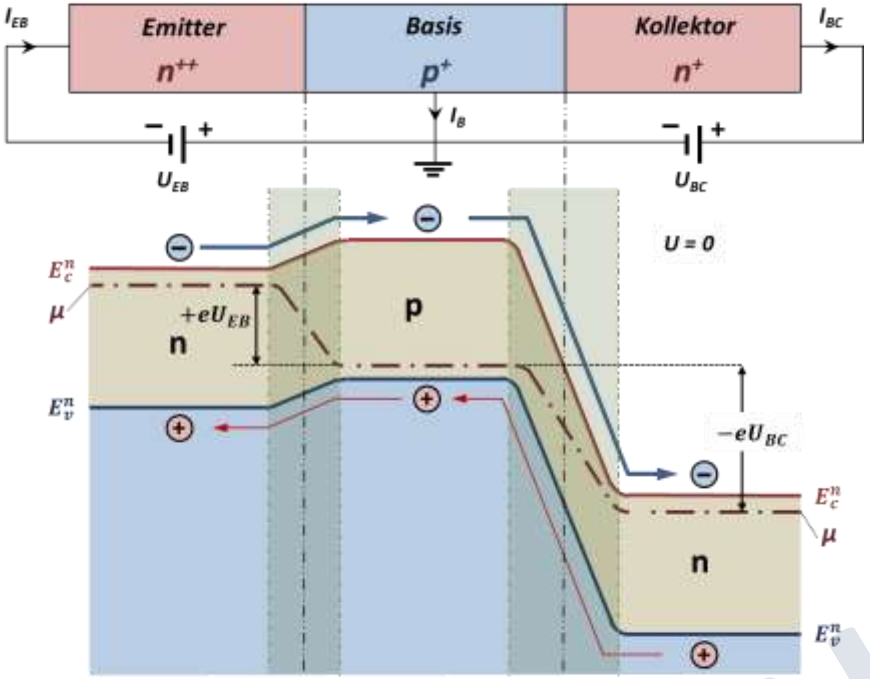



***Wirkungsgrad:*** *limitierende Faktoren*

(i) Photonen mit $h\nu < E_\mathrm{g}$ tragen nicht bei
(ii) für Photonen mit $h\nu > E_\mathrm{g}$ wird nur $E_\mathrm{m} < h\nu$ abgegeben
(iii) Reflexion an Oberfläche, effektive Fläche < 100%, etc.
(iv) Optimierung des Arbeitspunktes

- ***bipolarer Transistor***
  - zwei *pn*-Kontakte:
    Emitter-Basis-Kontakt in Durchlassrichtung
    Basis-Kollektor-Kontakt in Sperrrichtung
    Elektronen, die über EB-Kontakt in Basis fließen, werden durch BC-Potenzial abgesaugt

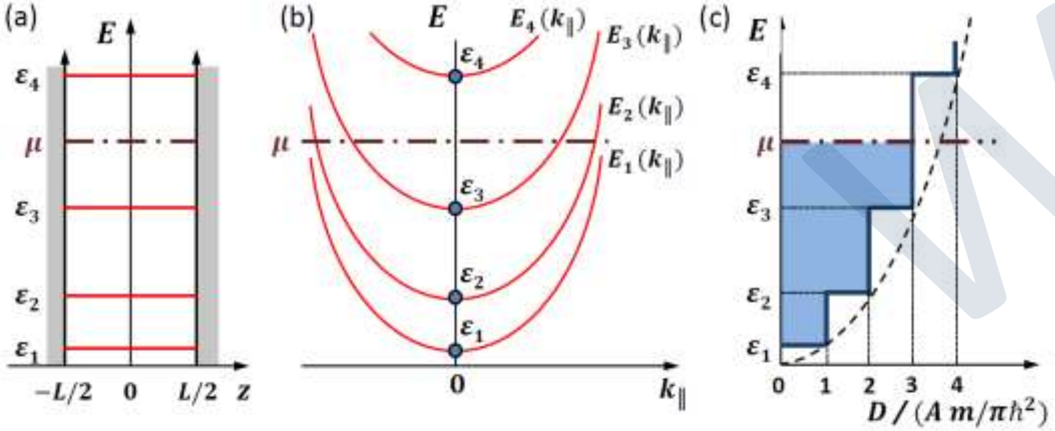
$$\rightarrow I_{\mathrm{EB}} \approx I_{\mathrm{BC}} \;\Rightarrow I_{\mathrm{B}} \approx 0$$
$$\rightarrow P_{\mathrm{EB}} = I_{\mathrm{B}} U_{\mathrm{EB}} \approx 0$$
$$\rightarrow P_{\mathrm{BC}} = I_{\mathrm{BC}} U_{\mathrm{BC}} \gg 0$$




- ***niedrigdimensionale Elektronengassysteme***
  - Einschluss von Elektronengas auf Längenskala $L < \lambda_{\mathrm{Fermi}}$
  - 0D: ***Quantenpunkt***, 1D: ***Quantendraht***, 2D: ***2D-Elektronengas***

Beispiel: 2D-Elektronengas

$$E_n = E_{\parallel} + \epsilon_n = \frac{\hbar^2 k_{\parallel}^2}{2m} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{L^2} n^2$$

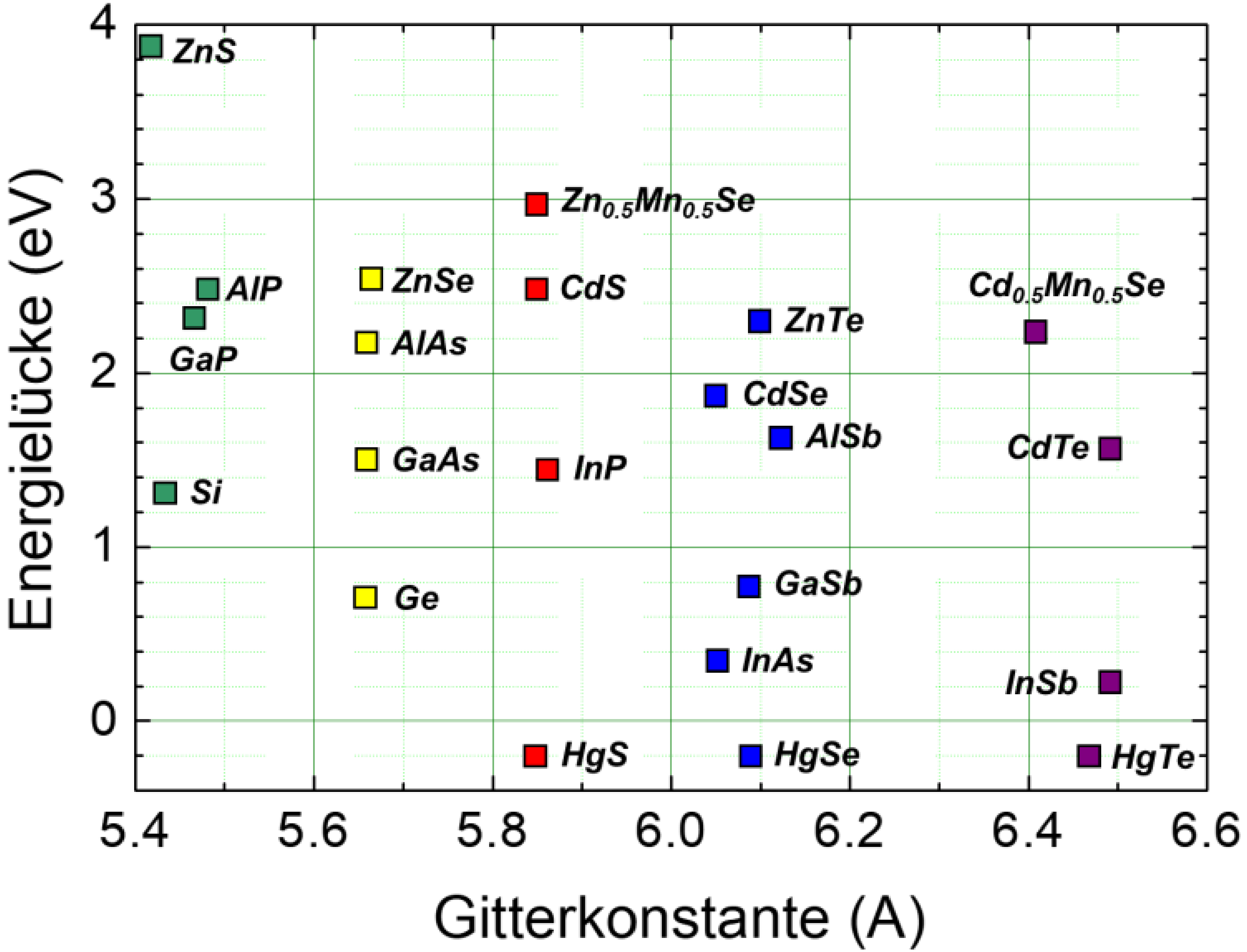


# 10.4.1 Realisierung von 2D Elektronengasen

- **mehrere Möglichkeiten für die Realisierung von 2DEGs**
  - **MOSFET**: Erzeugung von 2DEG in Halbleiter/Isolator/Metall-Heterostruktur durch elektrischen Feldeffekt
    - Patentierung bereits 1926 (Lilienfeld, USA) und 1934 (Heil, Deutschland)
  - **Halbleiter-Heterostrukturen**: Erzeugung von 2DEG an Grenzflächen zwischen unterschiedlichen Halbleitern
    - erste Vorschläge von Tsu und Esaki um 1970
    - Grundlage ist Halbleiter-Technologie, Wachstum von HL-Heterostrukturen mit Molecular Beam Epitaxy (MBE)

# 10.4.1 Realisierung von 2D Elektronengasen

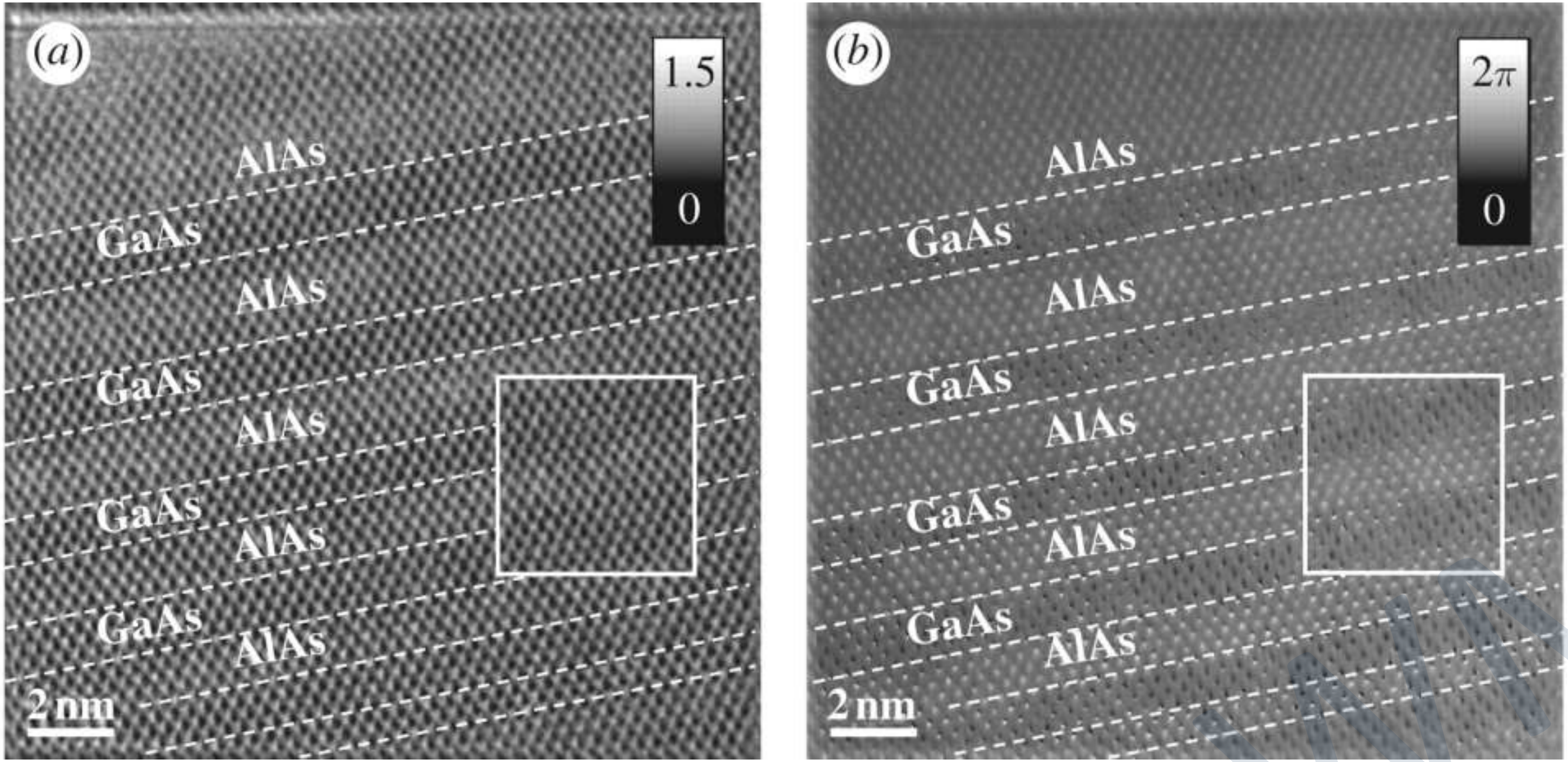
- **Halbleiter-Heterostrukturen**




bei epitaktischem Wachstum führt Gitterfehlanpassung zwischen HL zu Defekten (z.B. Versetzungen) an Grenzflächen

