



Physik der Kondensierten Materie 1

**Rudolf Gross
WS 2020/2021
Teil 9**

Vorlesungsstunde: 01.12.2020

Zusammenfassung: Teil 8, 26.11.2020/1

• Verhalten von Festkörpern unter Wirkung von äußerer Kraft (Kontinuumsmechanik)

- Beschränkung auf Bereich der **linearen Antwort** elastischer Bereich (reversibel, Hookescher Bereich)
- atomare Struktur wird vernachlässigt ($\lambda_{\text{Störung}} \gg \text{Atomabstand}$)

$$\sigma_{ij} = \sum_{kl} C_{ijkl} e_{kl}$$

$$\sigma = C \cdot e$$

Spannung (stress)

Elastizitätsmodul

Dehnung (strain)

sym. Tensor
2. Stufe

$$\sigma \equiv \frac{F}{A} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$$

sym. Tensor
4. Stufe

$$e \equiv \frac{\Delta V}{V}$$

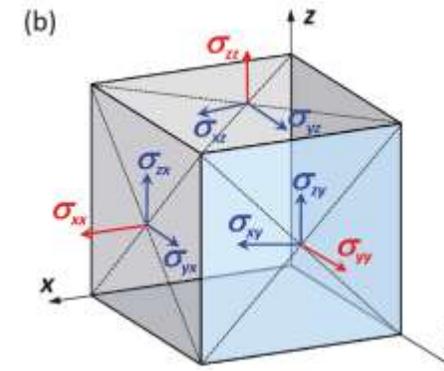
sym. Tensor
2. Stufe

• Spannung:

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

→ **Normalspannung:** $\Delta F_n / \Delta A$

→ **Schub(Tangential-)spannung:** $\Delta F_{t1} / \Delta A$ und $\Delta F_{t2} / \Delta A$

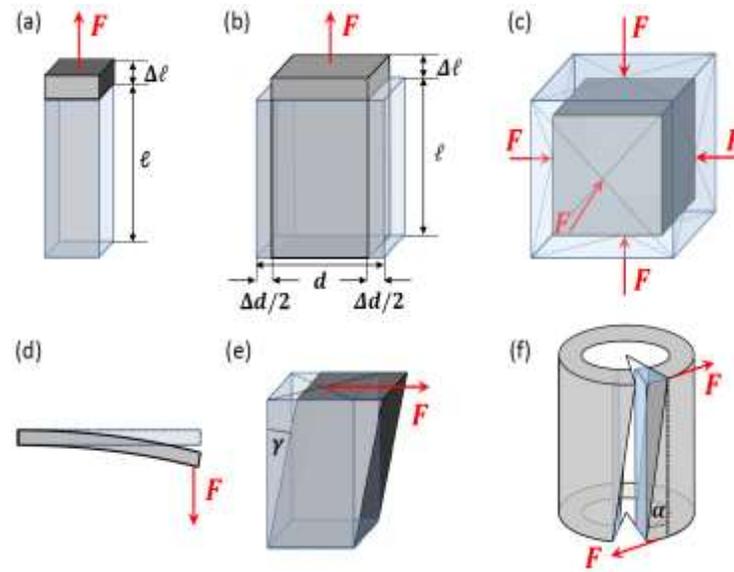


keine Translations- und Rotationsbewegung

$$\rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

symmetrischer Tensor 2. Stufe

• Belastungsfälle:



(a) – (c) Zug, Druck

Kraft wirkt normal und gleichmäßig

→ **Dehnung, Querdehnung, Volumenänderung**

(d) Biegung

Kraft wirkt ungleichmäßig

→ **ungleichmäßige Verformung**

(e) Scherung

Kraft wirkt tangential und gleichmäßig

→ **Scherung**

(f) Torsion

Kraft wirkt tangential, unterschiedliche Richtung

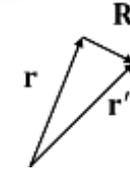
→ **Verdrillung**

Zusammenfassung: Teil 8, 26.11.2020/2

- **Dehnung:** Allgemeine Beschreibung mit Verschiebungsvektor

$$\mathbf{R}(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{x}} + v(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{y}} + w(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$$



Taylorentwicklung:

$$\mathbf{R}(\mathbf{r}) = \left(x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial v}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} + z \frac{\partial w}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{z}} + \dots$$



$$\hat{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix}$$

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \dots$$

symmetrischer Tensor 2. Stufe

- **Elastizitäts- und Compliance-Tensor:**

$$\sigma_{ij} = \sum_{kl} C_{ijkl} e_{kl}$$

Dehnungskomponenten, bilden sym. Tensor 2. Stufe

$$e_{ij} = \sum_{kl} S_{ijkl} \sigma_{kl}$$

Spannungskomponenten, bilden sym. Tensor 2. Stufe

Elastizitätstensor (Elastizitätsmoduln)
81 Komponenten

Compliance-Tensor (elastische Konstanten)
81 Komponenten

Symmetriebeziehungen: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ und $e_{kl} = e_{lk}$ sowie $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}$

→ **Reduktion auf 36 Komponenten**

- **Voigt-Notation:**

$$\begin{aligned} xx &\rightarrow 1, & yy &\rightarrow 2, & zz &\rightarrow 3, \\ yz = zy &\rightarrow 4, & xz = zx &\rightarrow 5, & xy = yx &\rightarrow 6 \end{aligned}$$



$$\sigma_m = \sum_{n=1}^6 C_{mn} e_n$$

Matrix-Notation

- **elastische Energiedichte**

elastische Energie = quadratische Funktion der Verformung

$$C_{mn} = C_{nm} \text{ (in Voigt-Notation) oder } C_{ijkl} = C_{klij} \text{ (in Tensor-Notation)}$$

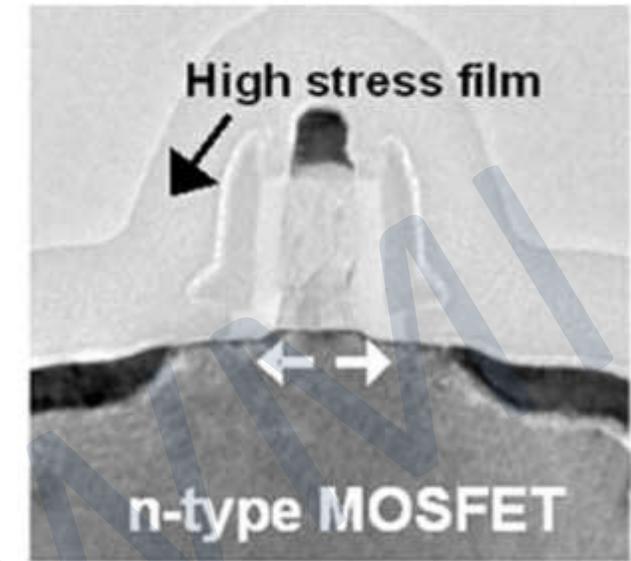
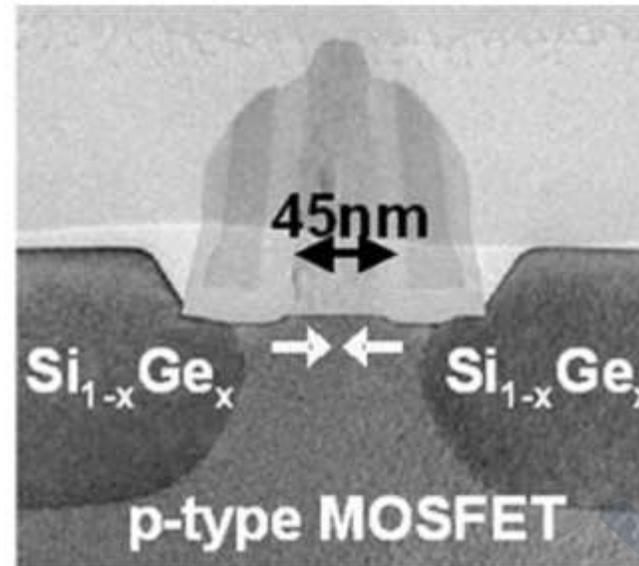
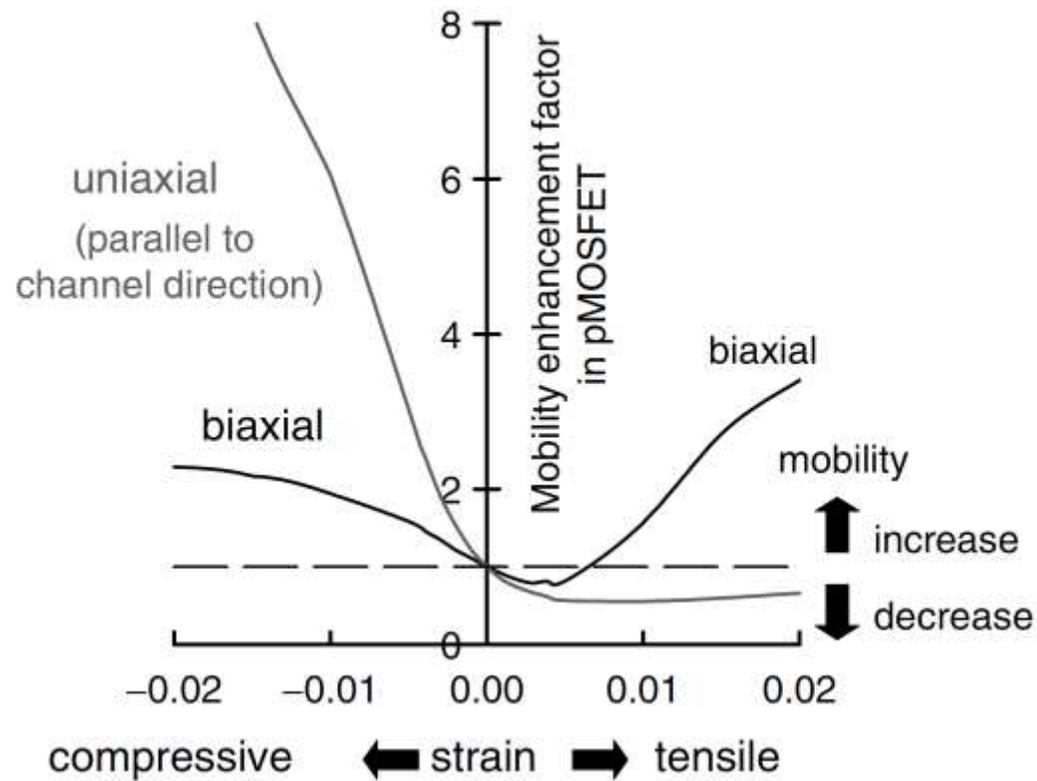
→ **Reduktion von 36 auf 21 Komponenten**

