

---

# Physik I

## Mechanik, Akustik, Wärme

---

**Vorlesungsskript zur Vorlesung im WS 1999/2000**

Prof. Dr. Rudolf Gross

und

Dr. Achim Marx

Walther-Meissner-Institut

Bayerische Akademie der Wissenschaften

und

Lehrstuhl für Technische Physik (E23)

Technische Universität München

Walther-Meissner-Strasse 8

D-85748 Garching

Rudolf.Gross@wmi.badw.de



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>9</b>
<b>Einleitung</b>	<b>11</b>
<b>1 Mechanik des Massenpunktes</b>	<b>17</b>
1.1 Vektoren . . . . .	18
1.1.1 Skalare und Vektoren . . . . .	18
1.1.2 Komponentendarstellung von Vektoren . . . . .	18
1.1.3 Koordinatensysteme . . . . .	18
1.1.4 Produkte von Vektoren . . . . .	18
1.2 Physikalische Größen . . . . .	19
1.2.1 Größen, Einheit und Dimension . . . . .	19
1.2.2 Länge und Längenmessung . . . . .	21
1.2.3 Flächen-, Raum- und Winkelmessungen . . . . .	28
1.2.4 Zeit und Zeitmessung . . . . .	29
1.2.5 Meßfehler . . . . .	34
1.2.6 Skalare und vektorielle Meßgrößen . . . . .	36
1.3 Kinematik des Massenpunktes . . . . .	37
1.3.1 Geschwindigkeit . . . . .	39
1.3.2 Beschleunigung . . . . .	46
1.4 Kraft und Masse . . . . .	57
1.4.1 Das Trägheitsgesetz – Lex Prima . . . . .	57
1.4.2 Realdefinition der Kraft . . . . .	58
1.4.3 Das Kraftgesetz von Newton – Lex Secunda . . . . .	59
1.4.4 Das Wechselwirkungsgesetz – Lex Tertia . . . . .	63
1.5 Gravitation und Schwerkraft . . . . .	66
1.5.1 Das Gravitationsgesetz . . . . .	66

1.5.2	Schwere und träge Masse . . . . .	71
1.5.3	Die Keplerschen Gesetze . . . . .	75
1.6	Anwendungsbeispiele . . . . .	79
1.6.1	Die Fallgesetze . . . . .	79
1.6.2	Die harmonische Schwingung . . . . .	81
1.6.3	Das mathematische Pendel . . . . .	86
1.6.4	Reibungskräfte . . . . .	88
1.7	Trägheitskräfte . . . . .	91
1.7.1	Die d'Alembertsche Gleichung . . . . .	91
1.7.2	Der Trägheitswiderstand . . . . .	93
1.7.3	Die Zentrifugalkraft . . . . .	94
1.8	Inertial- und Nichtinertialsysteme . . . . .	101
1.8.1	Inertialsysteme . . . . .	101
1.8.2	Nicht-Inertialsysteme . . . . .	105
1.8.3	Moderne Theorie der Gravitation . . . . .	121
1.9	Die Energie . . . . .	124
1.9.1	Arbeit und Leistung . . . . .	124
1.9.2	Kinetische und potentielle Energie – Der Energieerhaltungssatz . . . . .	127
1.9.3	Beispiele zur potentiellen Energie und Energieerhaltungssatz . . . . .	135
1.9.4	Das Prinzip der virtuellen Arbeit . . . . .	141
1.9.5	Was ist Energie ? . . . . .	145
1.10	Der Impuls . . . . .	146
1.10.1	Impuls und Kraftstoß . . . . .	146
1.10.2	Impulserhaltungssatz . . . . .	149
1.10.3	Massenmittelpunkt und Schwerpunktsatz . . . . .	155
1.10.4	Die Stoßgesetze . . . . .	161
1.10.5	Stoßvorgänge im Schwerpunktsystem . . . . .	169
1.10.6	Winkelverteilung und Wirkungsquerschnitt . . . . .	173
1.11	Der Drehimpuls . . . . .	176
1.11.1	Drehmoment und Drehimpuls . . . . .	176
1.11.2	Der Drehimpulserhaltungssatz . . . . .	181
1.11.3	Der Drehimpuls bezüglich des Massenmittelpunktes . . . . .	187
1.12	Zusammenfassung der Erhaltungssätze der Mechanik . . . . .	191

<b>2</b>	<b>Mechanik des Starren Körpers</b>	<b>193</b>
2.1	Der Starre Körper . . . . .	194
2.1.1	Bewegungsgleichungen und Freiheitsgrade . . . . .	194
2.1.2	Der Schwerpunkt . . . . .	199
2.2	Statik des starren Körpers . . . . .	202
2.2.1	Gleichgewicht . . . . .	202
2.2.2	Balkenwaage und Hebel . . . . .	204
2.3	Dynamik bei fester Drehachse . . . . .	207
2.3.1	Das Trägheitsmoment . . . . .	207
2.3.2	Arbeit und Energie . . . . .	211
2.3.3	Trägheitsmomente einfacher Körper . . . . .	215
2.3.4	Der Steinersche Satz . . . . .	217
2.3.5	Drehschwingungen . . . . .	220
2.3.6	Vergleich von Rotations- und Translationsbewegung . . . . .	224
2.4	Dynamik bei freier Drehachse . . . . .	225
2.4.1	Das Trägheitsellipsoid . . . . .	225
2.5	Kreiselprobleme . . . . .	235
2.5.1	Der kräftefreie symmetrische Kreisel . . . . .	235
2.5.2	Der schwere symmetrische Kreisel . . . . .	238
2.5.3	Der Kreiselkompaß . . . . .	241
2.6	Abrollbewegungen . . . . .	243
<b>3</b>	<b>Mechanik deformierbarer Körper</b>	<b>245</b>
3.1	Grundvorstellungen zur Materiestruktur . . . . .	246
3.2	Elastomechanik von Festkörpern . . . . .	251
3.2.1	Spannung und Dehnung . . . . .	251
3.2.2	Elastizitätsmodul . . . . .	254
3.2.3	Poisson- oder Querszahl . . . . .	254
3.2.4	Schub-, Scher- oder Gleitmodul . . . . .	255
3.2.5	Kompressionsmodul . . . . .	257
3.2.6	Biegung . . . . .	258
3.2.7	Plastische Deformation . . . . .	259
3.2.8	Materialparameter . . . . .	261
3.3	Hydro- und Aerostatik . . . . .	262

3.3.1	Kompression von Flüssigkeiten . . . . .	262
3.3.2	Stempeldruck . . . . .	262
3.3.3	Schweredruck, hydrostatischer Druck . . . . .	264
3.3.4	Aerostatik . . . . .	270
3.4	Oberflächenphänomene . . . . .	275
3.4.1	Oberflächenenergie, Oberflächenspannung . . . . .	275
3.4.2	Kapillarität, Kohäsion, Adhäsion . . . . .	279
3.5	Hydro- und Aerodynamik . . . . .	283
3.5.1	Hydrodynamische Bewegungsgleichungen . . . . .	284
3.5.2	Die Bernoullische Gleichung . . . . .	286
3.5.3	Anwendungsbeispiele der Bernoulli-Gleichung . . . . .	290
3.5.4	Umströmung fester Körper durch ideale Flüssigkeiten . . . . .	294
3.5.5	Dynamische Viskosität – Laminare und turbulente Strömung . . . . .	297
<b>4</b>	<b>Schwingungen und Wellen</b>	<b>309</b>
4.1	Schwingungen . . . . .	310
4.1.1	Lineare Systeme . . . . .	310
4.1.2	Überlagerung und Zerlegung von Schwingungen . . . . .	312
4.1.3	Gedämpfte Schwingung . . . . .	317
4.1.4	Erzwungene Schwingung . . . . .	319
4.1.5	Parametrische Verstärkung . . . . .	327
4.1.6	Gekoppelte Systeme . . . . .	328
4.2	Wellen . . . . .	332
4.2.1	Transversalwellen . . . . .	333
4.2.2	Longitudinalwellen . . . . .	337
4.2.3	Die Wellengleichung . . . . .	337
4.2.4	Reflexion, Brechung und Interferenz von Wellen . . . . .	340
4.2.5	Stehende Wellen . . . . .	343
4.2.6	Schallwellen . . . . .	345
4.2.7	Energie im Schallfeld . . . . .	348
4.2.8	Der Doppler-Effekt . . . . .	350

<b>5</b>	<b>Wärmelehre</b>	<b>355</b>
5.1	Temperatur und Gasgesetze . . . . .	356
5.1.1	Temperaturmessung . . . . .	356
5.1.2	Thermische Ausdehnung fester und flüssiger Körper . . . . .	361
5.1.3	Thermische Ausdehnung von Gasen . . . . .	365
5.1.4	Stoffmenge – Avogadro-Gesetz . . . . .	369
5.1.5	Allgemeine Zustandsgleichung von Gasen . . . . .	372
5.2	Die Hauptsätze der Wärmelehre . . . . .	377
5.2.1	Wärmemenge und Wärmekapazität . . . . .	377
5.2.2	Der 1. Hauptsatz der Wärmelehre . . . . .	381
5.2.3	Zustandsänderungen idealer Gase . . . . .	382
5.2.4	Reversible und irreversible Prozesse . . . . .	389
5.2.5	Carnotscher Kreisprozeß . . . . .	391
5.2.6	Der 2. Hauptsatz der Wärmelehre . . . . .	396
5.3	Phasenumwandlungen und Lösungen . . . . .	403
5.3.1	Änderung des Aggregatzustandes . . . . .	403
5.3.2	Lösungen . . . . .	419
5.4	Kinetische Gastheorie . . . . .	425
5.4.1	Gaskinetischer Druck . . . . .	425
5.4.2	Boltzmannsche Energieverteilung . . . . .	427
	<b>Anhang</b>	<b>433</b>
A	Literatur . . . . .	433





# Vorwort

Das vorliegende Skript ist der erste Teil einer Zusammenstellung des Stoffes der klassischen Experimentalphysik, wie er in den Vorlesungen Physik I bis III für Studierende der Physik und Mathematik angeboten wird.

Das Skript entstand aus der Vorlesung Physik I für Studierende der Physik und Mathematik, die von Prof. Gross erstmals im Wintersemester 1999/2000 an der Universität zu Köln gehalten wurde. Es beinhaltet nicht den Stoff der mathematischen Ergänzungsvorlesung. Die vorliegende Stoffzusammenstellung soll den Studienanfängern zum einen dabei helfen, den Vorlesungen konzentrierter folgen zu können, zum anderen soll sie einen Anhaltspunkt für die Stoffauswahl beim notwendigen Nacharbeiten der Vorlesungen anhand von den meist sehr umfangreichen klassischen Lehrbüchern geben.

Das Vorlesungsskript enthält ohne Zweifel noch einige Fehler. Der Autor ist für Hinweise auf solche Fehler dankbar.

München, Oktober 2001

R. Gross



# Einleitung

## Exakte Wissenschaften

Die Mathematik und die Naturwissenschaften zählt man zu den *exakten Wissenschaften*, d.h. zu den Wissenschaften, die nach exakten Kriterien vorgehen. Im Unterschied zur Mathematik sind die Naturwissenschaften aber dadurch ausgezeichnet, daß das Kriterium für den Wahrheitsgehalt einer Aussage ihre Nachprüfbarkeit in einem Experiment ist. Argumente wie der *gesunde Menschenverstand* oder die *mathematische Eleganz einer physikalischen Theorie* haben keinerlei Beweiskraft. Ein Experiment soll *objektiv* sein. Es soll vor allem unabhängig vom speziell gewählten Versuchsaufbau und vom das Experiment durchführenden Experimentator sein. Das heißt, ein Experiment muß *reproduzierbar* immer zum selben Ergebnis führen. Hierbei muß die Meßgenauigkeit der verwendeten Apparatur im Rahmen einer Fehlerrechnung bewertet werden.

Einer der ersten Naturforscher, der in der Neuzeit dieses Prinzip in Anlehnung an Aristoteles formuliert hat, war wohl Paracelsus:

**“Alein die erfarenheit bleibt in der warheit”**

Übersetzt man hierbei “erfarenheit” mit “Experiment”, so hat man eine gute Definition für das, was Naturwissenschaft ist.<sup>1</sup>

## Naturgesetze

Schon immer haben Menschen die Natur beobachtet und die beobachteten Erscheinungen gesammelt, geordnet und teilweise in künstlerischen Bildern und dichterischer Sprache beschrieben. Zunehmend bestand aber das Bedürfnis, die Naturerscheinungen (z.B. Jahreszeiten, Ebbe und Flut, Feuer, Frieren und Sieden von Wasser) nicht nur beschreiben, sondern auch verstehen zu können. Heute ist es ein zentrales Anliegen der Naturwissenschaften, die Gesetze, nach denen die vielfältigen Vorgänge in der Natur ablaufen, zu verstehen. Hierbei betrifft die zentrale Frage das “Wie” und nicht das “Warum” — letztere Frage fällt in den Bereich der Philosophie.

Hinter dem Wunsch des Menschen, die Naturerscheinungen zu verstehen und auf allgemein gültige Gesetze zurückzuführen, steht sowohl der reine Erkenntnisdrang (Grundlagenforschung) als auch die Hoffnung, sich die Natur dienstbar zu machen (anwendungsbezogene Forschung). Bei der Suche nach allgemeinen Regeln, nach denen Prozesse in der Natur ablaufen, muß man sich darüber im Klaren sein,

---

<sup>1</sup>Es sei hier angemerkt, daß eine Sache, die keine Wissenschaft ist, nicht notwendigerweise schlecht ist. Zum Beispiel ist die Liebe keine Wissenschaft (jedenfalls keine exakte). Wenn also gesagt wird, irgendeine Sache sei keine Wissenschaft, so bedeutet das nicht, daß diese Sache etwas Schlechtes ist, sondern daß es eben einfach keine Wissenschaft ist.

daß diese Regeln nicht die vollständige Wahrheit sind, sondern wahrscheinlich nur eine Näherung. Es ist anzunehmen, daß wir heute noch nicht alle Gesetze kennen und daß wir unseren Wissensstand von Jahr zu Jahr durch das Finden neuer Gesetze erweitern werden. Dabei kann es sich herausstellen, daß die heute bekannten Gesetze teilweise falsch sind. Damit stellt sich natürlich sofort die unumgängliche Frage, warum man heute Gesetzmäßigkeiten lernen soll, die sich eventuell in Zukunft als falsch herausstellen werden. Die Antwort darauf ist einfach: Wir lernen neue Gesetzmäßigkeiten nur durch die Erweiterung unseres heutigen Kenntnisstands.<sup>2</sup> Die Gesetze, die wir heute lernen, entsprechen unserem heutigen Wissensstand, d.h. sie erklären alle bis zum heutigen Tage beobachteten Naturvorgänge. Es ist trotzdem klar, daß sie vielleicht eines Tages aufgrund von neuen Beobachtungen revidiert werden müssen, da sie sich nur als Näherung für einen ganz bestimmten Fall herausgestellt haben und eigentlich falsch waren.<sup>3</sup>

Um anschaulich klarzumachen, wieso eine aus der Beobachtung gewonnene Gesetzmäßigkeit falsch sein kann, sei hier eine auf den Physiker **Feynmann** zurückgehende Anekdote angeführt:

*Angenommen es versucht jemand die Regeln des Schachspiels zu verstehen, indem er das Schachspiel sorgfältig beobachtet. Dabei stellt er z.B. fest, daß sich einer der Läufer nur auf weißen und der andere nur auf schwarzen Feldern bewegen darf. Der Beobachter schließt folgerichtig, daß die Läufer nur diagonal ziehen dürfen. Dieses Gesetz scheint auch nach langer Beobachtungszeit zu stimmen. Eines Tages stellt er aber fest, daß ein Spieler zwei Läufer auf schwarzen Feldern und keinen auf einem weißen Feld hat – wie ist das möglich? Es scheint nun, daß das vorher gefundene Gesetz falsch ist. Dies ist aber nicht so – der Beobachter hat vielmehr eine Regel noch gar nicht gekannt, nämlich die der Bauernumwandlung: Der Läufer auf dem weißen Feld war geschlagen worden, ein Bauer hat die gegnerische Grundlinie erreicht und wurde in einen Läufer auf einem schwarzen Feld umgewandelt. Der Grund war also nicht, daß das alte Gesetz "Läufer bewegt sich diagonal" falsch war, sondern daß es ein weiteres, für den Beobachter bis dahin unbekanntes Gesetz "Bauernumwandlung" gibt.*

Ein weiteres Grundprinzip der Naturwissenschaften ist die Suche nach der *Minimalzahl an Grundgesetzen*, mit denen man durch Kombinatorik alle beobachteten Naturphänomene erklären kann. Die Grundgesetze selbst werden nicht weiter hinterfragt und sind meist idealisierte Extrapolationen, die in der Natur von Störeinflüssen verdeckt werden. Diese Grundgesetze bilden als Axiomensystem<sup>4</sup> die Grundlage für die theoretische Durchdringung eines Wissensgebiets. Alle Folgerungen aus einem solchen Axiomensystem müssen experimentell überprüfbar sein.

Es wurde versucht, ähnlich wie die Mathematik auch die Physik auf einem Axiomensystem aufzubauen, was allerdings nicht gelang. Als Axiome der Physik kann man aber auch *Prinzipien* oder *Erhaltungssätze* ansehen. Diese stellen *heuristische* (d.h. erfundene) Sätze dar, die durch Erfahrung zu bestätigen sind. Wichtige Beispiele sind das *Energieprinzip* (= Erhaltung der Energie), das *Kausalitätsprinzip* (= jede Wirkung hat ihre Ursache), das Prinzip von *actio = reactio* (Wirkung = Gegenwirkung), das *Trägheitsprinzip*, das **Newtonsche** Grundgesetz der Dynamik oder das **Paulische** Prinzip.<sup>5</sup>

Als weitere Forderungen, die nicht beweisbar sind, gibt es die *Postulate*. Ihr Geltungsbereich ist eingeschränkt, wie z.B. die **Bohrschen** Postulate, die sich auf das **Bohrsche** Atommodell beziehen. Im

<sup>2</sup>Als Beispiel sei hier das Gesetz von der Konstanz der trägen Masse angeführt. Erst als man Massen auf sehr hohe Geschwindigkeiten beschleunigen konnte, hat man festgestellt, daß die träge Masse geschwindigkeitsabhängig ist. Dadurch ist also das alte Gesetz für hohe Geschwindigkeiten zwar falsch, es ist aber eine sehr gute Näherung für Geschwindigkeiten, die in unserem täglichen Leben vorkommen.

<sup>3</sup>So könnte es z.B. mit der heute angenommenen Stabilität des Protons sein. Es sind zur Zeit Experimente im Gange, den Zerfall des Protons nachzuweisen.

<sup>4</sup>Setzt man eine allgemein gültige Aussage als wahr voraus, ohne daß man sie beweisen kann, so spricht man von einem Axiom (griechisch = Forderung). Ein solches Axiom ist z.B. in der Geometrie, daß sich zwei parallele Geraden niemals schneiden. Man kann dies nicht beweisen.

<sup>5</sup>Es gibt aber auch Prinzipien, die nicht auf bestimmte Gebiete beschränkt sind und auch beweisbar sind, wie das **Archimedische** Prinzip oder das **Fermatsche** Prinzip.

allgemeinen wird die Gültigkeit von Postulaten durch die Ergebnisse der Theorie, deren Ergebnisse mit den Experimenten übereinstimmen, gerechtfertigt.

## Physik

Die *Physik* ist neben der Chemie, Biologie und den Geowissenschaften ein Teilgebiet der Naturwissenschaften. Es ist schwierig, eine prägnante Definition für "Physik" zu geben. Das griechische Wort "physis" bedeutet Ursprung, Naturordnung, das Geschaffene (Welt, Geschöpf). Das Wort Physik hat sich daraus entwickelt. Wir verstehen darunter die geistige, quantitative Erfassung aller Erscheinungen in der unbelebten Natur unter Zurückführung auf allgemein gültige Gesetzmäßigkeiten. In der Chemie werden dagegen die Zusammensetzung sowie Umsetzungen der Materie, die als Verbindung der chemischen Elemente verstanden wird, untersucht. In der Biologie werden Lebensvorgänge erforscht.

Wenn wir das Wort Physik für ein Lexikon definieren müßten, könnten wir folgendes angeben:

Physik ist die grundlegende Naturwissenschaft, die einerseits nach den wenigen, grundlegenden Prinzipien zur Beschreibung der unbelebten Natur sucht und andererseits die Naturerscheinungen dadurch verstehen will, daß sie diese als notwendige Konsequenz solcher Prinzipien nachweist. <sup>a</sup>

<sup>a</sup>Für die anderen Naturwissenschaften mag diese Definition überheblich klingen, sie ist aber eher als anspruchsvoll zu bezeichnen. Biologen und Chemiker dürfen zu recht darauf hinweisen, daß Physiker noch nicht einmal den Grashalm verstehen oder das Wasser. Das ist zur Zeit noch zu schwer.

Wenn wir das Wort Physik einem Nicht-Naturwissenschaftler erklären müssen, wäre vielleicht folgende Definition angebracht:

Physik ist, unsere Natur und Umgebung mit offenen Augen aufmerksam zu betrachten und nie aufzuhören, die Frage "Wie" zu stellen.

Die Physik ist sicherlich die fundamentalste unter den Naturwissenschaften. Die Physik hat immer einen wichtigen Einfluß auf die Entwicklung aller Naturwissenschaften (Chemie, Biologie, Geowissenschaften) gehabt, die auf den Gesetzen der Physik aufbauen. Die von den Menschen vorgenommene Unterteilung der verschiedenen naturwissenschaftlichen Disziplinen ist aber künstlich und fließend. Die Natur selbst kennt eine solche Aufteilung nicht, sie ist eine Einheit.<sup>6</sup>

## Naturwissenschaft und Technik

Die stürmische Entwicklung der Naturwissenschaften, insbesondere der Physik, hat in den letzten etwa 200 Jahren zu einer rasanten Entwicklung der Technik geführt. Umgekehrt hat aber auch die technische Entwicklung einen beträchtlichen Einfluß auf die naturwissenschaftliche Forschung gehabt, da viele Experimente nur durch den technischen Fortschritt ermöglicht wurden. Es besteht also eine ständige, befruchtende Wechselwirkung zwischen Naturwissenschaften und Technik. Während das Ziel der Naturwissenschaften es ist, die Ursachen und Zusammenhänge der Naturvorgänge zu erfassen und zu verstehen, ist das Ziel der Technik, die Anwendung dieses Kenntnisse (hoffentlich) zum Wohle der Menschheit.

<sup>6</sup>Eine schöne Darstellung der Beziehung der Physik zu den anderen Naturwissenschaften ist in **R. P. Feynman**, Vorlesungen über Physik, Band I, Oldenburg Verlag München gegeben.

## Methodik

Um die Naturvorgänge zu beobachten, zu verstehen, durch bestimmte Gesetzmäßigkeiten zu beschreiben und diese in geeigneten Experimenten zu überprüfen, bedarf es einer geeigneten Methodik. Vereinfacht läßt sich das methodische Vorgehen eines Naturwissenschaftlers wie folgt beschreiben:

	Tätigkeit	Ziel
1	Beobachten	Sammeln von Erfahrungen
2	Nachdenken über geeignetes Experiment	Auswahl eines Meßverfahrens
3	Durchführen des Experiments, messen	Verifizierung von Zusammenhängen
4	Diskussion von Meßfehlern	Belegen der Zuverlässigkeit des durchgeführten Experiments
5	Aufsuchen von Gesetzmäßigkeiten	Formulieren einer Hypothese
6	Nachprüfen der sich aus der Hypothese ergebenden Konsequenzen	Kontrolle der Hypothese
7	Mathematische Formulierung der Hypothese	Erhebung der Hypothese zum Gesetz
8	Zurückführen von mehreren Gesetzmäßigkeiten auf wenige Grundgesetze	Ableitung einer Minimalzahl von Grundgesetzen

Die Hilfsmittel des Naturwissenschaftlers sind einerseits *Meßgeräte*, die ständig weiterentwickelt werden, und andererseits das *kausal-logische Denken*. Dabei sind folgende 3 Prinzipien zu beachten:

1. Es muß eine Verknüpfung zwischen Ursache und Wirkung geben → Kausalitätsprinzip (siehe Abb. 1).

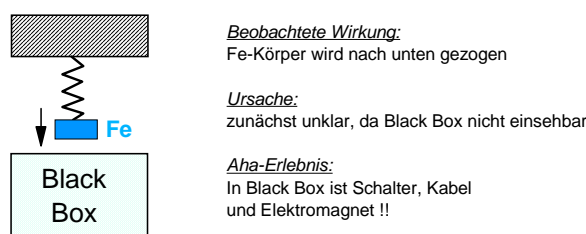


Abbildung 1: Beobachtung einer Wirkung — Suche nach der Ursache.

2. Voraussetzung für eine mathematische Beschreibung (Theorie) ist eine Idealisierung der Ergebnisse von Experiment und Beobachtung → Modellvorstellung.
3. Das Ergebnis des Experiments hängt von der Art des Experiments selbst ab – es liefert nur Teilwahrheiten (z.B. Teilchen-Welle Dualismus bei Licht).

Im Gegensatz zur Mathematik ist in den Naturwissenschaften das Experiment der Prüfstein allen Wissens, d.h. entscheidend für den Wahrheitsgehalt einer Gesetzmäßigkeit ist ihre Nachprüfbarkeit in einem Experiment. Theorien sind nur dann sinnvoll, solange sie im Einklang mit den Ergebnissen von Experimenten sind. Theorien, die durch Experimente nicht nachprüfbar sind, sind zunächst sinnlos (und können dem Bereich der Philosophie zugeordnet werden). Dem Experiment kommt in den Naturwissenschaften deshalb eine besondere Bedeutung zu. Experimente müssen ferner mit größter Sorgfalt durchgeführt werden, um zuverlässige Aussagen zu liefern.<sup>7</sup>

<sup>7</sup>Schlechte Experimente bzw. unvorsichtige und unkritische Experimentatoren haben immer wieder zu *falschen* Entdeckungen geführt. Für die jüngere Vergangenheit ist hierbei die Entdeckung einer 5. Naturkraft (Eötövs-Experiment), freier Quarks,

## Beobachtungsprozeß

Jede Beobachtung geht über unsere Sinnesorgane (Augen, Ohren, Nase, Tastsinn, etc.). Dabei spielt das Auge eine besonders große Rolle. Man führt deshalb möglichst viele Vorgänge auf sichtbare Veränderungen zurück (Ausschlag von Meßgerät, Oszilloskop, Computer-Bildschirm, etc.). Es ist deshalb sehr wichtig klarzustellen, inwieweit man sich auf das Sinnesorgan Auge verlassen kann. In Abbildung 2 wird gezeigt, wie sehr man *optischen Täuschungen* unterliegen kann.<sup>8</sup>

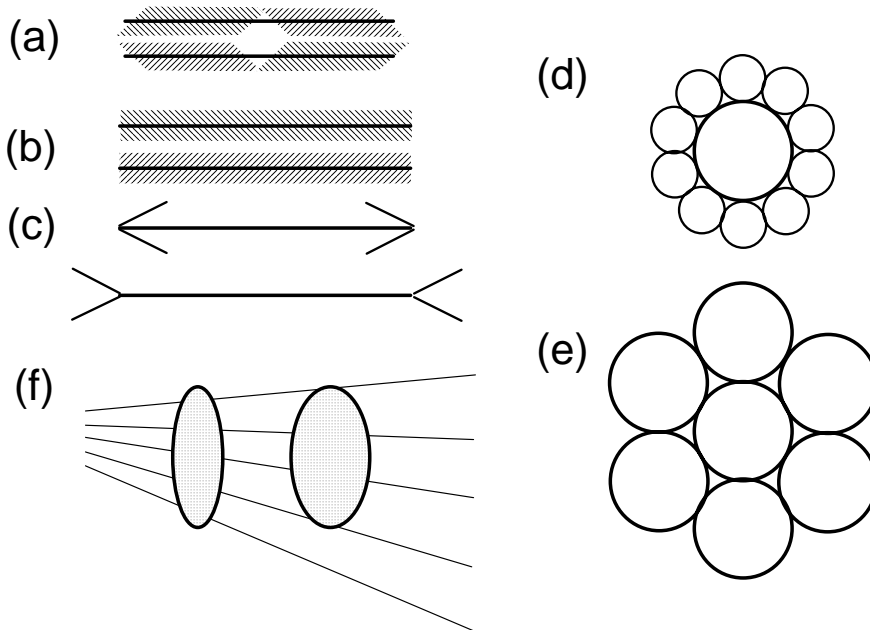


Abbildung 2: Optische Täuschungen: (a), (b) Die beiden Geraden sind parallel, erscheinen aber durch die schrägen Linien geknickt. (c) Die beiden Strecken sind gleichlang, erscheinen aber durch die Pfeile verschieden. (d), (e) Die beiden inneren Kreise haben den gleichen Durchmesser. (f) Die beiden Formen haben dieselbe Höhe.