➔ gute Gitteranpassung innerhalb bestimmter HL-Familien erlaubt deren heteroepitaktisches Wachstum

- **Beispiel: GaAs/AlAs Heterostrukturen**

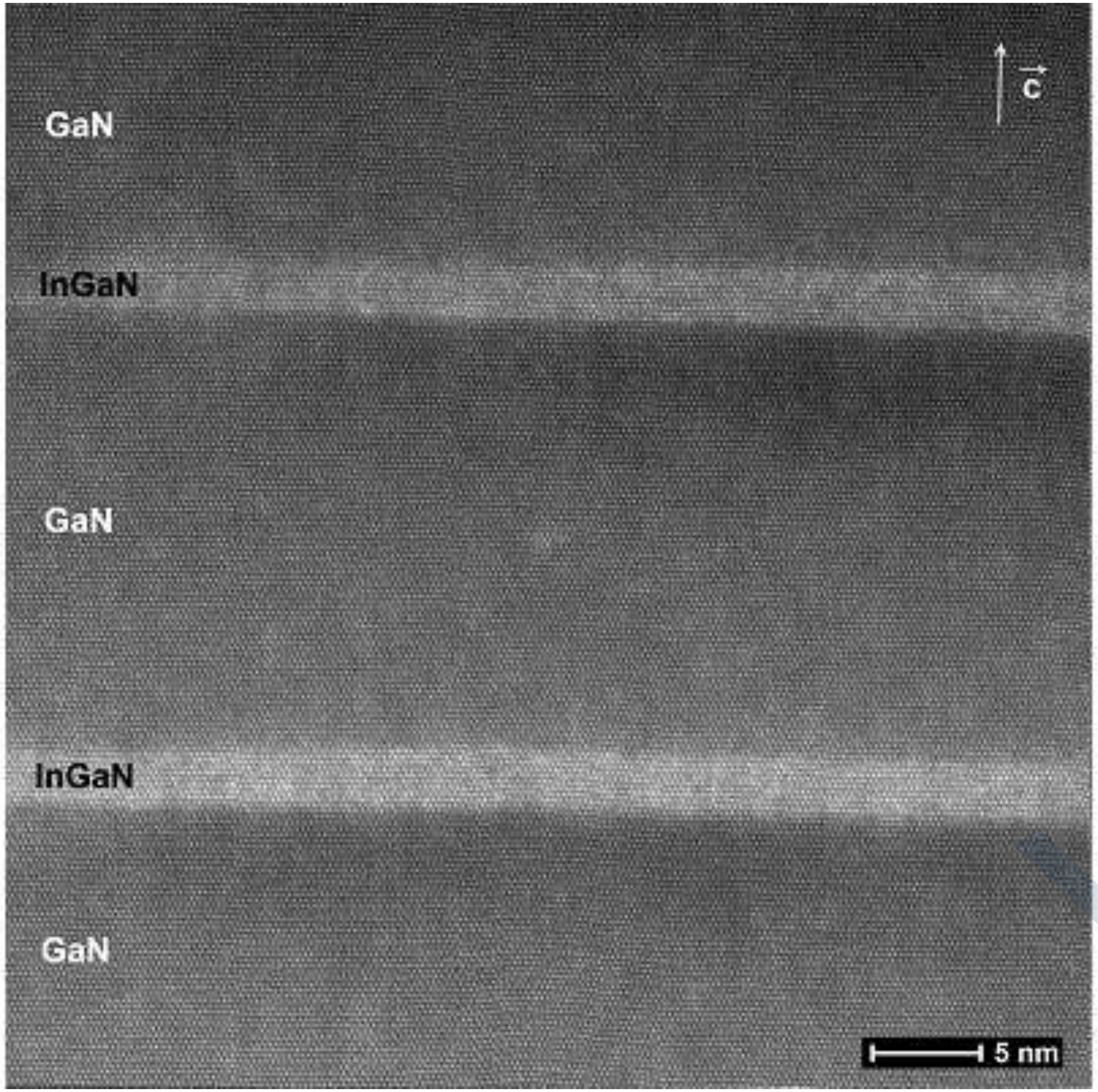



Cross-sectioned specimen of a GaAs/AlAs multi-layer system. It consists of [1 1 0]-oriented GaAs layers of constant width and AlAs layers increasing in width from bottom to top by one monolayer each (indicated by dashed lines).

H. Lichte *et al.*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London A **367**, 3773-3793 (2009)

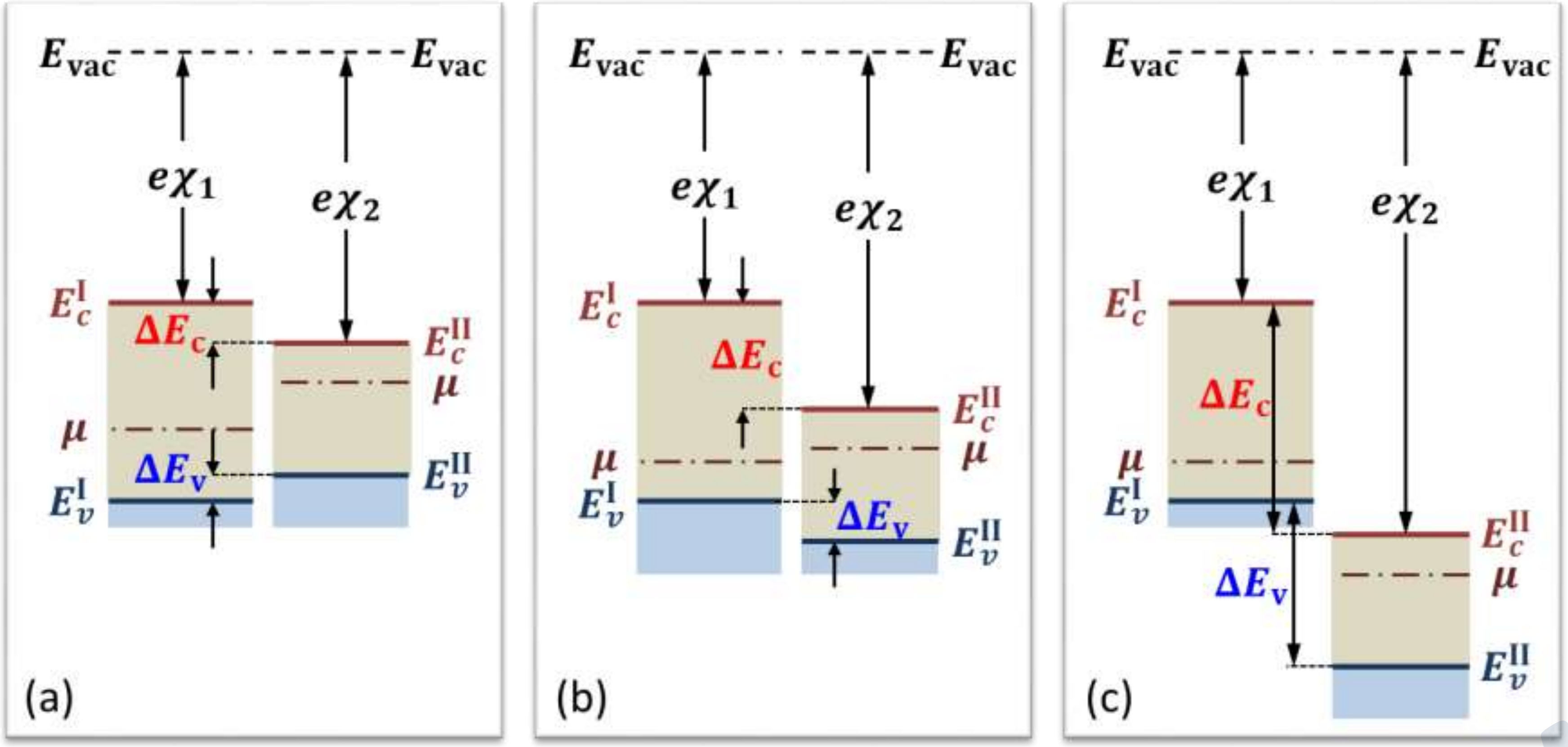
# 10.4.1 Realisierung von 2D Elektronengasen

- Beispiel: GaN/InGaN Heterostrukturen



# 10.4.1 Realisierung von 2D Elektronengasen

- **Klassifizierung von Halbleiter-Heterostrukturen nach Größe/Art der Banddiskontinuität**




*normale Banddiskontinuität (z.B. GaAs/(Al,Ga)As, GaAs/Ge)*

*gestapelte Banddiskontinuität*

*gebrochene Banddiskontinuität (z.B. GaSb/InAs)*

- Berechnung von $\Delta E_V$ schwierig, da üblicherweise keine atomar scharfen Übergänge vorliegen

- aufgrund von Banddiskontinuitäten resultiert bei Kontakt *Bandverbiegung*

*Banddiskontinuitäten durch unterschiedliche $\chi$ und $E_g$*

$$\Delta E_c = e(\chi_1 - \chi_2) = e\Delta\chi$$

$$\Delta E_V = e(\chi_1 - \chi_2) + (E_{g,1} - E_{g,2}) = e\Delta\chi + \Delta E_g$$

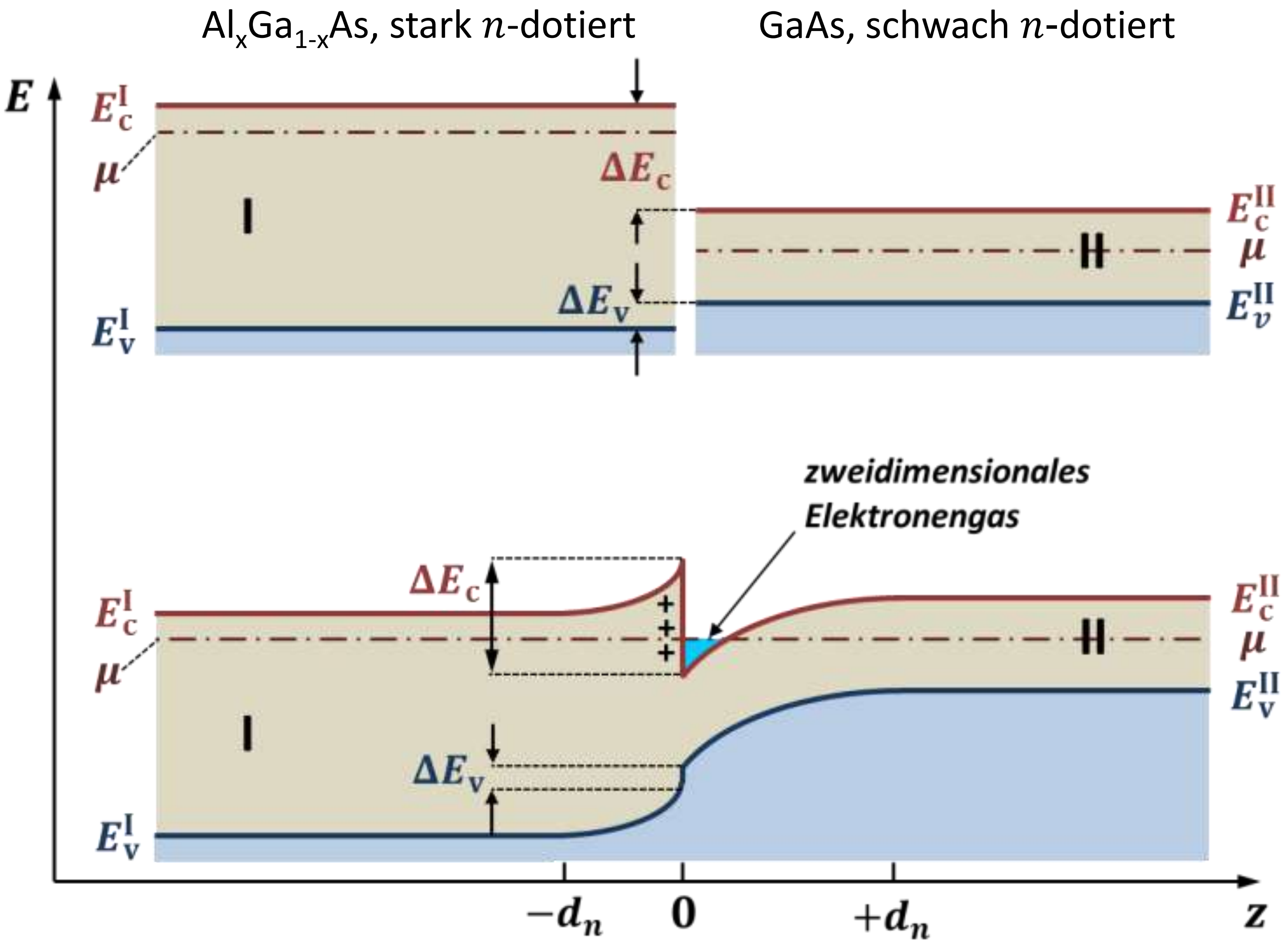
- experimentell bestimmte Banddiskontinuitäten

| Heterostruktur | $\Delta E_v$ (eV) | Heterostruktur | $\Delta E_v$ (eV) |
|---|---|---|---|
| Si–Ge | 0.28 | InAs–Ge | 0.33 |
| AlAs–Ge | 0.86 | InAs–Si | 0.15 |
| AlAs–GaAs | 0.34 | InP–Ge | 0.64 |
| AlSb–GaSb | 0.4 | InP–Si | 0.57 |
| GaAs–Ge | 0.49 | InSb–Ge | 0.0 |
| GaAs–Si | 0.05 | InSb–Si | 0.0 |
| GaAs–InAs | 0.17 | CdS–Ge | 1.75 |
| GaP–Ge | 0.80 | CdS–Si | 1.55 |
| GaP–Si | 0.80 | CdSe–Ge | 1.30 |
| GaSb–Ge | 0.20 | CdSe–Si | 1.20 |
| GaSb–Si | 0.05 | CdTe–Ge | 0.85 |
| ZnSe–Ge | 1.40 | ZnTe–Ge | 0.95 |
| ZnSe–Si | 1.35 | ZnTe–Si | 0.85 |

nach H. Morcoc, in "*The Technology and Physics of Molecular Beam Epitaxy*", herausgegeben von E.H.C. Parker, Plenum Press, New York (1985)).