→ **weitere Reduktion durch Kristallsymmetrie**

(nur noch 3 unabh. Komponenten für kubisches System)

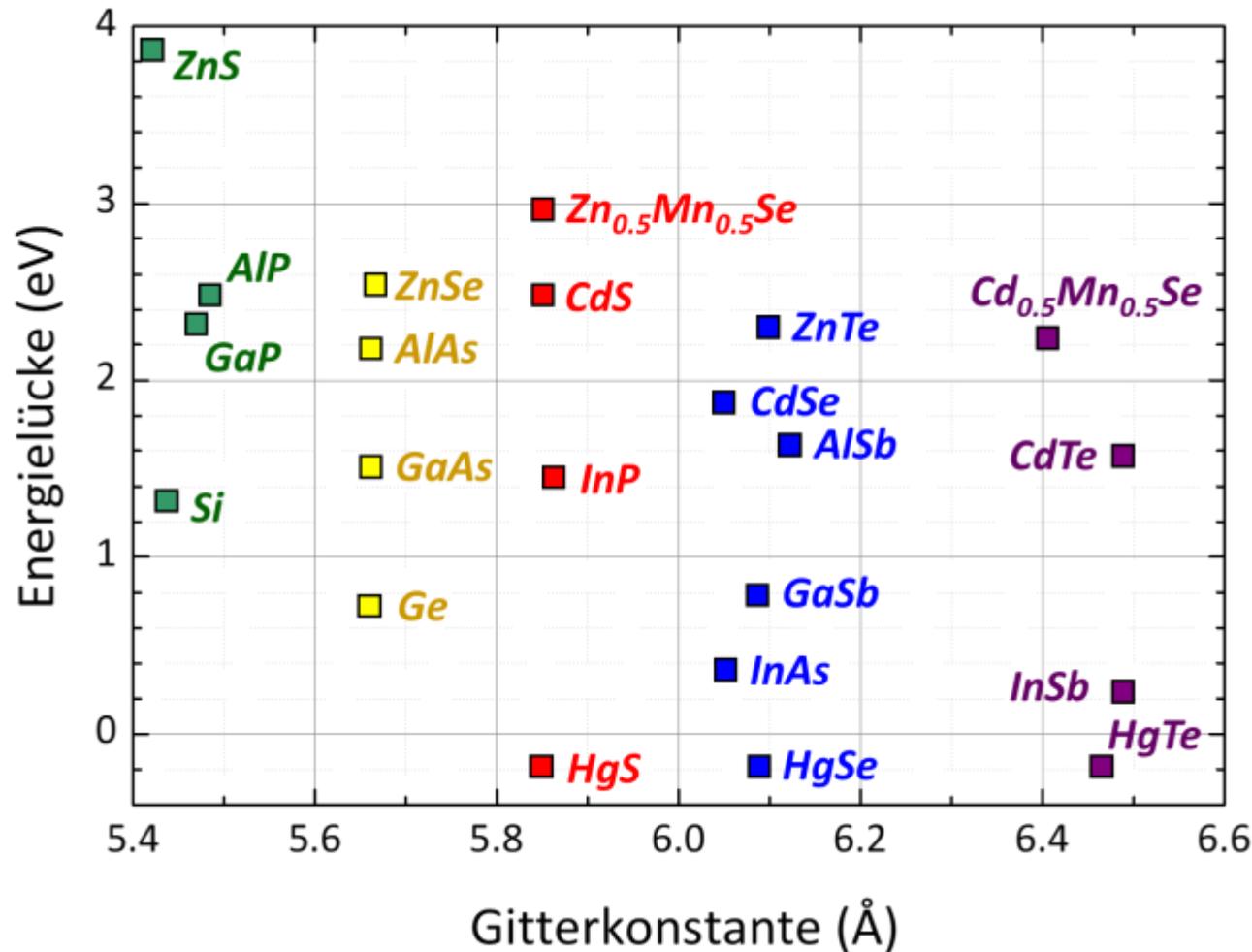
4.4 Epitaxiale Verspannungseffekte

- Beispiel: Erhöhung der Beweglichkeit von Ladungsträgern in Halbleitern durch mechanische Verspannung



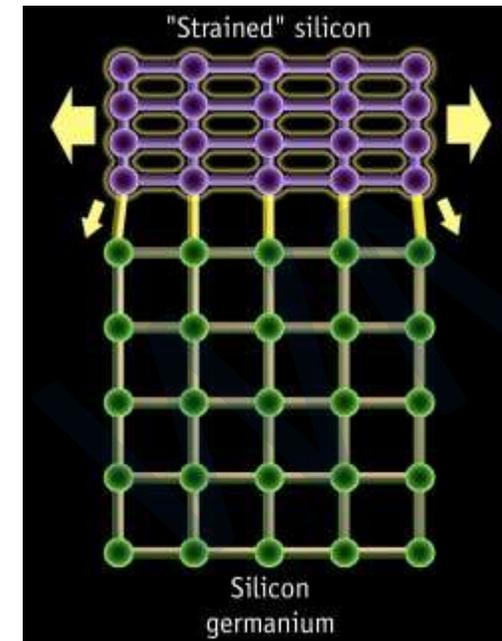
4.4 Epitaxiale Verspannungseffekte

- Heteroepitaxie von Materialien: z.B. Halbleiter, Kupratsupraleiter, ...
 - Gitterfehlanpassung führt zu Verspannungseffekten, trotzdem kohärentes Wachstum möglich



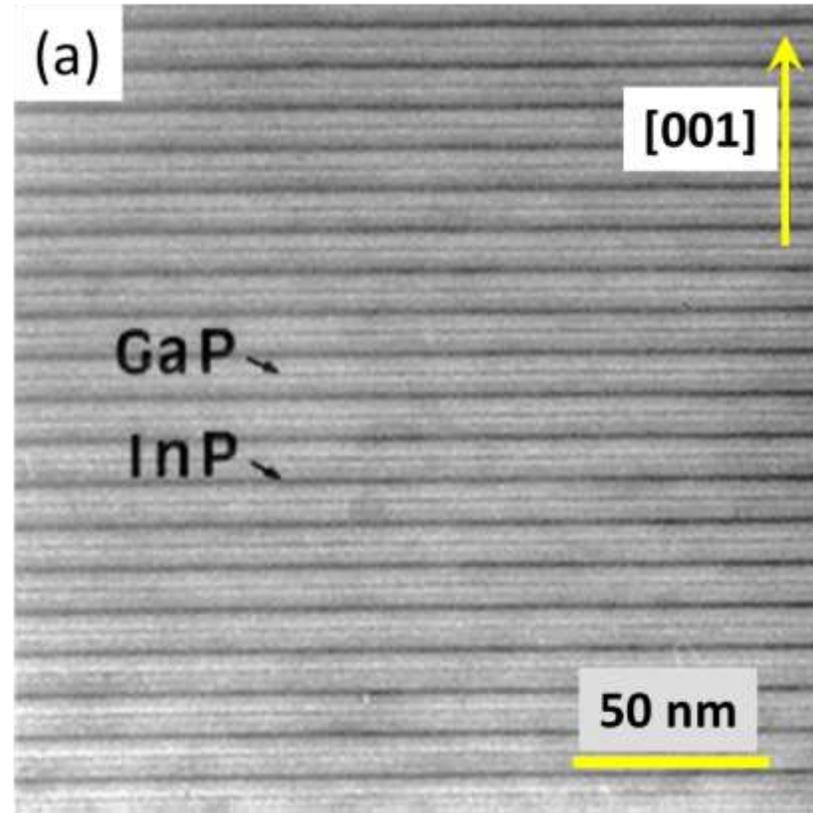
Gitterkonstanten und Energielücken von Halbleitermaterialien

farbig markierte Familien haben ähnliche Gitterkonstanten und können deshalb fast verspannungsfrei übereinander gewachsen werden