Abbildung 2 und verschiedene Versuche zu optischen Täuschungen mahnen zur Vorsicht bei der Auswertung von Beobachtungen. Manchmal versagen unsere Sinnesorgane – wir nehmen die Wirklichkeit subjektiv und deshalb häufig falsch wahr. Wir brauchen also Beobachtungshilfsmittel – Meßgeräte – die objektiv sind und den Meßbereich unserer Sinnesorgane erweitern.

## Lernprozeß

Jene wagemutigen jungen Leute, die ein Studium der Physik beginnen und ein Skript für Anfangssemester haben ein gemeinsames Problem: Es besteht noch keine Übereinkunft, wie man sich verständigen der kalten Fusion oder von 14 keV Neutrinos zu nennen. Allerdings setzt sich die Wahrheit immer sehr schnell durch, da wichtige Entdeckungen sofort überprüft werden.

<sup>8</sup>Weitere Demonstrationsversuche zu optischen Täuschungen:

1. Exnersche Spirale
2. Machsche Streifen
3. Farbige Schatten
4. Schefflerscher Igel
5. Adrionsche Zwerge
6. Erkennung von Mustern

kann. Die Umgangssprache ist meist zu ungenau, die Vorkenntnisse aus der Schule sind zu verschieden und es bestehen unglaublich falsche Vorstellungen, worauf es beim Studium ankommt. Dieses Verständigungsproblem muß im Rahmen von Gesprächen und Diskussionen gelöst werden.

Ein großer Teil der StudienanfängerInnen wird sich auch auf einen neuen Lernstil umstellen müssen. In der Schule wurde der Lernstoff von den Lehrern quasi eingetrichtert, d.h. solange vorgekaut, bis er verstanden wurde. Der Dozent an einer Hochschule versteht sich dagegen als Vermittler von Fakten, er zeigt Zusammenhänge auf und versucht, Interesse am Lernstoff zu wecken. Dieser muß aber von den Hörern selbst anhand von Lehrbüchern und Skripten weiter aufgearbeitet werden, um ihn zu begreifen.



# Kapitel 1

## Mechanik des Massenpunktes

Die Mechanik ist die Lehre von der Bewegung und der Formänderung von Körpern unter dem Einfluß äußerer Kräfte. Die Aufgabe der Mechanik ist es, die Bewegung und Verformung von Körpern unter der Einwirkung von Kräften quantitativ zu beschreiben. Die Natur der Kräfte (Gravitations-, elektromagnetische oder Kernkräfte) ist hierbei von untergeordneter Bedeutung. In diesem Sinne ist die Mechanik grundlegend für die gesamte Physik.

In der Antike beschäftigten sich die Naturforscher wie **Aristoteles**, **Archimedes** oder **Ptolemäus** hauptsächlich mit mechanischen Problemen wie z.B. den Hebelgesetzen oder dem Auftrieb. Die antike Tradition wurde im frühen Mittelalter von den Arabern fortgesetzt und an die Neuzeit weitergegeben. Durch die systematische Erforschung der Naturgesetze durch Experimentieren beginnt in der Neuzeit die Entwicklung der modernen Physik. Stellvertretend für viele andere soll hier **Galilei** (1564 – 1642, Trägkeitsgesetz, Fallgesetze) genannt werden. Eine wesentliche Erkenntnis dieser Zeit war, daß die irdische und die Himmelsmechanik denselben Gesetzen genügen (**Kopernikus**, **Brahe**, **Kepler**). Die erste vollständige Formulierung der Grundgesetze der Mechanik (und der Gravitation) erfolgte dann durch **Newton** (1643 – 1727). Bis etwa Mitte des 19. Jahrhunderts war dann der formale Aufbau der klassischen theoretischen Mechanik zu einem vorläufigen Abschluß gekommen (**d'Alembert**, **Lagrange**, **Hamilton**). Anfang des 20. Jahrhunderts brachte die spezielle Relativitätstheorie von **Einstein** (1906) eine einschneidende Revision des Raum-Zeit-Begriffs. Schließlich wurde in den Arbeiten von **Bohr**, **Schrödinger**, **Heisenberg** u.a. gezeigt, daß die klassische Mechanik als Grenzfall einer allgemeineren Theorie, der Quantenmechanik, betrachtet werden kann.

Der in folgendem behandelte Stoff umfaßt die klassische **Newtonsche** Mechanik und ist in vier Hauptabschnitte gegliedert:

1. Mechanik des Massenpunktes
2. Mechanik des starren Körpers
3. Mechanik deformierbarer Medien
4. Schwingungen und Wellen

In der Mechanik des Massenpunktes sieht man von der räumlichen Ausdehnung eines Körpers, seiner Form, Orientierung oder Drehung um eine körpereigene Achse ab. Man idealisiert den Körper als massebehaftetes, punktförmiges Objekt. Dadurch reduziert sich die Mechanik auf die Beschreibung der Bewegung von Massepunkten unter dem Einfluß äußerer Kräfte. Diese in der Punktmechanik gemachte Näherung ist für die Beschreibung der Bewegung von Körpern auf Bahnen gut, solange der Krümmungsradius der Bahnen groß gegenüber dem Durchmesser der betrachteten Körper bleibt.

## **1.1 Vektoren**

Es soll in diesem Abschnitt zunächst der Begriff des Vektors eingeführt werden. Es wird sich später herausstellen, daß sich durch die Vektorschreibweise physikalische Gesetze in einer vom speziellen Bezugssystem unabhängigen Darstellung ausdrücken lassen, in der bestimmte Symmetrien bzw. Invarianzen der Naturgesetze zum Ausdruck kommen. Um den Gang der physikalischen Argumentation später nicht allzusehr zu unterbrechen, erscheint es sinnvoll, einige allgemeine Bemerkungen zum Vektorbegriff voranzustellen.

### **1.1.1 Skalare und Vektoren**

### **1.1.2 Komponentendarstellung von Vektoren**

### **1.1.3 Koordinatensysteme**

### **1.1.4 Produkte von Vektoren**

## 1.2 Physikalische Größen

### 1.2.1 Größen, Einheit und Dimension

#### Definition einer physikalischen Größe

Alle in der Natur vorkommenden Eigenschaften (z.B. Länge, Zeit, Temperatur, etc.), die durch eine physikalische Meßvorschrift erfaßt werden können, nennt man *physikalische Größen*. Das Prinzip jeder Messung ist der Vergleich der physikalischen Größe mit einer *Maßeinheit*, wobei ihr eine *Maßzahl* zugeordnet wird, d.h. das Ergebnis einer Messung ist die *Maßzahl*. Man kann dann eine physikalische Größe  $A$  quantitativ mit einer Größe  $B$  gleicher Qualität vergleichen.

Eine physikalische Größe wird folglich immer durch ein Produkt *Maßzahl* mal *Maßeinheit* charakterisiert:

$$\begin{array}{lcl} \text{Größe} & = & \text{Maßzahl} \times \text{Maßeinheit} \\ \text{symbolisch :} & A = & \{A\} \times [A] \\ \text{Beispiel :} & L = & 2,0 \text{ m} \end{array} \quad (1.2.1)$$

Unter  $[A]$  wird also die Maßeinheit der Größe  $A$  und unter  $\{A\}$  ihre Maßzahl verstanden. Man kann selbstverständlich verschiedene physikalische Größen gleicher Qualität addieren, auch dann wenn sie verschiedene Maßeinheiten besitzen (z.B. kann eine Länge von 1 km zu einer Länge von 1 Meile addiert werden). Man kann allerdings keine physikalischen Größen unterschiedlicher Qualität (z.B. Länge und Zeit oder Zeit und Temperatur) addieren.

Eine physikalische Größe ist generell unabhängig von der Wahl der benutzten Einheit. Die Länge eines Stabes ändert sich nicht, wenn sie mit verschiedenen Maßstäben bestimmt wird. Es kann also festgestellt werden, daß *eine physikalische Größe invariant gegenüber dem Wechsel der Einheit ist*. Aus diesem Grund werden physikalische Gesetze immer in Form von Größengleichungen (z.B. Geschwindigkeit = Länge pro Zeit) und nicht in Form von Zahlenwertgleichungen formuliert.

#### Internationales Einheitensystem

Im Jahre 1790 begann man (im Geist der französischen Revolution) solche Einheiten zu suchen, die nicht von der zufälligen Größe des menschlichen Körpers (z.B. Elle, Fuß) abhängen. Man wählte für die Längeneinheit den vierzigmillionsten Teil des durch Paris gehenden Erdmeridians. Da eine solche Messung schwer durchzuführen ist und lange dauert, hat man in Paris einen Maßstab dieser neuen Längeneinheit angefertigt, das sogenannte *Urmeter*.<sup>1</sup>

Seit langer Zeit bemüht man sich, für alle Arten von physikalischen Größen international gültige Einheiten festzulegen. Das Ziel ist dabei, mit möglichst wenigen *Grund-* oder *Basiseinheiten* auszukommen. Es hat vor der Festlegung der Einheiten zahlreiche Diskussionen über die Wahl der Basiseinheiten gegeben, deren Wahl nicht von grundlegender physikalischer Bedeutung ist. Bei der Festlegung der Einheiten haben vielmehr praktische Gründe den Ausschlag gegeben. Man hat darauf geachtet, daß die Basiseinheiten

<sup>1</sup>Später wurden 20 gleiche und verbesserte Exemplare aus einer beständigen Legierung von 90% Platin und 10% Iridium hergestellt und in die wichtigsten Länder verteilt. Eines blieb in Paris und wurde die international gültige Längeneinheit. Im Jahr 1875 ist ein Staatsvertrag (Internationale Meterkonvention) in Kraft getreten, welcher die Schaffung und einheitliche Verwendung von Maßeinheiten anstrebt. Dieser Vertrag gilt noch heute.

- allgemein bekannt,
- gut reproduzierbar,
- und bequem anwendbar sind.

Alle Größen der Mechanik lassen sich auf 3 Grundeinheiten zurückführen. Nimmt man die anderen Gebiete der Physik hinzu, so genügen insgesamt 7 Grundeinheiten. Diese Basiseinheiten dienen dann zur Bildung aller anderen sogenannten *abgeleiteten Einheiten*. Abgeleitete Einheiten sind z.B. [Geschwindigkeit] = [Länge]/[Zeit] oder [Fläche] = [Länge]<sup>2</sup> etc..

Auf der *Conférence Général des Poids et Mesures (CGPM)* im Jahre 1960 und 1971 wurde das *Internationale Einheitensystem (Système Internationale d'Unités: SI)* beschlossen. Es basiert auf folgenden Grundgrößen:<sup>2</sup>

Basisgröße und Zeichen		SI-Einheit und Zeichen	
Länge	$l$	Meter	m
Masse	$m$	Kilogramm	kg
Zeit	$t$	Sekunde	s
elektrische Stromstärke	$I$	Ampere	A
thermodynamische Temperatur	$T$	Kelvin	K
Lichtstärke	$\mathcal{I}$	Candela	cd
Stoffmenge	$\nu$	Mol	mol

Die Einführung einer Größe über eine Meßvorschrift nennt man *Realdefinition*. Dabei sind in der klassischen, nichtrelativistischen Mechanik Länge und Zeit unabhängige Größen, während in der relativistischen Mechanik Länge und Zeit miteinander verkoppelt sind.

In den einzelnen Gebieten der Physik ist es oft notwendig, Vielfache oder Teile der Grundeinheiten zu verwenden. Deshalb wurde für alle Einheiten eine dekadische Unterteilung eingeführt:

Zehnerpotenz	Vorsilbe	Kurzzeichen	Zehnerpotenz	Vorsilbe	Kurzzeichen
$10^{-1}$	Dezi	d	$10^1$	Deka	da
$10^{-2}$	Zenti	c	$10^2$	Hekto	h
$10^{-3}$	Milli	m	$10^3$	Kilo	k
$10^{-6}$	Mikro	$\mu$	$10^6$	Mega	M
$10^{-9}$	Nano	n	$10^9$	Giga	G
$10^{-12}$	Piko	p	$10^{12}$	Tera	T
$10^{-15}$	Femto	f	$10^{15}$	Peta	P
$10^{-18}$	Atto	a	$10^{18}$	Exa	E

Es ist oft zweckmäßig, statt einer bestimmten Einheit allgemeiner die *Dimension* einer physikalischen Größe anzugeben. Mit dem Begriff *Dimension*<sup>3</sup> charakterisiert man eine physikalische Größe, indem

<sup>2</sup>Das auf den Grundgrößen Länge, Masse, Zeit und elektrische Stromstärke bestehende Einheitensystem nennt man **MKSA**-System (**M**eter, **K**ilogramm, **S**ekunde, **A**mpere), Physiker benutzen häufig das heute nicht mehr zulässige **cgs**-System (**C**entimeter, **G**ramm, **S**ekunde)

<sup>3</sup>Unglücklicherweise wird der Ausdruck Dimension auch für den Begriff "Ausmaß, Abmessung" benutzt.

man unter Weglassung aller Maßzahlen und Einheiten angibt, wie sich die betreffende Größe aus den Grundgrößen zusammensetzt. Zum Beispiel kann man die Geschwindigkeit in km/h, m/s, cm/s etc. angeben. Gibt man nun die Dimension der Geschwindigkeit an, so ist diese Länge  $l$  dividiert durch Zeit  $t$  und man schreibt hierfür kurz:

$$\dim v = \frac{l}{t} . \quad (1.2.2)$$

Eine solche *Dimensionsgleichung* ist sehr vorteilhaft. Sie führt zur Übersichtlichkeit und man kann die Richtigkeit von Gleichungen leicht anhand solcher Dimensionsgleichungen prüfen. Es gibt auch Größen, die keine Dimension besitzen, z.B. sogenannte Verhältnisgrößen (Verhältnis zweier Längen, Geschwindigkeiten etc.). Man sagt hier, die Größe habe die *Dimension "Eins"*.

### 1.2.2 Länge und Längenmessung

Bei einer Längenmessung bestimmt man den Abstand  $l$  zwischen zwei Raumpunkten  $A$  und  $B$  oder allgemeiner die Bogenlänge einer Raumkurve (z.B. den Umfang eines Kreises). Als Einheit dient das willkürlich im 18. Jahrhundert eingeführte Meter. Es entsprach ursprünglich dem  $10^{-7}$ -ten Teil der Entfernung zwischen Pol und Äquator auf der Erdoberfläche. Diese Einheit wurde als das Meter

$$[l] := 1 \text{ Meter} := 1 \text{ m} \quad (1.2.3)$$

definiert, als Urmeter aus einer chemisch und physikalisch resistenten Platin-Iridium-Legierung gefertigt und unter festgelegten Umweltbedingungen ( $0^\circ\text{C}$ , 760 Torr) in Paris aufbewahrt.

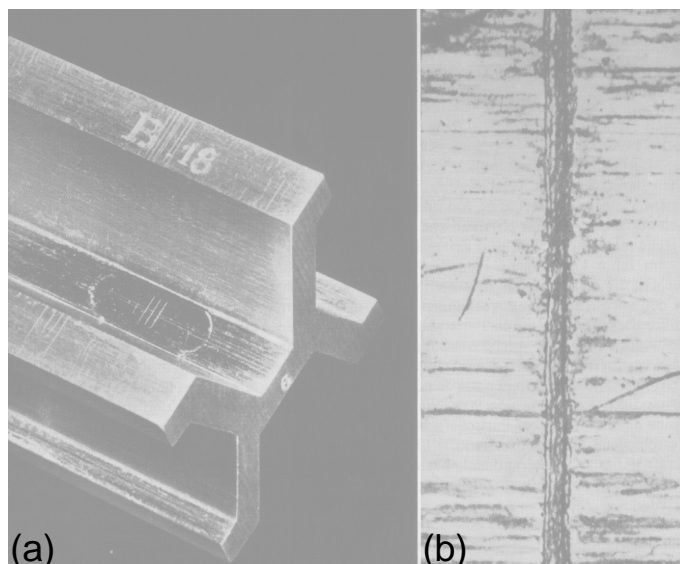


Abbildung 1.1: (a) Das Ende eines der 30 gleichen Urmeterstäbe. Man erkennt drei feine Strichmarken, von denen die mittlere das Ende des Meters markiert. (b) Eine der beiden entscheidenden Strichmarken auf einem Urmeterstab. Die Aufnahme zeigt die Ungenauigkeit der Ablesung durch die Breite und Unregelmäßigkeit der Strichmarke.

Das Urmeter hatte allerdings den Nachteil, daß es nicht der unbelebten Natur entnommen wurde und bei einer Naturkatastrophe zerstört werden konnte. Aus diesem Grund wurde bereits früh von **Babinet** (1827) und **Maxwell** (1870) vorgeschlagen, die Wellenlänge des Lichts einer bestimmten Farbe als

Längeneinheit zu verwenden. Außerdem ergaben genaue Messungen am Urmeter, daß trotz sorgfältiger Aufbewahrung ständig umweltbedingte Längenänderungen auftraten. Ferner waren die auf dem Urmeter angebrachten Ritzmarken zu ungenau. Deshalb wurde 1960 diese Definition des Meters aufgegeben und durch einen atomaren Standard ersetzt, der sich sehr viel genauer reproduzieren läßt. Man nahm als Maß die Wellenlänge des Lichtes, welches durch das angeregte Edelgasisotop  $^{86}_{36}\text{Krypton}$  beim Übergang vom Atomzustand  $5d_5$  nach  $2p_{10}$  ins Vakuum ausgesandt wird. Es ergibt sich somit die Definition

$$[l] := 1 \text{ Meter} := 1\,650\,763.73 \times \lambda_{\text{vac}}(5d_5 - 2p_{10}) . \quad (1.2.4)$$

Bei der einfachsten Längenmessung vergleicht man direkt das Objekt mit einem passend dezimal unterteilten Maßstab. Technisch verfeinerte mechanische Maßstäbe sind die Schieblehre oder die Mikrometerschraube (siehe Abb. 1.6). Zum experimentellen Anschluß der Länge eines Meters an die Wellenlänge der Kryptonlinie dient das *Michelson-Interferometer*. Mit Hilfe dieser interferometrischen Methode kann das Meter mit einer Genauigkeit von  $10^{-8}$  überall auf der Welt reproduziert werden.

### Michelson-Interferometer:

Der Lichtstrahl einer Lichtquelle LQ trifft unter einem Winkel von  $45^\circ$  auf einen halbdurchlässigen Spiegel, der als Strahlteiler ST wirkt (siehe Abb. 1.2). Das reflektierte Licht wird vom Spiegel SP I, das durchgelassene vom Spiegel SP II reflektiert. Beide Strahlen werden nach nochmaligem Passieren bzw. nochmaliger Reflektion am Strahlteiler ST am Beobachtungspunkt D zur Überlagerung (Interferenz) gebracht. Die relative Phasenlage der beiden Lichtschwingungen im Punkt D bestimmt, ob es zu einer gegenseitigen Verstärkung oder Abschwächung der elektromagnetischen Wellen kommt. Durch Verschieben des Spiegels SP II kann die relative Phasenlage variiert werden. Verschiebt man SP II gerade um das Stück  $l = \lambda/2$  (oder ein ganzzahliges Vielfaches  $n$  davon, wobei  $\lambda$  die Wellenlänge der Strahlung sein soll), so muß der Lichtstrahl beim Hin- und Rückweg die Wegstrecke  $2l = \lambda$  (oder  $2l = n\lambda$ ) zusätzlich durchlaufen und man erhält wieder das ursprüngliche Interferenzmuster. Durch einfaches Abzählen der an D durchlaufenen Interferenzmaxima (oder Minima) kann damit die Wegstrecke  $l$  in einer bestimmten Anzahl  $n$  von Wellenlängen ausgedrückt werden. Bei bekannter Wellenlänge (in Metern) kann somit die Wegstrecke  $l$  (in Metern) gemessen werden. Die Meterdefinition in Gl.(1.2.4) entspricht genau der Festlegung einer Wellenlänge in Metern für eine definierte Lichtstrahlung.

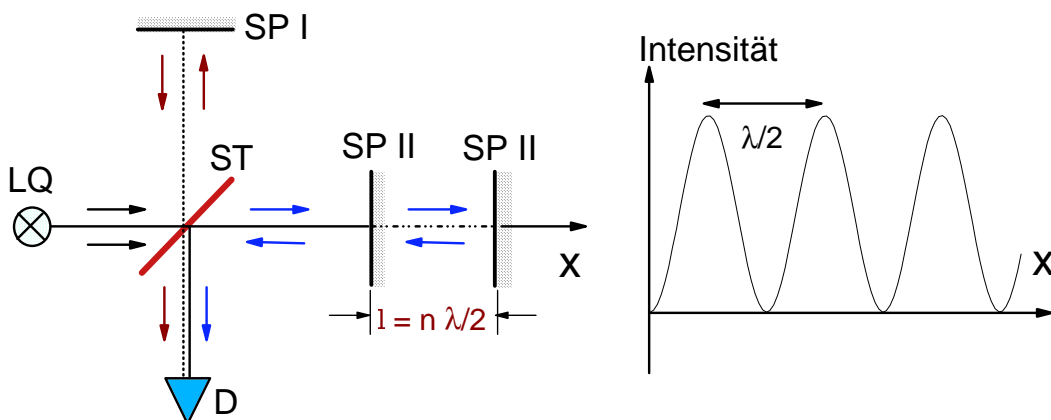


Abbildung 1.2: Das Michelson-Interferometer.

Seit 1983 wird das Meter durch die Festlegung der Naturkonstante *Lichtgeschwindigkeit* auf  $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$  über die Zeit definiert. Die Strecke von 1 m ergibt sich in dieser Definition als die

Strecke, die das Licht im Vakuum in einer Zeit von  $1/299\,792\,458$  Sekunden durchläuft. Man erhält somit eine neue Definition für die Längeneinheit

$$[l] := 1 \text{ Meter} := \frac{1}{299\,792\,458} \text{ s} \cdot c[m/s] \quad . \quad (1.2.5)$$

Man hat damit die Längenmessung auf eine Zeitmessung zurückgeführt. Da die Zeit momentan diejenige Einheit ist, die mit größter Genauigkeit reproduziert werden kann,<sup>4</sup> hat man durch Festlegung von Naturkonstanten andere Einheiten an die Zeiteinheit angebunden.<sup>5</sup> Die Größe der Naturkonstanten wird auf internationalen Konferenzen der nationalen Eichämter festgelegt.

### Laufzeitmessungen

Aus der obigen Definition des Meters ergeben sich auf natürliche Weise zur Ermittlung von Entfernungen einsetzbare Meßverfahren, die sogenannten *Laufzeitmessungen*. Hierbei wird im Punkt  $A$  zur Zeit  $t_0$  ein Schall-, Radar- oder Lichtpuls ausgesandt, im Punkte  $B$  reflektiert und dann wieder am Punkt  $A$  zur Zeit  $t_0 + \Delta t$  registriert. Aus der Laufzeit  $\Delta t$  und der bekannten Laufgeschwindigkeit der verwendeten Wellen läßt sich der Abstand  $\overline{AB}$  bestimmen (z.B. Echolot-Verfahren, Radarpeilung). In der Astronomie wurden mit dieser Methode mit Hilfe von Laserpulsen Präzisionsmessungen des Abstands Erde-Mond und Erde-Venus gewonnen. Solche Messungen sind enorm wichtig, da man aus den **Keplerschen** Gesetzen (siehe Abschnitt 1.5.3) aus einer Messung von Planetenlaufzeiten nur auf die Verhältnisse von Planetenbahnradien schließen kann. Eine einzige Absolutmessung des Abstands zweier Planeten liefert dann einen Absolutmaßstab für die Bahndaten (u.a. ergibt sich der Absolutwert der astronomischen Einheit, die Entfernung Erde-Sonne, siehe unten)

#### Echolot-Verfahren:

Abbildung 1.3 zeigt die Anordnung zur Bestimmung von Längen mittels Laufzeitmessungen. Ein Lautsprecher strahlt kurze Sinuspakete der Grundfrequenz 4 kHz ab. Diese werden in einem Kanal des Oszilloskops angezeigt. Das an einer Reflektorplatte zurückgeworfene Signal wird von dem Hohlspiegel auf ein Mikrophon fokussiert, mit diesem registriert und im zweiten Kanal des Oszilloskops angezeigt. Aus der zeitlichen Verschiebung der beiden Signale läßt sich die Entfernung zur Reflektorplatte bestimmen.

Im Zusammenhang mit Laufzeitmessungen bietet sich die Einführung einer astronomischen Längeneinheit, dem *Lichtjahr* (Abkürzung: 1 Lj) an. 1 Lj ist die Länge, die Licht im Vakuum in einem Jahr zurücklegt. Es gilt

$$1 \text{ Lj} = 1,94 \times 10^{15} \text{ m} \quad . \quad (1.2.6)$$

### Messung großer Längen

Ein für große Längen geeignetes Meßverfahren, das in der Geodäsie und der Astronomie verwendet wird, ist die *Triangulierung*. In den Entfernungsbereichen auf der Erde und im Kosmos, die durch

<sup>4</sup>In Caesiumatomuhren mit lasergekühlten Cs Atomen können heute Genauigkeiten von etwa  $10^{-15}$  erreicht werden.

<sup>5</sup>Neben dem Meter, durch Festlegung der Lichtgeschwindigkeit, hat man das Volt durch Festlegung des Flußquants  $\Phi_0 = h/2e$  an die Zeit bzw. die Frequenz  $\nu = 1/\text{Zeit}$  (vergleiche Gl. 1.2.19) angebunden (aufgrund des Josephson-Effekts gilt:  $V = \Phi_0 \nu$ , wobei  $\nu$  die Frequenz ist).

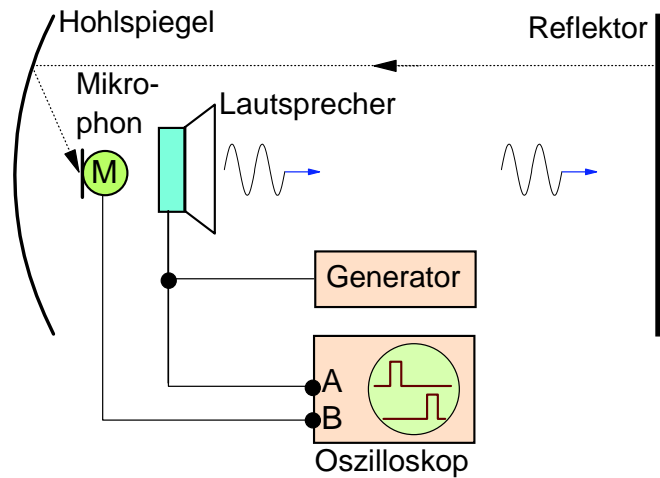


Abbildung 1.3: Prinzip des Echolot-Verfahrens.

Triangulierung noch zugänglich sind, konnten experimentell keine Abweichungen von der euklidischen Geometrie nachgewiesen werden. Dennoch wird in der allgemeinen Relativitätstheorie angesetzt, daß die euklidische Geometrie nicht für das gesamte Universum Gültigkeit besitzt, sondern der Raum vielmehr gekrümmt ist.