# 10.4.1 Realisierung von 2D Elektronengasen

- **Beispiel: isotypische Halbleiter-Heterostruktur (z.B. $Al_xGa_{1-x}As$/GaAs)**



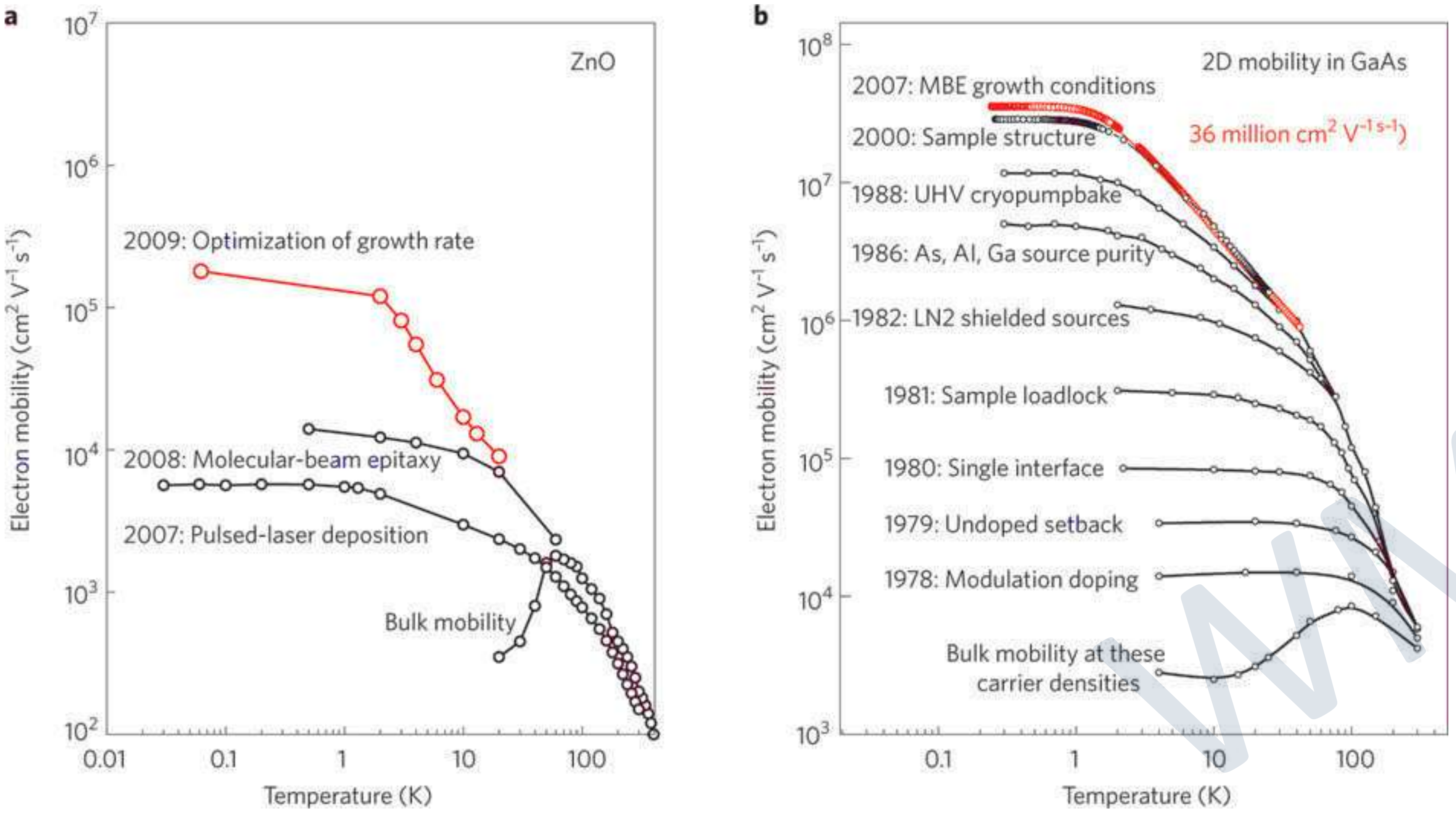

– **isotypisch**:
gleicher HL-Typ ($n$- oder $p$-Typ)

– **Bandverbiegung**:
resultiert in 2DEG im schwach dotierten HL

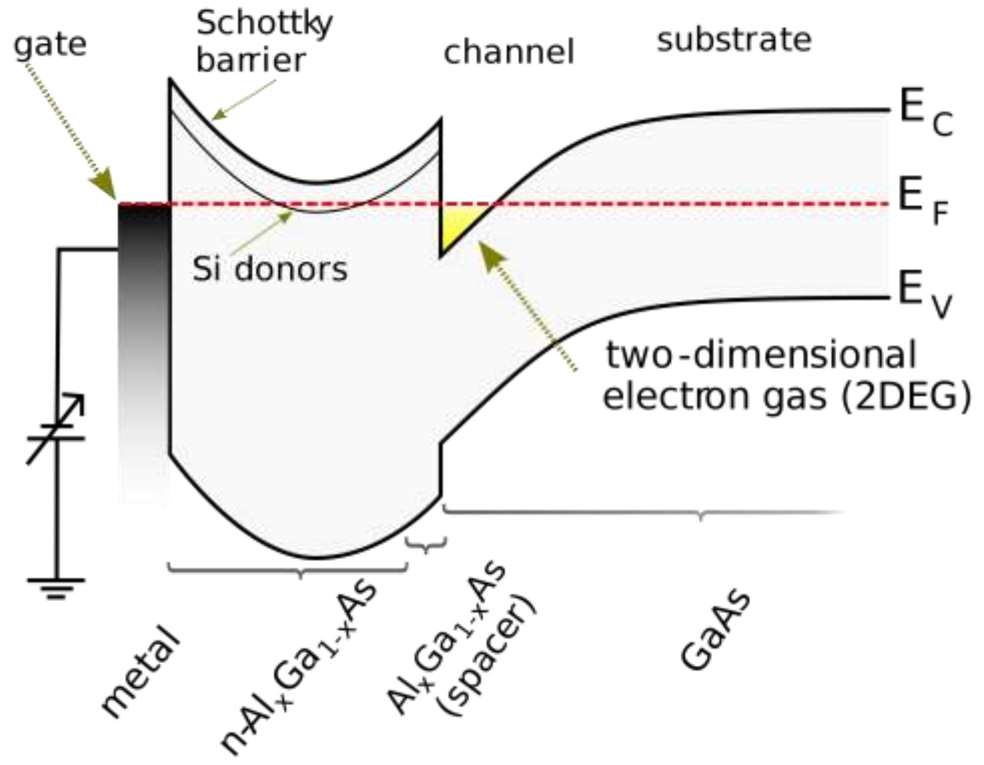
➔ *sehr hohe Beweglichkeit*, da keine Streuung an Störstellen
➔ $\mu > 10^6\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{Vs}$ bei tiefen $T$

➔ HEMT (High Electron Mobility Transistor)

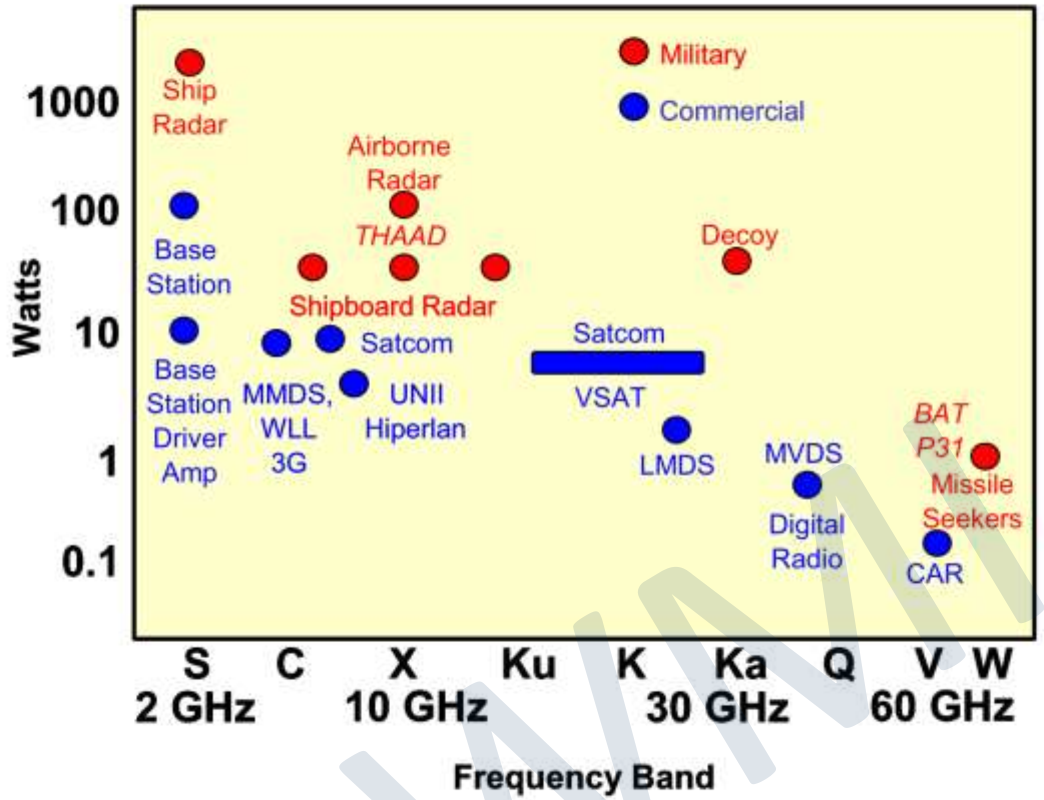
- **Beweglichkeit in 2D Elektronengas: ZnO und GaAs**