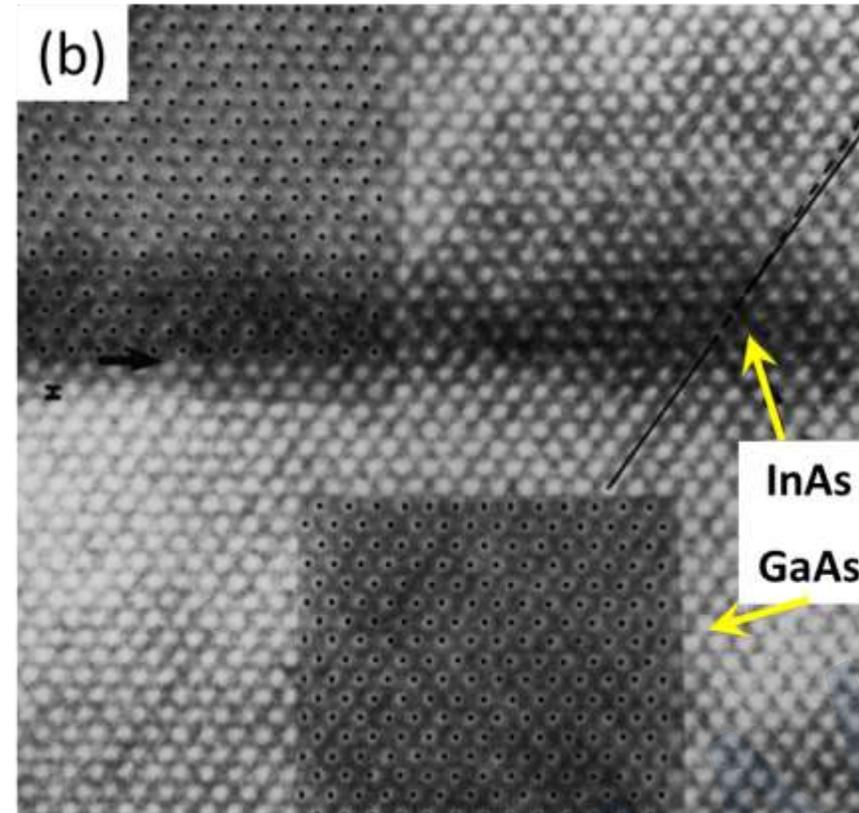


4.4 Epitaxiale Verspannungseffekte

- Beispiel: Verspannte GaP/InP- und InAs/GaAs-Heterostrukturen



stark verspannt



wenig verspannt

4.4 Epitaxiale Verspannungseffekte

- große Gitterfehlانpassung von Substrat führt zu Bildung von Stufenversetzungen ab kritischer Schichtdicke

Wann bilden sich Stufenversetzungen?

→ elast. Energiedichte in verspanntem Film > Energiedichte für Bildung von Stufenversetzungen

– Gitterfehlانpassung: $f = \frac{a_F - a_S}{a_S}$

a_F : Gitterkonstante von Film
 a_S : Gitterkonstante von Substrat

– elast. Energie/Fläche: $U_{el} = B e^2 d \propto d$

$e = \Delta a_F / a_F$, d = Filmdicke,
 B = Kompressionsmodul

– Energie/Länge von Stufenversetzung: $U_V \approx \frac{1}{2} D b [\ln(R/b) + 1]$

b = Burgers-Vektor,
 D = Funktion(Schermoduln)

→ Energie/Fläche $U_\gamma \approx \frac{2U_V}{s}$

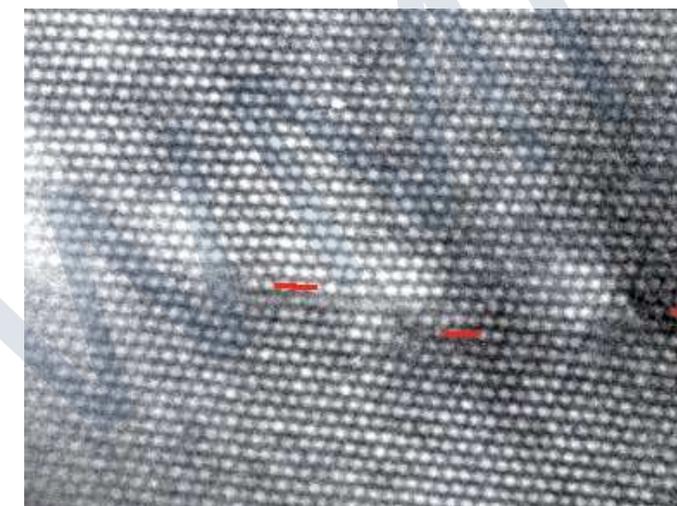
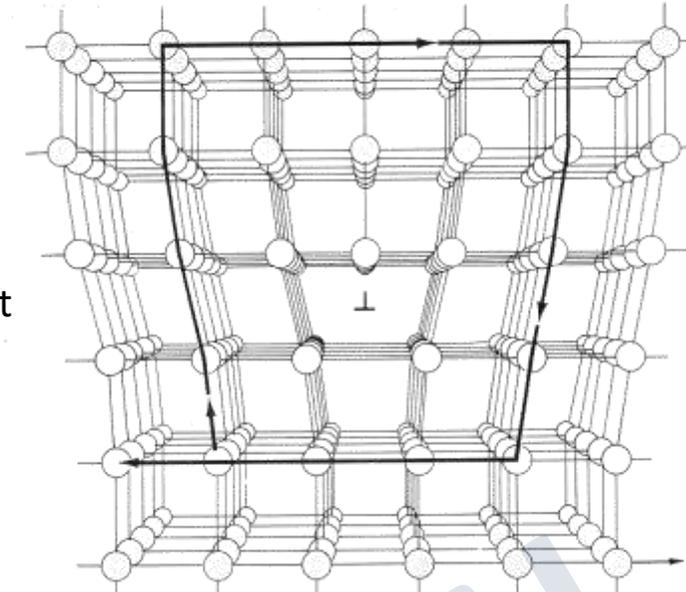
s = Abstand der Versetzungen
 (Faktor 2, da zwei zueinander senkrecht verlaufende Versetzungsarrays vorliegen)

– kritische Schichtdicke: $U_{el} = U_\gamma$

(Übergang von verspanntem zu relaxiertem Wachstum)

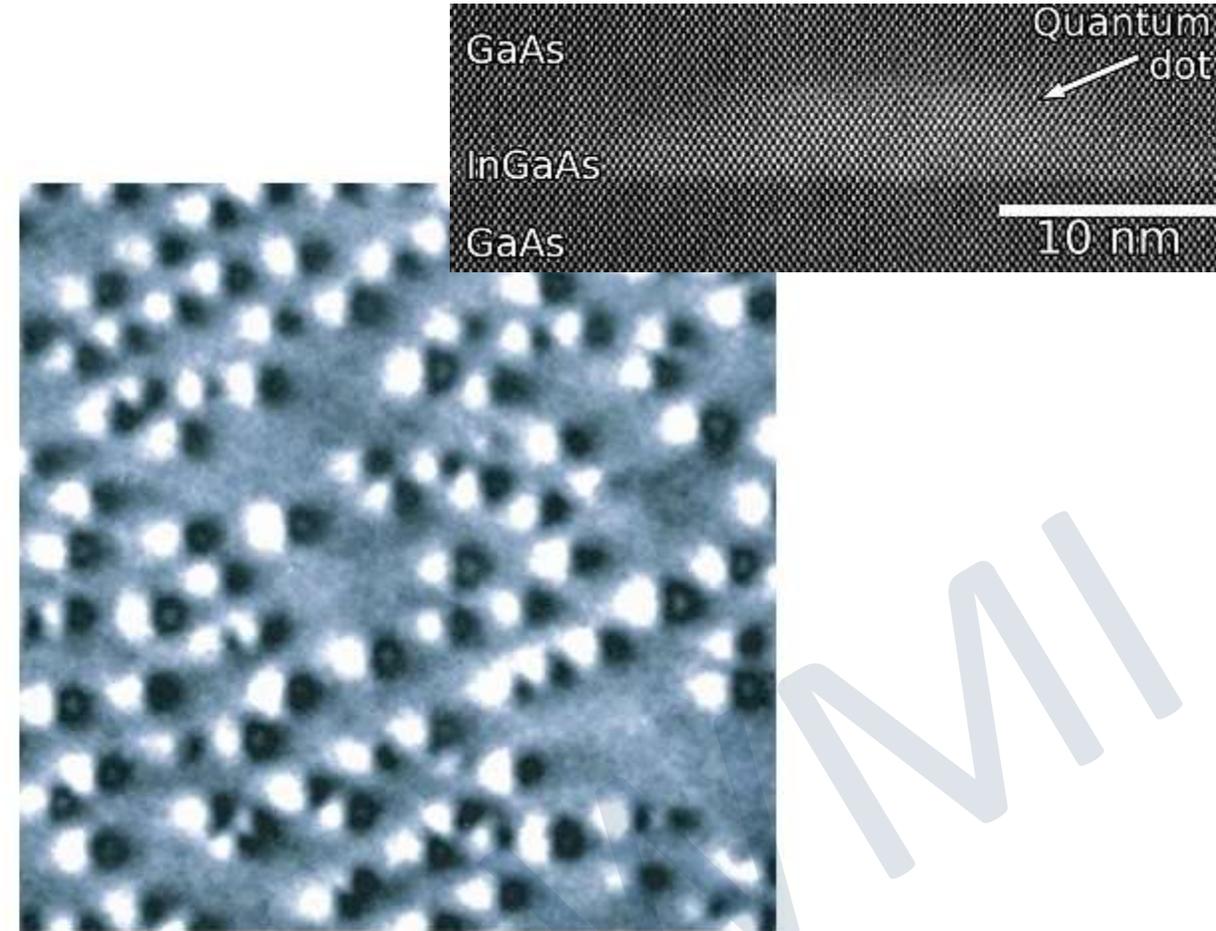
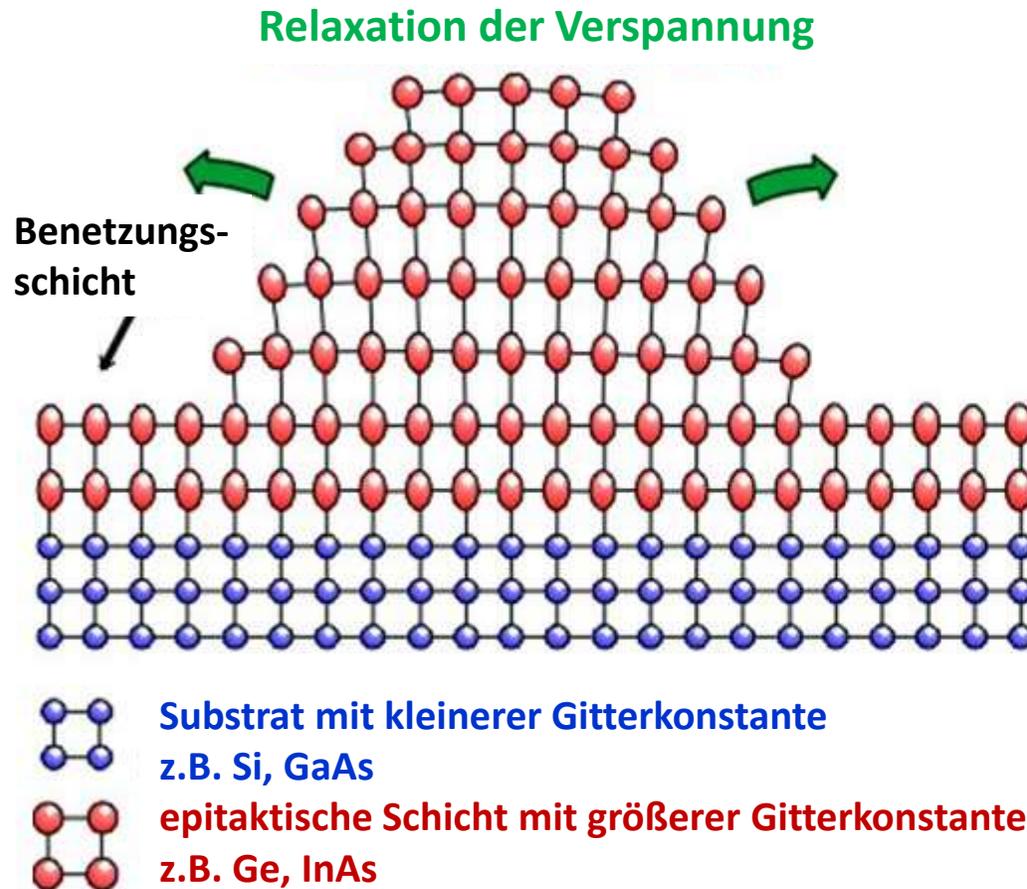
Rechnung liefert:

$$d_c \propto \frac{1}{B f}$$



4.4 Epitaxiale Verspannungseffekte

- Relaxation von Verspannungen durch Bildung von Inseln → selbst-assemblierte Quantenpunkte



Durchmesser der QP ≈ 20 nm
 Höhe der QP ≈ 8 nm

4.5 Technische Größen

- in der Technik werden oft polykristalline Materialien verwendet
 - ➔ sind in guter Näherung isotrop (können mit zwei elastischen Konstanten beschreiben werden)
 - ➔ einfachere Beschreibung der elastischen Eigenschaften durch „technische“ Größen

- | | | |
|------|---|---|
| i. | Elastizitätsmodul oder Young-Modul E : | $\sigma = E \frac{\Delta \ell}{\ell} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\Delta \ell / \ell}$ |
| ii. | Poissonzahl ν oder Querzahl μ : | $\nu = \frac{1}{\mu} = \frac{-\Delta d / d}{\Delta \ell / \ell}$ |
| iii. | Kompressionsmodul B : | $p = -\sigma = -B \frac{\Delta V}{V} \Rightarrow B = \frac{\sigma}{\Delta V / V}$ |
| iv. | Schub-, Scher- oder Gleitmodul G : | $\sigma = G \tan \alpha \simeq G \alpha \Rightarrow G = \sigma / \tan \alpha$ |

- nur zwei der vier technischen Größen sind voneinander unabhängig (ohne Rechnung)

$$\frac{1}{B} = \frac{3}{E} (1 - 2\nu) \qquad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

- technische Größen können natürlich durch die Elastizitätsmoduln ausgedrückt werden

Beispiel: Kubische Kristalle (ohne Herleitung):

$$E = \frac{(C_{11} - C_{12})(C_{11} + 2C_{12})}{C_{11} + C_{12}}$$

$$\mu = \frac{C_{12}}{C_{11} + C_{12}}$$

$$G = C_{44}$$

$$B = \frac{1}{3}(C_{11} + 2C_{12}) .$$

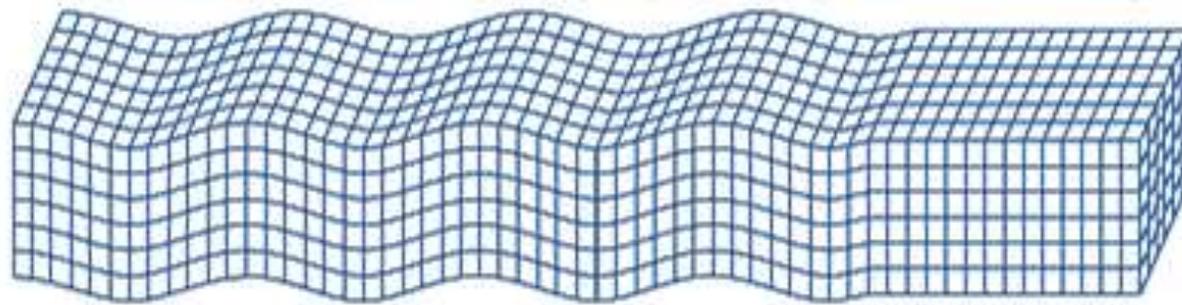
$$C_{44} = \frac{1}{S_{44}}$$

$$C_{11} - C_{12} = \frac{1}{S_{11} - S_{12}}$$

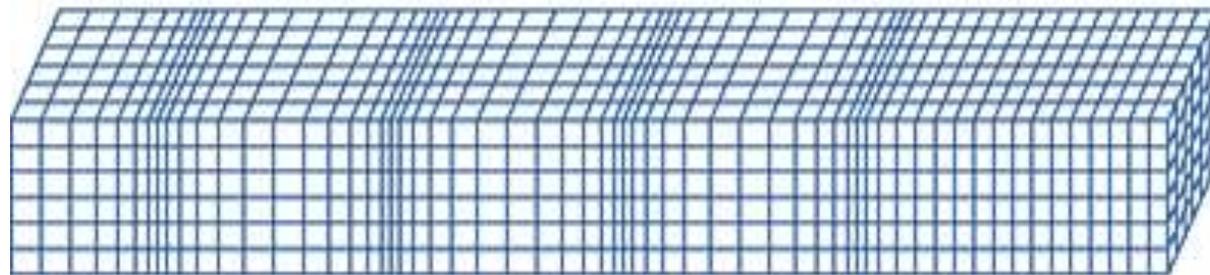
$$C_{11} + 2C_{12} = \frac{1}{S_{11} + 2S_{12}}$$

Zusammenhang zwischen Elastizitätsmoduln C und elastischen Konstanten S

4.6 Elastische Wellen

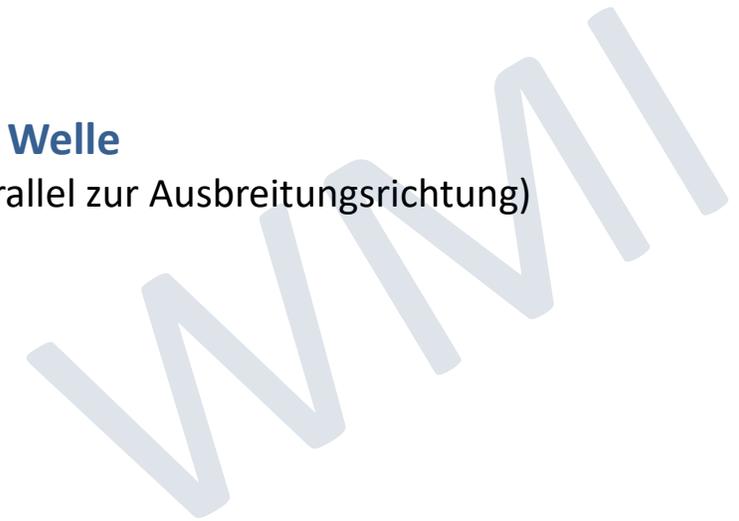


Ausbreitungsrichtung der Welle

Transversale Welle (Scherwelle)
 (Auslenkung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung)

Longitudinale Welle
 (Auslenkung parallel zur Ausbreitungsrichtung)



4.6 Elastische Wellen

- **Analogie zu Masse-Feder-System**

- Masse-Feder-System: Federkonstante k , Masse m , Schwingungsfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Differentialgleichung: $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x$

- Übertragen auf **1D elastischen Festkörper**:
 - kontinuierliches Medium
 - Angabe der Größen pro Längeneinheit:

relative Auslenkung

$$u = x/L$$

Masse

$$\tilde{\rho} \quad (\text{Einheit: Masse pro Längeneinheit})$$

Federkonstante pro Längeneinheit

$$C_{\text{eff}} \quad (\text{Einheit: Kraft pro Fläche wie Elastizitätsmodul})$$