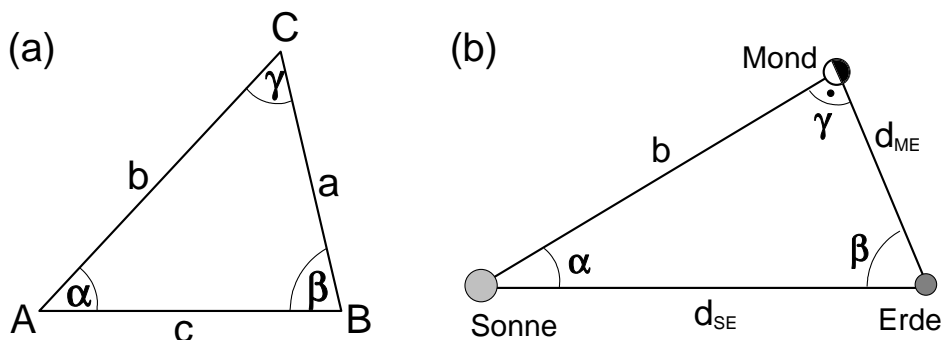
### Triangulierung:

Abbildung 1.4a zeigt das Meßprinzip. Bei bekannter Basislänge  $\overline{AB} = c$  lassen sich die unbekanntenen Entfernungen  $\overline{BC} = a$  und  $\overline{AC} = b$  durch eine Messung der Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  bestimmen. Nach dem Sinussatz der (ebenen, euklidischen) Geometrie gilt

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad (1.2.7)$$

$$\text{wobei} \quad \gamma = \pi - (\alpha + \beta). \quad (1.2.8)$$

Mit Hilfe der Triangulierung kann bei Halbmond bei bekanntem Abstand  $d_{ME}$  zwischen Erde und Mond der Abstand  $d_{SE}$  zwischen Sonne und Erde bestimmt werden (siehe Abbildung 1.4b). Bei Halbmond ist der Winkel  $\gamma = 90^\circ$  und man erhält  $d_{SE} = d_{ME} / \cos \beta$ . Man muß also nur den Winkel  $\beta$  messen.

Abbildung 1.4: Prinzip der Triangulierung: messe  $c$ ,  $\alpha$  und  $\beta$ ; berechne  $a$  und  $b$ .

Die Entfernungen zwischen Erde und Mond oder Erde und den Planeten, die der Erde nahe kommen,



lassen sich mit einer Basis  $\overline{AB}$  auf der Erde mittels Triangulierung bestimmen. Für Entfernungen außerhalb unseres Planetensystems ist man auf eine größere Basislänge  $\overline{AB}$  angewiesen, nämlich den Radius  $r$  der Erdbahn um die Sonne. Betrachtet man von der Erde aus erdnahe Sterne vor dem Hintergrund weit entfernt liegender Sterne, so scheinen die erdnahe Sterne im Laufe eines Jahre eine Ellipsenbahn zu durchlaufen. Winkelmessungen über ein Jahr hinweg erlauben die Bestimmung des trigonometrischen *Parallaxenwinkels*  $p$ , d.h. des Winkels, unter dem die große Halbachse der elliptischen Sternbahn von der Erde aus erscheint. Die Parallaxe stimmt nach Abb. 1.5 mit dem Winkel überein, unter dem ein Beobachter vom Stern aus die große Halbachse der für ihn elliptischen Erdbahn um die Sonne sehen würde. Bezeichnet man den Abstand Gestirn Sonne mit  $l$ , so ergibt sich aus Abb. 1.5:

$$\tan p = \frac{r}{l} \quad \text{bzw.} \quad l = \frac{r}{\tan p} \quad (1.2.9)$$

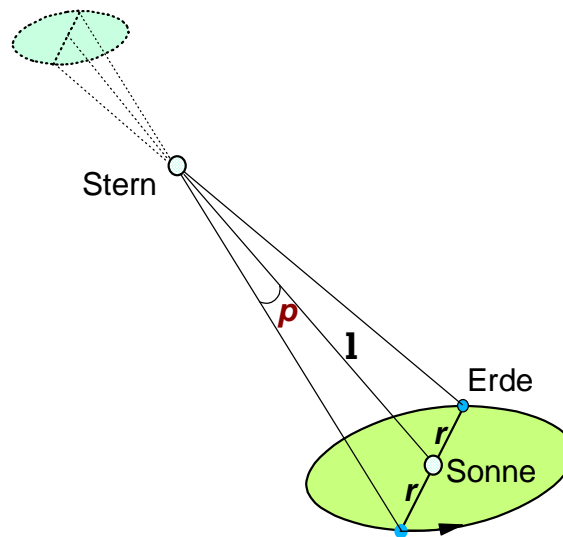


Abbildung 1.5: Der Parallaxenwinkel  $p$  eines Sterns.

Die genaue Kenntnis des Erdbahnradius  $r$ , der *astronomischen Einheit*, ist von zentraler Bedeutung für Entfernungsmessungen im Kosmos. Gleichung (1.2.9) gibt Anlaß zur Einführung einer in der Astronomie gebräuchlichen Längeneinheit, der *Parallaxensekunde* oder kurz *Parsec* (Abkürzung: 1 pc). Ein Stern hat die Entfernung 1 Parsec von der Sonne, wenn sein Parallaxenwinkel  $p$  gleich einer Bogensekunde wird. In Metern ausgedrückt ergibt sich

$$1 \text{ pc} = 3.086 \times 10^{16} \text{ m} = 3,26 \text{ Lj} \quad (1.2.10)$$

Schon der unserer Sonne nächste Stern ( $\alpha$  Proxima Centauri) hat einen Parallaxenwinkel  $p < 1''$ . Da die Fehler bei der Parallaxenbestimmung heute unter  $\pm 0,01''$  liegen, erlaubt die Triangulierungsmethode Entfernungsmessungen bis über 100 pc.

Für noch größere Entfernungsmessungen ist man auf indirekte Methoden angewiesen, die an Sternen innerhalb des mit der Triangulierungsmethode abgedeckten Bereichs geeicht werden müssen. So besteht z.B. ein systematischer Zusammenhang zwischen der Farbe und der absoluten Leuchtkraft eines Sterns (Hertzsprung-Russel Diagramm) sowie (für bestimmte in der Helligkeit pulsierende Sterne) zwischen Pulsationsdauer und absoluter Helligkeit. Da sich Farbe und Pulsationsdauer auf der Erde genau

bestimmen lassen, kann man mit Hilfe dieser Zusammenhänge und der auf der Erde gemessenen scheinbaren Leuchtkraft der Sterne, die mit dem Quadrat der Entfernung abnimmt, die Entfernung von Sternen abschätzen.

Als weitere Methode sei hier auf die Bestimmung der Rotverschiebung hingewiesen. Sehr entfernte Galaxien erscheinen punktförmig. Ihre Entfernung kann nur noch über die kosmologische Vorstellung eines expandierenden Weltalls aus ihrer Fluchtgeschwindigkeit angegeben werden, die auf der Erde aus der Rotverschiebung der Sternspektren (Dopplereffekt) nachweisbar ist.

### Messung kleiner Längen

Mit bloßem Auge nicht mehr sichtbare Objekte lassen sich mit dem Lichtmikroskop (bis herab zu  $l \simeq 0.1 \mu\text{m}$ ) bzw. mit dem Elektronenmikroskop (bis herab zu  $l \simeq 0.1 \text{ nm}$ ) ausmessen. Mit den Raster-sondentechniken (Rastertunnel- und Rasterkraftmikroskop) lassen sich an Oberflächen von Festkörpern Abstände im atomaren Bereich bestimmen. Im subatomaren Bereich ist man schließlich auf Streuexperimente mit Röntgenstrahlen, Neutronen, Elektronen u.a. angewiesen. So kann z.B. der mittlere Abstand von Atomen in einem Kristallgitter mit Hilfe der Röntgenbeugung mit einer Genauigkeit von besser als  $0.1 \text{ pm}$  bestimmt werden. Gebräuchliche Längenskalen im atomaren und subatomaren Bereich sind

$$1 \text{ \AA} (\text{\AA}ngstr\ddot{o}m) = 10^{-10} \text{ m} . \quad (1.2.11)$$

$$1 \text{ fm (Fermi)} = 10^{-15} \text{ m} . \quad (1.2.12)$$

Der in der klassischen Physik eingeführte Begriff der Länge stößt vor allem im atomaren und subatomaren Bereich an seine Gültigkeitsgrenze. Die Frage, wie genau man letztendlich den Ort eines Teilchens bestimmen kann, wird in der Quantenmechanik durch die **Heisenbergsche** Unschärferelation

$$\Delta p_x \Delta x \geq h \quad (1.2.13)$$

beantwortet. Hierbei ist  $h = 6,626\,075\,7 \times 10^{-34} \text{ Js}$  das **Plancksche** Wirkungsquantum. Sie besagt, daß die Unschärfe  $\Delta x$  in der Ortsbestimmung an die Unschärfe  $\Delta p_x$  in der Festlegung des Impulses  $p_x$  gekoppelt ist. Eine präzise Ortsbestimmung führt also zu einer großen Unschärfe bei der Impulsbestimmung und umgekehrt. Dies ist mit der klassischen Orts- und Impulsmessung nicht vereinbar.

### Längenspektrum

Folgende charakteristischen Längen kommen in der Natur vor (sie erstrecken sich über mehr als 40 Größenordnungen):

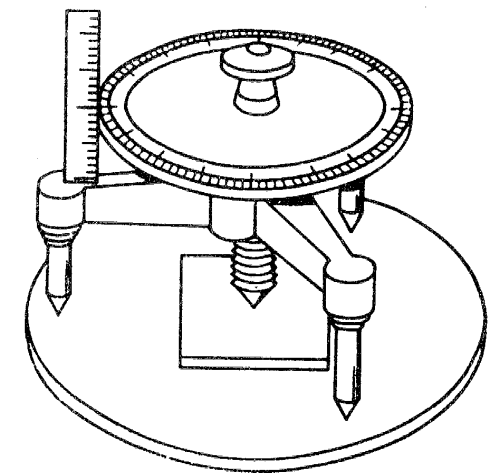
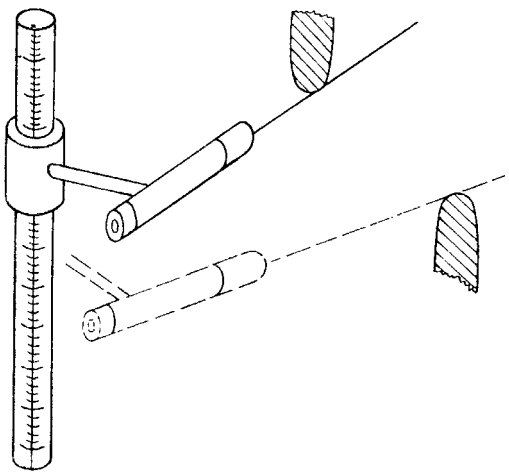
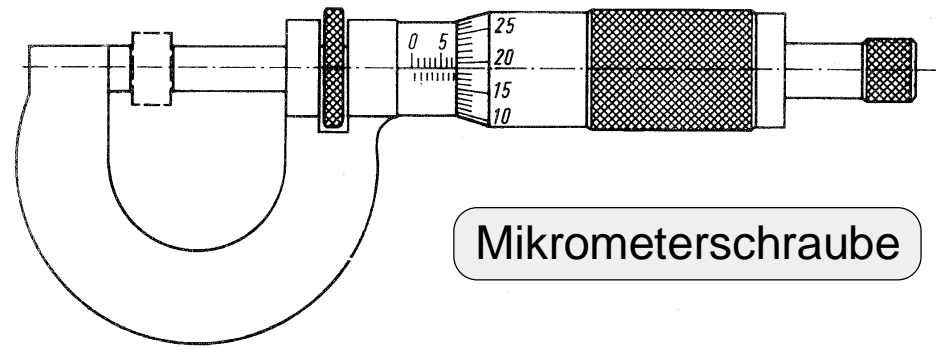
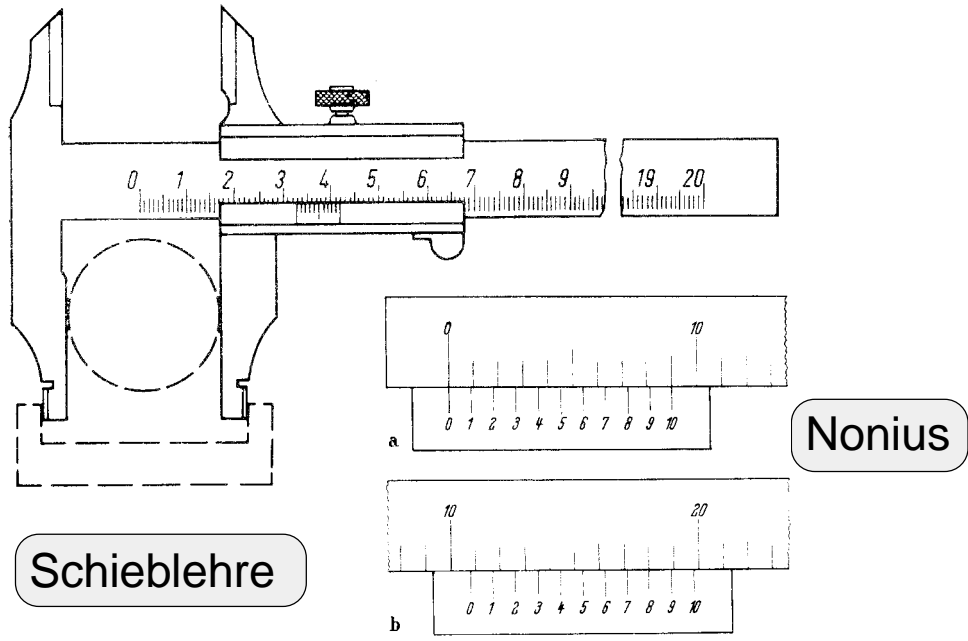


Abbildung 1.6: Werkzeuge zur Messung von Längen.

ca. $10^{26}$ m	Ausdehnung des Weltalls
$1,56 \times 10^{21}$ m	Entfernung zur nächsten Galaxie (Magellansche Wolke)
$3 \times 10^{20}$ m	Abstand Sonne – galaktisches Zentrum
$4 \times 10^{16}$ m	Entfernung zum nächsten Stern ( $\alpha$ Proxima Centauri)
$1,496 \times 10^{11}$ m	Abstand Sonne – Erde (astronomische Einheit)
$6,96 \times 10^8$ m	Radius der Sonne
$6,378 \times 10^6$ m	Radius der Erde (Äquatorebene)
$8,85 \times 10^3$ m	höchster Berggipfel (Mt. Everest)
1,80 m	homo sapiens
$1 \times 10^{-4}$ m	Sandkorn
$10^{-6}$ m	Größe von Bakterien
$5 \times 10^{-7}$ m	Wellenlänge des sichtbaren Lichts
$10^{-10}$ m	typischer Durchmesser der Atomhülle
$3 \times 10^{-15}$ m	typischer Durchmesser eines Atomkerns

### 1.2.3 Flächen-, Raum- und Winkelmessungen

Aus der Grundgröße *Länge* und ihrer Einheit *Meter* lassen sich *abgeleitete Größen* und ihre Einheiten gewinnen (siehe Abb. 1.7):

$$\begin{aligned}
 \text{Fläche } A &= a \cdot b & [A] &= 1\text{m}^2 \\
 \text{Volumen } V &= a \cdot b \cdot c & [V] &= 1\text{m}^3 & (1.2.14) \\
 \text{ebener Winkel } \alpha &= s/r & [\alpha] &= 1\text{rad (Radiant)} \\
 \text{Raumwinkel } \Omega &= A/r^2 & [\Omega] &= 1\text{sr (Steradian)} & (1.2.15)
 \end{aligned}$$

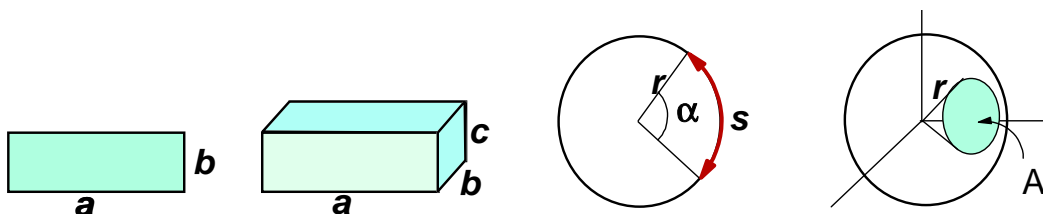


Abbildung 1.7: Flächen-, Raum- und Winkleinheit.

Der ebene Winkel und der Raumwinkel sind Verhältnisgrößen mit Dimension 1, die zur Kennzeichnung den Zusatz *Radiant* (rad) und *Steradian* (sr) erhalten. 1 rad entspricht dem Winkel, der auf dem Einheitskreis mit Radius  $r = 1$  m die zugehörige Bogenlänge von 1 m ausschneidet. Genauso entspricht 1 sr dem Raumwinkel, der aus einer Kugel mit Einheitsradius von 1 m die Fläche von  $1 \text{ m}^2$  ausschneidet. Neben diesen SI-Einheiten für die Winkelmessung werden häufig die Einheiten im Gradmaß verwendet. Wegen  $2\pi \cdot \text{rad} = 360^\circ$  und  $4\pi \cdot \text{sr} = (360^\circ)^2$  gilt:

$$\begin{aligned}
 1 \text{ rad} &= 360^\circ / 2\pi = 57.2928^\circ \\
 1 \text{ sr} &= (360^\circ)^2 / 4\pi = 10\,313.2(^{\circ})^2 & (1.2.16)
 \end{aligned}$$

Hierbei wird  $1(^{\circ})^2$  als ein Quadrat-Altgrad bezeichnet.

### 1.2.4 Zeit und Zeitmessung

Bei der Zeitmessung wird das Zeitintervall  $t$  bestimmt, das zwischen zwei Ereignissen  $A$  und  $B$  verstreicht. Ähnlich wie für die Lage im Raum kann man keine "absolute" Zeit angeben.<sup>6</sup> Man kann also nur die Zeitdifferenz zwischen zwei Ereignissen, d.h. eine Zeitspanne, durch eine Meßvorschrift definieren. Ein Zeitintervall kann am besten durch den Vergleich mit der Dauer eines *periodischen Vorgangs* gemessen werden. Setzen wir die Dauer einer Periode gleich unserer Zeiteinheit, so bedeutet die Bestimmung eines Zeitintervalls zwischen zwei Ereignissen das Abzählen der Anzahl der Perioden des als Uhr benutzten periodischen Vorgangs.

Hierbei stellt sich natürlich sofort das Problem, wie man entscheidet, ob ein physikalischer Vorgang streng periodisch ist. Diese Frage kann nur beantwortet werden, indem man Geräte zur Zeitmessung (Uhren), die nach verschiedenen Prinzipien funktionieren, untereinander vergleicht. Die Ganggenauigkeit der genauesten Uhren kann nur aus dem Gleichlauf mehrerer gleichartiger Uhren beurteilt werden.

Entsprechend wie ursprünglich die Längeneinheit an die räumliche Ausdehnung der Erde angeschlossen wurde, wurde die Zeiteinheit ebenfalls mit einem irdischen Maß, nämlich mit der Periode der Erddrehung um ihre eigene Achse (1 Tag := 1 d) bzw. mit der Bewegung der Erde um die Sonne (1 Jahr := 1 a) verknüpft. Damit ergab sich folgende Definition für die Sekunde (sogenannte *Ephemeriden-Sekunde*)<sup>7</sup>:

$$[t] := 1 \text{ Sekunde} = 1 \text{ s} := \frac{\text{mittlerer Sonntagag}}{24 \cdot 60 \cdot 60} . \quad (1.2.17)$$

Mit fortschreitender Technik erwies sich diese Definition als zu grob. Z.B. führt die Ellipsenbahn der Erde um die Sonne zu variablen Bahngeschwindigkeiten, die auch bei konstanter Rotationsgeschwindigkeit der Erde um ihre eigene Achse im Laufe eines Jahres zu unterschiedlichen Dauern eines Sonnentages führen. Deshalb muß die Dauer eines Sonnentages über ein Jahr gemittelt werden. Erschwerend kommt hinzu, daß durch die Gezeitenwirkung die Erde in 100 Jahren um 1,6 ms langsamer rotiert und wegen der Präzession und Nutation der Erdachse diese keineswegs konstant im Raum orientiert bleibt. Man hatte außerdem gelernt, viel genauere Zeitmesser (Uhren), die auf periodischen Vorgängen beruhen, zu bauen (siehe z.B. Abb. 1.8). Als Beispiel seien hier die Pendeluhren, Torsionsuhren, Quarzuhren und die heute von den Eichämtern verwendeten Atomuhren genannt. Die Erfindung der Atomuhren hat dazu geführt, daß man sich für das SI-System im Jahre 1967 zur Einführung eines atomaren Zeitstandards entschieden hat. Danach ist die Sekunde ein bestimmtes Vielfaches der Schwingungsdauer  $T$  der elektromagnetischen Strahlung, die von dem Isotop  $^{133}_{55}\text{Cs}$  (Kernspin  $I = 7/2$ ) beim Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus ( $F = 4, M = 0 \rightarrow F = 3, M = 0$ ) des Grundzustands  $2S_{1/2}$  ausgesandt wird:

$$[t] := 1 \text{ s} := 9\,192\,631\,770 T \approx 9.19 \times 10^9 T(^{133}_{55}\text{Cs}) \quad (1.2.18)$$

Die Schwingungsdauer  $T$  ist die Zeit, die während einer vollen Schwingung (Hin- und Rückschwingung) verstreicht. Der Kehrwert von  $T$  gibt die Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit an und wird als Schwingungsfrequenz  $\nu$  bezeichnet. Die Einheit der Frequenz im SI-System ist  $1 \text{ s}^{-1}$  und wird auch mit 1 Hertz (Abkürzung: 1 Hz) bezeichnet:

<sup>6</sup>Man kann ohne Bezugssystem für zwei Punkte  $A$  und  $B$  keine absolute Lage im Raum angeben, nur ihr Abstand läßt sich genau angeben.

<sup>7</sup>Im Jahr 1960 wurde die Ephemeridensekunde zu  $1 \text{ s} = (1/31\,556\,925,9747) \times$  topisches Sonnenjahr am 01. 01. 1900 festgelegt. Ein mittleres Sonnenjahr (Umlauf der Erde um die Sonne) hat 365,2422 Tage. Die Genauigkeit der hiermit festgelegten Sekunde beträgt etwa  $10^{-9}$ .

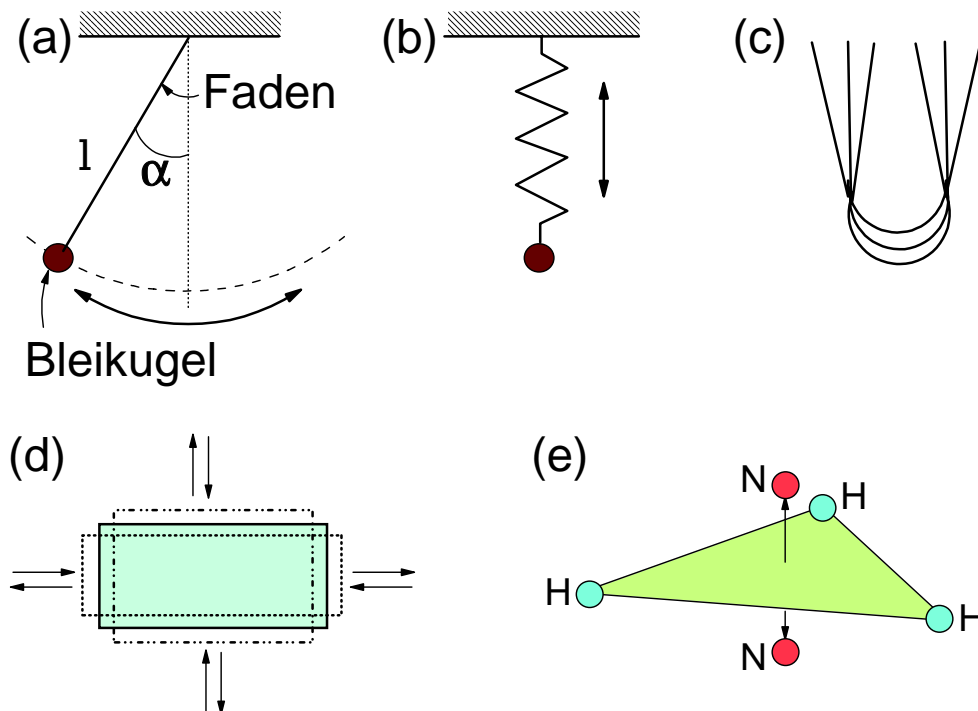


Abbildung 1.8: (a) Fadenpendel: die Schwingungsdauer beträgt  $T \simeq 2\pi\sqrt{l/g}$ , wobei  $g$  die Erdbeschleunigung ist. Am 50. Breitengrad erhält man  $T = 1$  s bei  $l = 0.248$  m. (b) Federpendel: die Schwingungsdauer beträgt  $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ , wobei  $k$  die Federkonstante ist. (c) Schwinggabel: die typische Schwingungsdauer ist  $10^{-3}$  s. (d) Schwingquarz: die typische Schwingungsdauer ist  $10^{-7}$  s. (e) Atomuhr basierend auf Ammoniak ( $\text{NH}_3$ ). Die Inversionsschwingung hat eine Frequenz von  $\nu = 23870,4$  MHz mit einer Genauigkeit von  $\Delta\nu/\nu = 10^{-9}$ . Nicht gezeigt ist das Drehpendel (Unruhe in Armbanduhren).

$$\nu := \frac{1}{T}$$

und  $[\nu] = 1/\text{s} := 1 \text{ Hertz} = 1 \text{ Hz} .$  (1.2.19)

Die Definition der Sekunde nach Gl. (1.2.18) entspricht genau der Festlegung der Frequenz der  $^{133}_{55}\text{Cs}$ -Strahlung auf  $\nu = 9.192\,631\,770$  GHz.

Die Ganggenauigkeit von Uhren wird durch den Quotient  $\Delta t/t$  aus Abweichung  $\Delta t$  und Zeitintervall  $t$  angegeben. Die besten Pendeluhen erreichen  $\Delta t/t = 10^{-8}$ , die besten Quarzuhen  $\Delta t/t = 10^{-10}$ , die Ammoniakatomuhr  $\Delta t/t = 10^{-9}$  und die besten Cs-Atomuhren (z.B. Atomuhr CS2 bei der Physikalisch Technischen Bundesanstalt in Braunschweig<sup>8</sup> etwa  $\Delta t/t = 10^{-14}$ . Ganz neue Entwicklungen mit lasergekühlten Cs Atomen erlauben eine weitere Verbesserung der Ganggenauigkeit um etwa eine Größenordnung. Hierbei wird die mittlere thermische Geschwindigkeit der Cs-Atome von etwa 100 m/s durch Wechselwirkung mit Laserstrahlung auf etwa 1 m/s reduziert.

<sup>8</sup>Nach dem Zeitgesetz von 1978 ist die PTB mit der Darstellung und Verbreitung der gesetzlichen Zeit beauftragt. Diesen Auftrag erfüllt die PTB vor allem durch ihre Zeitsignal- und Normalfrequenzaussendungen über den Langwellensender DCF77. Das Zeitsignal wird mit einer Leistung von 50 kW abgestrahlt und ist in weiten Teilen Europas (Reichweite etwa 2000 km) zu empfangen. Die Trägerfrequenz 77,5 kHz des DCF77 ist eine hochstabile Normalfrequenz, die zur Nachsteuerung von Normalfrequenzoszillatoren verwendet werden muß. Das Zeitsignal der PTB wird für die Uhren der Bahn AG, der Rundfunkanstalten, für Funkuhren, aber auch für Verkehrsüberwachungsgeräte und zur Steuerung von Prozeßabläufen verwendet.

### Messung sehr kurzer Zeiten

Bei bekannter Geschwindigkeit eines Objekts lassen sich sehr kurze Zeiten elegant durch Messung der zurückgelegten Wegstrecke bestimmen. Dies funktioniert insbesondere dann sehr gut, wenn sich Objekte sehr schnell (z.B. mit Lichtgeschwindigkeit) bewegen. Ein Beispiel ist die Bestimmung der Lebensdauer des  $\pi^0$ -Mesons durch eine Blasenkammeraufnahme.  $\pi^0$ -Mesonen werden bei der Reaktion  $\pi^- + p^+ \rightarrow \pi^0 + n$  erzeugt und zerfallen in der mittleren Zeit  $\tau$  in eine Elektron, ein Positron und ein  $\gamma$ -Quant:  $\pi^0 \rightarrow e^+ + e^- + \gamma$ . Das  $\pi^0$ -Meson bewegt sich praktisch mit Lichtgeschwindigkeit und seine Lebensdauer kann deshalb aus der in der Blasenkammer zwischen Erzeugung und Zerfall zurückgelegten Strecke  $s$  zu  $\tau = s/c$  bestimmt werden. Da die kleinste meßbare Strecke  $s$  etwa  $1 \mu\text{m}$  ist, kann man Zerfallszeiten  $\tau \geq 3 \times 10^{-15} \text{ s}$  messen.