- **Anwendung von HEMTs in Hochfrequenzelektronik**



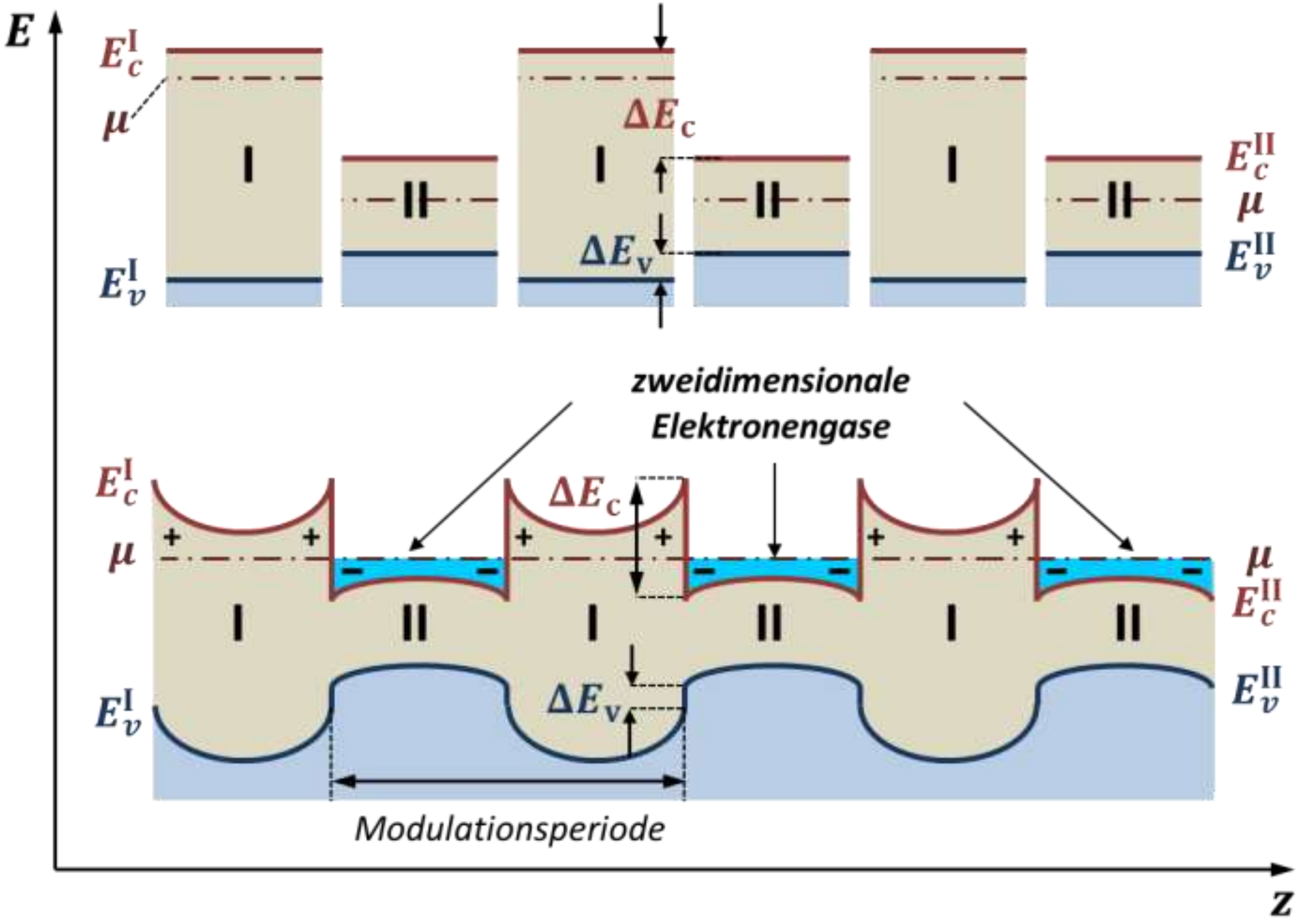

*High Electron Mobility Transistor*




https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4231876

# 10.4.1 Realisierung von 2D Elektronengasen

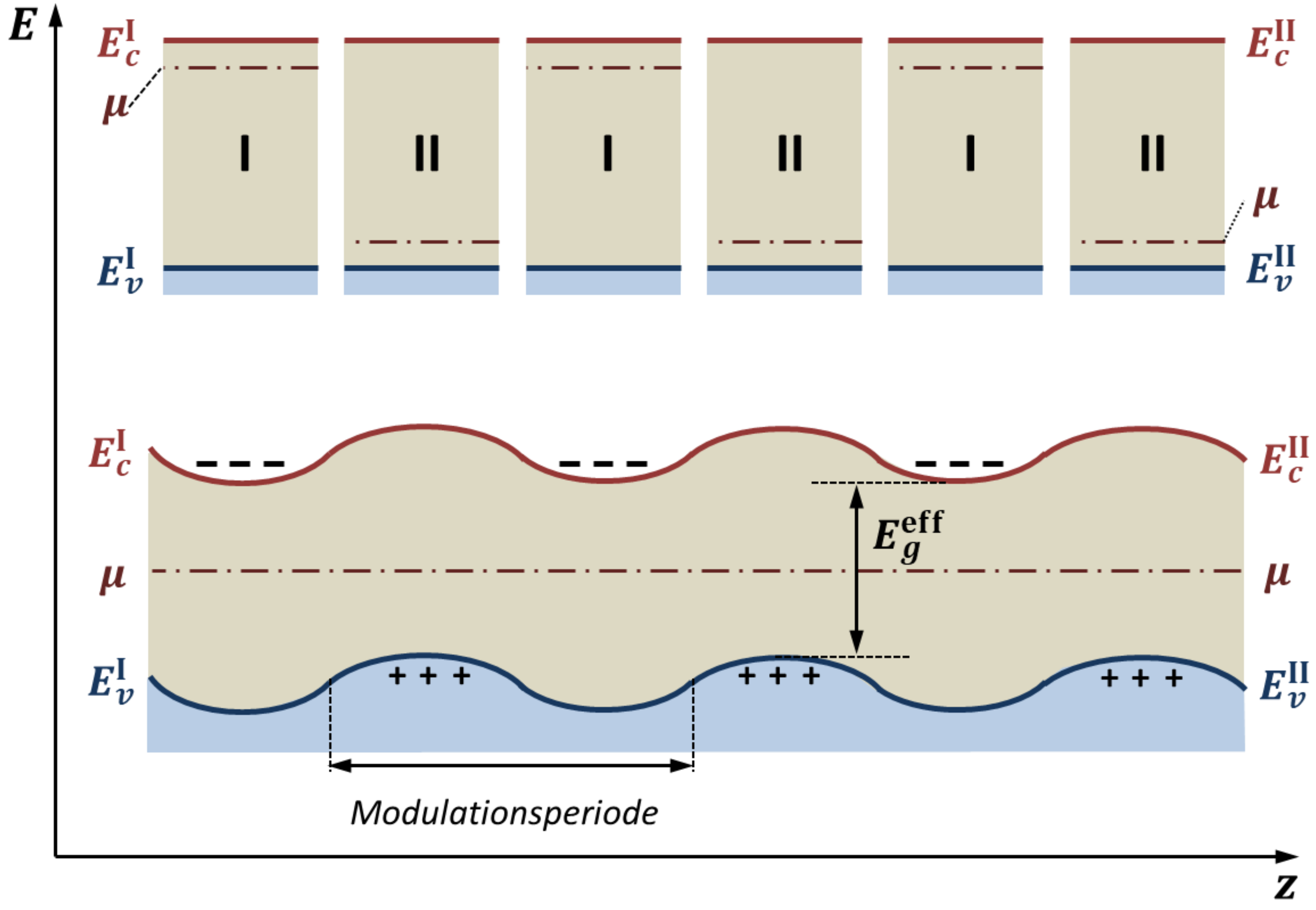
- **Beispiel: Kompositionsübergitter (z.B. GaAs/$Al_xGa_{1-x}As$)**




– **Bandverbiegung**:
  - ➢ resultiert in Serie von Quantentrögen mit 2DEG
  - ➢ Elektronengase mit hohen Beweglichkeiten
  - ➢ Kopplung der 2DEGs führt zu "*Minibändern*"

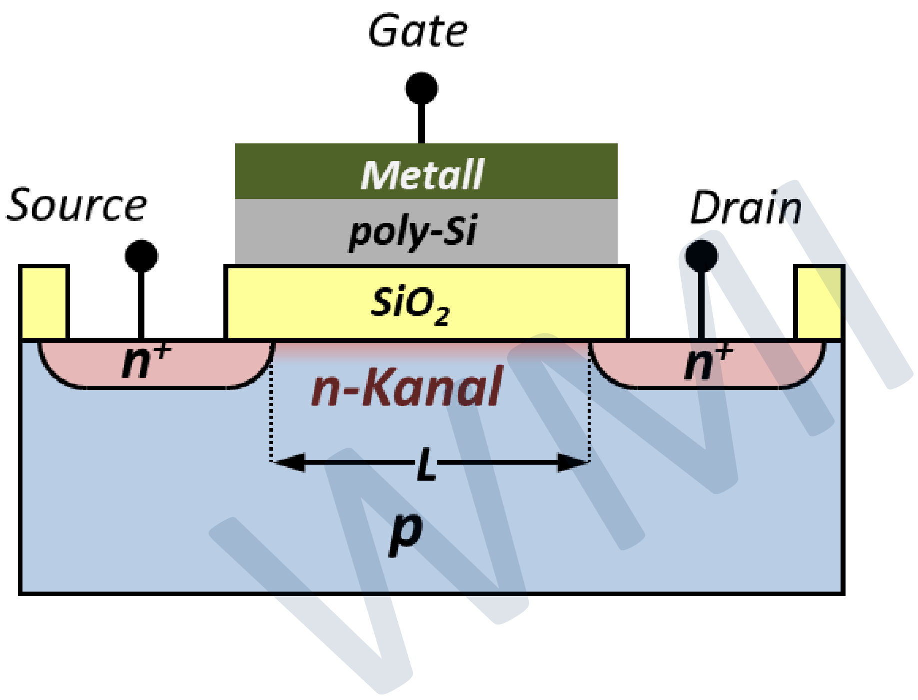
# 10.4.1 Realisierung von 2D Elektronengasen

- **Beispiel: Dotierungsübergitter (z.B. $p$- und $n$-dotiertes GaAs)**



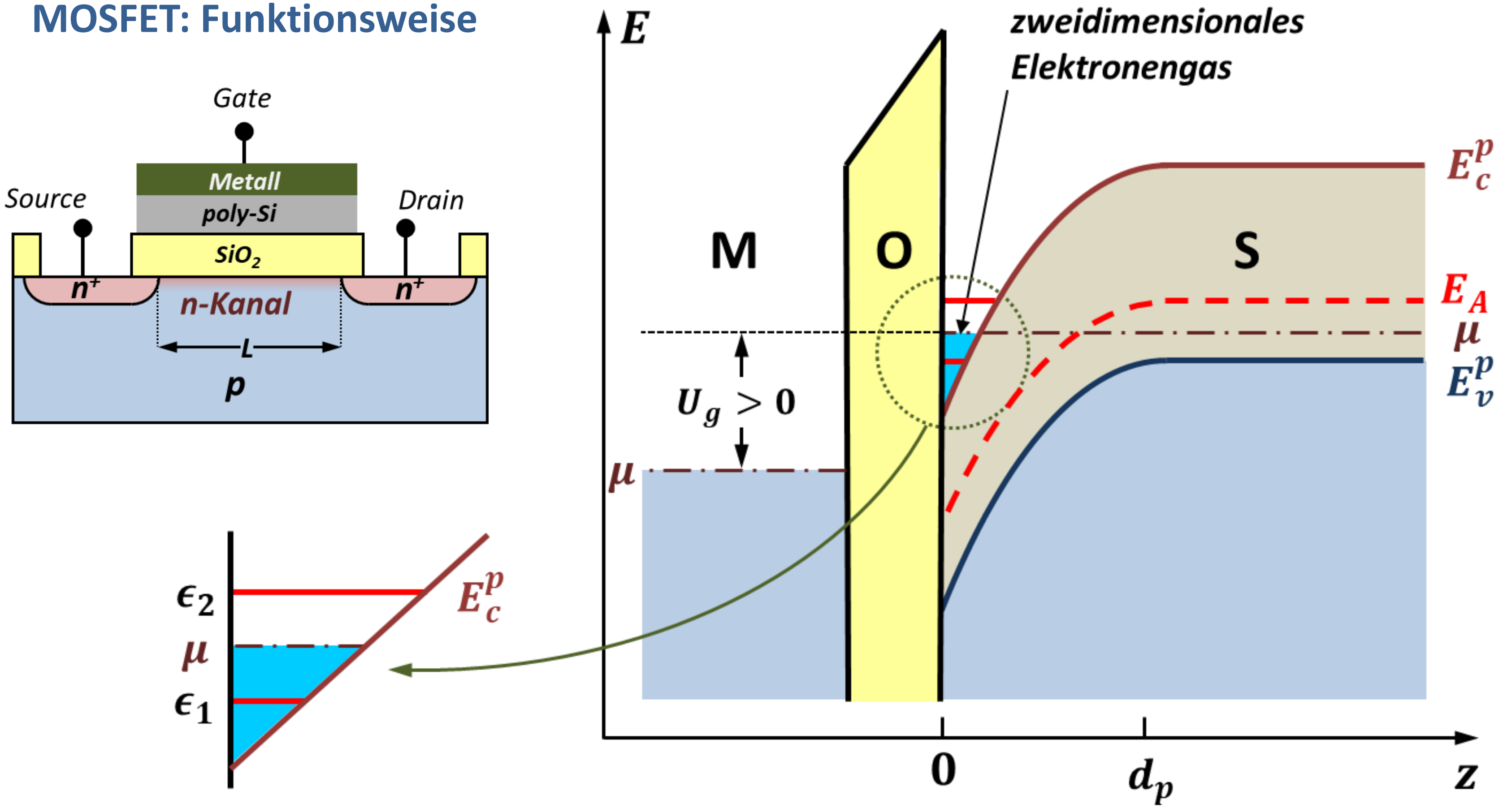

– Elektronen (Löcher) aus $n$-Typ HL ($p$-Typ HL ) diffundieren in jeweils anderen HL-Typ
– zurückbleibende Raumladungen führen zu Bandverbiegung
– positive (negative) Raumladungen biegen Band nach oben (unten)

- **MOSFET: Metal-Oxide-Semiconductor Field Effect Transistor**
  - Erzeugung von 2DEG in Halbleiter/Isolator/Metall-Heterostruktur durch elektrischen Feldeffekt
    - Patentierung bereits 1926 (Lilienfeld, USA) und 1934 (Heil, Deutschland)
    - technisch relevant erst nach 1960: Si/$SiO_2$-Systeme mit reproduzierbarer HL/Isolator-Grenzfläche
  - **Aufbau von MOSFET**
    - hochdotierte Source- (Quelle) und Drain-Bereiche (Senke)
    - niedrigdotierter Kanalbereich unter metallischem Gate
    - wichtig ist gute Gate-Oxid wie $SiO_2$
    - es liegt Serienschaltung von zwei $pn$-Kontakten vor
    - einer der beiden $pn$-Kontakte sperrt immer




***Wie bekommen wir leitende Source-Drain-Verbindung ?***

- **MOSFET: Funktionsweise**




– $U_g = 0$:
einer der beiden $pn$-Übergänge sperrt

– $U_g > 0$:
potentielle Energie der Elektronen wird im Metall um $(-e)U_g$ abgesenkt

Löcher in $p$-HL werden von Grenzfläche weggedrückt
→ negative Raumladung
→ Bandverbiegung nach unten