→ **Differentialgleichung**

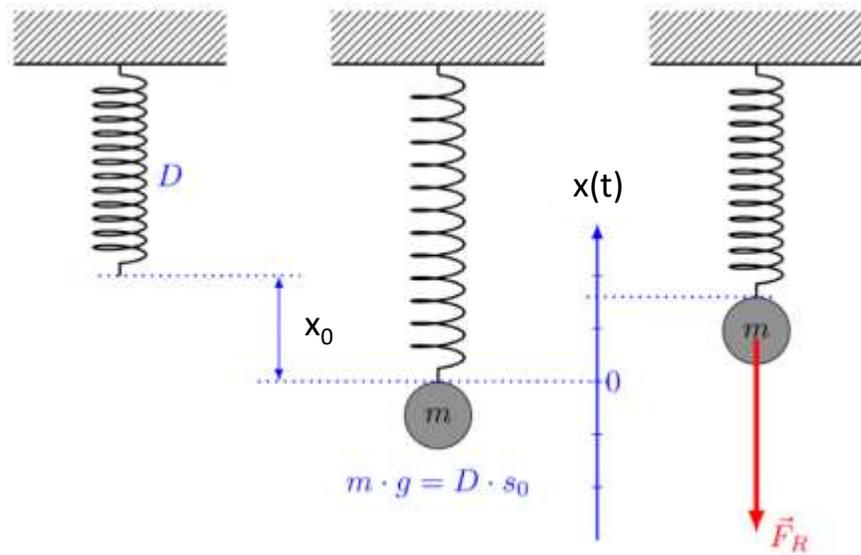
$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{C_{\text{eff}}}{\tilde{\rho}} u$$

→ **charakteristische Frequenz**

$$\omega = \sqrt{\frac{C_{\text{eff}}}{\tilde{\rho}}}$$

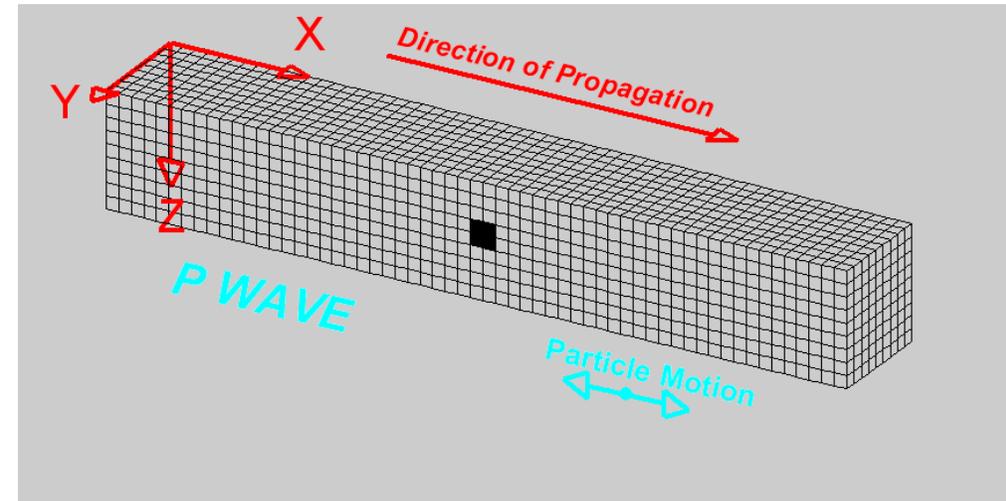
4.6 Elastische Wellen

- Gegenüberstellung: Masse-Feder-System \Leftrightarrow Welle in 1D elastischem Medium



$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



$$\ddot{u} + \frac{C_{\text{eff}}}{\tilde{\rho}}u = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{C_{\text{eff}}}{\tilde{\rho}}}$$

4.6 Elastische Wellen

- wir betrachten zunächst als einfachsten Fall ein isotropes Medium (1D)

Verschiebung s_x des infinitesimalen Würfels in x -Richtung durch Nettokraft ΔF_x

$$\Delta F_x = [\sigma_{xx}(x + \Delta x) - \sigma_{xx}(x)] \Delta y \Delta z = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

- Gleichsetzen mit Trägheitskraft $\rho \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2}$:

$$\rho \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \Rightarrow \rho \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}$$

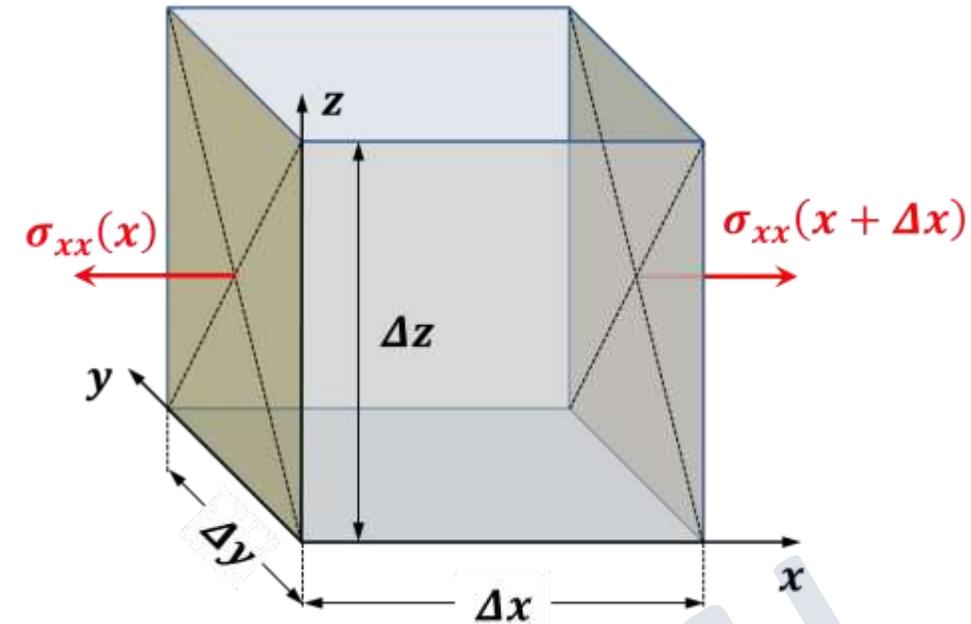
- wir verwenden $\sigma_{xx} = C_{11} e_{xx} = C_{11} \frac{\partial s_x}{\partial x}$ und erhalten:

$\Rightarrow \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = \frac{C_{11}}{\rho} \frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2}$
 \Rightarrow Elastizitätsmodul C_{11} entspricht einer Federkonstante pro Längeneinheit (Kraft/Fläche)

- anisotropes Medium (3D):

$$\frac{\partial^2 s_i}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j} = \frac{1}{\rho} \sum_{j,k,l} C_{ijkl} \frac{\partial^2 s_l}{\partial j \partial k} \quad i, j, k, l = x, y, z$$

(Trägheitskraft in i -Richtung wird auch durch Rückstellkräfte in andere Raumrichtungen bestimmt)



4.6.1 Elastische Wellen in kubischen Kristallen

- wir betrachten als einfachsten Fall einen kubischen Kristall

→ Elastizitätstensor hat nur 3 Komponenten: C_{11}, C_{12}, C_{44}

- wir benutzen $s_x = u, s_y = v, s_z = w$

$$\frac{\partial^2 s_i}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right)$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{C_{11}}{\rho} \frac{\partial e_{xx}}{\partial x} + \frac{C_{12}}{\rho} \left(\frac{\partial e_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zz}}{\partial x} \right) + \frac{2C_{44}}{\rho} \left(\frac{\partial e_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xz}}{\partial z} \right)$$

- Umformen durch Benutzung der Dehnungskoeffizienten e_{ij} :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{C_{11}}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{C_{44}}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{C_{12} + C_{44}}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right)$$

entsprechende Ausdrücke ergeben sich für $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ und $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= C_{11}e_1 + C_{12}e_2 + C_{13}e_3 + C_{14}e_4 + C_{15}e_5 + C_{16}e_6 \\ \sigma_2 &= C_{21}e_1 + C_{22}e_2 + C_{23}e_3 + C_{24}e_4 + C_{25}e_5 + C_{26}e_6 \\ \sigma_3 &= C_{31}e_1 + C_{32}e_2 + C_{33}e_3 + C_{34}e_4 + C_{35}e_5 + C_{36}e_6 \\ \sigma_4 &= C_{41}e_1 + C_{42}e_2 + C_{43}e_3 + C_{44}e_4 + C_{45}e_5 + C_{46}e_6 \\ \sigma_5 &= C_{51}e_1 + C_{52}e_2 + C_{53}e_3 + C_{54}e_4 + C_{55}e_5 + C_{56}e_6 \\ \sigma_6 &= C_{61}e_1 + C_{62}e_2 + C_{63}e_3 + C_{64}e_4 + C_{65}e_5 + C_{66}e_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & e_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & e_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} & e_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

4.6.1 Elastische Wellen in kubischen Kristallen

- gekoppeltes System von Differentialgleichungen

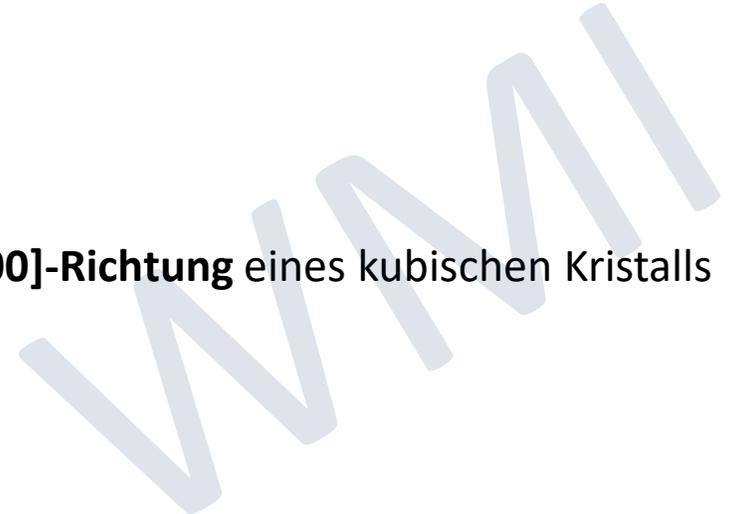
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{C_{11}}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{C_{44}}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{C_{12} + C_{44}}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{C_{11}}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{C_{44}}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{C_{12} + C_{44}}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{C_{11}}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{C_{44}}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{C_{12} + C_{44}}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right)$$