### Messung sehr langer Zeiten

Neben periodischen Vorgängen kann im Prinzip jeder physikalische Prozeß, der einer zeitlichen Gesetzmäßigkeit genügt, zur Zeitmessung herangezogen werden. Ein antikes Beispiel ist die Sanduhr, ein modernes der radioaktive Zerfall instabiler Elementarteilchen, Atomkerne etc.. Der radioaktive Zerfall wird insbesondere zur Altersbestimmung (Messung sehr langer Zeiten) in der Archäologie und der Geologie herangezogen. Der Zerfall folgt der Gesetzmäßigkeit

$$N(t) = N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad (1.2.20)$$

wobei  $\tau$  die mittlere Zerfallszeit und  $N_0$  die Anfangszahl der zerfallenden Teilchen ist. Sind  $\tau$  und  $N_0$  bekannt, so kann durch Messung von  $N(t)$  auf die seit dem Anfangszustand verstrichene Zeit  $t$  geschlossen werden. Bekannte Radionukliduhren sind  $^{14}\text{C}$ , die K-Ar-Uhr und die U-Pb-Uhr.

Der soeben diskutierte Begriff der Zeit in der klassischen Physik bedarf einer Revision, die von der Quantenmechanik vorgegeben ist und insbesondere im atomaren Bereich wirksam wird. Analog zur Unschärferelation für Ort und Impuls in Gl. (1.2.13) sind auch die Zeit  $t$  und die Energie  $E$  über eine Unschärferelation verbunden:

$$\Delta t \cdot \Delta E \geq \hbar. \quad (1.2.21)$$

Diese Relation besagt, daß entgegen der klassischen Annahme die Zeit nicht beliebig genau festgelegt werden kann, ohne daß dadurch eine andere wichtige Eigenschaft eines Zustands, die Energie  $E$ , beliebig unscharf wird (umgekehrt gilt dies genauso). Unsere Kenntnis der Welt läuft damit auf einen Kompromiß hinaus, mit welchen Genauigkeiten Ort, Impuls, Zeit und Energie eines Zustandes angebar sind.

Zum Schluß sollen einige charakteristische Zeitskalen, die in der Natur auftreten, aufgelistet werden:

ca. $10^{10}$ a	Alter des Universums
$4,5 \times 10^9$ a	Alter der Erde
$2 \times 10^8$ a	Laufzeit der Sonne um das galaktische Zentrum
$1,75 \times 10^6$ a	Alter der Menschheit
$3,156 \times 10^7$ s	Umlaufzeit der Erde um die Sonne
$8,64 \times 10^4$ s	Dauer eines mittleren Sonnentages
1 s	Herzschlag
$1 \times 10^{-3}$ s	Schwingungsdauer $T$ des Schalls im empfindlichsten Bereich des menschlichen Gehörs
$1 \times 10^{-8}$ s	Schwingungsdauer $T$ von elektromagnetischen Wellen im UKW Bereich
$1,6 \times 10^{-15}$ s	Schwingungsdauer $T$ des sichtbaren Lichts
$10^{-21}$ s	Dauer einer Atomkernschwingung
$10^{-23}$ s	Dauer, die Licht zum Durchlaufen des Durchmessers eines Atomkerns benötigt

### Positionsbestimmung über Laufzeitmessungen – das Global Positioning System (GPS)

Ortung und Navigation sind für den Menschen schon immer von großer Bedeutung gewesen. Der Begriff Navigation ist von lateinisch *navis*, Schiff, abgeleitet, da Seeleute für die Bestimmung ihrer Position und ihrer Fahrtrichtung auf dem Meer schon seit der Antike technische Hilfsmittel entwickelt haben. Durch die Entwicklung der Satellitentechnik und ultrapräziser Uhren, wurden in den letzten Jahrzehnten globale Positionsbestimmungssysteme entwickelt, die auf Laufzeitmessungen beruhen.

Ab 1973 entwickelten die USA das sogenannte *Global Positioning System (GPS)*, das aus 24 Satelliten besteht, die in einer Höhe von 20 000 km in kreisförmigen Bahnen in jeweils 12 Stunden die Erde umkreisen. Die Satelliten sind auf 6 Bahnebenen so verteilt (siehe Abb. 1.9), daß von jedem Punkte der Erde aus Signale von mindesten 4 Satelliten empfangen werden können. Jeder Satellit enthält 3 hochgenaue Atomuhren, die von einer Leitzentrale auf der Erde (Colorado Springs) synchronisiert und überwacht werden. Die GPS-Satelliten identifizieren sich durch Abstrahlung eines Codes (Abstrahlfrequenz = 1.6 GHz), der verschiedene Informationen wie z.B. die genauen Bahndaten des Satelliten und weitere technische Informationen enthält. Dieses charakteristische Signal wird, synchronisiert mit der hochpräzisen Atomuhr des Satelliten, jede Millisekunde wiederholt. Empfängt ein GPS-Empfänger auf der Erde das Signal eines der 24 Satelliten, so synchronisiert er sich zuerst mit diesem und kann dann die Signallaufzeit zwischen Satellit und Empfänger und damit die Entfernung  $R_1$  zum Satelliten bestimmen. Die Position des Empfängers liegt dann auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius  $R_1$ . Dieser Vorgang kann mit zwei weiteren Satelliten wiederholt werden. Dadurch ergeben sich zwei weitere Kugeln mit Radius  $R_2$  und  $R_3$ . Die drei Kugeloberflächen schneiden sich in 2 Punkten, von denen einer meist ausgeschlossen werden kann (da er z.B. nicht auf der Erdoberfläche liegt). Somit kann durch Laufzeitmessungen zu 3 Satelliten die Position des Empfängers prinzipiell bestimmt werden.

Ein Problem besteht aber darin, daß die Uhr des Empfängers im Vergleich zu den Atomuhren der Satelliten sehr ungenau ist (die Empfänger sollen billig sein). Die Frage stellt sich also, wie man überhaupt eine Synchronisation erreichen kann. Die Lösung besteht darin, daß der Gangunterschied zwischen Empfängeruhr und Satellitenuhr als weitere Unbekannte wie eine der drei Standortkoordinaten betrachtet wird. Um diese vierte Unbekannte zu eliminieren, muß eine Laufzeitmessung zu einem vierten Satelliten gemacht werden. Mathematisch ergibt sich mit den gemessenen Laufzeiten ( $T_E - T_S$ ) zwischen Empfänger und Satellit folgendes Gleichungssystem:



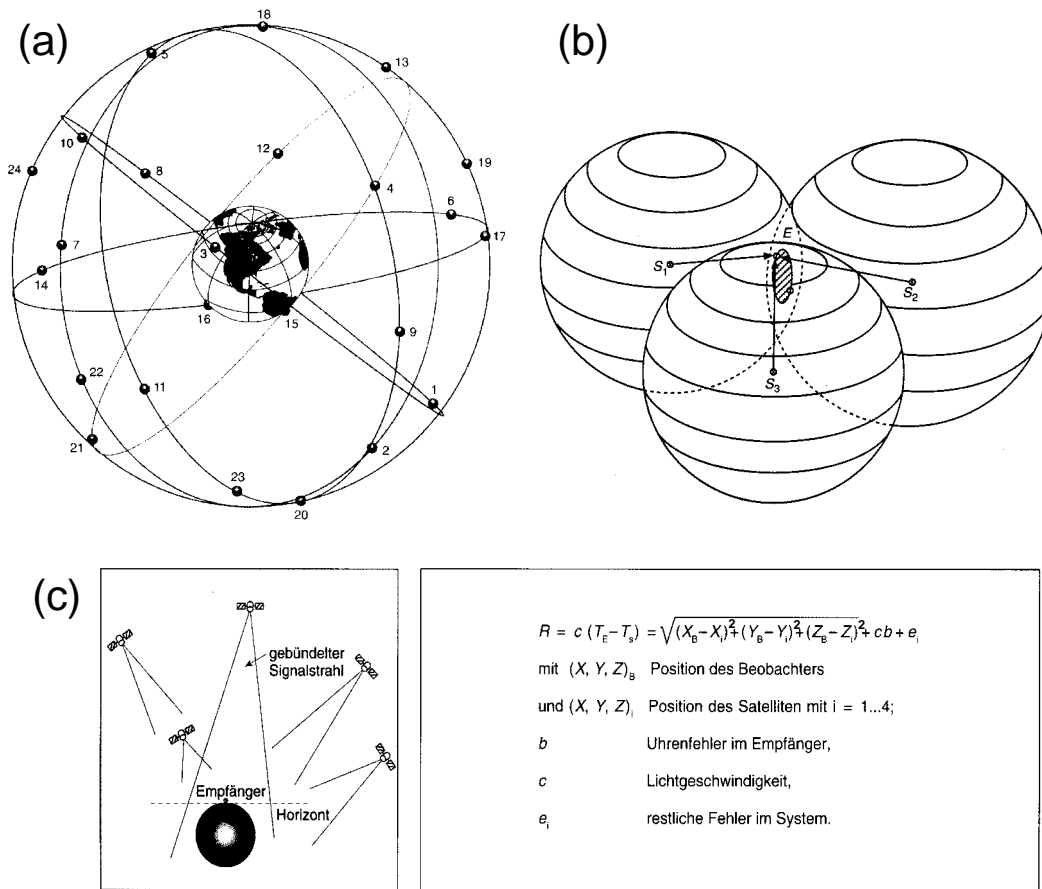


Abbildung 1.9: (a) Seit 1993 umkreisen 24 Satelliten in etwa 20 000 km Höhe die Erde, die zusammen mit einer Bodenstation die Grundausstattung des Global Positioning Systems (GPS) bilden. Jeweils 4 Satelliten haben eine gemeinsame Bahnebene. Die Umlaufbahnen sind um jeweils  $53^\circ$  gegenüber dem Äquator geneigt. (b) Geometrische Darstellung der Positionsbestimmung per GPS. Die Empfängerposition ist einer der zwei Schnittpunkte von 3 Kugeloberflächen. (c) Zur Positionsbestimmung mit GPS.

$$R_i = c \cdot (T_E - T_{S,i}) = \sqrt{(x_E - x_{S,i})^2 + (y_E - y_{S,i})^2 + (z_E - z_{S,i})^2} + c \cdot b + e_i \quad i = 1 \dots 4 \quad (1.2.22)$$

Hierbei ist  $(x_E, y_E, z_E)$  die Empfängerposition,  $(x_{S,i}, y_{S,i}, z_{S,i})$  die Position des  $i$ -ten Satelliten ( $i = 1 \dots 4$ ),  $b$  der Uhrenfehler des Empfängers,  $c$  die Lichtgeschwindigkeit und  $e_i$  restliche Systemfehler der einzelnen Satelliten. Um die vier Unbekannten  $x_E, y_E, z_E$  und  $b$  zu bestimmen, benötigt man vier Gleichungen, d.h. Laufzeitmessungen zu vier Satelliten.

Durch ständige Überwachung und Korrektur der Satellitenuhren mit Hilfe der Bodenstation wird die Abweichung der Satellitenuhren gegenüber einer vorgegebenen GPS-Zeit auf  $< 5 \times 10^{-9}$  s reduziert, was einem Fehler in der Abstandsmessung von weniger als 1,5 m entspricht. Zusammen mit anderen Fehlern (Satellitenposition, Ionosphäre, Empfängerrauschen, etc.) erhält man heute eine Genauigkeit von etwa 5 m.<sup>9</sup>

<sup>9</sup>Durch spezielle Meßtechniken (Ausnutzung des Dopplereffekts) lassen sich heute aber wesentlich genauere Ortsbestim-

Das GPS wurde ursprünglich hauptsächlich für militärische Zwecke entwickelt. Eine zivile Nutzung wurde zwar vorgesehen, aber nur mit höherer Fehlertoleranz. So steht heute die hohe Genauigkeit nur dem Militär zur Verfügung. Für zivile Nutzer wurden die abgestrahlten Satellitensignale künstlich verschlechtert (*selective availability*), so daß nur eine Genauigkeit von etwa 100 m erreicht werden kann. Dieses Problem wurde durch die Entwicklung des differentiellen GPS (DGPS) umgangen. Beim DGPS wird der künstlich aufgeprägte Fehler der Satellitensignale durch eine zusätzliche Laufzeitmessung zu einer auf der Erde befindlichen Referenz mit bekannter Position wieder reduziert, so daß man Genauigkeiten von etwa 10 m erreicht.

### 1.2.5 Meßfehler

Wiederholte Messungen einer physikalischen Größe führen im allgemeinen nicht zu gleichen Ergebnissen. So ergeben sich z.B. Unterschiede durch Schätzungen von Meßwerten, die zwischen zwei Teilstrichen auf einer Skala liegen oder durch Parallaxen bei der Ablesung (siehe Abb. 1.10). Diese *zufälligen Fehler* lassen sich durch eine Fehlerrechnung ausgleichen. Man erhält dann einen wahrscheinlichsten Wert für das Ergebnis und einen mittleren Wert für den Fehler. Eine Grundvoraussetzung für die Durchführung einer Fehlerrechnung ist natürlich das Vorhandensein mehrerer Messungen.

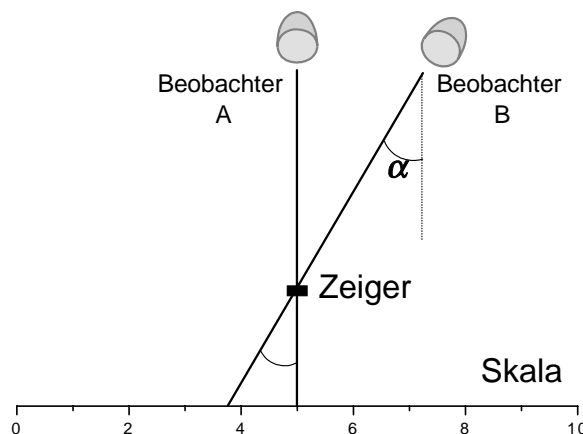


Abbildung 1.10: Parallaxenfehler: Der Zeiger von Meßgeräten hat meist einen endlichen Abstand von der Skala, weshalb durch das Ablesen der Skala unter endlichem Winkel der sogenannte Parallaxenfehler entsteht. Zur Vermeidung von Parallaxenfehlern können verspiegelte Skalen verwendet werden, bei denen der Zeiger mit seinem Spiegelbild zur Deckung gebracht werden muß.

Neben den *zufälligen Fehlern* können auch *systematische Fehler* auftreten, die z.B. auf eine falsche Meßskala, durch ein fehlerhaftes Meßinstrument oder durch Bedienungsfehler des Experimentators verursacht werden können. Diese systematischen Fehler können nicht durch eine Fehlerrechnung korrigiert werden.

Bei einer wiederholten Messung wird der wahrscheinlichste Wert durch Bildung des arithmetischen Mittels gewonnen. Das *arithmetische Mittel* ist der Wert, für den die Summe der Quadrate der Abweichungen ein Minimum ist (Ausgleichsprinzip von **Gauß**, Methode der kleinsten Quadrate). Ist  $n$  die Zahl der durchgeführten Messungen, dann ist der *mittlere absolute Fehler* der Meßreihe gegeben durch

$$\Delta x = \pm \sqrt{\frac{\sum (x_i - x)^2}{n(n-1)}}. \quad (1.2.23)$$

mungen vornehmen. Für geodätische Messungen wie z.B. die Bestimmung der Bewegung der Kontinentalplatten konnten Genauigkeiten von einigen Millimetern erreicht werden.

Hierbei ist  $x_i$  das Resultat einer Einzelmessung und  $x = \sum x_i/n$  das arithmetische Mittel. Der mittlere absolute Fehler liefert eine Wertung des Meßergebnisses. Ist die Streuung groß und die Zahl der Messungen klein, so ergibt sich ein großer Fehler und umgekehrt.

Die Größe des mittleren absoluten Fehlers muß aber auch im Verhältnis zum Wert der gemessenen Größe betrachtet werden. Ist z.B. der mittlere absolute Fehler bei einer Längenmessung  $\Delta x = 0.01$  m, dann ist dieser Fehler ohne Zweifel klein, wenn die gemessene Länge  $x = 100$  m beträgt. Er ist dagegen groß, wenn die gemessene Länge nur 10 cm beträgt. Aus diesem Grunde ist es besser den *relativen Fehler* zu betrachten, den man durch Bildung des Verhältnisses  $\Delta x/x$  aus mittlerem Fehler und mittlerem Meßwert erhält. Man gibt den relativen Fehler meist in Prozent an, wie z.B.

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{0.01\text{m}}{100\text{m}} = 0.01\% \quad . \quad (1.2.24)$$

Der relative Fehler gibt sofort eine Auskunft über die Genauigkeit von Messungen ganz unterschiedlicher Art (z.B. Länge, Zeit, etc.) an.

Sehr häufig setzt sich ein Meßergebnis aus mehreren Einzelmessungen zusammen. Setzt sich das Ergebnis  $K$  aus der Summe von zwei Einzelmessungen  $x$  und  $y$  zusammen, so muß man bei der Betrachtung des Fehlers die mittleren absoluten Fehler der Einzelmessungen addieren:  $\Delta K = \Delta x + \Delta y$ .<sup>10</sup> Ist das Ergebnis  $K$  eine Funktion der gemessenen Größe  $x$ , dann ist der mittlere absolute Fehler des Ergebnisses  $\Delta K = dK/dx \cdot \Delta x$ . Dies kann an dem einfachen Beispiel der Bestimmung einer Kreisfläche verdeutlicht werden. Durch mehrmaliges Messen des Durchmessers wurde ein mittlerer Durchmesser  $x = 2,00$  m mit einem mittleren absoluten Fehler von  $\Delta x = 0.01$  m bestimmt. Die mittlere Fläche ist damit  $K = 3,14$  m<sup>2</sup> und der mittlere absolute Fehler beträgt

$$\Delta K = \frac{\Delta K}{dx} \cdot \Delta x = \frac{\pi}{4} 2x \cdot \Delta x = \pm 0,03 \text{ m}^2 \quad . \quad (1.2.25)$$

Das heißt, daß aus dem Fehler für den Durchmesser auch der Fehler für die Kreisfläche berechnet werden konnte. Der relative Fehler für den Kreisdurchmesser beträgt  $\Delta x/x = 0.2\%$ , derjenige für die Kreisfläche jedoch  $\Delta K/K = 1\%$ .

Nimmt man allgemein an, daß der Zusammenhang des Ergebnisses  $K$  mit den Einzelmessungen  $x, y, z, \dots$  durch eine Funktion  $f(x, y, z, \dots)$  gegeben ist, so ergibt sich der relative Fehler zu

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{1}{K} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \cdot \Delta z\right)^2 + \dots \quad . \quad (1.2.26)$$

Ist  $K$  z.B. das Volumen eines Zylinder mit Grundfläche  $\pi x^2/4$  und Höhe  $z$  und werden der Durchmesser  $x$  und die Höhe  $z$  des Zylinders in Einzelmessungen bestimmt, so ergibt sich mit  $f(x, z) = \pi x^2 z/4$  der relative Fehler zu

$$\frac{\Delta K}{K} = \sqrt{\left(2 \frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{z}\right)^2} \quad . \quad (1.2.27)$$

<sup>10</sup>Man muß den ungünstigsten Fall betrachten.

### 1.2.6 Skalare und vektorielle Meßgrößen

Zur Beschreibung physikalischer Vorgänge werden dimensionsbehaftete Größen benötigt. Diese können sich durch die Anzahl von Angaben unterscheiden, die zu ihrer eindeutigen Festlegung notwendig sind. Größen, die bei vorgegebener Maßeinheit durch eine einzige Zahlenangabe festgelegt sind, heißen *Skalare*. Hierzu gehören z.B. Länge, Fläche, Volumen, Zeit, Masse oder Temperatur. Skalare Größen sind also ausschließlich durch ihre Menge (Maßzahl und Einheit) gekennzeichnet, womit sich für die Länge folgende Darstellung ergibt:

$$l = \{l\} \cdot [l]$$

$$\text{skalare Größe} = \{\text{Maßzahl}\} \cdot [\text{Dimension}] \quad . \quad (1.2.28)$$

Größen, die bei vorgegebener Maßeinheit durch eine Zahl und eine Richtung charakterisiert sind, heißen *Vektoren*. Hierzu gehören z.B. Geschwindigkeit, Kraft, Impuls, Magnetfeld oder elektrisches Feld. Wie in Abschnitt 1.1.1 gezeigt wurde, können Vektoren in Betrag und Einheitsvektor (Maßzahl und Richtung) zerlegt werden. Somit sind vektorielle Größen durch die Maßzahl, die Dimension und die Richtung gekennzeichnet, wodurch sich z.B. für die Geschwindigkeit folgende Darstellung ergibt:

$$\mathbf{v} = \{v\} \cdot [v] \cdot \hat{\mathbf{e}}$$

$$\text{vektorielle Größe} = \{\text{Maßzahl}\} \cdot [\text{Dimension}] \cdot \text{Richtung} \quad . \quad (1.2.29)$$

Hierbei gilt für den Einheitsvektor  $|\hat{\mathbf{e}}| = 1$  und  $\hat{\mathbf{e}} \parallel \mathbf{v}$ , d.h. die Maßzahl des Einheitsvektors ist eins und seine Richtung parallel zu  $\mathbf{v}$ .

### 1.3 Kinematik des Massenpunktes

Die *Kinematik* ist die Lehre von den Bewegungen von Körpern in Raum und Zeit. Die Ursache der Bewegung bleibt dabei außer Betracht. Im Rahmen der Kinematik werden Bewegungen nur beschrieben. Im Gegensatz zur *Kinematik* ist die *Dynamik* die Lehre vom Zusammenhang zwischen Bewegung und Kraft, wobei dann eine Antwort auf die Ursache von Bewegungsänderungen gegeben wird. Man kann also in der Mechanik unterscheiden zwischen

Kinematik = Beschreibung der Bewegung  
 Dynamik = Beschreibung des Zusammenhangs zwischen  
 Bewegung und Kraft .

In diesem Abschnitt sollen nur punktförmige Objekte betrachtet werden. Als wichtige neue Begriffe sollen die *Geschwindigkeit* und die *Beschleunigung* eingeführt werden. Unter einem *punktförmigen Objekt* verstehen wir dabei einen Körper mit räumlicher Ausdehnung Null aber endlicher Masse – man spricht von einem *Massenpunkt*. Im Gegensatz zu einem Massenpunkt spricht man von einem *starrten Körper*, wenn das betrachtete Objekt eine endliche räumliche Ausdehnung besitzt, wobei aber alle Teile des ausgedehnten Objekts einen festen Abstand haben (starr: keine Vibrationen, keine Deformation). Wie in Abb.1.11 gezeigt ist, läßt sich jede Bewegung eines starren Körpers als eine Überlagerung einer fortschreitenden Bewegung (*Translation*) des *Schwerpunkts* des Körpers und einer Drehbewegung (*Rotation*) auffassen. Die reine Translationsbewegung eines starren Körpers ist deshalb identisch mit der Bewegung eines Massenpunktes.

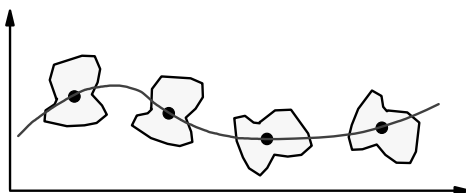


Abbildung 1.11: Die Bahn des Schwerpunkts eines starren Körpers entspricht der Bewegung eines Massenpunktes.

#### Bezugs- und Koordinatensysteme

Die Bahnkurven eines punktförmigen Objekts werden in einem *Bezugssystem* durch den zeitabhängigen Ortsvektor  $\mathbf{r}(t)$  des Objekts beschrieben. Bei einem Wechsel des Bezugssystems ändert sich die Darstellung der Bahnkurve und für gegeneinander bewegte Bezugssysteme ändert sich sogar die Bewegungsform eines Objekts, je nachdem von welchem Bezugssystem aus wir das Objekt betrachten. So ruht z.B. eine in einem fahrenden Zug sitzende Person im Bezugssystem, das mit dem Zug mitbewegt wird, wogegen sich die Person in einem relativ zur Erde ruhenden Bezugssystem bewegt. Würde man das Bezugssystem nicht an die Erde koppeln, sondern an die Sonne, so würde sich durch die zusätzliche Bahnbewegung der Erde um die Sonne in diesem Koordinatensystem eine wiederum andere Bewegungsform ergeben. Daraus kann man ablesen, daß sich die Suche nach einem ausgezeichneten Bezugssystem, von dem aus die “Absolutbewegung” eines Objekts beobachtet werden kann, als erfolglos herausstellt. Es macht nur Sinn, von der Bewegung eines Körpers relativ zu einem mehr oder weniger willkürlich gewählten *Bezugssystem* zu sprechen.<sup>11</sup>

<sup>11</sup>Sitzt man in einem Eisenbahnwaggon und blickt auf einen fahrenden Gegenzug, so kann man oft nicht feststellen, ob sich nur der Gegenzug bewegt oder ob sich der eigene Zug ruckfrei in Bewegung gesetzt hat.



Kölner Stadtanzeiger, September 1999

Abbildung 1.12: Zur Bedeutung von Bezugssystemen: “Der längste Putt”.

Es macht also keinen Sinn von *absoluter Ruhe* oder *Bewegung* zu sprechen. Aus der Tatsache, daß man nur Relativbewegungen von Körpern gegenüber Bezugssystemen beobachten kann und keines dieser System bevorzugt ist, leitet man die Gleichberechtigung einer ganzen Klasse von Bezugssystemen, den *Inertialsystemen*, ab. Weitere Details hierzu werden in Abschnitt 1.8.1 im Zusammenhang mit der *Galilei-Invarianz* diskutiert.<sup>12</sup>

Zur Beschreibung der Bewegung eines Massenpunktes braucht man also

- ein Raumsystem als Bezugssystem (dreidimensional)
- die Zeit (eindimensional)

Zur Festlegung von Punkten, Längen und Bewegungen benutzt man sogenannte *Koordinatensysteme*, die im Bezugssystem fest verankert sind. Das Koordinatensystem wählt man meist so, daß die mathematische Beschreibung von Bewegungen in einem Bezugssystem möglichst einfach wird. Einige gebräuchliche Koordinatensysteme sind in Abb. 1.13 gezeigt, nämlich das *kartesische Koordinatensystem*  $(x, y, z)$ , das *zylindrische Koordinatensystem*  $(\rho, \varphi, z)$  und das *Kugelkoordinatensystem*  $(r, \theta, \varphi)$ . Ein und derselbe Raumpunkt  $P$  läßt sich durch die Koordinaten  $(x, y, z)$ ,  $(\rho, \varphi, z)$  oder  $(r, \theta, \varphi)$  charakterisieren. Die verschiedenen Koordinaten lassen sich auf folgende Weise ineinander umrechnen:

<sup>12</sup>Es sei hier angemerkt, daß im *ptolemäischen Weltbild* angenommen wurde, daß die Erde ruht und der Fixsternhimmel sich bewegt. Im *kopernikanischen Weltsystem* wurde dagegen der Fixsternhimmel als ruhend angenommen. Während es nach den Gesetzen der Mechanik unzulässig wäre, anzunehmen, daß die Erde ruht und der Fixsternhimmel sich bewegt, ist die umgekehrte Annahme mit ihnen verträglich. D.h. das ptolemäische Weltsystem widerspricht unserer Mechanik, während das kopernikanische mit ihr im Einklang ist.

$$\begin{aligned}
 \text{Kartesische Koordinaten :} & \quad x, y, z \\
 \text{Zylinderkoordinaten :} & \quad \rho, \varphi, z \\
 & \quad x = \rho \cos \varphi \\
 & \quad y = \rho \sin \varphi \\
 & \quad z = z \\
 \text{Kugelkoordinaten :} & \quad r, \theta, \varphi \\
 & \quad x = r \sin \theta \cos \varphi \\
 & \quad y = r \sin \theta \sin \varphi \\
 & \quad z = r \cos \theta
 \end{aligned}
 \tag{1.3.1}$$

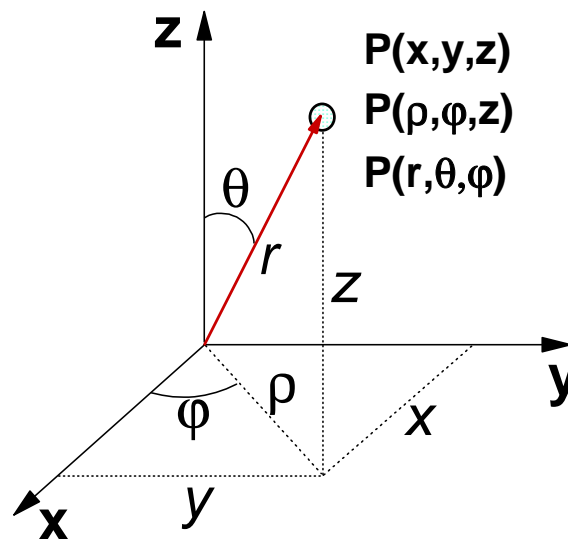


Abbildung 1.13: Kartesisches Koordinatensystem  $(x, y, z)$ , zylindrisches Koordinatensystem  $(\rho, \varphi, z)$  und Kugelkoordinatensystem  $(r, \theta, \varphi)$ .