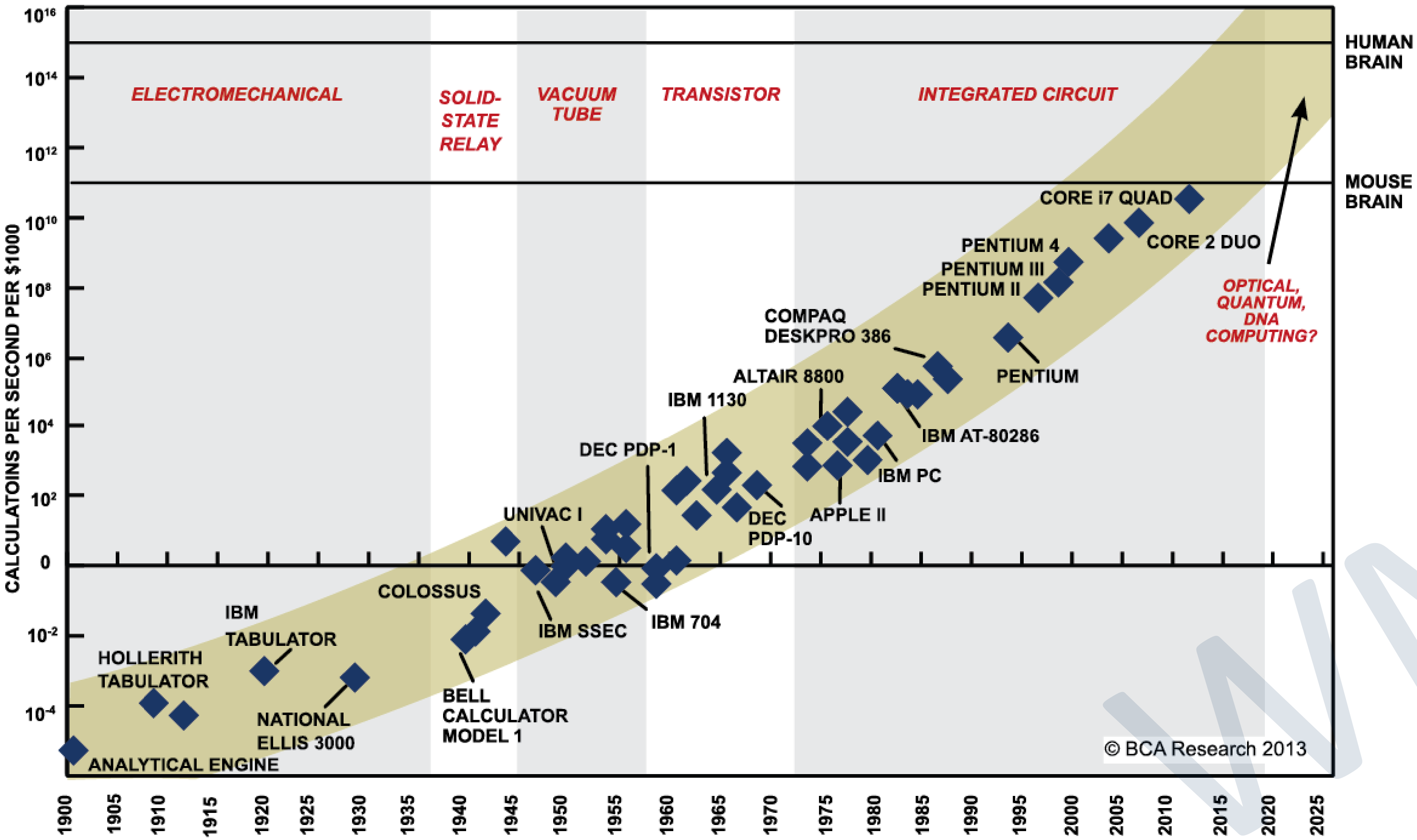
es bildet sich dreiecksförmiger Potenzialtopf mit 2D-Elektronengas (2DEG)

→ *2DEG in niedrigdotiertem $p$-HL: hohe Beweglichkeit da keine Streuung an Störstellen*

→ *Entdeckung des Quanten-Hall-Effekts durch von Klitzing, Dorda und Pepper (1980)*

→ *Mooresches Gesetz: Verkürzung der Kanallänge*

- Steigerung der Rechenleistung von Computern



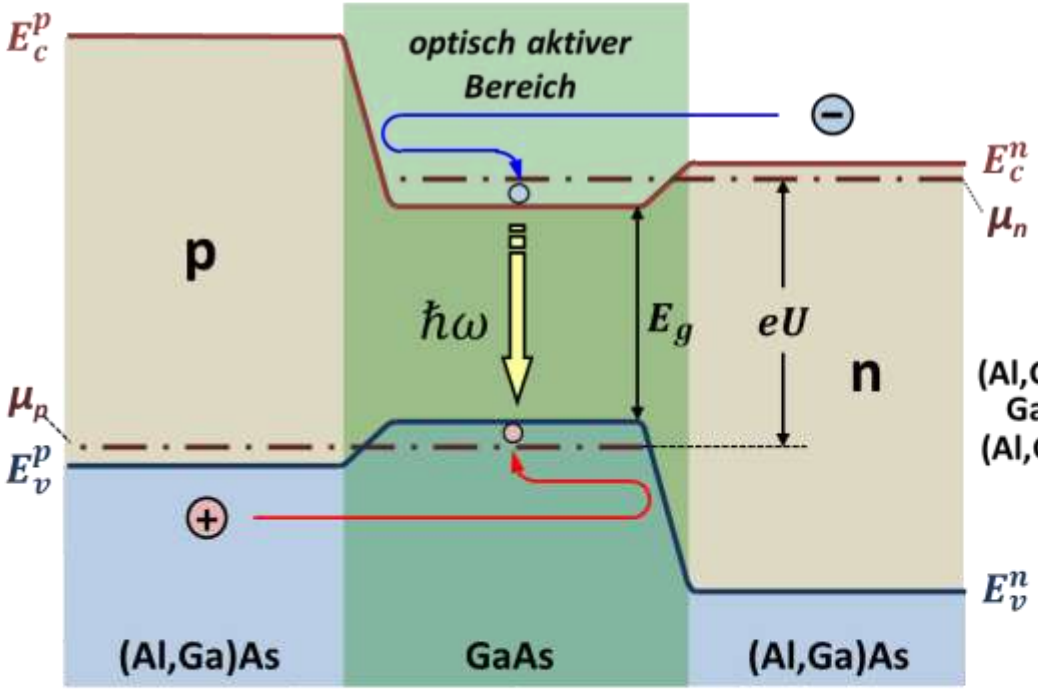

SOURCE: RAY KURZWEIL, "THE SINGULARITY IS NEAR: WHEN HUMANS TRANSCEND BIOLOGY", P.67, *THE VIKING PRESS*, 2006. DATAPOINTS BETWEEN 2000 AND 2012 REPRESENT BCA ESTIMATES.

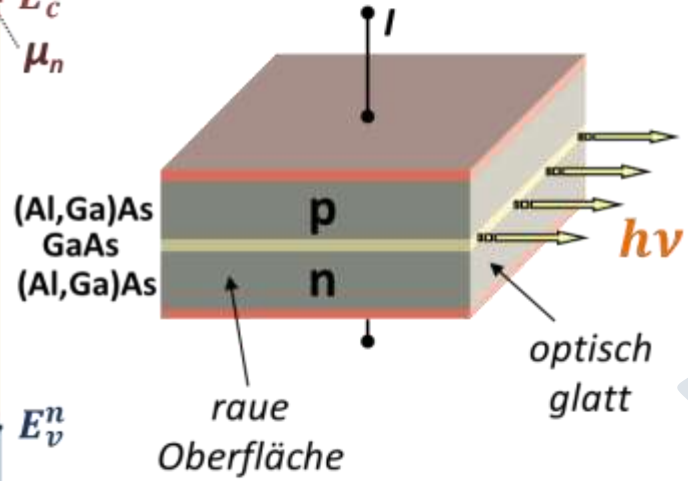
# 10.4.2 Halbleiter-Laser

- **Lichterzeugung in $pn$-Übergang: invers betriebene Solarzelle**

  – Voraussetzung für Laser: (i) Besetzungsinversion
  (ii) Rückkopplung (Spiegel)

  – Beispiel: ***Double Heterostructure Injection Laser***




GaAs als optisch aktive Schicht: $E_g = 1.43$ eV → $\lambda = 838$ nm

**Funktionsweise**:

– Elektronen und Löcher werden aus hochdotierten $n$- und $p$-HL in niedrigdotierten Bereich von direktem HL injiziert

– Bandverlauf bildet "Badewannen" für Elektronen und Löcher
→ Einschluss in kleinem Volumen

– Rekombination unter Emission von Photonen

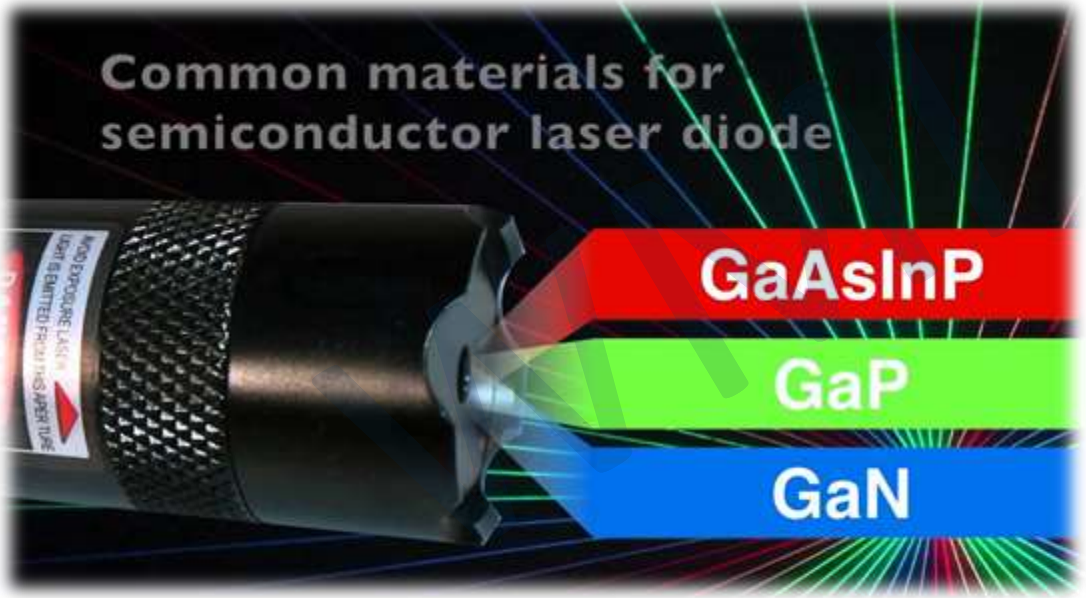
– Spiegel durch optisch glatte HL-Oberfläche

– optischer Einschluss durch Brechungsindexgradienten

# 10.4.2 Halbleiter-Laser

- **Weitverbreitete Wellenlängen von Halbleiter-Lasern**

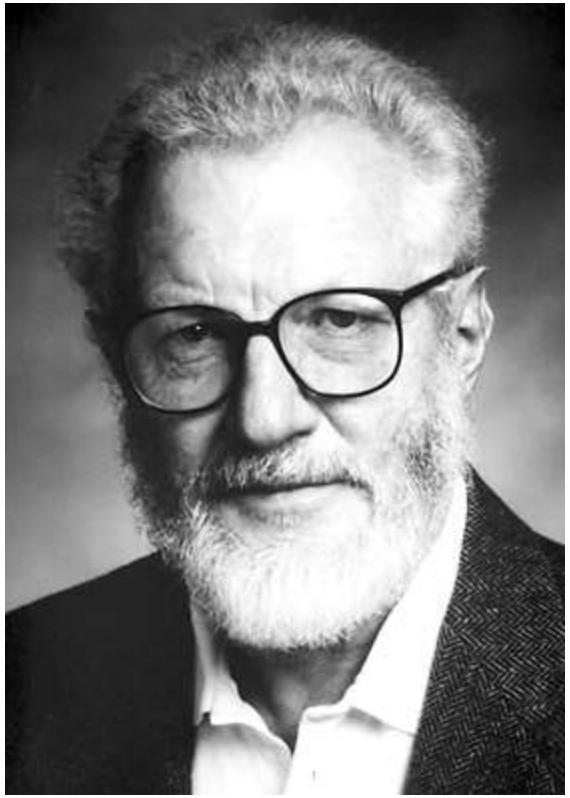
  - **405 nm** – InGaN blue-violet laser, in Blu-ray Disc and HD DVD drives
  - **445-465 nm** – InGaN blue laser multimode diode recently introduced (2010) for use in mercury-free high-brightness data projectors
  - **510-525 nm** – Green diodes recently (2010) developed by Nichia and OSRAM for laser projectors.
  - **635 nm** – AlGaInP better red laser pointers, same power subjectively twice as bright as 650 nm
  - **650-660 nm** – GaInP/AlGaInP CD,DVD, cheap red laser pointers
  - **670 nm** – AlGaInP bar code readers, first diode laser pointers (now obsolete, replaced by brighter 650 nm and 671 nm DPSS)
  - **760 nm** – AlGaInP gas sensing: O2
  - **785 nm** – GaAlAs Compact Disc drives
  - **808 nm** – GaAlAs pumps in DPSS Nd:YAG lasers (e.g., in green laser pointers or as arrays in higher-powered lasers)
  - **848 nm** – laser mice
  - **980 nm** – InGaAs pump for optical amplifiers, for Yb:YAG DPSS lasers
  - **1,064 nm** – AlGaAs fiber-optic communication, DPSS laser pump frequency
  - **1,310 nm** – InGaAsP, InGaAsN fiber-optic communication
  - **1,480 nm** – InGaAsP pump for optical amplifiers
  - **1,512 nm** – InGaAsP gas sensing: NH3
  - **1,550 nm** – InGaAsP, InGaAsNSb fiber-optic communication
  - **1,625 nm** – InGaAsP fiber-optic communication, service channel
  - **1,654 nm** – InGaAsP gas sensing: CH4
  - **1,877 nm** – GaInAsSb gas sensing: H2O
  - **2,004 nm** – GaInAsSb gas sensing: CO2
  - **2,330 nm** – GaInAsSb gas sensing: CO
  - **2,680 nm** – GaInAsSb gas sensing: CO2
  - **3,030 nm** – GaInAsSb gas sensing: C2H2
  - **3,330 nm** – GaInAsSb gas sensing: CH4