→ Lösung erfordert im allgemeinen Fall etwas Aufwand

→ wir betrachten zunächst nur den einfachen Fall der **Ausbreitung in [100]-Richtung** eines kubischen Kristalls



4.6.1 Elastische Wellen in kubischen Kristallen

- **longitudinale Welle in [100]-Richtung** (wir setzen diese mit x -Richtung gleich)

– Lösungsansatz: $u(x, t) = u_0 \exp[i(kx - \omega t)]$

– einsetzen in $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{C_{11}}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{C_{44}}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{C_{12} + C_{44}}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right)$ ergibt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{C_{11}}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow -\omega^2 u(x, t) = -\frac{C_{11}}{\rho} k^2 u(x, t)$$

$$\omega^2 = \frac{C_{11}}{\rho} k^2 \quad \text{oder} \quad \omega = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}} k$$

Dispersionsrelation für elastische Longitudinalwelle

- ➔ linearer Zusammenhang zwischen Frequenz und Wellenzahl
- ➔ Proportionalitätskonstante ist Ausbreitungsgeschwindigkeit v_{long} der longitudinalen Welle

longitudinale Schallgeschwindigkeit $v_{\text{long}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{2\pi} \lambda = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}$

(umso größer, je größer C_{11} und je kleiner ρ)

4.6.1 Elastische Wellen in kubischen Kristallen

- **transversale Welle in [100]-Richtung** (wir setzen diese mit x -Richtung gleich)

– Lösungsansatz: $v(x, t) = v_0 \exp[i(kx - \omega t)]$

– einsetzen in $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{C_{11}}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{C_{44}}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{C_{12} + C_{44}}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right)$ ergibt:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{C_{44}}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Rightarrow -\omega^2 v(x, t) = -\frac{C_{44}}{\rho} k^2 v(x, t)$$

$$\omega^2 = \frac{C_{44}}{\rho} k^2 \quad \text{oder} \quad \omega = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} k$$

Dispersionsrelation einer elastischen Transversalwelle

transversale Schallgeschwindigkeit $v_{\text{trans}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{2\pi} \lambda = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$

(umso größer, je größer C_{44} und je kleiner ρ)

- analoges Ergebnis für die Schwingung in w -Richtung

4.6.1 Elastische Wellen in kubischen Kristallen

- longitudinale und transversale Welle in [110]- oder [111]-Richtung

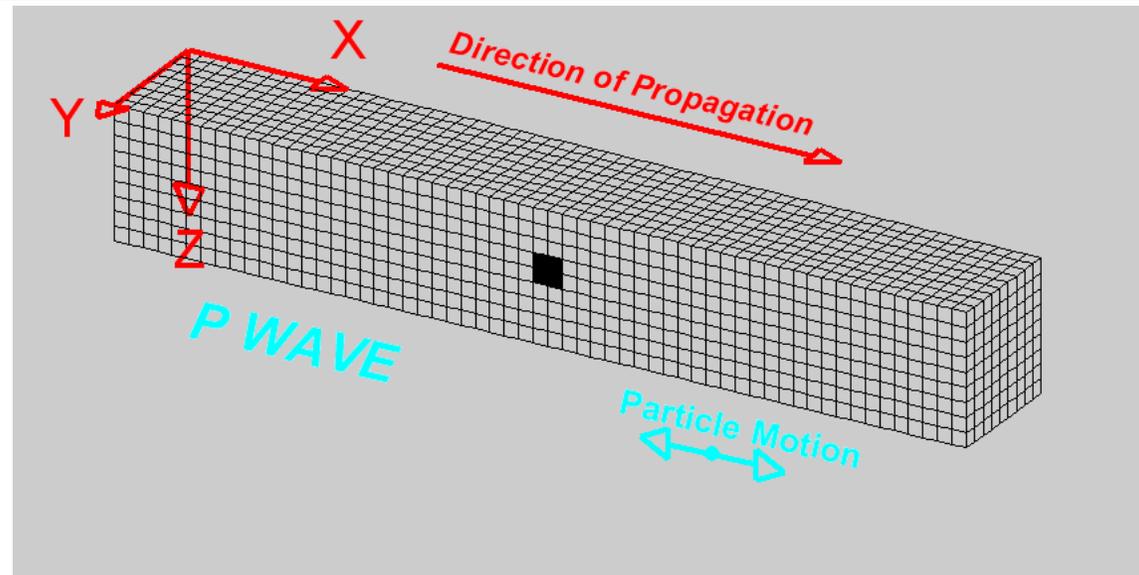
äquivalente Diskussion liefert Ausdrücke für Schallgeschwindigkeiten $\sqrt{C_{\text{eff}}/\rho}$

Richtung		[100]	[110]	[111]
longitudinal (Kompressionswelle)	L	C_{11}	$\frac{1}{2}(C_{11} + C_{12} + 2C_{44})$	$\frac{1}{3}(C_{11} + 2C_{12} + 4C_{44})$
transversal (Torsionswelle)	T_1	C_{44}	C_{44}	$\frac{1}{3}(C_{11} - C_{12} + C_{44})$
	T_2	C_{44}	$\frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$	$\frac{1}{3}(C_{11} - C_{12} + C_{44})$

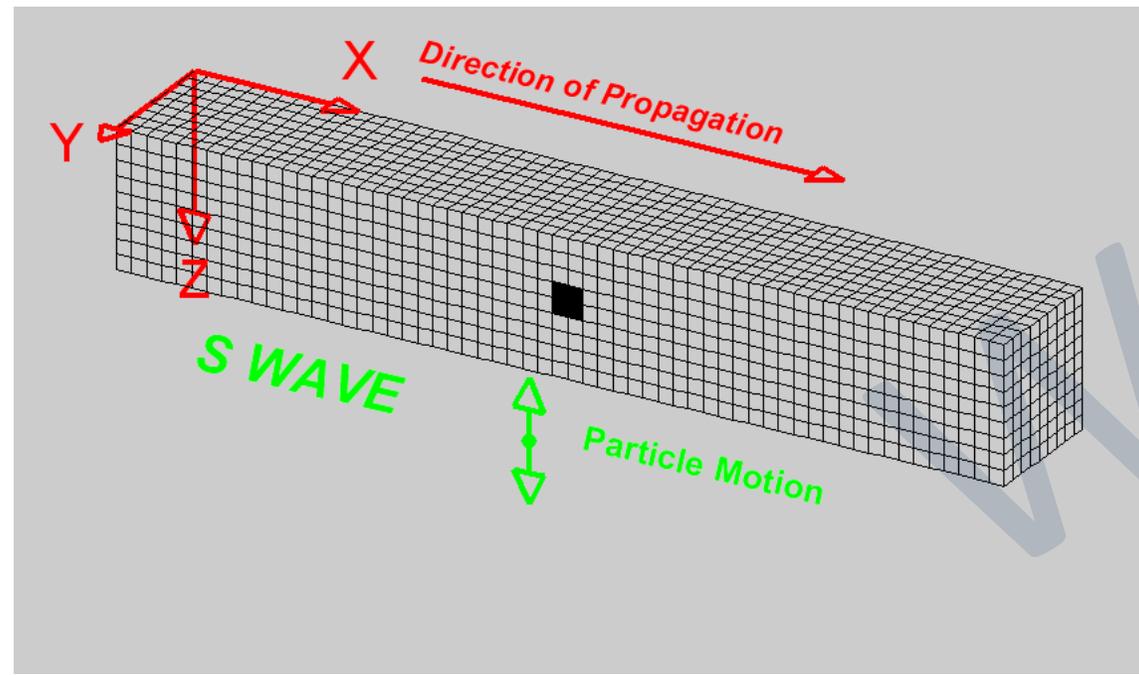
Effektive Elastizitätsmoduln für die Wellenausbreitung in [100], [110] und [111] Richtung in kubischen Medien

4.6.1 Elastische Wellen in kubischen Kristallen

Longitudinale Welle
(Kompressionswelle)