Im kartesischen Koordinatensystem ist der Abstand  $r$  eines Punktes vom Koordinatenanfangspunkt gegeben durch

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} . \tag{1.3.2}$$

Den Abstand  $d$  zweier Punkte erhält man zu

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} . \tag{1.3.3}$$

### 1.3.1 Geschwindigkeit

#### Gleichförmige, geradlinige Bewegung

In einem vorgegebenen kartesischen Koordinatensystem soll zunächst die nach dem Zustand der Ruhe einfachste Bewegungsform, die *gleichförmige Bewegung* diskutiert werden. Darunter versteht man die in

Abb. 1.14a gezeigte Bewegung eines Körpers, der auf einer geradlinigen Bahn in gleichen Zeitabständen  $\Delta t$  gleiche Bahnabschnitte  $\Delta s$  durchläuft, d.h.  $\Delta s \propto \Delta t$  (das Zeichen  $\propto$  steht für “proportional zu”). Der Proportionalitätsfaktor heißt *Geschwindigkeit*  $v$  (von lat. “*velocitas*”):

$$\Delta s = v \cdot \Delta t \quad . \quad (1.3.4)$$

Die Geschwindigkeit ist demnach die pro Zeiteinheit zurückgelegte Wegstrecke:

$$v := \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\text{zurückgelegter Weg}}{\text{verstrichene Zeit}} \quad [v] = \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad . \quad (1.3.5)$$

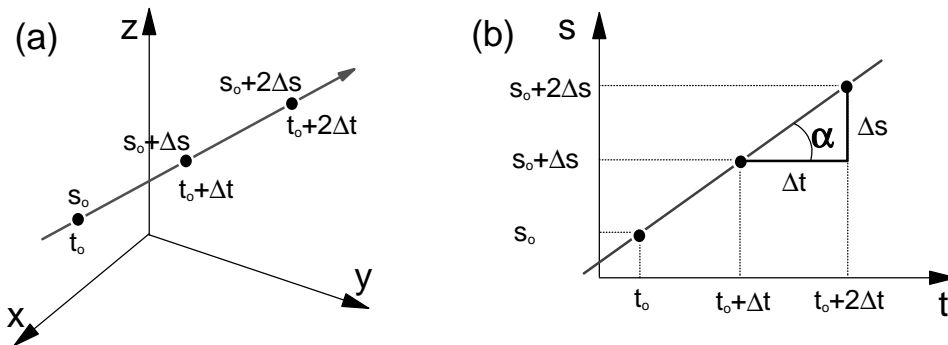


Abbildung 1.14: (a) Die geradlinige gleichförmige Bewegung. (b) Weg-Zeit-Diagramm der gleichförmigen Bewegung.

In dem in Abb. 1.14b gezeigten Weg-Zeit-Diagramm bedeutet  $v$  die Steigung der Geraden. Für die Steigung gilt:

$$v := \frac{\Delta s}{\Delta t} = \tan \alpha \quad . \quad (1.3.6)$$

Je steiler die Gerade, desto größer ist also die Geschwindigkeit. Aus dem Weg-Zeit-Diagramm ergibt sich außerdem sofort die auf dem Fahrstrahl zurückgelegte Strecke  $s$  als Funktion der verstrichenen Zeit  $t$  zu

$$s = s_0 + \sum \Delta s = s_0 + \sum v \Delta t = s_0 + v \sum \Delta t \quad , \quad (1.3.7)$$

da die Konstante  $v$  vor die Summe gezogen werden kann. Beginnend beim Zeitpunkt  $t_0$  liefert die Summation der Zeitintervalle  $\Delta t$  aber gerade  $\sum \Delta t = (t - t_0)$ , so daß man den zur Zeit  $t$  zurückgelegten Weg wie folgt ausdrücken kann:

$$s(t) = s_0 + v(t - t_0) \quad . \quad (1.3.8)$$

Diese in  $t$  lineare Funktion ist in Abb. 1.14b dargestellt.



## Messung von Geschwindigkeiten

**A: Bestimmung der Geschößgeschwindigkeit:**

Auf der verlängerten Achse eines Elektromotors sind zwei Pappscheiben im Abstand  $d$  angebracht, die mit der Drehzahl  $U$  (Umdrehungen pro Minute) des Motors rotieren. Feuert man aus einem Gewehr eine Kugel parallel zur Achse des Motors ab, so durchschlägt die Kugel die beiden Pappscheiben. Aufgrund des Abstands der Pappscheiben und der nur endlichen Geschwindigkeit des Geschosses, hat sich die zweite Pappscheibe bereits um den Winkel  $\alpha$  weitergedreht, bis sie von der Gewehrkugel durchschlagen wird. Da der in der Sekunde durchlaufene Winkel  $360^\circ \cdot U/60$ s beträgt, erhält man für den in der Zeit  $t$  durchlaufenen Winkel

$$\alpha [^\circ] = t[\text{s}] \frac{U[\text{Umdrehungen pro Minute}]}{60} \cdot 360 .$$

Für die Flugzeit  $t$  des Geschosses zwischen den beiden Scheiben und die Geschößgeschwindigkeit ergibt sich

$$t = \frac{\alpha \cdot 60}{360 \cdot U}$$

$$v = \frac{d}{t} = \frac{d \cdot 360 \cdot U}{\alpha \cdot 60} .$$

Für eine Geschößgeschwindigkeit von 300 m/s, einem Scheibenabstand von 1 m und einer Motordrehzahl von 2400 Umdrehungen/min ergibt sich ein Winkel von etwa  $45^\circ$ , der bequem gemessen werden kann.

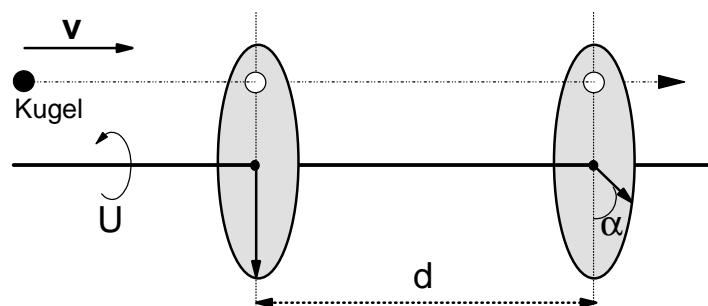


Abbildung 1.15: Experimentelle Anordnung zur Bestimmung der Geschwindigkeit eines Geschosses.

**B: Messung der Schallgeschwindigkeit in Luft:**

Ein Lautsprecher erzeugt einen kurzen Ton, wodurch eine Quarzuhr gestartet wird. Im Abstand  $d$  vom Lautsprecher befindet sich ein Mikrofon, das den eintreffenden Schall registriert und die Uhr nach der Zeit  $t$  stoppt. Durch Messung von  $d$  und  $t$  erhält man dadurch die Schallgeschwindigkeit in Luft bei Atmosphärendruck zu etwa 330 m/s.

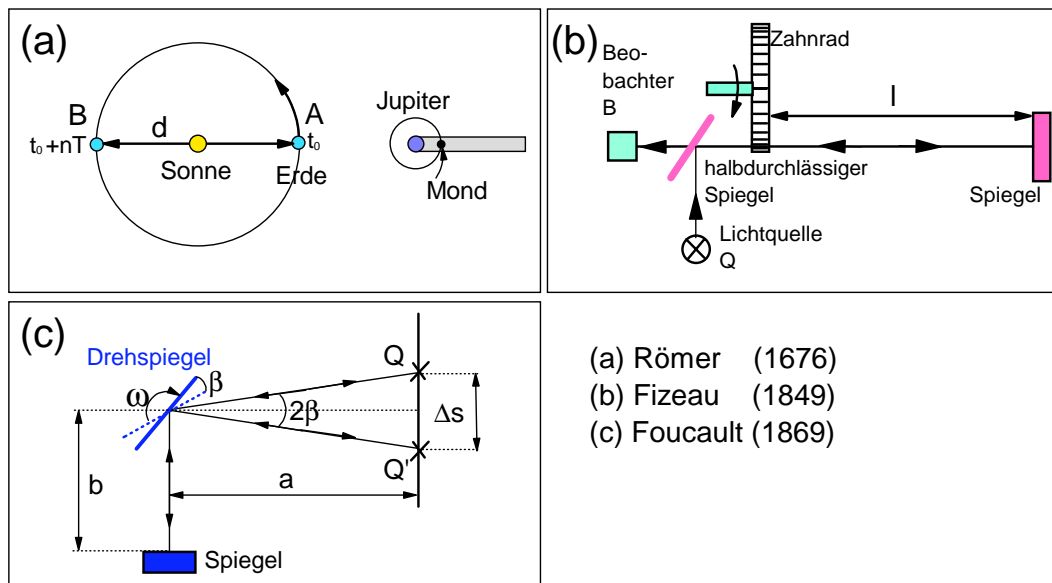
**C: Messung der Lichtgeschwindigkeit – Geschichtliche Entwicklung:**

**1. Olaf Römer (1676):** Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts wurde erstmals von **Olaf Römer** mittels einer astronomischen Methode nachgewiesen, bei der große Entfernungen und deshalb große Laufzeiten des Lichts auftreten. **Römer** untersuchte die Verfinsterung der Jupitermonde. Die Umlaufzeit eines Jupitermondes sei  $T$ . In der Stellung  $A$  der Erde in der Bahn um die Sonne werde zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t_0$  eine Verfinsterung beobachtet (siehe Abb. 1.16a). In der Zeit, in der sich die Erde von der Stellung  $A$  in die Stellung  $B$  bewegt, macht der Mond eine bestimmte Anzahl  $n$  von Umläufen um den Jupiter.<sup>a</sup> Es läßt sich also die Zeit  $t = t_0 + nT$  vorausberechnen, wann der Mond in der Erdstellung  $B$  in den Jupiterschatten treten sollte, falls die Lichtgeschwindigkeit unendlich groß ist. Tatsächlich stellt man aber fest, daß dieses Ereignis um 1000 s später als vorausberechnet eintritt. Dieses Ergebnis läßt sich dadurch erklären, daß das Lichtsignal, das in der Stellung  $B$  den Eintritt der Verfinsterung angibt, 1000 s benötigt, um den Durchmesser der Erdbahn  $d = 3 \times 10^{11}$  m zu durchlaufen. Damit ergibt sich die Lichtgeschwindigkeit zu  $c = 3 \times 10^{11} / 10^3 = 3 \times 10^8$  m/s.

<sup>a</sup>Die Umlaufzeit des dem Jupiter am nächsten Mondes beträgt 42 Stunden 28 Minuten und 36 Sekunden.

**2. Fizeau (1849):** Die Lichtgeschwindigkeit wurde erstmals von **Fizeau** mit irdischen Lichtwegen gemessen (siehe Abb. 1.16b). Die von **Fizeau** verwendete Zahnradmethode enthält das Prinzip aller modernen Meßverfahren. Das von der Lichtquelle  $Q$  ausgehende Licht wird von einem halbdurchlässigen Spiegel reflektiert und tritt durch die Lücke eines Zahnrades. Nach dem Weg  $l$  wird es an einem Spiegel reflektiert und gelangt zum Beobachter. Wird das Rad mit einer bestimmten Umlaufzeit  $T$  gedreht, so kann gerade der nächste Zahn an die Stelle der Lücke gerückt sein, während das Licht zum Spiegel hin- und wieder zurückläuft. Es wird dann vom Zahnrad abgefangen, das Gesichtsfeld des Beobachters bleibt dunkel. Ist die Frequenz  $\nu = 1/T$  und hat das Zahnrad  $N$  Zähne (wobei Zähne und Lücken gleich breit sein sollen), so ist  $t = 1/2N\nu$  die Zeit, die das Licht zum Durchlaufen der Strecke  $2l$  benötigt. Damit ergibt sich die Lichtgeschwindigkeit zu  $c = 2l/t = 4Nl\nu$ . Im Experiment von **Fizeau** war  $l = 8,6$  km,  $N = 720$  und  $\nu = 12,6$  s<sup>-1</sup>. Daraus ergab sich  $c = 3,13 \times 10^8$  m/s. Moderne Messungen verwenden polarisiertes Licht und statt des Zahnrades eine Kerr-Zelle, die mit Wechselstrom betrieben wird, als Lichtschranke (siehe unten).

**3. Foucault (1869):** Ein anderes Verfahren zur Messung der Lichtgeschwindigkeit ist die Drehspiegelmethode, die erstmals 1869 von **Foucault** verwirklicht wurde. Das Prinzip ist in Abb. 1.16c gezeigt. Das von  $Q$  ausgehende Lichtbündel läuft nach Reflexion an den Spiegeln in sich zurück, wenn der Drehspiegel ruht. Bei Rotation des Drehspiegels mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  wird jedoch eine Verschiebung  $\Delta s$  des Bildes  $Q'$  gegenüber  $Q$  festgestellt. Diese kommt dadurch zustande, daß sich der Drehspiegel in der Zeit  $\Delta t$ , in der das Licht vom Drehspiegel die Strecke  $b$  zum festen Spiegel und wieder zurück läuft, um den Winkel  $\beta = \omega\Delta t$  gedreht hat. Die Verschiebung  $\Delta s$  entspricht dann dem Winkel  $2\beta$  zwischen einfallendem und reflektiertem Strahl. Somit ist  $c = 2b/\Delta t = 2b\omega/\beta$ . Mit  $2\beta \simeq \Delta s/a$  folgt  $c = 4ab\omega/\Delta s$ . **Foucault** erhielt für  $b = 20$  m,  $\omega = 2\pi \cdot 8 \times 10^2$  s<sup>-1</sup> und  $a = 1$  m eine Verschiebung  $\Delta s = 1,34$  mm, woraus er  $c = 3 \times 10^8$  m/s erhielt.



(a) Römer (1676)  
 (b) Fizeau (1849)  
 (c) Foucault (1869)

Abbildung 1.16: Zur Messung der Lichtgeschwindigkeit nach Römer (a), Fizeau (b) und Foucault (c).

#### D: Messung der Lichtgeschwindigkeit – Laborexperimente:

**1. Laufzeitexperiment mit Kerr-Zelle:** Eine intensive Lichtquelle erzeugt einen intensiven Lichtstrahl, aus dem mit Hilfe eines schnellen Schalters ("Kerr-Effekt") zur Zeit  $t = 0$  ein kurzer Lichtpuls herausgeschnitten wird. Nach Durchlaufen der Strecke  $d$  wird der Lichtpuls mit einem schnellen Photodetektor registriert. Die Laufzeit  $t$  des Lichtimpulses über die Strecke  $d$  wird mit Hilfe eines Oszilloskops gemessen (etwa 100 ns für  $d = 30$  m). Man erhält somit die Lichtgeschwindigkeit zu  $c \simeq 3 \times 10^8$  m/s.

**2. Mikrowellen-Interferometer:** Ein Mikrowelleninterferometer funktioniert wie das in Abb. 1.2 beschriebene Michelson-Interferometer. Bei bekannter Frequenz  $\nu$  ( $\sim 100$  GHz) der Mikrowelle wird die Wellenlänge  $\lambda$  aus der Verschiebung des Spiegels zwischen zwei Intensitätsmaxima gemessen. Da die typische Wellenlänge der Mikrowellen im Bereich von 0.1 bis 1 cm liegt, kann die Verschiebung bequem gemessen werden. Die Lichtgeschwindigkeit ergibt sich zu  $c = \nu \cdot \lambda$ . Eine abgewandelte Methode stellt die Hohlraum-Resonator Methode dar. Ein Mikrowellen-Resonator wird z.B. durch zwei planparallele Platten im Abstand  $l = n \cdot \lambda$  gebildet. Durch Messung von  $l$  kann  $\lambda$  bestimmt werden und man erhält wiederum  $c = \nu \cdot \lambda$ .

Es soll hier nochmals darauf hingewiesen werden, daß seit 1983 die Lichtgeschwindigkeit auf  $c = 299\,792\,458$  m/s als Naturkonstante festgelegt ist und dadurch die Länge über die Naturkonstante  $c$  an die Zeitdefinition gekoppelt wurde (vergleiche hierzu Abschnitt 1.2.2).

#### Ungleichförmige, geradlinige Bewegung

Im Gegensatz zu der bisher betrachteten gleichförmigen Bewegung legt ein Körper bei einer ungleichförmigen Bewegung in gleichen Zeitabschnitten  $\Delta t$  keine gleichen Strecken  $\Delta s$  zurück (siehe Abb. 1.17). Im Weg-Zeit-Diagramm ist die Kurve  $s(t)$  gekrümmt, d.h. sie besitzt keine konstante Steigung mehr. Damit wird die Geschwindigkeit selbst eine Funktion der Zeit:  $v = v(t)$ . Während für eine gleichförmige Bewegung bei der Bestimmung der Geschwindigkeit aus dem Weg-Zeit-Diagramm

die Länge des verwendeten Zeitintervall gleichgültig war, erhält man für die ungleichförmige Bewegung für verschiedene Zeitintervalle verschiedene Geschwindigkeiten. Der Wert der *Momentangeschwindigkeit*  $v(t)$  ergibt sich, wenn man zu immer kleineren (in der Grenze "infinitesimalen") Meßintervallen übergeht. Daher liegt es nahe, in Verallgemeinerung von Gl.(1.3.5) die Geschwindigkeit  $v$  zu definieren als

$$v(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} . \quad (1.3.9)$$

Hierbei läßt sich der Differentialquotient  $ds/dt$  im Weg-Zeit-Diagramm als Steigung der Tangente an die Kurve  $s(t)$  interpretieren.

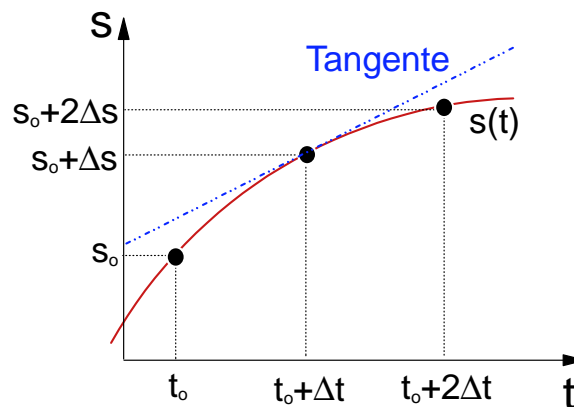


Abbildung 1.17: Weg-Zeit-Diagramm der nichtgleichförmigen Bewegung.

### Nicht-geradlinige Bewegung

Bei der Betrachtung von geradlinigen Bewegungen genügt eine skalare Betrachtungsweise, da das Koordinatensystem immer so gewählt werden kann, daß eine Achse ( $s$ -Achse) parallel zur Bahn ist. Dann wird der Bewegungsvorgang zu einem eindimensionalen Problem, die einzelnen Bahnabschnitte entsprechen den Koordinatenabschnitten auf der  $s$ -Achse. Bei einer nicht-geradlinigen oder krummen Bewegung läßt sich diese Vereinfachung nicht mehr machen. Die Bahnkurve muß durch einen zeitlich veränderlichen Ortsvektor  $\mathbf{r}$  im dreidimensionalen Ortsraum beschrieben werden (siehe Abb. 1.18).

Zum Zeitpunkt  $t$  wird die Lage des betrachteten Körpers durch den Ortsvektor  $\mathbf{r}(t)$ , zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  durch den Vektor  $\mathbf{r}(t + \Delta t)$  festgelegt. In der Zeit  $\Delta t$  hat sich der Körper auf der Bahnkurve um das Wegstück  $\Delta s$  weiterbewegt und die Lage des Körpers hat sich um  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$  verschoben. Die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall  $\Delta t$  ist dann  $\bar{\mathbf{v}} = \Delta \mathbf{r} / \Delta t$ . In Verallgemeinerung der oben bei der geradlinigen Bewegung verwendeten Geschwindigkeitsdefinition (Gl.(1.3.9)) definiert man die *Momentangeschwindigkeit* entlang der Bahnkurve zu

$$\mathbf{v}(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} . \quad (1.3.10)$$

Für infinitesimale Meßintervalle  $\Delta \mathbf{r}$  und  $\Delta t$  stellt das Verhältnis  $\Delta \mathbf{r} / \Delta t$  tatsächlich die zum Zeitpunkt  $t$  herrschende *Momentangeschwindigkeit*  $\mathbf{v}(t)$  dar. Gleichung (1.3.10) gibt somit eine allgemeine Definition der Geschwindigkeit auch für Bewegungen, bei denen sich die Geschwindigkeit nach Betrag und

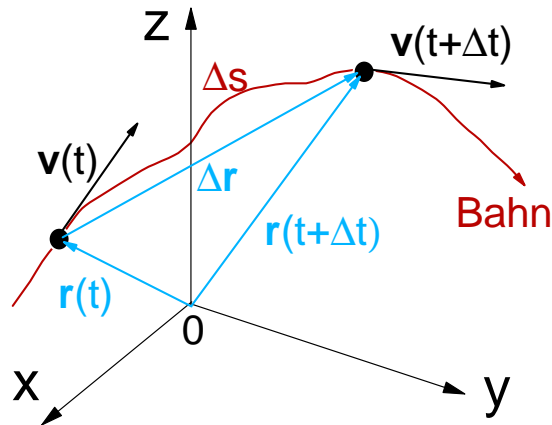


Abbildung 1.18: Zur Definition der Geschwindigkeit bei einer ungleichförmigen, nicht-geradlinigen Bewegung.

Richtung zeitlich ändert. Da im Limes  $\Delta t \rightarrow 0$  der Verschiebungsvektor  $\Delta \mathbf{r}$  für infinitesimal benachbarte Bahnpunkte tangential zur Bahn gerichtet ist, folgt aus der Definitionsgleichung (1.3.10), daß die Geschwindigkeit immer in Richtung der Tangente an die Bahnkurve weist (siehe Abb. 1.18). Da ferner  $\Delta \mathbf{r}$  ein Vektor und  $\Delta t$  ein Skalar ist, ist die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  selbst ein Vektor. In kartesischen Koordinaten erhält man folgende Ausdrücke für die Komponenten  $v_x$ ,  $v_y$  und  $v_z$  sowie den Betrag  $v$  der Geschwindigkeit:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}, \quad (1.3.11)$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \quad (1.3.12)$$

Mit Hilfe des Betrags  $v$  der Geschwindigkeit läßt sich der Geschwindigkeitsvektor mit Hilfe des *Tangenteneinheitsvektors*  $\hat{\mathbf{t}}$  als

$$\mathbf{v}(t) = v(t) \cdot \hat{\mathbf{t}} \quad (1.3.13)$$

ausdrücken. Diese Schreibweise zeigt explizit, daß die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t)$  immer tangential an die Bahnkurve gerichtet ist.<sup>13</sup>

Mit Hilfe der in Gl.(1.3.10) gegebenen Definition kann man ausgehend vom Ortsvektor  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$  zur Zeit  $t_0$  bei bekannter Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t)$  den Ortsvektor  $\mathbf{r}(t)$  zur Zeit  $t$  berechnen zu

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t') dt' \quad (1.3.14)$$

Das Zeitintegral der Geschwindigkeit auf der rechten Seite von Gl.(1.3.14) ergibt damit die Verschiebung  $\Delta \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0$ . Weiterhin erhält man den entlang der Bahn zurückgelegten Weg  $\Delta s = s(t) - s(t_0) = s(t) - s_0$  durch Integration des Betrags  $v$  der Geschwindigkeit:

<sup>13</sup>Der Tangenteneinheitsvektor ist durch  $\hat{\mathbf{t}} := d\mathbf{r}(s)/ds$  definiert. Er ist also tangential an die Bahnkurve gerichtet und wie sich leicht zeigen läßt ist  $|\hat{\mathbf{t}}| = 1$ .

$$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^t v(t') dt' \quad \text{bzw.} \quad \Delta s(t) = \int_{t_0}^t v(t') dt' \quad . \quad (1.3.15)$$

Ein Vergleich von Gl.(1.3.14) und Gl.(1.3.15) macht klar, daß z.B. für eine hin- und herpendelnde Bewegung die Verschiebung  $\Delta \mathbf{r}(t)$  immer wieder zu Null wird, die Funktion  $\Delta s(t)$  dagegen monoton mit der Zeit ansteigt. Von einem willkürlichen Nullpunkt  $s(t_0) = 0$  auf der Bahn aus gibt  $\Delta s(t)$  die *Bogenlänge* der Bahnkurve an.

### Zusammensetzung und Zerlegung von Bewegungen

Der vektorielle Charakter der Geschwindigkeit schließt die Möglichkeit ein, die Geschwindigkeit in Komponenten zu zerlegen oder zwei Geschwindigkeiten zu einer zusammenzusetzen, wie allgemein in Abb. 1.19 gezeigt ist.

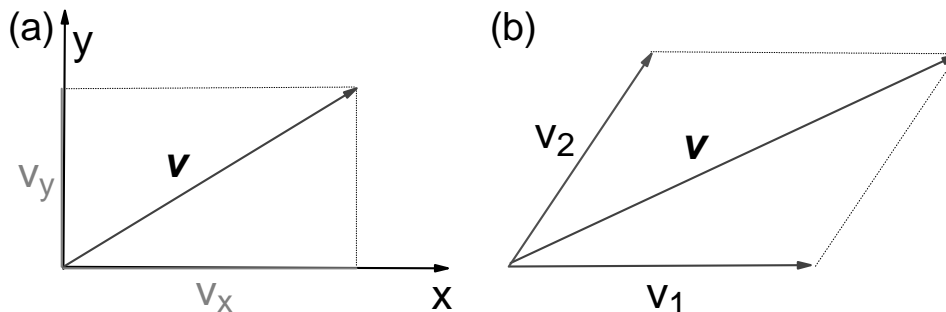


Abbildung 1.19: Komponentenzerlegung (a) und Addition (b) von Geschwindigkeiten.

Ein Beispiel für die Zerlegung von Geschwindigkeiten ist in Abb. 1.20 gegeben: ein Schwimmer durchquert einen Fluß, der mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_1$  strömt, relativ zum Fluß bewegt sich der Schwimmer mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_2$ . Die resultierende Gesamtgeschwindigkeit des Schwimmers (vom Ufer aus betrachtet) ist dann  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ . Ein wichtiger Satz zur Zerlegung von Geschwindigkeiten lautet, daß Bewegungen, die senkrecht zueinander erfolgen, unabhängig voneinander sind. Schwimmt der Schwimmer genau senkrecht zur Strömung des Flusses, so wird er unabhängig von der Strömungsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_1$  des Flusses immer nach der gleichen Zeit das andere Ufer erreichen, da hierfür nur die senkrecht zu  $\mathbf{v}_1$  gerichtete Schwimmgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_2$  maßgebend ist.

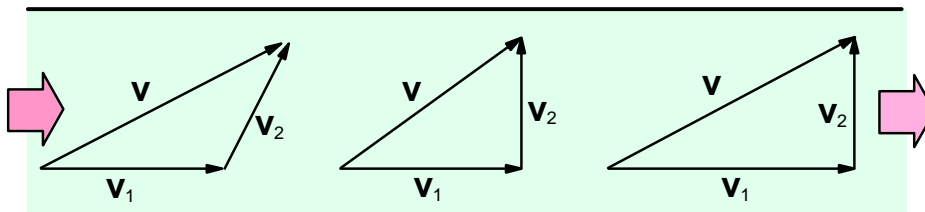


Abbildung 1.20: Ein Schwimmer in einem Fluß der Strömungsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_1$  hat relativ zum Fluß die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_2$  und relativ zum Ufer die Geschwindigkeit  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ .

### 1.3.2 Beschleunigung

Eine Bewegung, bei der sich der Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$  im Laufe der Zeit ändert, nennt man eine *beschleunigte Bewegung*. Deshalb ist jede ungleichförmige Bewegung eine beschleunigte Bewegung.