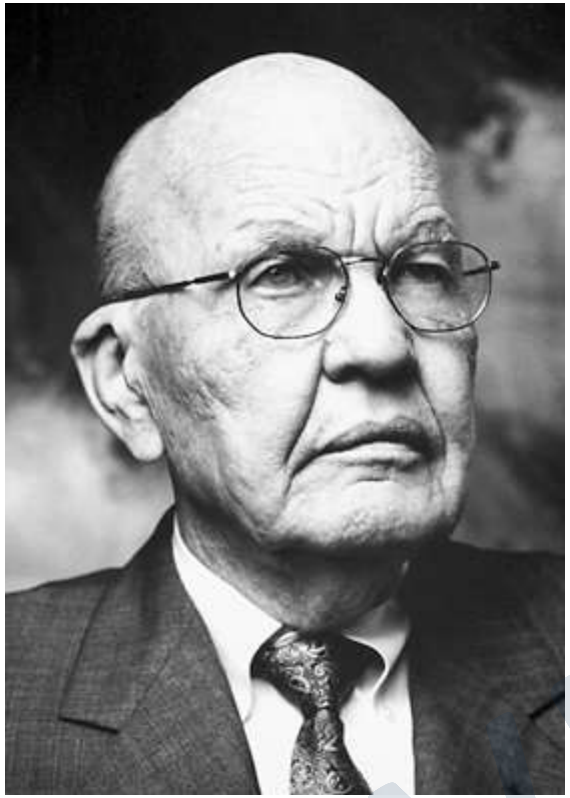
# 10.4.2 Halbleiter-Laser

- zentrale Bedeutung von Lasern und integrierten HL-Schaltungen für Informations- und Kommunikationstechnologie

**Zhores I. Alferov**



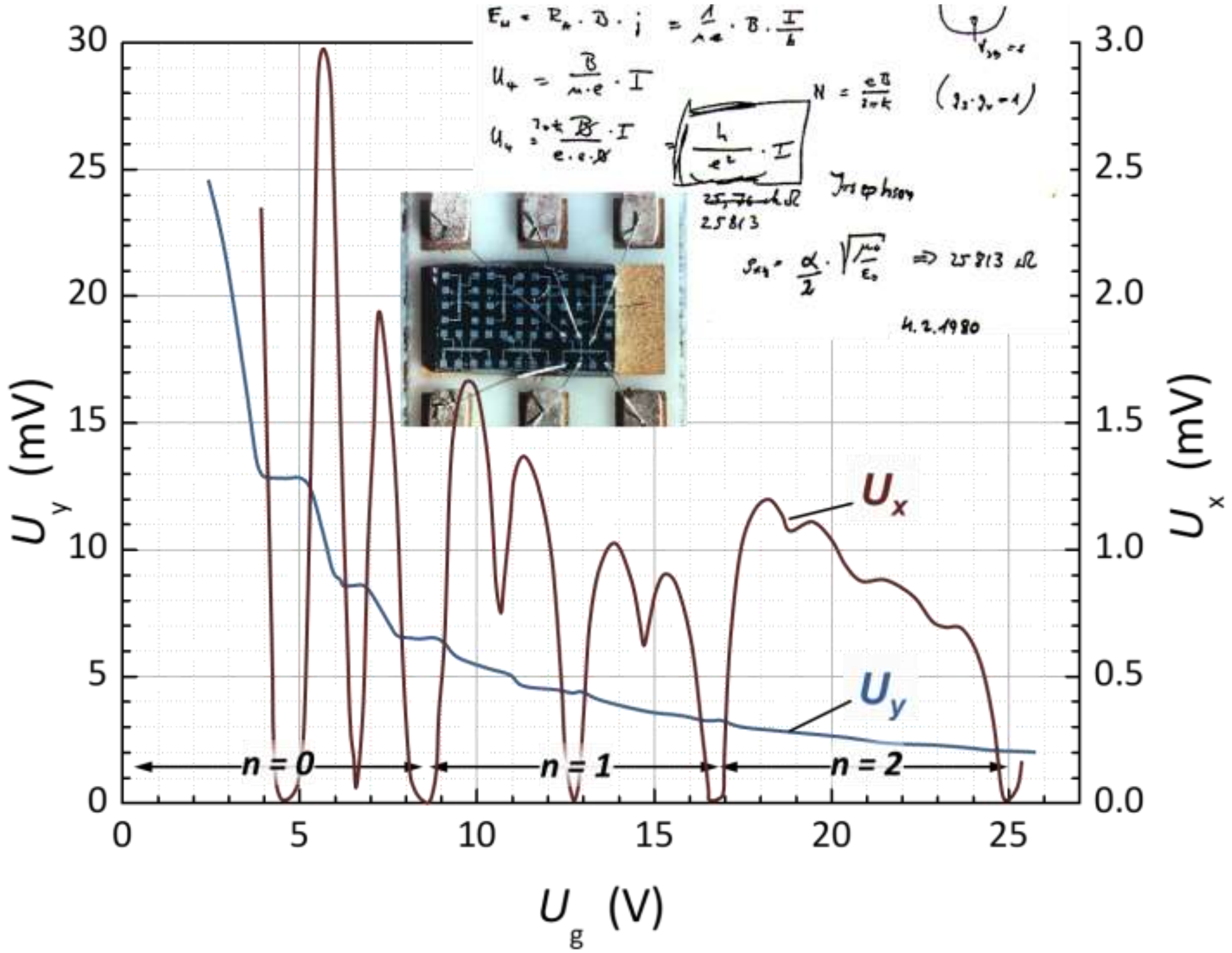
**Herbert Kroemer**



**Jack S. Kilby**

The **Nobel Prize in Physics 2000** was awarded *"for basic work on information and communication technology"* with one half jointly to Zhores I. Alferov and Herbert Kroemer *"for developing semiconductor heterostructures used in high-speed- and opto-electronics"* and the other half to Jack S. Kilby *"for his part in the invention of the integrated circuit"*.

- **Entdeckung durch von Klitzing, Dorda und Pepper in 2DEG von MOSFET (1980)**




Hall-Widerstand von 2DEG in MOSFET als Funktion der Gate-Spannung zeigt Plateaus bei Werten

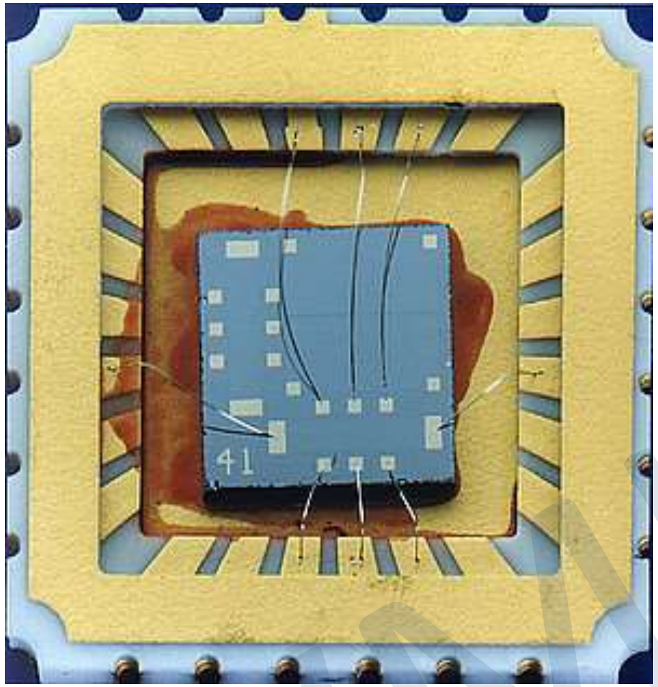
$$R_\nu = 25\,813\ \Omega/\nu, \qquad \nu = 1,2,3,\ldots$$

$$R_K = \frac{h}{e^2} = 25\,813.807\,4555(59)\ \Omega$$

von Klitzing-Konstante

***Woher kommt Quantisierung ?***

# 10.5 Quanten-Hall-Effekt



Quanten-Hall Referenzwiderstände (Quelle: PTB Braunschweig)

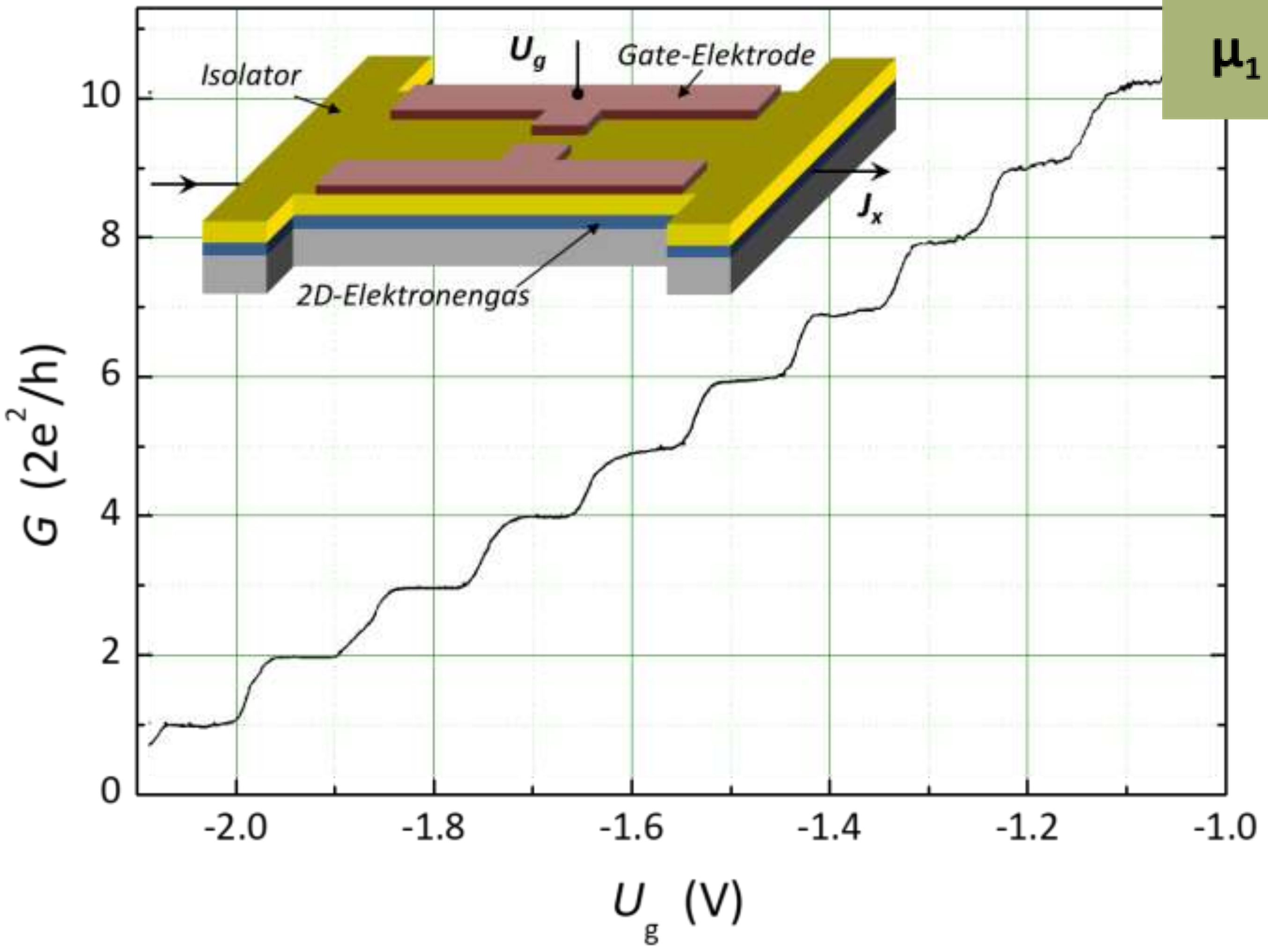
**TUM Distinguished Affiliated Professor**

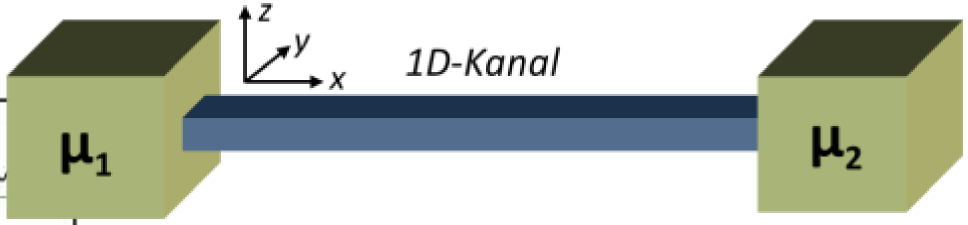
von 1980 bis 1985 Professor am Physik-Department der TUM, anschließend Direktor am Max-Planck-Institut für Festkörperforschung in Stuttgart