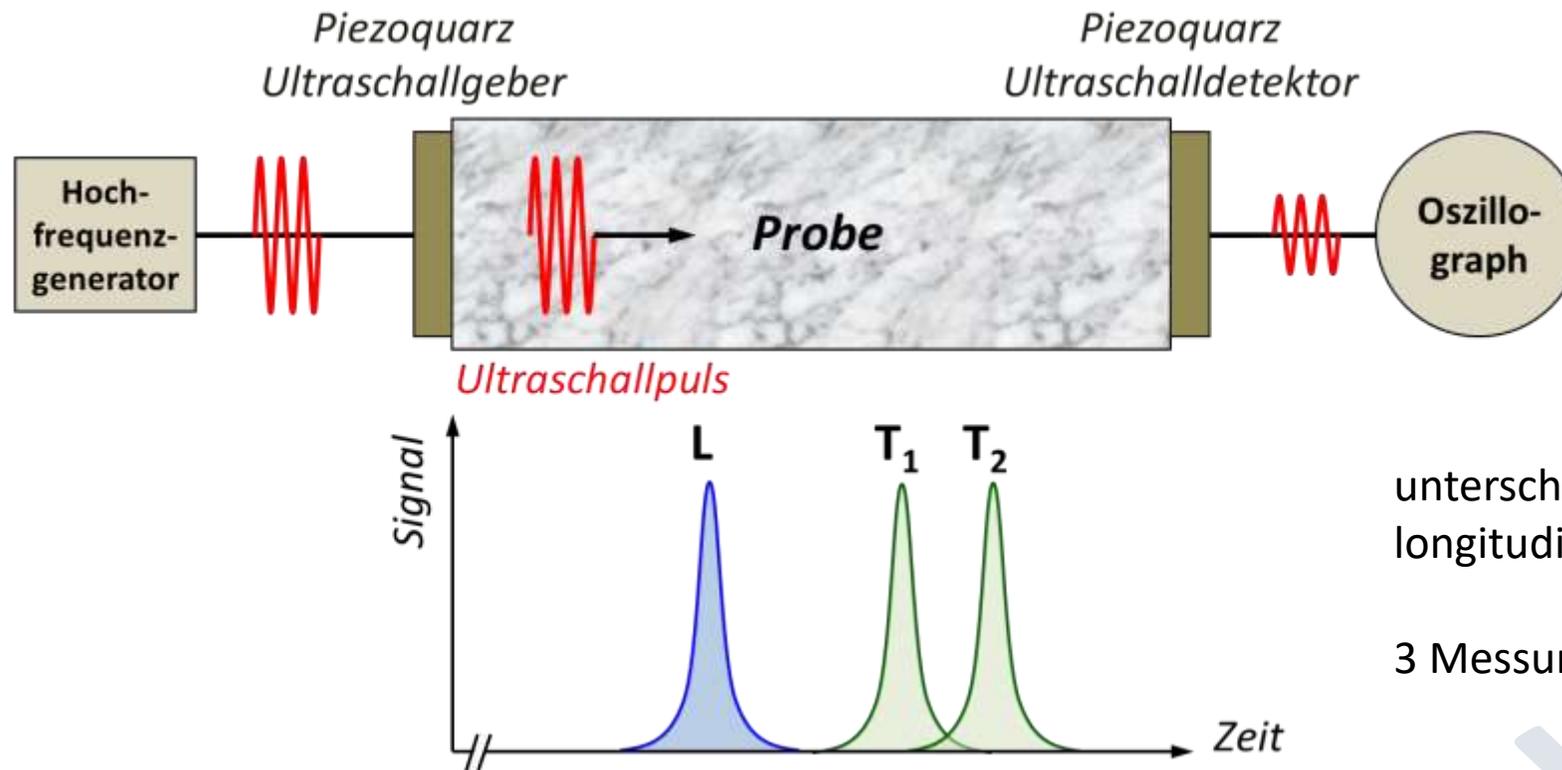
Transversale Welle
(Scherwelle)



4.6.2 Experimentelle Methoden

- Messung von Schallgeschwindigkeit v_s ergibt Information über die elastischen Konstanten eines Materials

häufige verwendete Methode: **Laufzeitmessung von Ultraschallimpulsen**



unterschiedliche Laufzeiten für
longitudinale und transversale Wellen

3 Messungen → **3 elastische Konstanten**
 C_{11}, C_{12}, C_{44}

- typische Pulslänge: μs
- Frequenzen: 10- 100 MHz- Bereich
- Wellenlängen: $\lambda = v_s/f \approx 10^3/10^6 \approx 10^{-3} \text{ m}$

4.6.2 Experimentelle Methoden

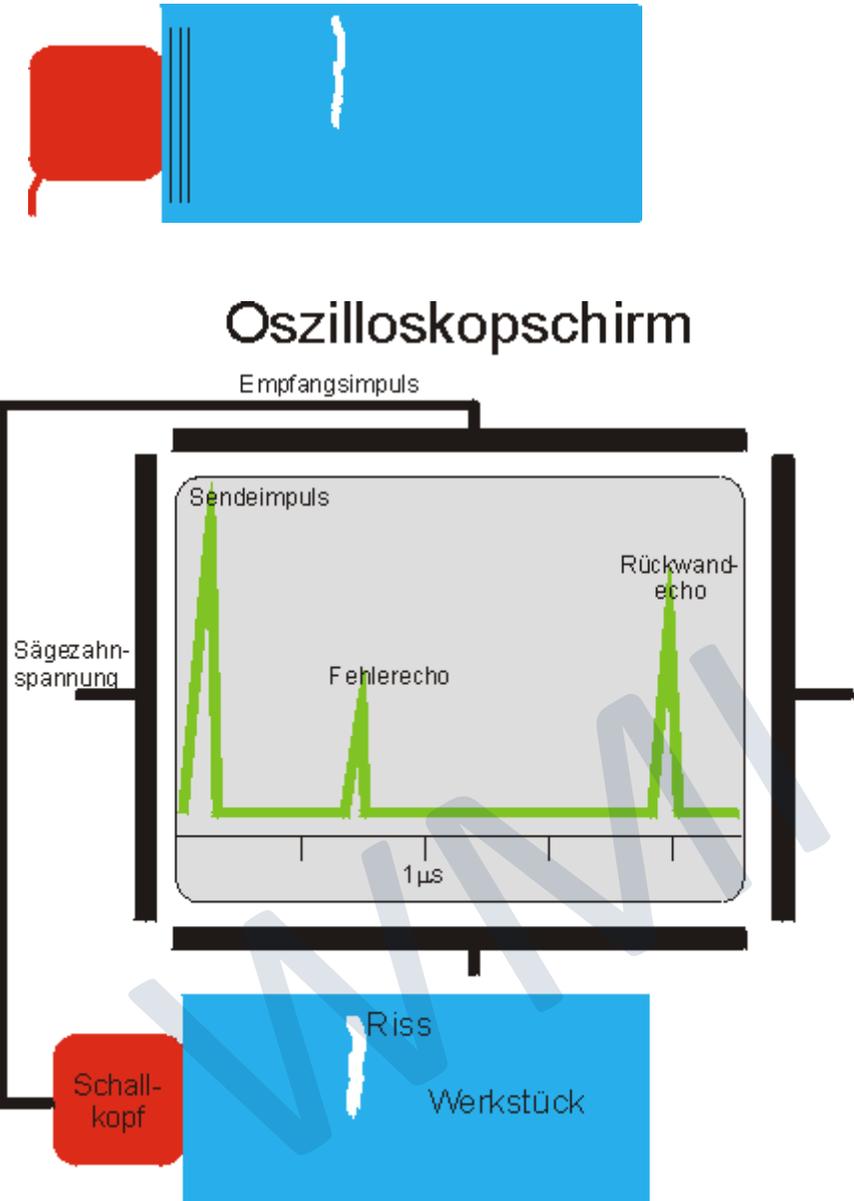
- Werte für C_{11} , C_{12} und C_{44} von einigen kubischen Kristallen

Kristall	C_{11} (10^{11} N/m ²)	C_{12} (10^{11} N/m ²)	C_{44} (10^{11} N/m ²)	ρ (g/cm ³)
W	5.233	2.045	1.607	19.371
Ta	2.609	1.574	0.818	16.696
Cu	1.684	1.214	0.754	9.018
Ag	1.240	0.937	0.461	10.635
Au	1.923	1.631	0.420	19.488
Al	1.068	0.607	0.282	2.733
Pb	0.495	0.423	0.149	11.599
Ni	2.508	1.500	1.235	8.968