**Experiment: Freier Fall und schiefer Wurf:**

Man betrachtet 2 Kugeln  $A$  und  $B$  (siehe Abb. 1.21a). Kugel  $A$  erhält eine Anfangsgeschwindigkeit  $v_x$  in  $x$ -Richtung, wobei für Kugel  $B$   $v_x = 0$  gilt. Sobald Kugel  $A$  die Rampe verläßt und frei fallen kann, wird auch Kugel  $B$  in gleicher Höhe losgelassen. Da die Horizontal- und Vertikalgeschwindigkeit getrennt betrachtet werden können, kann man sofort folgende Schlußfolgerungen treffen. (i) Beide Kugeln erreichen zur selben Zeit den Boden. (ii) Da die Höhe  $z$  für beide Kugeln zu allen Zeiten gleich groß ist (gleiche Fallbewegung), stoßen die Kugeln unabhängig von der Horizontalgeschwindigkeit  $v_x$  immer zusammen.

In Abb. 1.21b ist ein weiteres Experiment zur Demonstration der gleichen Fallzeiten beim horizontalen Wurf gezeigt. Ein Hammer schlägt auf eine Blattfeder und verursacht somit eine Horizontalgeschwindigkeit von Kugel  $A$ . Gleichzeitig fällt Kugel  $B$  senkrecht nach unten. Unabhängig von der mit dem Hammer erzeugten Horizontalgeschwindigkeit schlagen beide Kugeln immer gleichzeitig am Boden auf.

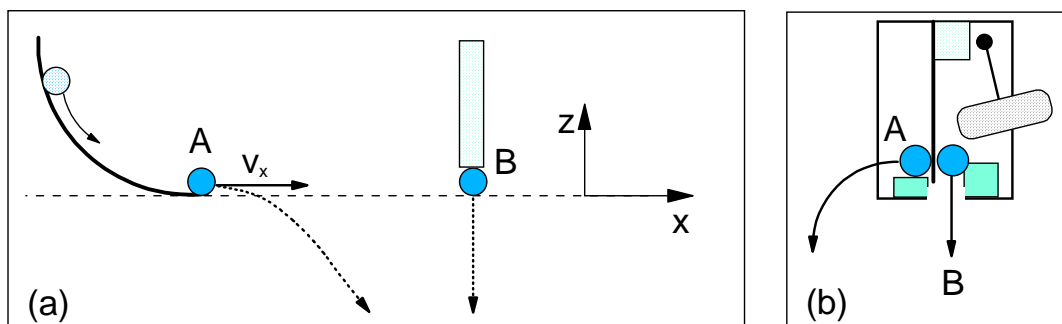


Abbildung 1.21: Freier Fall von zwei Kugeln  $A$  und  $B$  mit unterschiedlichen Horizontalgeschwindigkeiten  $v_x$ .

Für die Beschleunigung verwendet man häufig das Symbol  $a$  von lat. “acceleratio”.

Es ist naheliegend, die Beschleunigung als die Änderung der Geschwindigkeit  $\Delta \mathbf{v}$  im Verlauf des Zeitintervalls  $\Delta t$ , dividiert durch das Zeitintervall  $\Delta t$  zu definieren. Anhand von Abb. 1.23 erhält man

$$\mathbf{v}(t + \Delta t) = \mathbf{v}(t) + \Delta \mathbf{v} \quad \Rightarrow \Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t) \quad (1.3.16)$$

$$\text{und } (t + \Delta t) = t + \Delta t \quad \Rightarrow \Delta t = (t + \Delta t) - t \quad (1.3.17)$$

Um wie bei der Geschwindigkeit auch bei der Beschleunigung den Momentanwert zur Zeit  $t$  zu erfassen, geht man mit dem Meßintervall  $\Delta t$  gegen Null. Die Beschleunigung ergibt sich somit zu

**Experiment: Welche Kugel ist schneller am Ziel ?**

Man betrachtet 2 Kugeln  $A$  und  $B$  (siehe Abb. 1.22). Beide Kugeln haben die gleiche Horizontalgeschwindigkeit  $v_x$ . Man würde deshalb erwarten, daß beide Kugeln gleichzeitig am Ziel ankommen würden (für die Horizontalbewegung ist nur  $v_x$  maßgebend) oder daß Kugel  $B$  später ankommt, da sie einen längeren Weg zu durchlaufen hat. Im Experiment werden diese Erwartungen allerdings widerlegt. Kugel  $B$  erhält durch die Mulde in der Bahn eine zusätzliche Beschleunigung und läuft deshalb einen Teil der Wegstrecke mit höherer Geschwindigkeit als Kugel  $A$  und erreicht somit trotz des längeren Wegs als erste das Ziel. Die genaue Berechnung erfordert etwas Zeit.

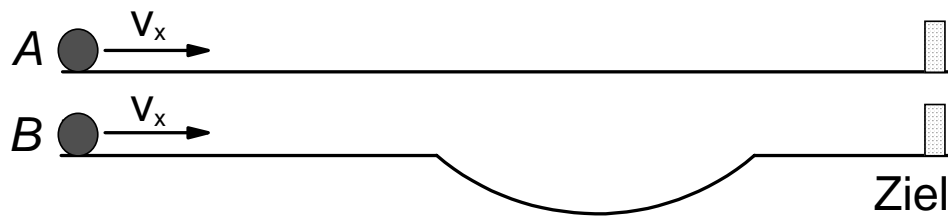


Abbildung 1.22: Kugel  $B$  erreicht trotz des längeren Wegs als erste das Ziel, da sie durch die Mulde eine zusätzliche Beschleunigung erfährt.

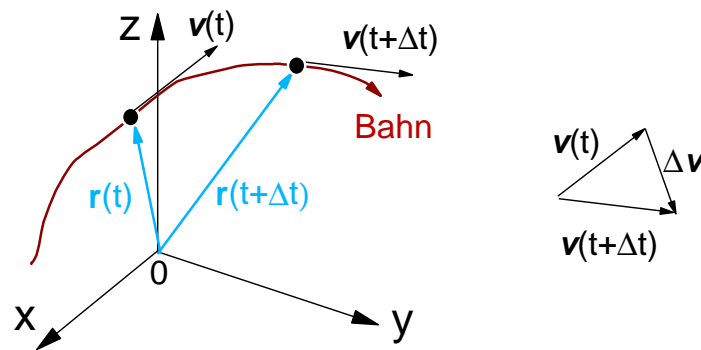


Abbildung 1.23: Beschleunigte Bewegung.

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (1.3.18)$$

$$[\mathbf{a}] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2} . \quad (1.3.19)$$

Laut dieser Definition ist die Beschleunigung ein Vektor. Es sei darauf hingewiesen, daß eine Beschleunigung  $\mathbf{a} \neq 0$  auch dann vorliegt, wenn der Betrag der Geschwindigkeit konstant bleibt, sich aber die Richtung des Geschwindigkeitsvektors ändert. Die spezielle Bewegungsform mit  $\mathbf{a} = \text{const.}$  heißt *gleichförmig beschleunigte Bewegung*.

Als Differentialquotient geschrieben wird aus Gl.(1.3.19)

$$\mathbf{a}(t) := \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} . \quad (1.3.20)$$

und mit Hilfe von Gl.(1.3.10) ergibt sich

$$\mathbf{a}(t) := \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} . \quad (1.3.21)$$

Die Beschleunigung ist also die erste Ableitung der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t)$  bzw. die zweite Ableitung des Ortsvektors  $\mathbf{r}(t)$  nach der Zeit. In Komponenten lauten die Gln.(1.3.20) und (1.3.21)

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}, \quad (1.3.22)$$



und für den Betrag der Beschleunigung erhält man

$$a = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_z}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}. \quad (1.3.23)$$

In Gl.(1.3.13) wurde gezeigt, daß die Geschwindigkeit immer tangential an die Bahnkurve gerichtet ist. Mit  $\mathbf{v} = v \cdot \hat{\mathbf{t}}$  erhält man:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(v \cdot \hat{\mathbf{t}})}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{t}} + v \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} \quad (1.3.24)$$

Die Beschleunigung läßt sich also somit in zwei Teile zerlegen: Der erste Summand gibt die Tangentialkomponente der Beschleunigung an, deren Größe der Änderung des Betrags der Geschwindigkeit entspricht. Die Bedeutung des zweiten Summanden wird nur nach einigen Umformungen ersichtlich. Mit Hilfe von

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \frac{ds}{dt} \quad (1.3.25)$$

folgt

$$v \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} = v^2 \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = v^2 \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2}. \quad (1.3.26)$$

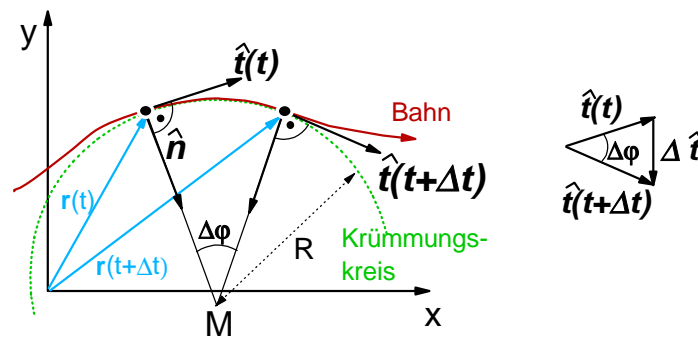


Abbildung 1.24: Tangentialvektor  $\hat{\mathbf{t}}$  und Hauptnormalenvektor  $\hat{\mathbf{n}}$  an einem Punkt der Bahnkurve.

Um den Ausdruck  $d\hat{\mathbf{t}}/ds$  zu berechnen, betrachtet man die in Abb. 1.24 gezeichnete Bahnkurve. Die Bahnkurve wird im Bereich zwischen den Bahnpunkten  $\mathbf{r}(t)$  und  $\mathbf{r}(t + \Delta t)$  für kleine  $\Delta t$  durch einen Kreis approximiert, der sich optimal der Bahnkurve anpassen soll. Dieser *Krümmungskreis* besitzt den Radius  $R$ . Für den Winkel  $\Delta\varphi$  gilt nach Abb. 1.24

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{R} \simeq \frac{|\Delta\hat{\mathbf{t}}|}{|\hat{\mathbf{t}}|} = |\Delta\hat{\mathbf{t}}| \quad (1.3.27)$$

und damit erhält man

$$\frac{|\Delta\hat{\mathbf{t}}|}{\Delta s} = \frac{1}{R} \quad \text{und damit} \quad \frac{d|\hat{\mathbf{t}}|}{ds} = \frac{1}{R} \quad (1.3.28)$$

Vom Punkt  $M$  aus erscheint das Bogenstück  $\Delta s$  auf der Bahn unter dem Winkel  $\Delta\varphi$  und im Limes  $\Delta s \rightarrow 0$  ist  $\Delta s = R\Delta\varphi$ , wenn  $\Delta\varphi$  im Bogenmaß gemessen wird. Die Richtung von  $d\hat{\mathbf{t}}/ds$  kann man aus folgender Überlegung gewinnen: Da  $|\hat{\mathbf{t}}| = 1$  folgt  $\hat{\mathbf{t}}^2 = 1$ . Da die Ableitung einer Konstanten Null ergibt, erhält man:

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}^2}{ds} = 2\hat{\mathbf{t}}\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = 0 \Rightarrow \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \perp \hat{\mathbf{t}} . \quad (1.3.29)$$

Mit dem *Hauptnormalenvektor*  $\hat{\mathbf{n}}$ , der vom Bahnpunkt  $\mathbf{r}(t)$  zum Krümmungsmittelpunkt  $M$  gerichtet ist und den Betrag 1 hat, läßt sich  $d\hat{\mathbf{t}}/ds$  schreiben als

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = \frac{1}{R} \hat{\mathbf{n}} . \quad (1.3.30)$$

Der zweite Summand in Gl.(1.3.24) gibt also die *Normalkomponente* der Beschleunigung an, deren Betrag durch das Quadrat der Bahngeschwindigkeit dividiert durch den Krümmungsradius gegeben ist. Somit kann die Beschleunigung grundsätzlich in eine *Tangentialkomponente*  $\mathbf{a}_t$  und *Normalkomponente*  $\mathbf{a}_n$  zerlegt werden

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{t}} + \frac{v^2}{R} \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n . \quad (1.3.31)$$

Zum Abschluß sollen einige Sonderfälle diskutiert werden:

### Geradlinige Bewegung:

In diesem Fall sind Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung immer kollinear. Die Normalkomponente der Beschleunigung ist Null, nur die Tangentialkomponente bleibt übrig. Ist die Beschleunigung bekannt, so kann durch Integration die Geschwindigkeit, der Ortsvektor und der zurückgelegte Weg berechnet werden:

$$\mathbf{v}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{a}(t') dt' \quad (1.3.32)$$

$$\mathbf{r}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t') dt' \quad (1.3.33)$$

$$s(t) = \int_{t_0}^t v(t') dt' \quad (1.3.34)$$

Für eine zeitlich konstante Beschleunigung  $\mathbf{a}(t) = \text{const.}$  (*gleichförmige Beschleunigung*) erhält man

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}(t - t_0) \quad (1.3.35)$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t - t_0)^2 \quad (1.3.36)$$

$$s(t) = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 . \quad (1.3.37)$$

Hierbei sind  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ ,  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_0)$  und  $s_0 = s(t_0)$  der Ortsvektor, die Geschwindigkeit und die Wegstrecke zur Zeit  $t = t_0$ . Im speziellen Fall  $t_0 = 0$ ,  $v_0 = 0$  und  $s_0 = 0$  ergibt sich

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{a}t \quad (1.3.38)$$

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 \quad (1.3.39)$$

Bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung nimmt also die Geschwindigkeit linear und der zurückgelegte Weg quadratisch mit der Zeit zu, d.h. die Funktion  $s(t)$  ist eine Parabel.

**Experiment: Luftkissen-Bahn:**

Messung von  $v$  und  $s$  mit Hilfe einer geeigneten Bahn, auf der sich ein Fahrzeug mit vernachlässigbarer Reibung auf einem Luftkissen bewegt. Man kann experimentell die in Gl.(1.3.39) hergeleiteten Zusammenhänge verifizieren.

**Experiment: Freier Fall:**

Ein einfaches Beispiel für eine geradlinige, gleichförmig beschleunigte Bewegung ist der freie Fall. Die vertikale Beschleunigung ist durch die Erdbeschleunigung  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  gegeben (der genaue Wert hängt vom Ort auf der Erdoberfläche ab und ist unabhängig von der Masse, eine genaue Erklärung folgt später). Aufgrund der Unabhängigkeit von  $g$  von der Masse fallen alle Körper gleich schnell. Die im Alltagsleben für unterschiedliche Körper (z.B. Feder und Bleikugel) beobachteten unterschiedlichen Fallgeschwindigkeiten hängen nur mit der Luftreibung zusammen.

(a) Läßt man eine Styroporkugel in einem evakuierten Rohr fallen (keine Luftreibung mehr), so fällt sie so schnell wie eine gleichgroße Bleikugel.

(b) Experiment mit Fallschnüren:

An zwei Schnüren werden Eisenkugeln befestigt und zwar an Schnur  $A$  in gleichen Abständen und an Schnur  $B$  in Abständen, die sich wie 1:4:9:16:25 verhalten. Beide Schnüre werden an der Decke so aufgehängt, daß die unterste Kugel fast den Boden berührt. Schneidet man dann die Schnüre ab, so schlagen die Kugeln nacheinander auf dem Boden auf. Bei Schnur  $A$  geschieht dies in immer kürzeren Zeitabständen, während die Kugeln von Schnur  $B$  in gleichmäßigen Zeitintervallen auf dem Boden aufschlagen.

(c) Experiment zur Bestimmung der Erdbeschleunigung – der Fall auf der schiefen Ebene (siehe Abb. 1.25):

Läßt man eine Kugel in einer Rille eine schiefe Ebene herunterrollen, so rollt sie umso langsamer, je kleiner der Neigungswinkel  $\alpha$  der schiefen Ebene ist. Die senkrecht nach unten wirkende Beschleunigung  $g$  des freien Falls läßt sich in die beiden Komponente  $g \sin \alpha$  und  $g \cos \alpha$  zerlegen. Da die senkrecht zur Bahn wirkende Komponente keine Bewegung hervorrufen kann, wirkt allein die Größe  $g \sin \alpha$  als Beschleunigung. Diese ist aber kleiner als  $g$ , d.h. die Fallbeschleunigung auf der schiefen Ebene kann herabgesetzt werden und dadurch die Fallbewegung verlangsamt werden. Die kleineren Geschwindigkeiten können dann besser gemessen werden.<sup>a</sup> Mit  $v = gt$ ,  $s = \frac{1}{2}(g \sin \alpha)t^2$  und  $s = h/\sin \alpha$  ergibt sich die Endgeschwindigkeit nach Durchlaufen der schiefen Ebene zu  $v = \sqrt{2(g \sin \alpha) \cdot (h/\sin \alpha)} = \sqrt{2gh}$ . Dies ist exakt dieselbe Geschwindigkeit, die ein Körper beim senkrechten freien Fall erreicht. D.h., die Endgeschwindigkeit eines aus einer bestimmten Höhe fallenden Körpers hängt nicht davon ab, ob er frei fällt oder auf einer beliebig geneigten Ebene herabgeleitet.<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Galilei hat diese Methode benutzt, um die Fallgesetze abzuleiten. Er benutzte zur Zeitmessung Wasseruhren, bei denen die Zeit über das Gewicht des ausgelaufenen Wassers bestimmt wird.

<sup>b</sup>Bei dieser Überlegung wird vernachlässigt, daß bei einer rollenden Kugel aufgrund der auf der schiefen Ebene erhaltenen endlichen Rotationsenergie die Endgeschwindigkeit nach Durchlaufen der schiefen Ebene geringer ist als diejenige beim freien Fall.

**Gleichförmige Kreisbewegung**

Bei einer gleichförmigen Kreisbewegung läuft ein Körper mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag  $v$  auf einem Kreis mit Radius  $R$ . Er legt in gleichen Zeiten  $\Delta t$  gleiche Bogenlängen  $\Delta s$  zurück. Nach Gl.(1.3.31) verschwindet daher die Tangentialbeschleunigung  $\mathbf{a}_t$  und es existiert nur eine von Null verschiedene Normalkomponente  $\mathbf{a}_n$  der Beschleunigung. Das heißt, nur die Richtung der Geschwindigkeit ändert sich, während der Geschwindigkeitsbetrag konstant bleibt.

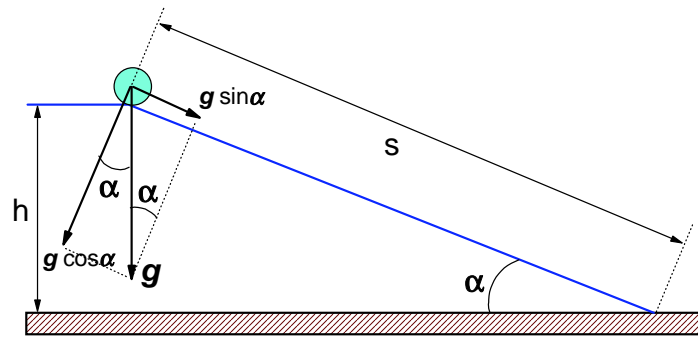


Abbildung 1.25: Zum Fall auf der schiefen Ebene, für die zurückgelegte Wegstrecke gilt:  $s(t) = \frac{1}{2}(g \sin \alpha)t^2$ .

Dem Bahnstück  $\Delta s$  kann der Winkel  $\Delta \varphi = \Delta s / \Delta t$  zugeordnet werden (siehe Abb. 1.26). Mit Hilfe dieses Winkels können für Kreisbewegungen nützliche neue Größen definiert werden, nämlich die *Winkelgeschwindigkeit*  $\omega$  und die *Winkelbeschleunigung*  $\beta$ :

$$\omega := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \quad (1.3.40)$$

$$\beta := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} . \quad (1.3.41)$$

Anschaulich geben  $\omega$  und  $\beta$  die Geschwindigkeit und die Beschleunigung eines fiktiven Massepunktes im Abstand 1 m vom Drehzentrum auf dem Fahrstrahl an. Es ist zu beachten, daß  $\omega$  und  $\beta$  nicht die Dimension einer Geschwindigkeit bzw. einer Beschleunigung haben, weshalb die verwendete Namensgebung etwas irreführend ist. Aus Gl.(1.3.41) folgt nämlich

$$[\omega] = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \text{und} \quad [\beta] = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} . \quad (1.3.42)$$

Für die gleichförmige Kreisbewegung ist  $\omega = \text{const.}$  und  $\beta = 0$ , daher gilt auch für endliche Zeitintervalle  $\Delta t$

$$\Delta \varphi = \omega \Delta t . \quad (1.3.43)$$

Gl.(1.3.43) stellt also die Übertragung von Gl.(1.3.4) auf die Kreisbewegung dar. Wegen  $\Delta \varphi = \Delta s / R$  folgt  $\frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{1}{R} \frac{\Delta s}{\Delta t}$  und damit

$$\omega := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{|\mathbf{v}|}{R} . \quad (1.3.44)$$

Die Bahngeschwindigkeit  $|\mathbf{v}|$  und die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  sind also über den Radius der Kreisbahn miteinander verknüpft. Mit der *Umlaufzeit*  $T$  (Zeit für einen vollen Umlauf  $\varphi = 2\pi$ ) gilt ferner

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu; \quad \nu = \frac{1}{T} \frac{|\mathbf{v}|}{R}; \quad [\nu] = \frac{1}{\text{s}} . \quad (1.3.45)$$

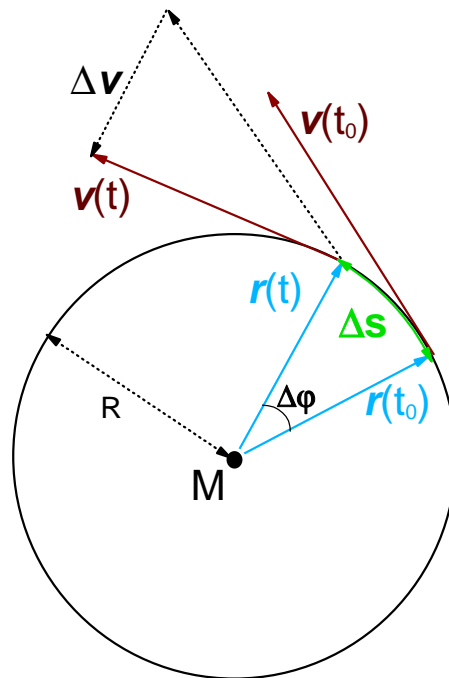


Abbildung 1.26: Kinematik der gleichförmigen Kreisbewegung. Die Beschleunigung  $\mathbf{a}$  ist parallel zu  $\Delta \mathbf{v}$ . Sie ist für infinitesimale  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)$  auf den Mittelpunkt  $M$  der Kreisbahn gerichtet.

Die Frequenz  $\nu$  mißt hierbei die Zahl der Umläufe pro Zeiteinheit. Aufgrund von Gl.(1.3.45) nennt man  $\omega$  auch *Kreisfrequenz*. Schließlich ergibt sich mit  $d|\mathbf{v}(t)|/dt = 0$  die Beschleunigung mit Hilfe von Gl.(1.3.31) zu

$$\mathbf{a}(t) = \frac{v^2}{R} \hat{\mathbf{n}}(t) = \omega^2 R \hat{\mathbf{n}}(t) \quad (1.3.46)$$

$$|\mathbf{a}(t)| = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} \quad (1.3.47)$$

Für eine gleichförmige Kreisbewegung ist die Tangentialkomponente der Beschleunigung also Null und die verbleibende Komponente ist auf den Kreismittelpunkt gerichtet. Man nennt sie deshalb *Zentripetalbeschleunigung*.

**Experiment: Messung der Kreisfrequenz mit einem Stroboskop:**

Zur Messung der Kreisfrequenz kann ein *Stroboskop*, d.h. eine Blitzlampe mit variabel einstellbarer Blitzfolgefrequenz  $\nu_{\text{Str}}$  verwendet werden. Beleuchtet man einen mit der Frequenz  $\nu$  rotierenden Körper mit einem Stroboskop, so erhält man nur dann ein stehendes Bild des Körpers, wenn  $\nu_{\text{Str}} = n\nu$  oder  $\nu_{\text{Str}} = \nu/n$  gilt (hierbei ist  $n$  eine ganze Zahl) .

**Wurfparabel:**

Es soll nun die Überlagerung einer Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_0$  mit der freien Fallbewegung diskutiert werden. Zur Zeit  $t_0 = 0$  soll gelten:  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{z}} = -g \cdot \hat{\mathbf{z}}$  und  $\mathbf{r}(0) = 0$ .

Hierbei ist  $\hat{z}$  der Einheitsvektor in  $z$ -Richtung und  $g$  der Betrag der Erdbeschleunigung. Durch Integration erhält man

$$\mathbf{v}(t) = -g \cdot t \cdot \hat{z} + \mathbf{v}_0, \quad (1.3.48)$$

$$\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \cdot \hat{z} + \mathbf{v}_0 t. \quad (1.3.49)$$

Der Ausdruck für  $\mathbf{r}(t)$  ist wiederum durch eine Parabel gegeben, die sogenannte *Wurfparabel* (siehe Abb. 1.27).

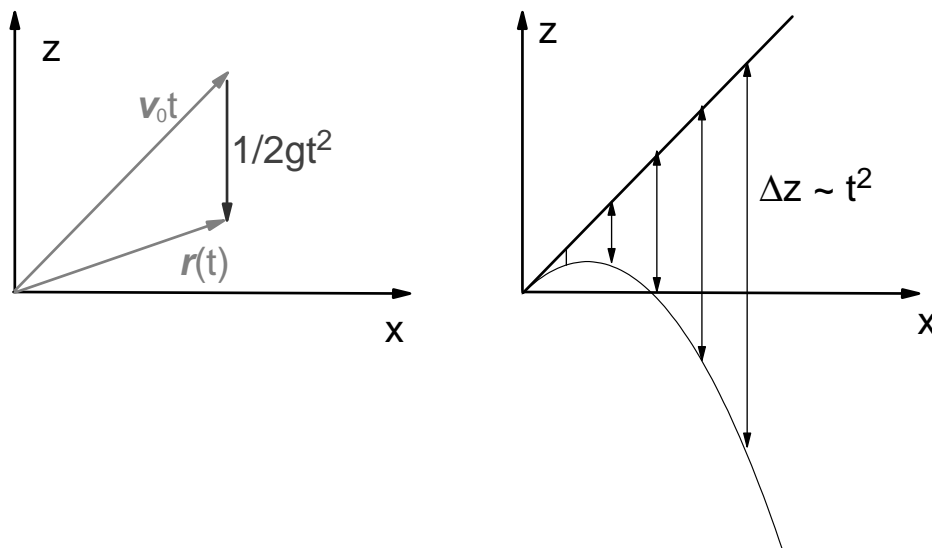


Abbildung 1.27: *Wurfparabel*: Es gilt  $\Delta x \propto t$  und  $\Delta z \propto t^2$ .

#### Experiment: “Falling faster than g”:

Bei der Entfernung der Haltebügel in Abb. 1.28 fällt das Brett und damit der auf ihm befestigte Topf und die Kugel im Schwerfeld der Erde nach unten. Wenn das Brett ankommt, liegt die Kugel im Topf. Der Topf scheint also schneller als die Kugel nach unten zu fallen: “Falling faster than g?”.

Erklärung: Der Schwerpunkt des Brettes fällt mit der Geschwindigkeit  $v_S = g\hat{z} \cdot t$ . Da das Brett am Drehpunkt festgehalten wird, fällt der Topf mit einer Geschwindigkeit  $v_{\text{Topf}} > v_S$ . Für die Geschwindigkeit des Brettendes kann folgende Abschätzung gemacht werden:

$$v_{\text{Ende}} \simeq \omega \cdot L > v_S \simeq \omega \cdot L/2 \quad (1.3.50)$$

Mit  $v_s = gt$  erhält man  $v_{\text{Ende}} \simeq 2gt$ . Wichtig ist, daß der Schwerpunkt des Brettes und der Kugel exakt gleich schnell fallen. Die Tatsache, daß das Brettende schneller fällt, liegt daran, daß man es nicht mit der Bewegung eines Massenpunktes sondern mit derjenigen eines starren Körpers zu tun hat. Der soeben diskutierte Fall kann auch auf einen kippenden Kamin angewendet werden. Beim fallen knickt der Kamin ab. Würde der Kamin als starre Einheit fallen, so müßte das Ende des Kamins auf etwa die doppelte Fallgeschwindigkeit beschleunigt werden. Die dabei auftretende Kraft führt zum Abknicken.