**Klaus von Klitzing** (geb. 1943), **Nobelpreis für Physik 1985**

„für die Entdeckung des quantisierten Hall-Effekts“

- **Leitwert-Quantisierung in 1D-Elektronengas (Wiederholung)**

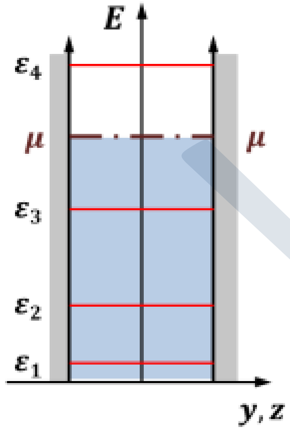



Leitwert eines ballistischen 1D-Transportkanals ist quantisiert

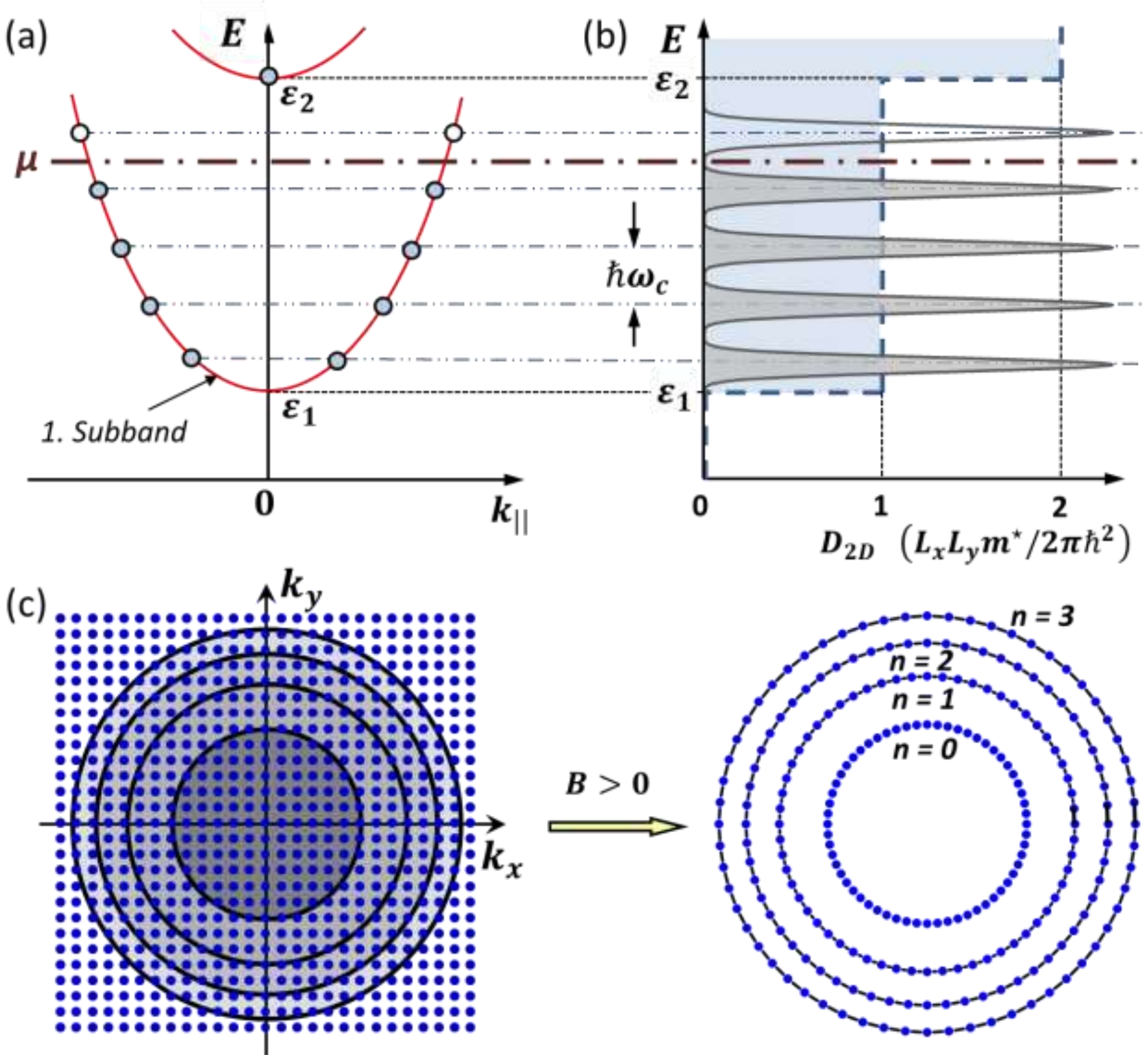
$$I = 2\frac{e^2}{h}\,U \quad \text{mit} \quad G_K = \frac{e^2}{h} \quad \text{bzw.} \quad R_K = \frac{h}{e^2}$$

Faktor 2 durch Spin-Entartung




$U_g$ schiebt $\mu$ nach oben, so dass immer mehr Transportkanäle geöffnet warden, von denen jeder $2e^2/h$ beiträgt

- **2D-Elektronengas (Wiederholung)**




**Eigenenergien**:

$$\varepsilon_n = \varepsilon_1 + \underbrace{\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c}_{\text{Kreisbewegung in Ebene} \perp B \text{ um Schwerpunktkoordinate } x_0} \underbrace{\pm\, g\mu_B s B}_{\text{Spin-Aufspaltung}}$$

1. Subband

Spin-Aufspaltung
($\mu_B$ =Bohrsches Magneton)

Kreisbewegung in Ebene $\perp B$
um Schwerpunktkoordinate $x_0$

- **Leitfähigkeitstensor von 2D-Elektronengas (Wiederholung)**

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \frac{\sigma_0}{1+\omega_c^2\tau^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c\tau \\ +\omega_c\tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

mit $\sigma_0 = \dfrac{n_{2D} e^2 \tau}{m^\star}$ (Drude-Leitfähigkeit)

- **Tensoren der elektrischen Leitfähigkeit und des elektrischen Widerstands (Annahme: $\boldsymbol{\sigma_{xx}} = \boldsymbol{\sigma_{yy}}$, bzw. $\boldsymbol{\rho_{xx}} = \boldsymbol{\rho_{yy}}$)**

$$\sigma_{xx} = \frac{\rho_{xx}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2} \qquad \sigma_{xy} = \frac{-\rho_{xy}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \rho_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \qquad \rho_{xy} = \frac{-\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}$$

$$\sigma_{yx} = \frac{+\rho_{xy}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2} \qquad \sigma_{yy} = \frac{\rho_{xx}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2} \qquad \qquad \rho_{yx} = \frac{+\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \qquad \rho_{yy} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}$$

**Wichtig**: $\sigma$ und $\rho$ sind keine Zahlen mehr, sondern Tensoren (2x2 Matrix), es gilt nicht $\sigma = 1/\rho$

**Hinweis:**
Für $\sigma_{xx} = 0$ erhalten wir ungewöhnlicherweise auch $\rho_{xx} = 0$, man kann aber leicht zeigen, dass die effektive Längsleitfähigkeit $\sigma_{\mathrm{eff}}$ endlich ist

$$J_x = \sigma_{xx}E_x + \sigma_{xy}E_y$$
$$J_y = \sigma_{yx}E_x + \sigma_{yy}E_y$$

$\Rightarrow$ für $J_y = 0$ folgt $E_y = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{yy}} E_x$ und mit $J_x = \sigma_{xx}E_x + \sigma_{xy}E_y$ ergibt sich $J_x = \left(\sigma_{xx} + \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_{yy}}\right) E_x = \sigma_{\mathrm{eff}} E_x$

$\sigma_{\mathrm{eff}} \to \infty$
für $\sigma_{xx}, \sigma_{yy} \to 0$

- **Experimentelle Konfiguration (Messungen an Hall-Balken)**

  – $J_x$ wird vorgegeben, $J_y = 0$ (hochohmiges Voltmeter) und $U_x, U_y$ werden gemessen, $n_{2D}$ wird über $U_g$ variiert

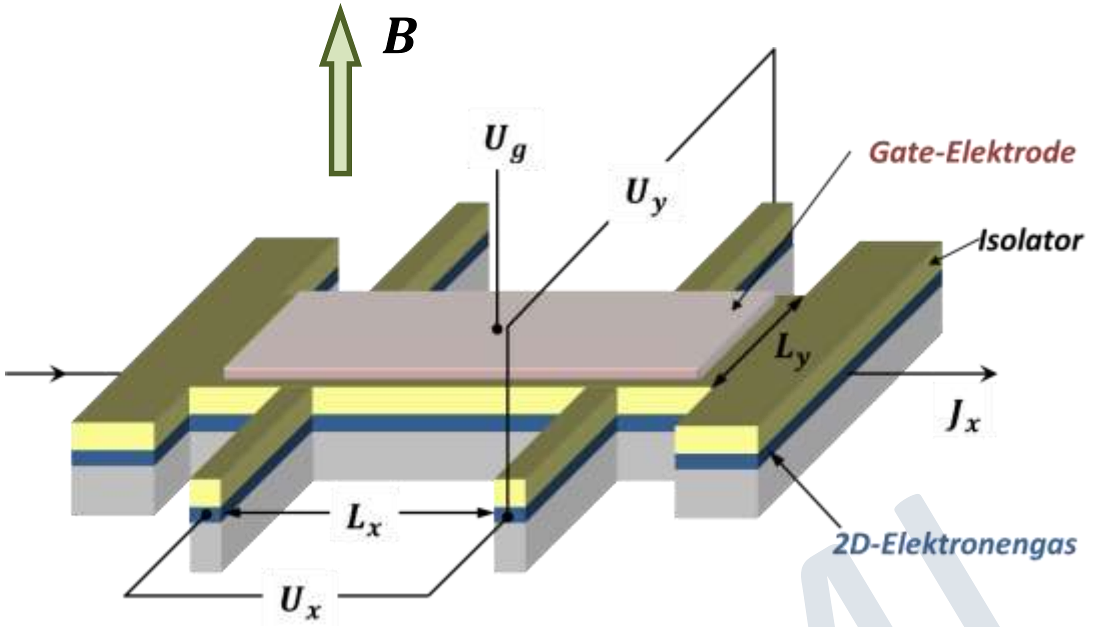
    ➢ $U_x = E_x \cdot L_x$

    ➢ $U_y = E_y \cdot L_y$

  – Kompensation von Lorentz-Kraft $F_{L,y} = (-e)v_x B$ und Kraft durch elektrisches Feld $F_{L,y} = (-e)E_y$

    ➢ $-ev_x B - eE_y = 0 \qquad \Rightarrow \quad E_y = \frac{U_y}{L_y} = -v_x B$

    ➢ $\rho_{xy} = \frac{E_y}{J_x} = \frac{-v_x B}{n_{2\mathrm{D}} e v_x} \qquad \Rightarrow \quad \rho_{xy} = -\frac{1}{n_{2\mathrm{D}}\, e} B = R_H\, B$




***Hall-Konstante*** $R_H = -\frac{1}{n_{2\mathrm{D}}\, e}$

Beim Übergang von Elektronen $(-e)$ zu Löchern $(+e)$ bleibt das Vorzeichen von Lorentz-Kraft gleich, da sich die Vorzeichen von Ladung und Geschwindigkeit umkehren, das Vorzeichen der Kraft durch das $E$-Feld ändert sich dagegen ➔ $\rho_{xy} = +B/n_{2D}e$ und $R_H = +1/n_{2D}e$

- Diskussion des Falls sehr reiner Proben und hoher Magnetfelder: $\omega_c \tau \gg 1$

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = \frac{\sigma_0}{1+\omega_c^2\tau^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c\tau \\ +\omega_c\tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

mit $\sigma_0 = \frac{n_{2D} e^2 \tau}{m^\star}$ (Drude-Leitfähigkeit)

$$\rho_{xy} = -\frac{1}{n_{2\mathrm{D}}\, e} B = R_H\, B$$

$$\omega_c\tau \gg 1 \Rightarrow \sigma_{xx}, \sigma_{yy} \to 0$$

$$\Rightarrow \rho_{xy} = -\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \simeq -\frac{1}{\sigma_{xy}}$$

$$\Rightarrow \sigma_{xy} = \frac{-\rho_{xy}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2} \simeq -\frac{1}{\rho_{xy}}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{n_{2D} e}{B}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\rho_{xx}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2} \qquad \sigma_{xy} = \frac{-\rho_{xy}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2}$$

$$\sigma_{yx} = \frac{+\rho_{xy}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2} \qquad \sigma_{yy} = \frac{\rho_{xx}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2}$$

$$\rho_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \qquad \rho_{xy} = \frac{-\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}$$

$$\rho_{yx} = \frac{+\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \qquad \rho_{yy} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}$$

*allgemeine Eigenschaft von 2D-Elektronengas in gekreuzten $E$- und $B$-Feldern*

- **vereinfachte Erklärung für Auftreten von Quanten-Hall-Plateaus**

  – **Annahme**: $k_\mathrm{B}T \ll \hbar\omega_c$, $\mu$ liegt zwischen Landau-Niveaus $n$ und $n+1$