“harte” Materialien besitzen hohe C_{ij} und damit hohe Schallgeschwindigkeiten

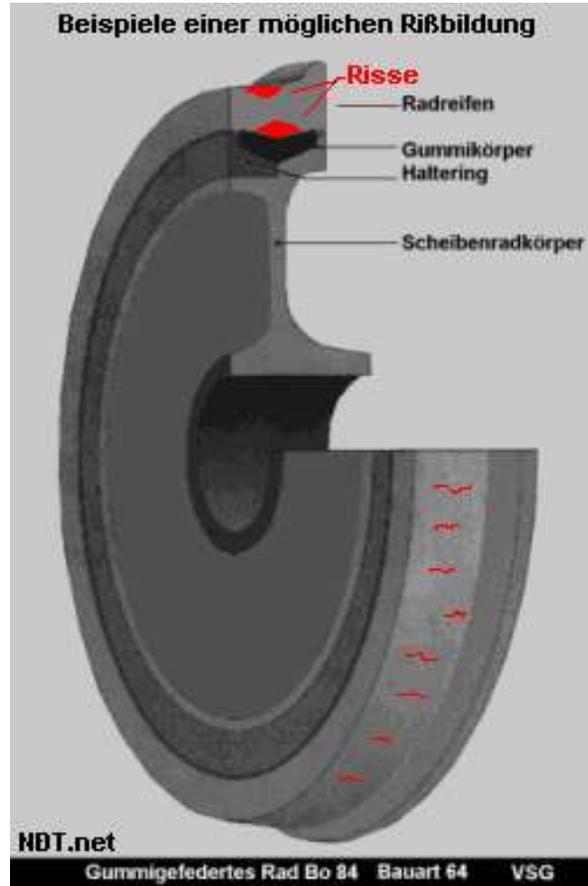
4.6.2 Experimentelle Methoden

- Anwendungsbeispiel:
Detektion von Rissen



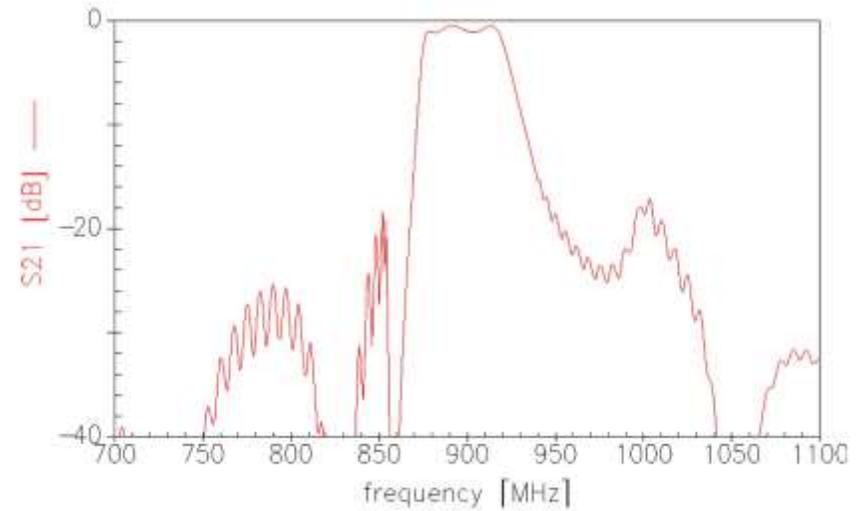
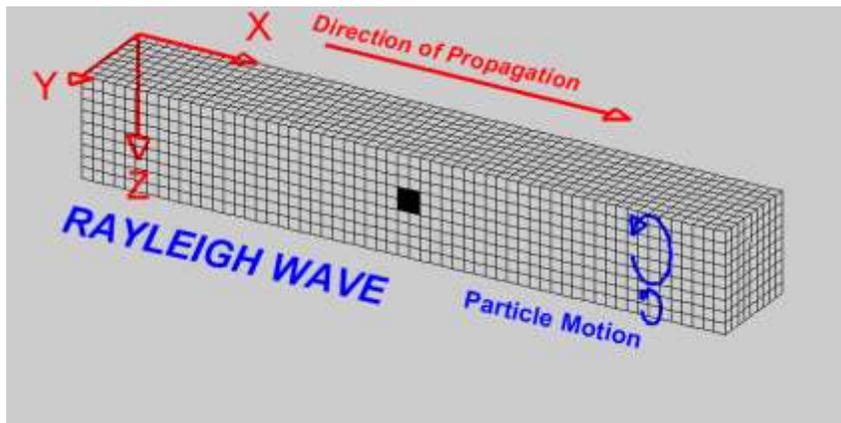
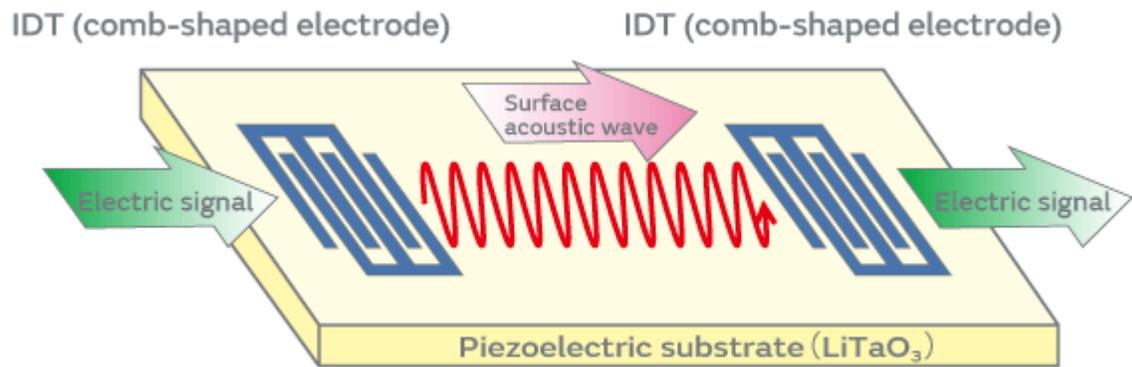
4.6.2 Experimentelle Methoden

- Anwendungsbeispiel:
Inspektion von Radreifen bei der DB



4.6.2 Experimentelle Methoden

- Anwendungsbeispiel:
akustische Oberflächenwellen



- epitaxiale Verspannung in Dünnschichtheterostrukturen

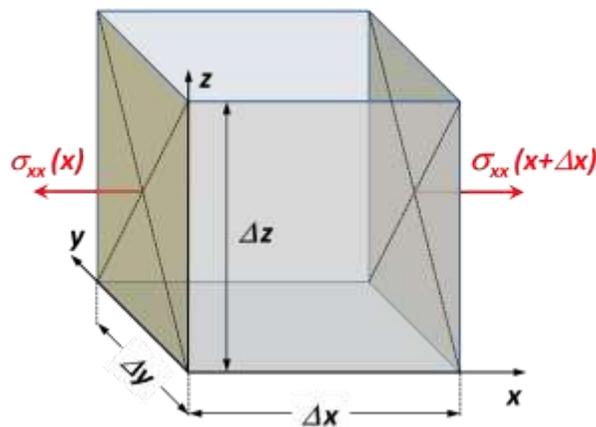
- technische Größen:
 - (i) Elastizitätsmodul oder **Young-Modul E**: $\sigma = E \frac{\Delta \ell}{\ell}$
 - (ii) **Poissonzahl v** oder **Querzahl μ** : $\nu = \frac{1}{\mu} = \frac{-\Delta d/d}{\Delta \ell/\ell}$
 - (iii) **Kompressionsmodul B**: $p = -\sigma = -B \frac{\Delta V}{V}$
 - (iv) **Schub-, Scher- oder Gleitmodul G**: $\sigma = G \tan \alpha \approx G \alpha$

- Wichtig: nur zwei der 4 Größen sind unabhängig voneinander $\rightarrow \frac{1}{B} = \frac{3}{E} (1 - 2\nu) \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$
- kubisches Kristallsystem: $E = \frac{(C_{11} - C_{12})(C_{11} + 2C_{12})}{C_{11} + C_{12}}, \quad \mu = \frac{C_{12}}{C_{11} + C_{12}}, \quad G = C_{44}, \quad B = \frac{1}{3}(C_{11} + 2C_{12})$

- **elastische Wellen (1D):**

\rightarrow Differentialgleichung:
 \rightarrow charakteristische Frequenz:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{C_{\text{eff}}}{\tilde{\rho}} u \quad \omega = \sqrt{\frac{C_{\text{eff}}}{\tilde{\rho}}}$$



$$\Delta F_x = [\sigma_{xx}(x + \Delta x) - \sigma_{xx}(x)] \Delta y \Delta z = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\rho \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \quad (1D\text{-Fall})$$

mit $\sigma_{xx} = C_{11} e_{xx} = C_{11} \frac{\partial s_x}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = \frac{C_{11}}{\rho} \frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2}$

- anisotropes Medium (3D-Fall) $\frac{\partial^2 s_i}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j} = \frac{1}{\rho} \sum_{j,k,l} C_{ijkl} \frac{\partial^2 s_l}{\partial j \partial k}$ (3D-Fall)

$i, j, k, l = x, y, z$

\rightarrow Verschiebung s_x des Würfels durch Nettokraft ΔF_x

Zusammenfassung: Teil 9, 01.12.2020/2

- **elastische Wellen in kubischen Kristallen:** $\frac{\partial^2 s_i}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j} = \frac{1}{\rho} \sum_{j,k,l} C_{ijkl} \frac{\partial^2 s_l}{\partial j \partial k}$ $i, j, k, l = x, y, z$ $s_x = u, s_y = v, s_z = w$

in Voigt-Notation

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= C_{11}e_{xx} + C_{12}e_{yy} + C_{13}e_{zz} + C_{14}e_{yz} + C_{15}e_{xz} + C_{16}e_{xy} \\ \sigma_{yy} &= C_{21}e_{xx} + C_{22}e_{yy} + C_{23}e_{zz} + C_{24}e_{yz} + C_{25}e_{xz} + C_{26}e_{xy} \\ \sigma_{zz} &= C_{31}e_{xx} + C_{32}e_{yy} + C_{33}e_{zz} + C_{34}e_{yz} + C_{35}e_{xz} + C_{36}e_{xy} \\ \sigma_{yz} &= C_{41}e_{xx} + C_{42}e_{yy} + C_{43}e_{zz} + C_{44}e_{yz} + C_{45}e_{xz} + C_{46}e_{xy} \\ \sigma_{zx} &= C_{51}e_{xx} + C_{52}e_{yy} + C_{53}e_{zz} + C_{54}e_{yz} + C_{55}e_{xz} + C_{56}e_{xy} \\ \sigma_{xy} &= C_{61}e_{xx} + C_{62}e_{yy} + C_{63}e_{zz} + C_{64}e_{yz} + C_{65}e_{xz} + C_{66}e_{xy} \end{aligned}$$

Beschreibung mit nur 3 Elastizitätsmoduln: C_{11}, C_{12}, C_{44}

(i) in [100] Richtung, **longitudinal**: Ansatz: $u(x, t) = u_0 \exp(i(kx - \omega t))$

$$\omega^2 \rho = C_{11} k^2 \quad \Rightarrow \quad v_{\text{long}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{2\pi} \lambda = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}$$

(ii) in [100] Richtung, **transversal**: Ansatz: $v(x, t) = v_0 \exp(i(kx - \omega t))$

$$\omega^2 \rho = C_{44} k^2 \quad \Rightarrow \quad v_{\text{trans}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{2\pi} \lambda = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$$

richtungsabhängige effektive „Elastizitätsmodul C_{eff} “

Richtung		[100]	[110]	[111]
longitudinal (Kompressionswelle)	L	C_{11}	$\frac{1}{2}(C_{11} + C_{12} + 2C_{44})$	$\frac{1}{3}(C_{11} + 2C_{12} + 4C_{44})$
transversal (Torsionswelle)	T ₁	C_{44}	C_{44}	$\frac{1}{3}(C_{11} - C_{12} + C_{44})$
	T ₂	C_{44}	$\frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$	$\frac{1}{3}(C_{11} - C_{12} + C_{44})$

- **Anwendung: Ultraschallanalyse von Materialien, z.B. Rissbildung**