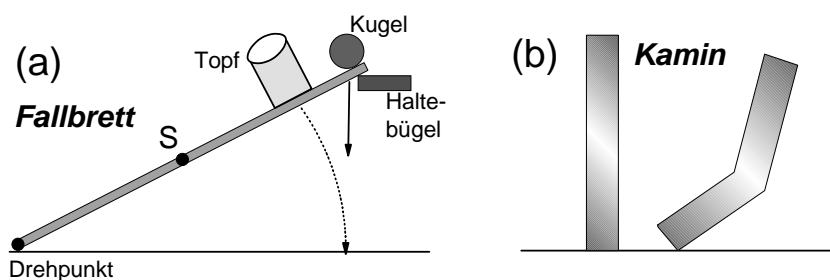


Abbildung 1.28: (a) Beim Fallen des Brettes fällt der Topf schneller als die Kugel, so daß die Kugel in den Topf fällt. (b) Kippen eines Kamins.

### Zahlenbeispiele von Geschwindigkeiten:

$2,998 \times 10^8 \text{ m/s}$	Lichtgeschwindigkeit
$2,50 \times 10^5 \text{ m/s}$	Bahngeschwindigkeit der Sonne um das galaktische Zentrum
$2,98 \times 10^4 \text{ m/s}$	Bahngeschwindigkeit der Erde um die Sonne
$4,59 \times 10^2 \text{ m/s}$	Umfanggeschwindigkeit der Erde am Äquator
$3 \times 10^2 \text{ m/s}$	Schallgeschwindigkeit in Luft bei Normaldruck
$10 \text{ m/s}$	Geschwindigkeit eines Sprinters



## 1.4 Kraft und Masse – Dynamik des Massenpunktes

Die Kinematik beschäftigt sich mit der Beschreibung von Bewegungen, ohne nach der Ursache eines in der Natur beobachteten Bewegungszustands zu fragen. Die kinematische Beschreibung kommt mit den Grundgrößen Länge und Zeit aus. Um aber von einem bestimmten Bewegungszustand eines Körpers ausgehend seine weitere Bewegung vorhersagen zu können, bedarf es des physikalischen Verständnisses des Bewegungsablaufs. Es muß die Ursache der Bewegung und die Reaktion eines Körpers auf die Bewegungsursache geklärt werden. Das heißt, wir wollen nicht nur beschreiben, wie ein Apfel vom Baum fällt, sondern aufgrund welcher Ursache er das tut. Die Antwort hierauf geben die **Newtonschen Axiome**<sup>14</sup> der Mechanik, die auf die Begriffe *Kraft* und *Masse* führen. Die Einführung der **Newtonschen Axiome** bedeutet den Übergang von der Kinematik zur *Dynamik* eines Bewegungsvorganges. Mit ihrer Hilfe ist es möglich, die *Dynamik eines Bewegungszustandes* zu studieren. Das bedeutet, daß man einen Bewegungszustand nicht nur kinematisch beschreibt, sondern aus den Ursachen heraus berechnet.

Im vorliegenden Abschnitt sollen die **Newtonschen Axiome** diskutiert werden. Aus didaktischen Gründen wird die Kraft über eine Meßvorschrift als dritte Grundgröße neben Länge und Zeit eingeführt und die Masse anhand der **Newtonschen Axiome** definiert, obwohl abweichend davon im SI-System die Masse als weitere Grundgröße ausgewählt wurde.

### 1.4.1 Das Trägheitsgesetz – Lex Prima

Eingehende Beobachtungen und Überlegungen führten **Galilei** (1564-1642) zum Trägheitsgesetz, welches von **Newton** (1643-1727) schließlich an die Spitze seiner Axiome gesetzt wurde:

**1. Newtonsches Axiom – Lex Prima:** “Alle Körper verharren im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung, wenn keine äußere Einflüsse vorhanden sind.”

Das Beharrungsvermögen eines Körpers in seinem Bewegungszustand nennt man die *Trägheit* eines Körpers, weshalb das von **Newton** als Lex Prima in sein Axiomensystem übernommene **Galileische** Bewegungsgesetz auch das *Trägheitsgesetz* heißt. Man beachte, daß die Lex Prima als experimentelle Erfahrungstatsache über die rein kinematische Beschreibung einer Bewegung hinausgeht. Die Trägheit eines Körpers schreibt man einer Eigenschaft des Körpers zu, der *tüngen Masse*  $m$ . Da alle Körper dem Trägheitsgesetz genügen, haben alle im Rahmen der **Newtonschen** Mechanik eine träge Masse.

Es sei darauf hingewiesen, daß die Lex Prima keineswegs trivial ist und zuerst von **Kepler** erkannt und formuliert wurde. Im Gegensatz dazu glaubte **Aristoteles**, daß  $v \propto F$ , d.h. daß eine gleichförmige Bewegung nur bei Vorhandensein einer endlichen Kraft möglich sei. Diese Aussage stimmt zwar mit der Erfahrung häufig überein, hängt aber mit den nichtverschwindenden Reibungskräften zusammen (Reibungskräfte werden später in Abschnitt 1.6.4 diskutiert). Reibungskräfte machen also die experimentelle Beobachtung der Lex Prima schwierig. Die von **Aristoteles** gemachte falsche Vermutung hat wahrscheinlich bewirkt, daß sehr lange Zeit bis zur Formulierung der **Newtonschen Axiome** vergangen ist.

<sup>14</sup>**Axiom** (griech.) = Forderung. Axiome sind Sätze eines Wissensgebiets, mit denen alle übrigen Sätze des Wissensgebiets bewiesen werden können. Ihre Gültigkeit ist beweislos vorausgesetzt. Die Axiome eines Axiomensystems müssen (i) widerspruchsfrei, (ii) unabhängig und (iii) vollständig sein. Es darf also nicht möglich sein, mit Axiomen zwei Sätze zu beweisen, die sich widersprechen (Widerspruchsfreiheit). Keines der Axiome darf sich mit Hilfe eines anderen beweisen lassen (Unabhängigkeit). Jeder Satz soll mit den Axiomen bewiesen werden können (Vollständigkeit). Welche Sätze man als Axiome einführt, ist innerhalb der durch diese drei Forderungen gezogenen Grenzen willkürlich.

Im Trägheitsgesetz ist von Ruhe und gleichförmiger, geradliniger Bewegung die Rede. Derartige Aussagen können nur dann gelten, wenn ein bestimmtes Bezugssystem zugrunde gelegt wird. Die Lex Prima und alle weiteren **Newton**schen Axiome sind nur in *Inertialsystemen* (lat.: inertia = Trägheit) oder *Fundamentalsystemen* gültig, auf die später in Abschnitt 1.8 im Detail eingegangen wird. Ein Inertialsystem ist per Definition ein Bezugssystem, in dem das 1. **Newton**sche Axiom erfüllt ist, d.h. gegenüber dem sich ein kräftefreier Körper mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Ein solches System ist nicht die Erde, wenngleich dies naheliegend wäre, da das Trägheitsgesetz aus Versuchen auf der Erde abgeleitet wurde. Es wird später aber noch genau gezeigt, daß nur ein im Fixsternhimmel verankertes Koordinatensystem ein geeignetes Bezugssystem darstellt. Das man trotzdem das Trägheitsgesetz aus Versuchen auf der Erde abgeleitet hat, liegt nur an dem glücklichen Umstand der zu großen Meßgenauigkeit, der die durch die Erdrotation auftretenden Abweichungen nicht erkennbar werden ließ.

Da eine gleichförmige, geradlinige Bewegung auch in jedem anderen Bezugssystem, das sich bezüglich des Fixsternhimmels geradlinig und gleichförmig bewegt, wiederum als gleichförmig, geradlinige Bewegung erscheint, gibt es unendlich viele gleichberechtigte Bezugssysteme. Geschwindigkeiten können deshalb nicht absolut sondern immer nur relativ angegeben werden: **Galileisches Relativitätsprinzip**.

#### **Experiment: Luftkissentisch:**

Geht man von der Vorstellung aus, daß Wechselwirkungen zwischen Körpern materiellen Ursprungs sind und deshalb grundsätzlich zwischen zwei oder mehreren Körpern wirken, so ist das im Trägheitsgesetz geforderte Verschwinden aller Wechselwirkungen nur schwierig zu erfüllen. Auf der Erde ist dies aufgrund der Erdanziehung, der Reibung und des Luftwiderstands besonders schwierig. Am überzeugendsten sind Experimente mit Luftkissenfahrzeugen. Wird ein Körper auf einem Luftkissentisch angestoßen, so gleitet er gleichförmig und geradlinig weiter. Die Reibung als äußerer Einfluß wird durch die Luftschicht zwischen Unterlage und Körper minimiert. Die Erdanziehung kann bei einer horizontalen Unterlage nicht wirksam werden.

### **1.4.2 Realdefinition der Kraft**

Im folgenden soll die Kraft im Sinne einer Realdefinition über eine Meßvorschrift als dritte Grundgröße eingeführt werden. Dabei wird versucht, möglichst eng an die Vorstellung der vertrauten "Muskelkraft" anzuschließen. Danach ist eine "Kraft" notwendig, um einen Körper zu beschleunigen, ihn hochzuheben oder auf dem Boden zu schleifen.<sup>15</sup> Als charakteristische Eigenschaft einer Kraft kann man herausgreifen, daß sie Körper beschleunigen kann. Man kann deshalb gleichwertig zu obiger Definition des Trägheitsgesetzes formulieren, daß Abweichungen vom Trägheitsgesetz auf Kräfte zurückzuführen sind.

Hängt man wie in Abb. 1.29 gezeigt Gewichtskörper an einer Feder auf, so wird die Feder gespannt – die "Federwaage" schlägt aus. Die Interpretation dieser Beobachtung lautet, daß die Kraft, die die Gewichtskörper zum Erdmittelpunkt hin beschleunigt, die Feder deformiert. Diese Eigenschaft läßt sich bequem für eine Meßvorschrift und damit Definition der Kraft verwenden. Der Federausschlag kann mit einem Satz identischer Gewichtsteine geeicht werden. Die geeichte Federausdehnung wird dann als Maß für die Kraft benutzt, wobei Kräfte, die mit keiner Eichmarke übereinstimmen, durch Interpolation erhalten werden. Es muß beachtet werden, daß bei dieser Realdefinition angenommen wird, daß  $N$  Gewichtsteine der  $N$ -fachen Kraft entsprechen. Dagegen wird für die Feder kein linearer Zusammenhang zwischen Dehnung und Kraft vorausgesetzt. Zusammenfassend erhält man folgende qualitative und quantitative Definition der Kraft:

<sup>15</sup>Typische aus dem Alltagsleben bekannte "Kräfte" sind die Muskelkraft, die Reibungskraft, die Schwerkraft oder die Rückstellkraft einer Feder.

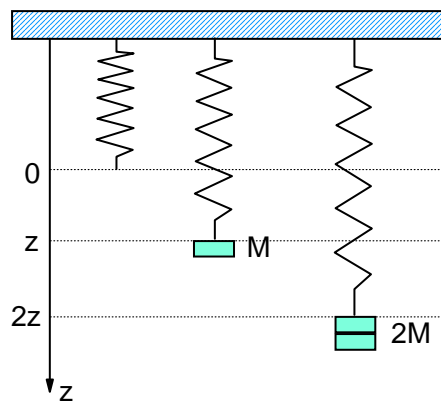


Abbildung 1.29: Zur Realdefinition der Kraft. Eine Verdopplung der Zahl der Gewichtskörper führt zu einer Verdopplung der Auslenkung. Die Auslenkung ist also proportional zur Schwerkraft:  $F \propto z$ .

- Qualitative Definition: Die Kraft ist die Ursache für die Änderung des Bewegungszustands bzw. Ursache für eine Deformation.
- Quantitative Definition: Kräfte sind gleich, wenn sie gleiche Veränderungen hervorrufen (z.B. gleiche Deformation oder Geschwindigkeitsänderung).

Meßtechnisch ist die Definition der Kraft nach obigem Verfahren allerdings problematisch, da man einen Satz identischer, unveränderlicher Eichkörper benötigt. Zum anderen variiert die Schwerkraft mit dem Ort auf der Erde. Da sich außerdem der Aufbau und die Bewegungsform der Erde im Laufe der Zeit verändern, würde man selbst an einem Normort keine konstanten Federauslenkungen messen. Dennoch soll in den Unterabschnitten 1.4.3 und 1.4.4 die Argumentation so geführt werden, daß die Kraft mit Hilfe des eben beschriebenen Kraftmessers eingeführt sei. Die Kraft wird mit dem Buchstaben  $F$  von lat. “fortitudo” symbolisiert.

Aufgrund ihrer Definition sind Kräfte vektorielle Größen, d.h. sie sind durch Vorgabe von Maßzahl, Maßeinheit und Richtung eindeutig bestimmt. Man kann grob zwischen Punktkräften (greifen an einem Punkt an, wie z.B. bei Feder) und Kraftfeldern (hier wirkt in jedem Raumpunkt eine Kraft, wie z.B. bei elektromagnetischen Feldern) unterscheiden. Eine weitere aus dem Alltagsleben gut bekannte Kraft ist die Reibungskraft, die an Flächen angreift und von der Geschwindigkeit abhängt (eine genaue Diskussion folgt in Abschnitt 1.6.4).

### 1.4.3 Das Kraftgesetz von Newton – Lex Secunda

Zur Aufstellung des *dynamischen Grundgesetzes, der Lex Secunda*, betrachten wir das in Abb. 1.30 gezeigte Experiment, bei dem eine Kraft  $F$  auf einen Körper  $M$  wirkt, der sich auf einer waagrechten Luftschiene frei bewegen kann. Der Körper  $M$  ist über eine Schnur und eine Umlenkrolle mit dem kleinen Körper  $\mu$  verbunden. Werden die Körper losgelassen, so erfahren beide Körper durch die Wirkung der Schwerkraft von Körper  $\mu$  eine Bewegungsänderung. Es wird die Zeit gemessen, die für eine bestimmte Wegstrecke  $s$  benötigt wird. Man stellt fest, daß für den 4-fachen Weg die doppelte Zeit benötigt wird, d.h. der zurückgelegte Weg  $s$  ist proportional zum Quadrat der vergangenen Zeit:  $s \propto t^2$ . Setzt man die Proportionalitätskonstante gleich  $a/2$ , ergibt sich die Gleichung für eine gleichförmig beschleunigte Bewegung (vergleiche Abschnitt 1.3.2). Es gilt das Weg-Zeit-Gesetz

$$s = \frac{1}{2}at^2 .$$

Die Frage stellt sich nun, welcher Zusammenhang zwischen der Kraft und der Beschleunigung besteht. Dieser muß aus dem Experiment bestimmt werden.

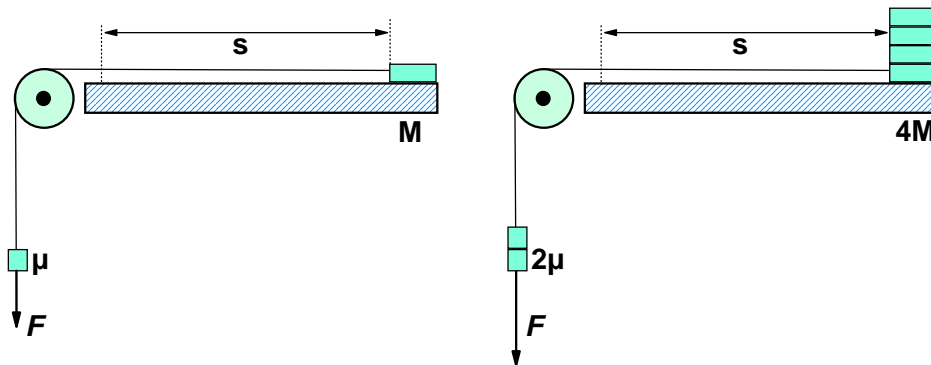


Abbildung 1.30: Versuchsanordnung zur Bestimmung des Zusammenhangs zwischen Kraft und Beschleunigung. Die Masse  $M$  kann sich frei auf einem Luftpolster horizontal bewegen. Die wesentlich kleinere Masse  $\mu$  verursacht über ihre Schwerkraft eine Beschleunigung. Sowohl  $M$  als auch  $\mu$  können durch Vielfache ersetzt werden.

Hierzu variiert man die Kraft  $F$ , indem man Vielfache  $i$  des Gewichtskörpers  $\mu$  verwendet, es gilt  $F \propto i \cdot \mu$ . Ebenso verwendet man Vielfache  $j$  des Körpers  $M$ . Damit kann die Kraft in Einheiten des Körpers  $\mu$  angegeben werden, weil die Anzahl der Gewichtskörper die Größe der Kraft bestimmt. Weil  $\mu$  sehr viel kleiner ist als  $M$ , besteht der beschleunigte Gesamtkörper näherungsweise nur aus  $M$ . Im Experiment mißt man die Zeit  $t$  zum Durchfahren der Strecke  $s$  und bestimmt daraus die Beschleunigung  $a$ . Aus dem Experiment ergibt sich:

1. Bei gleicher Kraft ergibt sich bei Vervielfachung des Körpers  $M$  eine Vervielfachung des Verhältnisses  $F/a$ .
2. Für einen gleichen Körper  $M$  ergibt sich bei einer Vervielfachung der Kraft  $F$  ein konstantes Verhältnis  $F/a$ .

Aufgrund des Ergebnisses  $F/a = \text{const.}$  kann man allgemein ansetzen

$$\frac{F}{a} = \text{const.} = f(m) \quad , \quad (1.4.1)$$

wobei  $f(m)$  zunächst eine unbekannte Funktion der trägen Masse  $m$  des Körpers  $M$  ist. Da eine Vervielfachung von  $M$  zu einer Vervielfachung von  $F/a$  führt, folgt

$$f(j \cdot m) = \sum_{k=1}^j f(m_k) \quad . \quad (1.4.2)$$

Demnach hat ein Körper  $M$ , der sich aus zwei identischen Körpern zusammensetzt, den doppelten  $F/a$ -Wert wie die Einzelkörper. Man definiert deshalb

$$f(m) := m \quad (1.4.3)$$

und das Naturgesetz (1.4.1) besagt, daß jeder Körper eine wohldefinierte träge Masse besitzt, die durch das Verhältnis  $F/a$  gegeben ist. Damit ergibt sich die das zweite **Newton'sche Axiom** zu:

**2. Newtonsches Axiom – Lex Secunda:** “Wirkt auf einen frei beweglichen Körper eine Kraft  $F$ , so bewegt sich der Körper mit einer Beschleunigung  $a$ , die proportional zu der wirkenden Kraft ist:”

$$F = m \cdot a \quad (1.4.4)$$

Die Lex Secunda ist als dynamische Bewegungsgleichung von grundlegender Bedeutung für die gesamte klassische Physik (“Grundgesetz der Mechanik”). Danach bewirkt die an einem Körper angreifende Kraft  $F$  eine Änderung seines Bewegungszustandes, während sich der Körper aufgrund seiner trägen Masse  $m$  dieser Änderung widersetzt. Das Trägheitsgesetz ist ein Spezialfall des 2. Newtonschen Axioms. Wenn keine Kräfte wirken, ist  $a = 0$  und somit  $v = \text{const.}$ . Die Bewegungsgleichung  $F = ma$  findet eine sehr vielfältige Anwendung. Bei bekannter Kraft und Masse kann man die Beschleunigung und daraus die Bahnkurve von Körpern bestimmen (z.B. Planeten im Gravitationsfeld, Ladungen in elektromagnetischen Feldern etc.).<sup>16</sup>

Das Gesetz  $F = m \cdot a$  wurde unter der Annahme abgeleitet, daß die Körpermasse konstant ist. In der klassischen Physik kann man viele Beispiele anführen, in der diese Bedingung nicht erfüllt ist: etwa ein rinnender Wassereimer oder eine startende Rakete, die verbrannte Auspuffgase abstößt. In der speziellen Relativitätstheorie wird die Masse sogar abhängig von der Geschwindigkeit eines Körpers!<sup>17</sup> Wie die dynamischen Bewegungsgleichungen in diesen allgemeinen Fällen lauten, wird in einem späteren Abschnitt im Zusammenhang mit dem Impuls diskutiert.

Das Gesetz der Additivität der Masse ist in der klassischen Physik sehr gut erfüllt. Im Bereich der Atom- und Kernphysik werden allerdings Abweichungen von diesem Gesetz deutlich. Gehen beispielsweise zwei Atome eine Bindung ein oder verschmelzen Protonen und Neutronen zu einem Atomkern, so ist die Masse des entstandenen Moleküls bzw. Atomkerns kleiner als die Summe der Massen ihrer Bausteine. Dieser Massendefekt hängt über die von **Einstein** entdeckte Äquivalenz von Masse  $m$  und Energie  $E$  ( $E = mc^2$ , wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit ist) mit der Bindungsenergie zusammen. In der Elementarteilchenphysik kann sogar die gesamte Masse bei der Zerstrahlung von Materie und Antimaterie in masselose  $\gamma$ -Quanten umgewandelt werden.

## Grundgröße Kilogramm

Nach dem 2. Newtonschen Axiom können Körper dadurch gekennzeichnet werden, daß sie von einer Kraft verschieden stark beschleunigt werde. Diese Kennzeichnung wird als *tätige Masse* bezeichnet. Man kann Massen dadurch vergleichen, indem man bei konstanter Kraft die resultierenden Beschleunigungen oder bei konstanter Beschleunigung die resultierenden Kräfte mißt. Letzteres ist im täglichen Leben allgemein üblich. Man vergleicht die Kräfte (= Gewichte) mit denen Körper zur Erde gezogen werden.

<sup>16</sup>Die Lex Secunda gilt natürlich auch nur im Bezugssystem des Fixsternhimmels bzw. eines davon abgeleiteten Inertialsystems. Denn in jedem dieser Systeme, aber auch nur in einem solchen System, ist die Beschleunigung  $a$  die gleiche. In allen Inertialsystemen gilt also  $F = m \cdot a$  völlig unverändert. Vom experimentellen Stand aus betrachtet bedeutet dies, daß man niemals durch Versuche unterscheiden kann, ob man sich in einem “ruhenden” oder “gleichförmig bewegten” Bezugssystem befindet: Die “absolute” Bestimmung der Geschwindigkeit ist unmöglich: **Galileisches Relativitätsprinzip** (siehe hierzu auch Abschnitt 1.8).

<sup>17</sup>Mit zunehmender Geschwindigkeit nimmt die Masse zu:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} .$$

Diese Beziehung stammt aus der von **Einstein** entwickelten speziellen Relativitätstheorie. Hierbei ist  $m_0$  die Ruhemasse bei  $v = 0$ . Bei Geschwindigkeiten  $v \ll c$  erhält man  $v \simeq v_0$ .

Da an einem Ort die Fallbeschleunigung konstant ist, können Massen durch Gewichtsvergleich bestimmt werde.<sup>18</sup>

Aufgrund der in Abschnitt 1.4.2 beschriebenen Probleme bei der Definition der Kraft, ist man international übereingekommen, für das *Internationale Einheitensystem* nicht die Kraft sondern die Masse als dritte Grundgröße neben der Zeit und der Länge einzuführen. Die Einheit der Masse wurde willkürlich dadurch festgelegt, daß man ein Metallstück (chemisch und physikalisch widerstandsfähige PtIr-Legierung, 90% Pt, 10% Ir) genommen, bei Paris aufbewahrt und erklärt hat, daß dieses Stück Metall die Einheit der Masse darstellen soll.<sup>19</sup> Die Masse ist die dritte Grundgröße im SI-System:

$$[m] = 1 \text{ kg} \quad (\text{Kilogramm}) \quad . \quad (1.4.5)$$

Alle Länder, die sich dem SI-System angeschlossen haben, besitzen in den staatlichen Eichämtern (in Deutschland ist dies die Physikalisch Technische Bundesanstalt in Braunschweig) eine Kopie des "Urkilogramms". Mit dem Kilogramm als weitere Grundgröße ergibt sich für die Einheit der Kraft:

$$[F] = [m \cdot a] = 1 \text{ kg} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1 \text{ N} \quad (\text{Newton}) \quad . \quad (1.4.6)$$

Den Quotienten aus Masse und Volumen bezeichnet man als *Dichte* eines Körpers:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (1.4.7)$$

$$[\rho] = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad . \quad (1.4.8)$$

Als atomare Masseneinheit verwendet man:

$$1 \text{ amu} = \frac{1}{12} m(^{12}\text{C}) = 1,660\,531 \times 10^{-27} \text{ kg} \quad (1.4.9)$$

$$[\text{amu}] = [\text{g}] / N_A \quad . \quad (1.4.10)$$

Hierbei ist  $N_A = 6,002\,2169 \times 10^{23} / \text{mol}$  die **Loschmidt-** oder **Avogadro-**Konstante, die die Zahl der Atome pro Mol angibt, wobei die Stoffmenge 1 mol genau  $M$  Gramm eines Stoffes mit Molekulargewicht  $M$  entspricht.

In der folgenden Tabelle sind einige Beispiele von Massen zusammengestellt:

$9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$	Ruhemasse des Elektrons
$1,6725 \times 10^{-27} \text{ kg}$	Ruhemasse des Protons
$1,6748 \times 10^{-27} \text{ kg}$	Ruhemasse des Neutrons
$3,95 \times 10^{-25} \text{ kg}$	Masse des Uranatoms
$7,35 \times 10^{22} \text{ kg}$	Mondmasse
$5,98 \times 10^{23} \text{ kg}$	Erdmasse
$1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$	Sonnenmasse
ca. $4 \times 10^{41} \text{ kg}$	Masse unserer Galaxie (ca. $10^{11}$ Sterne)
ca. $10^{52} \text{ kg}$	Masse des Universums (ca. $10^{11}$ Galaxien)

<sup>18</sup>Die träge und die schwere Masse sind allerdings zwei verschiedene Größen: Träge Masse = Kraft/Beschleunigung; schwere Masse=Gewicht/Fallbeschleunigung. Es wird später jedoch gezeigt, daß man sie gleichsetzen kann. Deshalb lassen wir in den nächsten Abschnitten die Bezeichnung "Trägheit" bei Massen weg.

<sup>19</sup>Es sollte ursprünglich die gleiche Masse wie ein Kubikdezimeter Wasser bei 4°C und 760 Torr besitzen, was zwar ungefähr aber nicht genau stimmt: 1 kg H<sub>2</sub>O entspricht 1,000028 dm<sup>3</sup>.

### 1.4.4 Das Wechselwirkungsgesetz – Lex Tertia

#### Kraft als Vektorgröße (Lex Quarta)

Da die Beschleunigung  $\mathbf{a}$  eine Vektorgröße und  $m$  ein Skalar ist, liegt es nahe, die Kraft  $\mathbf{F}$  aufgrund der Beziehung  $F = m \cdot a$  ebenfalls als Vektorgröße aufzufassen und in der Form

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} \quad (1.4.11)$$

darzustellen. Im **Newton**schen Axiomensystem ist als *Lex Quarta* festgeschrieben, daß die Kraft ein Vektor ist. Als Vektorgrößen lassen sich dann Kräfte in Komponenten zerlegen

$$\begin{aligned} F_x &= m \cdot a_x \\ F_y &= m \cdot a_y \\ F_z &= m \cdot a_z \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

und umgekehrt lassen sich mehrere an einem Körper angreifende Kräfte zu einer Gesamtkraft

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots \quad (1.4.13)$$

addieren. Diese Vektoreigenschaften der Kraft lassen sich experimentell überprüfen (siehe Abb. 1.31). Wichtig ist hierbei

- *die Kompensierbarkeit von Kräften.* Befindet sich ein Körper in Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, so muß die auf den Körper wirkende Gesamtkraft verschwinden. In Abb. 1.31a wird z.B. die Gewichtskraft  $\mathbf{F}_G$  durch die Federkraft  $\mathbf{F}_F$  kompensiert. Beide Kräfte besitzen den gleichen Betrag und die entgegengesetzte Richtung, so daß

$$\mathbf{F}_G + \mathbf{F}_F = 0 \quad (1.4.14)$$

- *die Umlenkbarkeit von Kräften* (siehe Abb. 1.31b). Kräfte lassen sich mit Rollen in ihrer Richtung umlenken (z.B. Flaschenzug).
- *die Vektoraddition von Kräften* (siehe Abb. 1.31c).
- *die Komponentenzzerlegung von Kräften* (siehe Abb. 1.31d). Bei der Bewegung auf der schiefen Ebene kann die Schwerkraft  $\mathbf{F}_G$  in eine Tangentialkraft  $\mathbf{F}_t$  und eine Normalkraft  $\mathbf{F}_n$  zerlegt werden. Letztere ist senkrecht zur Auflagefläche und hat somit keinen Einfluß auf die Bewegung. Die Gewichtskraft  $\mathbf{F}_{G2}$  muß nur die Tangentialkomponente  $\mathbf{F}_t$  kompensieren, um ein Abgleiten zu verhindern.