  Elektronendichte: $$n_{2D} = \frac{N_e}{L_x L_y} = \frac{n \cdot p}{L_x L_y} = n \cdot \frac{eB}{2\pi\hbar}$$

  mit $p = \frac{eB}{2\pi\hbar} L_x L_y$ (Entartung der Landau-Niveaus)

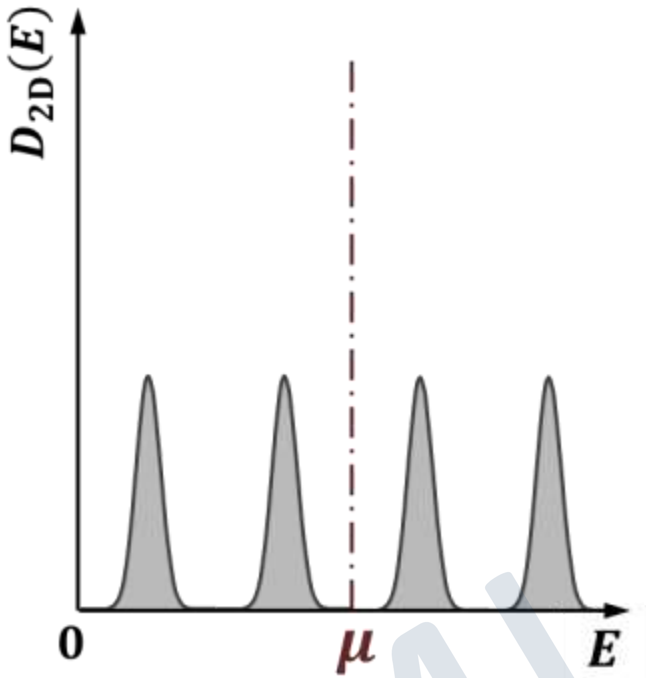
  keine Streuzustände, inelastische Prozesse unwahrscheinlich

  ➔ $\omega_c \tau \to \infty$

  $$\boldsymbol{\sigma_{xy} = \frac{n_{2D} e}{B} = n \cdot \frac{e^2}{h}}$$

  $$\boldsymbol{R_\mathrm{K} = \frac{h}{e^2} = 25\,812.807\,4555(59)\ \Omega}$$

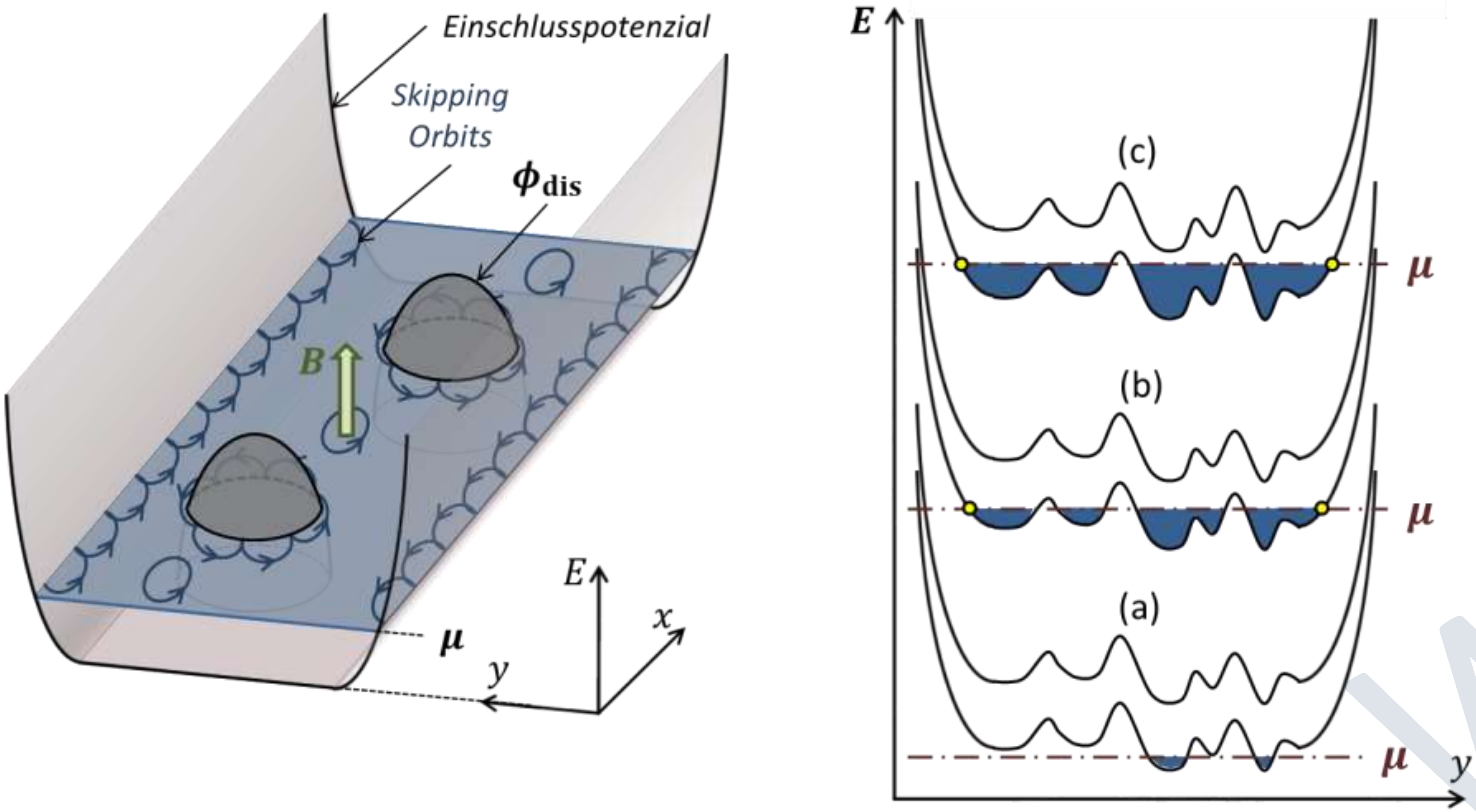
  **von Klitzing-Konstante**




  – **Experiment**:
  i. Variation von $n_{2D}$ und damit $\mu$ durch Änderung von $U_g$ bei gleichem Abstand der Landau-Niveaus
  ii. Variation des Abstands $\hbar\omega_c$ und der Entartung $p$ der Landau-Niveaus durch $B$-Änderung

  – **Achtung**:
  obige Annahme, dass $\mu$ zwischen zwei Landau-Niveaus liegt, gilt nur für ein bestimmtes $U_g$ bzw. $B$
  ⇒ wir erwarten infinitesimale Breite der Quanten-Hall-Plateaus

- **Diskussion der endlichen Breite der Quanten-Hall-Plateaus erfordert Einbeziehung des Verunreinigungspotenzials**



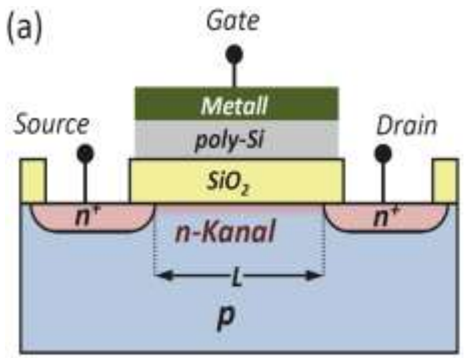

"skipping orbits" am Rand der Probe bilden 1D-Transportkanäle mit quantisiertem Leitwert

moderne Diskussion: Quanten-Hall-Zustand als topologischer Isolator

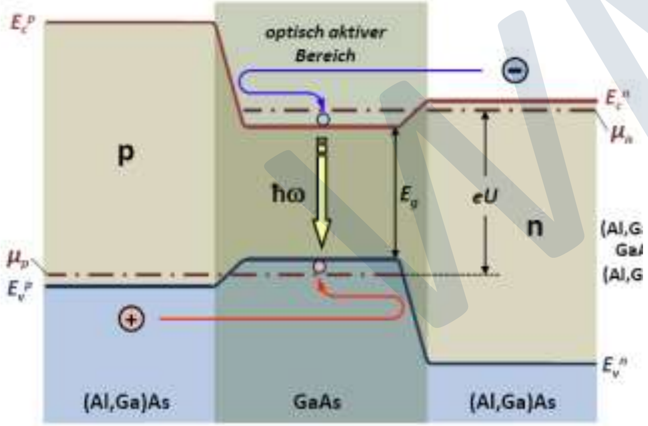
# Zusammenfassung: Teil 8a, 20.04.2021/2

- ***Realisierung von 2DEGs durch Halbleiter-Heterostrukturen***
  - gute Gitteranpassung von verschiedenen Halbleitermaterialien erlaubt ***Heteroepitaxie***
  - unterschiedliche Elektronenaffinitäten $\chi$ und Energielücken $E_g$ von HL
    → ***Banddiskontinuitäten*** (normal, gestapelt, gebrochen)
  - ***Bandverbiegungen*** durch unterschiedliche Elektronenaffinitäten $\chi$ und Energielücken $E_g$
  - Beispiele: (i) ***isotypische HL-Heterostrukturen***, (ii) ***Kompositionsübergitter***, (iii) ***Dotierungsübergitter***

- ***MOSFET***
  - Realisierung von 2DEGs, Patentierung bereits 1926 und 1934
  - technisch relevant erst nach 1960 → Si/$SiO_2$ Systeme mit reproduzierbarer HL/Isolator-Grenzfläche
  - Realisierung von ***Inversionskanal*** an HL-Oberfläche über elektrischen Feldeffekt
  - Verkürzung der Kanallänge: Mooresches Gesetz
  - Entdeckung des Quanten-Hall-Effekts (1980)




- ***Halbleiter-Laser***
  - Erzeugung von Laser-Licht durch LT-Rekombination in *pn*-artiger Struktur
  - z.B. ***Double Heterostructure Injection Laser*** (H. Kroemer)
  - wichtige Anwendungen: optische Kommunikation und Datenspeicher



# Zusammenfassung: Teil 8b, 20.04.2021/2

- ***Leitwertquantisierung in 1D Elektronengas*** **(Wiederholung)**


$I = \frac{e^2}{h} U$ mit $R_\mathrm{K} = \frac{1}{G_\mathrm{K}} = \frac{h}{e^2} = 25\,812.807\,4555(59)\ \Omega$ ***von Klitzing-Konstante***

- ***Quanten-Hall-Effekt: 2DEG in Magnetfeld***

- entartete Landau-Niveaus (für eine Spin-Richtung)

$$p = \frac{L_y}{2\pi}\frac{m\omega_c}{\hbar}L_x = \hbar\omega_c D_{2D} = L_x L_y B\frac{e}{2\pi\hbar} = \frac{\Phi}{2\Phi_0} \qquad \left(\Phi_0 = \frac{h}{2e} = \text{Flussquant}\right)$$

$$D_{2D} = \frac{m}{2\pi\hbar^2}L_x L_y$$

- Transport charakterisiert durch ***Tensoren der elektrischen Leitfähigkeit bzw. des spezifischen elektrischen Widerstands***

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{\rho_{xx}}{\rho_{xx}^2+\rho_{xy}^2} \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{xx}\end{aligned}} \quad \boxed{\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \frac{-\rho_{xy}}{\rho_{xx}^2+\rho_{xy}^2} \\ \sigma_{yx} &= -\sigma_{xy}\end{aligned}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned}\rho_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^2+\sigma_{xy}^2} \\ \rho_{yy} &= \rho_{xx}\end{aligned}} \quad \boxed{\begin{aligned}\rho_{xy} &= \frac{-\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2+\sigma_{xy}^2} \\ \rho_{yx} &= -\rho_{xy}\ .\end{aligned}}$$

- Hall-Effekt: Kompensation von Lorentz-Kraft $(-e)v_x B_z$ und $(-e)E_y$: $\quad -ev_x B_z - eE_y = -ev_x B_z - eU_y/L_y = 0 \ \Rightarrow U_y = -v_x B_z L_y$
Stromdichte $J_x$ in Längsrichtung: $J_x = n_{2D}e\, v_x \quad \Rightarrow \quad \rho_{xy} = E_y/J_x = (U_y/L_y)/(n_{2D}ev_x) = -B_z/n_{2D}e = R_H B$ mit $R_H = -1/n_{2D}e$

- für sehr reine Proben: $\omega_c\tau \gg 1 \ \Rightarrow \ \sigma_{xx}, \sigma_{yy} \to 0$: $\quad \rho_{xy} = -\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2+\sigma_{xy}^2} \simeq -\frac{1}{\sigma_{xy}} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma_{xy} \simeq -\frac{1}{\rho_{xy}} = \frac{n_{2D}e}{B}}$

- ***Entdeckung des Quanten-Hall-Effekts:***

Klitzing, Dorda Pepper (1980) mit 2DEG in MOSFET

→ $\rho_{xy}$ zeigt Plateaus an den Stellen, an denen $\sigma_{xx} \to 0$

→ Abstand der Plateaus: $R_K = \frac{h}{e^2} = 25\,812.807\,572(95)\ \Omega$

$$\rho_{xy} = -\frac{1}{\sigma_{xy}} = -\frac{B}{n_{2D}e} = R_H B$$

für $n$ gefüllte Landau-Niveaus mit Entartung $p$

$$n_{2D} = \frac{N_e}{L_x L_y} = \frac{n\cdot p}{L_x L_y} = n\frac{eB}{2\pi\hbar} \Rightarrow \boxed{\rho_{xy} = \frac{h}{e^2}\frac{1}{n}}$$