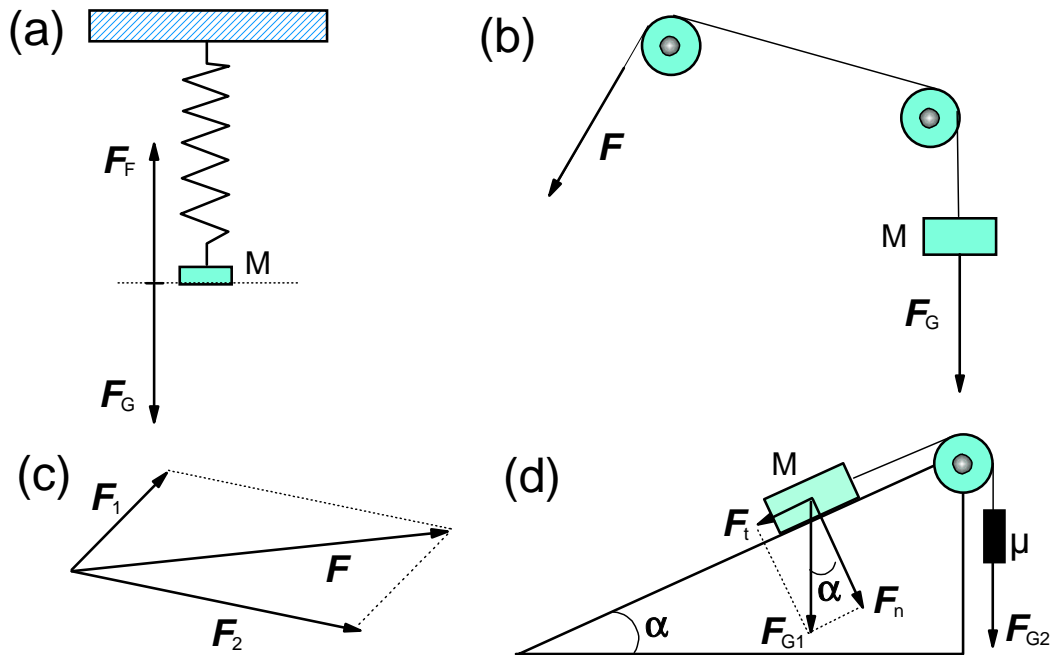


Abbildung 1.31: Zur Kompensation (a), Umlenkbarkeit (b), Vektoraddition (c) und Komponentenerlegung (d) von Kräften.

### Das Wechselwirkungsgesetz (Lex Tertia)

**Newton** formulierte als *Lex Tertia* ein Axiom, das bei einer Wechselwirkung zwischen zwei Körpern 1 und 2 eine Beziehung zwischen den Kräften  $F_1$  und  $F_2$  herstellt, die an den Körpern angreifen. Danach sind die Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  betragsmäßig gleich groß, antiparallel zueinander gerichtet und längs der Verbindungslinie der beiden Körper wirksam. Schlagwortartig umschreibt man dieses Wechselwirkungsgesetz mit

#### 3. Newtonsches Axiom – Lex Tertia:

**actio = reactio**

$$F_1 = -F_2 \quad (1.4.15)$$

Die Lex Tertia postuliert eine bestimmte Symmetrie in der Wechselwirkung zweier Körper. Das Axiom verbietet beispielsweise, daß ein Körper 1 auf einen Körper 2 eine Kraft  $F_2$  ausübt, ohne das gleichzeitig Körper 1 eine Gegenkraft  $F_1$  von Körper 2 erfährt. Die Erfahrung bestätigt das Wechselwirkungsgesetz.

### Klassifizierung von Kräften

Kräfte, die einer Wechselwirkung zwischen materiellen Körpern entsprechen, nennt man *reale Kräfte*. Nicht reale Kräfte nennt man dagegen *fiktive* oder *Pseudokräfte*. Hierzu gehören die in den späteren Abschnitten zu behandelnden Trägheitskräfte und die Scheinkräfte in beschleunigten Bezugssystemen (siehe Abschnitt 1.8).



**Beispiele:**

1. Betragsmäßig ist die von der Sonne auf die Erde ausgeübte Kraft gleich der von der Erde auf die Sonne.
2. Expander: Eine Person versucht zwei über eine Feder verbundene Körper mit den Kräften  $F'_1$  und  $F'_2$  auseinander zu ziehen. Die Feder wirkt dieser Bewegung mit den Kräften  $F_1$  und  $F_2$  entgegen. Befindet sich das in Abb. 1.32 gezeigte System in Ruhe, so erhält man die Kräftebilanz:  $F_1' = F_2'$ ;  $F_1 = F_1'$  und  $F_2 = F_2'$ . Insgesamt folgt damit für die Wechselwirkungskräfte zwischen den beiden Körper  $F_1 = F_2$ . Das Modell liefert damit zwanglos das Wechselwirkungsgesetz.

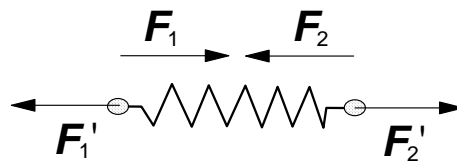


Abbildung 1.32: Modell zum Wechselwirkungsgesetz.

Bei den realen Kräften unterscheidet man heute (mindestens) zwischen vier Grundtypen der Wechselwirkung oder *Fundamentalkräfte*:

1. *Gravitation* oder *Gravitationskraft* (Kraft zwischen schweren Massen).
2. *elektromagnetische Wechselwirkung* oder *elektromagnetische Kraft* (Kraft zwischen ruhenden Ladungen (Coulombkraft) und zwischen bewegten Ladungen (magnetische Kraft)).
3. *starke Wechselwirkung* oder *Kernkraft* (Kraft, welche z.B. Nukleonen in einem Atomkern zusammenhält).
4. *schwache Wechselwirkung* oder *schwache Kraft* (diese ist unter anderem verantwortlich für den  $\beta$ -Zerfall radioaktiver Kerne).

Alle anderen Kräfte lassen sich aus den Fundamentalkräften ableiten. Diese bezeichnet man deshalb als *abgeleitete Kräfte*. Beispiele hierfür sind Molekularkräfte, Auftriebskräfte, Federkräfte oder die Reibungskraft.

Bei Körpern, die sich durch Führungen oder Schienen auf einer vorgegebenen Bahnkurve bewegen, stellt man *eingeprägte Kräfte* den *Zwangskräften* gegenüber, wie dies in Abb. 1.33 gezeigt ist. Bei der Bewegung auf der schiefen Ebene tritt als eingeprägte Kraft die zum Erdmittelpunkt gerichtete Schwerkraft auf. Um die Zwangsbedingung (Bewegung auf Ebene) einzuhalten, muß auf den Körper von der Bahn eine Zwangskraft übertragen werden, die genau die Normalkomponente der eingeprägten Kraft kompensiert. Diese Komponente heißt deshalb *verlorene Kraft*. Aus der Vektorsumme der eingeprägten und der Zwangskraft ergibt sich schließlich die *wirksame Kraft*, die für die Begegnung entlang der schiefen Ebene verantwortlich ist. Sie ist durch die Tangentialkomponente der eingeprägten Kraft gegeben.

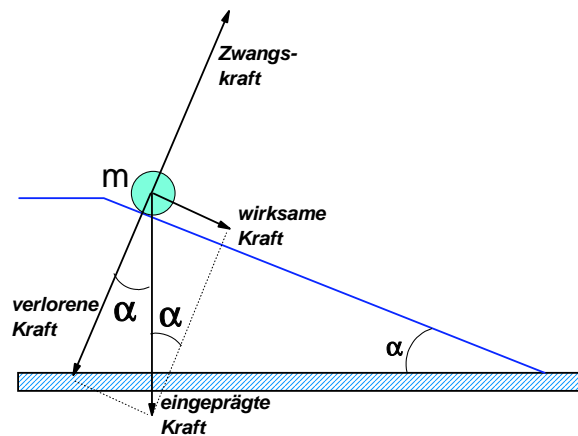


Abbildung 1.33: Zur Klassifizierung von Kräften.

## 1.5 Gravitation und Schwerkraft

Zum Erfolg der in den **Newton'schen** Axiomen formulierten Mechanik hat wesentlich eine weitere Entdeckung Newtons beigetragen: die Aufstellung des *Gravitationsgesetzes*. Unter Gravitation versteht man eine experimentell beobachtbare anziehende Wechselwirkung zwischen Körpern. Das Gravitationsgesetz gibt die Kraft an, mit der sich zwei Körper bestimmter Massen anziehen. Für einen vorgegebenen Körper mit Masse  $m$  läßt sich aus der **Newton'schen** Bewegungsgleichung  $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$  erst dann die Bahnkurve  $\mathbf{r}(t)$  berechnen, wenn neben der Masse auch die Kraft  $\mathbf{F}$  bekannt ist, die auf die Masse  $m$  wirkt. Aus der Kombination der Bewegungsgleichung  $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$  mit dem Gravitationsgesetz lassen sich z.B. die Gesetze der Planetenbewegung, die empirisch gefundenen **Keplerschen Gesetze**, ableiten. Dies ist ein überzeugender Beweis der Gültigkeit der **Newton'schen** Mechanik.

### 1.5.1 Das Gravitationsgesetz

Aufgrund intensiver Planetenbeobachtungen von **Tycho Brahe** (1546-1601) entwickelte **Johannes Kepler** (1571-1630) die nach ihm benannten **Keplerschen Gesetze**. **Isaac Newton** (1643-1724) leitete wiederum aus ihnen das Kraftgesetz zwischen Körpern ab, das allgemein als *Gravitationsgesetz* bezeichnet wird.

Betrachtet man zwei Massen am Ort  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  mit Massen  $m_1$  und  $m_2$  (siehe Abb. 1.34) so kann man die Verbindungsvektoren  $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  und  $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  als Verbindungsvektoren zwischen  $m_1$  und  $m_2$  bzw.  $m_2$  und  $m_1$  einführen. Mit  $r = |\mathbf{r}_{21}| = |\mathbf{r}_{12}|$  als Abstand der beiden Massen können ferner die Einheitsvektoren  $\hat{\mathbf{r}}_{21} = \mathbf{r}_{21}/r$  und  $\hat{\mathbf{r}}_{12} = \mathbf{r}_{12}/r$  eingeführt werden. Damit läßt sich das **Newton'sche** Gravitationsgesetz für die Anziehungskraft  $\mathbf{F}_1$  auf die Masse  $m_1$  und  $\mathbf{F}_2$  auf die Masse  $m_2$  wie folgt ausdrücken<sup>20</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{21} = -\mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_2 &= G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} = -\mathbf{F}_1 \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

<sup>20</sup>Newton'sche Herleitung des Gravitationsgesetzes: Für eine gleichförmige Kreisbewegung (z.B. der Erde mit Masse  $m_1$  um die Sonne mit Masse  $m_2$ ) gilt für die Zentripetalkraft (vergleiche Gl.(1.3.47))  $F_R = F_1 = m_1 R \omega^2$ . Mit dem 3. Kepler'schen Gesetz  $T^2 \propto R^3$  (siehe Abschnitt 1.5.3) und  $T \propto 1/\omega$  ergibt sich damit  $F_1 \propto m_1/R^2$ . Wegen actio = reactio muß  $F_2 \propto m_2/R^2$  sein. Damit erhält man  $F_1 = F_2 = G \frac{m_1 m_2}{R^2}$  mit der Gravitationskonstanten  $G$ .

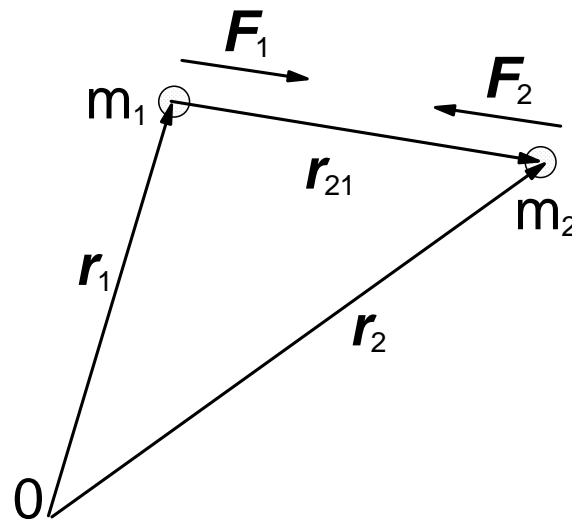


Abbildung 1.34: Zum Gravitationsgesetz.

Hierbei ist  $G$  eine Maßsystemkonstante, die *Gravitationskonstante*, mit dem Zahlenwert

$$G = (6,67259 \pm 0,00085) \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} . \quad (1.5.2)$$

Die Gravitationskonstante muß experimentell bestimmt werden. Die Gravitationskraft ist eine *Zentralkraft*. Sie ist parallel zur Verbindungslinie der beiden Massen. Gravitationskräfte sind immer Anziehungskräfte. Der Betrag der beiden Gravitationskräfte ist gleich groß und aus Gl.(1.5.1) folgt

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} . \quad (1.5.3)$$

Das heißt, die Gravitationskraft ist proportional zum Produkt der Massen und umgekehrt proportional zum Quadrat deren Abstandes. Wegen  $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$  erfüllen die Gravitationskräfte das dritte **Newton'sche** Wechselwirkungsaxiom (actio = reactio).

### Bestimmung des Gravitationskonstante

Es soll im folgenden die Bestimmung der Gravitationskonstante nach der Methode von **Cavendish** (1798) vorgestellt werden (siehe Abb. 1.35). Da die Gravitationskraft sehr klein ist (2 Massen von jeweils 100 kg im Abstand von 1 m ziehen sich mit der Kraft  $F = 6,7 \times 10^{-7}$  N an), ist eine sehr empfindliche Meßmethode erforderlich. Die Idee von Cavendish bestand in der Umsetzung einer Translation in eine Rotation und Anzeige des Drehwinkels mittels eines Lichtzeigers, wodurch eine hohe Verstärkung erzielt wird. Im Experiment werden zwei kleine, miteinander fest verbundene Massen  $m$  an einem Torsionsfaden aufgehängt. Ihnen gegenüber befinden sich zwei große, ebenfalls fest verbundene Massen  $M$ . Nach dem Gravitationsgesetz wirken zwischen den kleinen und den großen Massen Anziehungskräfte. Dreht man nun die großen Massen so, daß die Anziehungskräfte von der entgegengesetzten Seite auf die kleinen Massen wirken, so verändert sich deren Lage. Experimentell wird die resultierende Drehung mit Hilfe des Lichtzeigers nachgewiesen.

Durch die Gravitationskräfte resultiert das Drehmoment<sup>21</sup>  $\mathbf{T}_G = 2\mathbf{F}_G \cdot R$ , das durch das Drehmoment des Drahtes  $\mathbf{T}_D = -\mathbf{T}_G$  kompensiert wird und dadurch zu einem bestimmten Drehwinkel  $\alpha$  führt,

<sup>21</sup>Eine genaue Diskussion des Drehmoments folgt in Abschnitt 1.11.

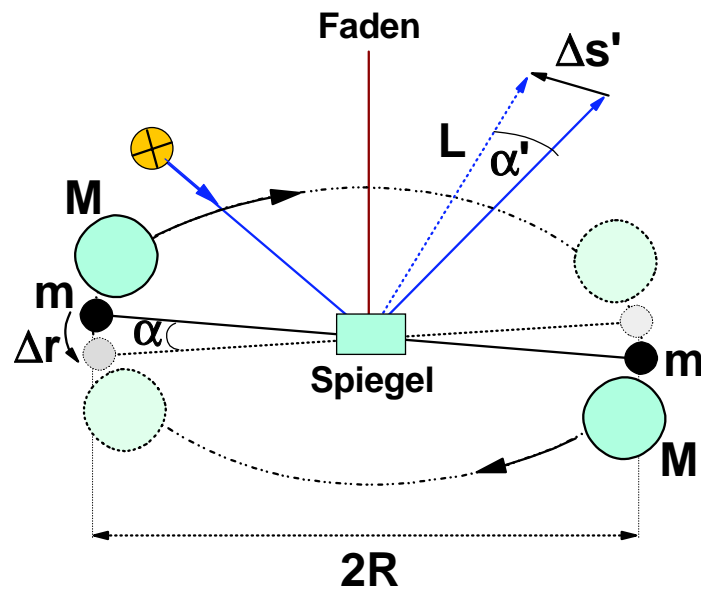


Abbildung 1.35: Bestimmung der Gravitationskonstante mit der Cavendish'schen Drehwaage.

dessen Größe vom Drehmoment des Drahtes abhängt. Hierbei ist  $\mathbf{F}_G$  die durch die Gravitationswechselwirkung verursachte Kraft. Werden die großen Massen jetzt um  $180^\circ$  gedreht, so erhält man das Drehmoment  $\mathbf{T}'_G = -\mathbf{T}_G$ , während das Drehmoment des Drahtes unverändert bleibt. Somit ergibt sich

$$\mathbf{T}'_{\text{gesamt}} = \mathbf{T}'_G + \mathbf{T}_D = -4\mathbf{F}_G \cdot R \neq 0 \quad (1.5.4)$$

Das heißt, das System der kleineren Massen, das am Faden aufgehängt ist, wird rotieren (gegen den Uhrzeigersinn). Aus der Messung des Drehwinkels als Funktion der Zeit,  $\alpha(t)$ , läßt sich die Gravitationskonstante bestimmen. Ebenso wie bei Fallversuchen ist der zurückgelegte Weg  $\Delta r = (a/2)t^2$ , woraus sich die Beschleunigung errechnen läßt. Da der Weg  $\Delta r$  sehr klein ist, wird dieser mit Hilfe eines Lichtzeigers hochskaliert. Mit

$$\Delta r = \alpha \cdot R = \frac{1}{2}at^2 \quad (1.5.5)$$

$$\text{und} \quad \alpha' = \frac{\Delta s'}{L} = 2\alpha \quad (1.5.6)$$

erhält man

$$\frac{1}{2}at^2 = \frac{\Delta s' R}{2L} \quad (1.5.7)$$

$$\text{und} \quad a = \frac{\Delta s' R}{Lt^2} = G \frac{M}{r^2}, \quad (1.5.8)$$

woraus sich schließlich

$$G = \frac{r^2 \cdot R \cdot \Delta s'}{M \cdot L \cdot t^2} \quad (1.5.9)$$

ergibt. Hierbei ist  $r$  der Abstand der Schwerpunkte der großen und der kleinen Masse. Typische Größenordnungen der beim Experiment von Cavendish verwendeten Massen und Längenskalen sind  $M \simeq 1\text{kg}$ ,  $m \simeq 10\text{g}$ ,  $R \simeq 5\text{cm}$ ,  $r \simeq 40\text{mm}$  und  $L \simeq 20\text{m}$ .

### Superpositionsprinzip

Treten mehr als 2 Massen miteinander in Wechselwirkung (z.B. die Massen  $m_1$ ,  $m_2$  und  $m_3$ ), so ist die Gravitationskraft auf die Masse  $m_1$  die vektorielle Summe der Kräfte  $\mathbf{F}_{21}$  (zwischen  $m_2$  und  $m_1$ ) und  $\mathbf{F}_{31}$  (zwischen  $m_3$  und  $m_1$ )

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31} \quad , \quad (1.5.10)$$

wobei sowohl  $\mathbf{F}_{21}$  und  $\mathbf{F}_{31}$  dem Gravitationsgesetz genügen. Die Gesamtwechselwirkung lässt sich also einfach als Überlagerung von 2-Körper-Kräften darstellen (siehe Abb. 1.36).

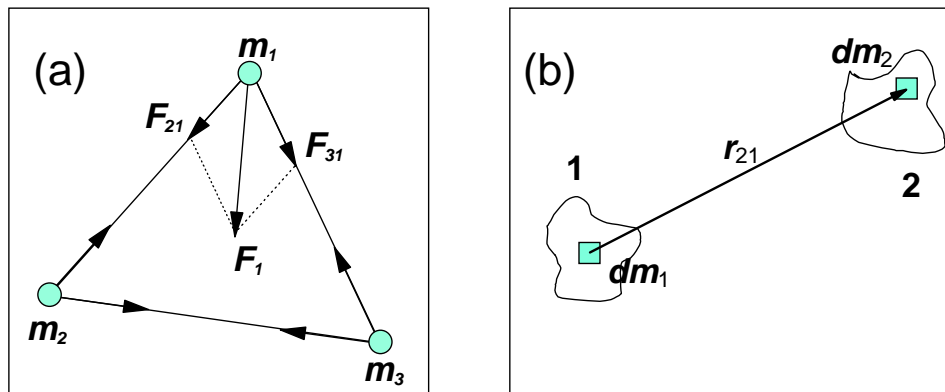


Abbildung 1.36: (a) Das Superpositionsprinzip der Gravitation. (b) Zur Gravitation zwischen ausgedehnten Körpern.

Das Superpositionsprinzip lässt sich dazu benutzen, das Gravitationsgesetz für ausgedehnte Massen zu verallgemeinern. Nach dem Superpositionsprinzip ergibt sich die Gesamtkraft zwischen zwei ausgedehnten Massen als Summe der Wechselwirkungskräfte zwischen allen infinitesimalen und damit punktförmigen Masselementen  $dm_1$  und  $dm_2$ . Die von  $dm_1$  auf  $dm_2$  ausgeübte Kraft  $d^2\mathbf{F}_1$  ist mit Gl. (1.5.1) gegeben durch  $d^2\mathbf{F}_1 = G dm_1 dm_2 \hat{\mathbf{r}}_{21} / r_{21}^2$ . Die vom gesamten Körper 2 auf das Massenelement  $dm_1$  ausgeübte Kraft  $d\mathbf{F}_1$  erhält man hieraus durch Summation aller von den Masselementen  $dm_2$  verursachten Einzelkräfte (Superpositionsprinzip) zu

$$d\mathbf{F}_1 = G dm_1 \int_{m_2} \frac{dm_2}{r_{21}^2} \hat{\mathbf{r}}_{21} \quad . \quad (1.5.11)$$

Eine weitere Integration über alle Masselemente  $dm_1$  liefert schließlich die Gesamtkraft  $\mathbf{F}_1$  auf den Körper 1:

$$\mathbf{F}_1 = G \int_{m_1} \int_{m_2} \frac{dm_1 dm_2}{r_{21}^2} = G \rho_1 \rho_2 \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{dV_1 dV_2}{r_{21}^2} \hat{\mathbf{r}}_{21} \quad , \quad (1.5.12)$$

wobei  $dm = \rho dV$  benutzt werden kann, falls jeder Körper eine homogene Massendichte  $\rho$  aufweist. Die Gesamtkraft  $\mathbf{F}_2$  auf den Körper 2 ist wegen actio = reactio einfach  $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$ .

Bei beliebig geformten Körpern werden die Integrale beliebig schwierig und eine Integration ist i.a. nicht geschlossen durchführbar. Besonders einfache Lösungen gibt es bei kugelförmigen Körpern:

- *Zwei homogene Kugeln:*

Das Gravitationsgesetz reduziert sich auf die einfache Form für zwei Massenpunkte, deren Massen den Kugelmassen und deren Abstand dem Abstand der beiden Kugelmittelpunkte entspricht.

- *Hohlkugel mit kleiner Masse im Innenraum:*

Im Innenraum der Hohlkugel verschwindet die Gravitationskraft. Dies ist auf die gegenseitige Kompensation der von den einzelnen Massenelementen der Kugelschale ausgeübten Kräfte zurückzuführen.

- *Homogene Vollkugel (siehe Abb. 1.37):*

Befindet sich ein Probekörper mit Masse  $m$  im Abstand  $r$  vom Kugelmittelpunkt, so erfährt dieser von der Kugelschale zwischen  $r$  und  $R$  keine Gravitationskraft (dieser Bereich entspricht einer Hohlkugel). Das heißt, der Probekörper erfährt nur eine Gravitationskraft, die von der Masse  $M_i$  der Innenkugel mit Radius  $r$  herrührt. Mit  $M_i = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$  ergibt sich die Gravitationskraft

$$F = G \frac{mM_i}{r^2} = G \frac{m(\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3)}{r^2} = G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot m \cdot r \quad (1.5.13)$$

Für eine homogene Vollkugel ist  $\rho = M/V = M/\frac{4}{3}\pi R^3$ , womit sich

$$F = G \frac{m \cdot M}{R^3} r \quad \text{für } 0 \leq r \leq R \quad (1.5.14)$$

ergibt. Die Gravitationskraft im Innern einer Vollkugel nimmt also linear mit  $r$  zu. Für den Außenraum ( $r > R$ ) gilt  $F \propto 1/r^2$ .

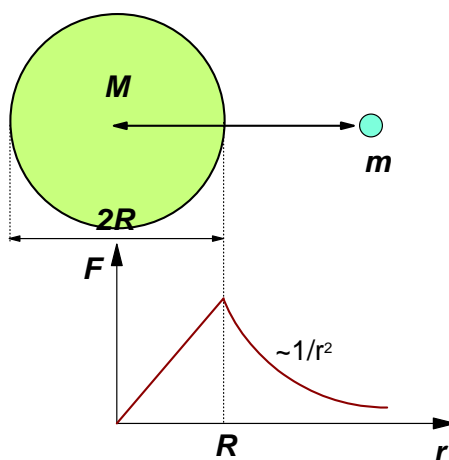


Abbildung 1.37: Gravitationskraft  $F$  auf eine punktförmige Masse  $m$  im Abstand  $r$  vom Zentrum einer homogenen Kugel mit Radius  $R$ .

### Was ist Gravitation ?

Obwohl das Gravitationsgesetz eine einfache Beziehung darstellt, nach deren simplen Regel sich Monde, Planeten und Sterne richten, wurde bis heute keine Maschinerie gefunden, die die Gravitation “erklärt”, ohne gleichzeitig ein anderes Phänomen vorherzusagen, das *nicht* existiert. Auch **Newton** hat darüber keine Hypothese aufgestellt. Er war zufrieden, herauszufinden, was sich tut, ohne sich mit der Maschinerie zu befassen.

Es ist instruktiv, mögliche Beziehungen zwischen der Gravitationskraft und anderen Kräften zu diskutieren. Gegenwärtig gibt es keine Erklärung der Gravitation aus anderen Kräften. Jedoch sind Gravitation und andere Kräfte sehr ähnlich und es ist deshalb interessant, Analogien aufzuzeigen. Zum Beispiel sieht das Kraftgesetz zwischen zwei punktförmigen Ladungen  $q_1$  und  $q_2$

$$F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} . \quad (1.5.15)$$

genauso aus wie das Gravitationsgesetz. Hierbei ist  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$  As/Vm die elektrische Feldkonstante. Die elektrische Kraft zwischen gleichnamigen Ladungen ist abstoßend, sie ist aber wie die Gravitationskraft proportional zu  $1/r^2$  und proportional zum Produkt der Ladungen, genauso wie die Gravitationskraft proportional zum Produkt der Massen ist. Vielleicht sind also Gravitation und Elektrizität viel enger miteinander verwandt als wir denken. Es wurden viele Versuche unternommen, die beiden Kräfte zu vereinigen, die aber bis heute nicht erfolgreich waren.<sup>22</sup>

Ein interessanter Aspekt sind die relativen Stärken der Gravitationskraft und der elektrischen Kraft. Vergleicht man die Kraft zwischen zwei Elektronen ( $q = 1.602 \times 10^{-19}$  As,  $m = 9.109 \times 10^{-31}$  kg) so findet man

$$\frac{\text{anziehende Gravitationskraft}}{\text{abstoßende elektrische Kraft}} = \left(\frac{m}{q}\right)^2 G 4\pi\epsilon_0 = \frac{1}{2.4 \times 10^{42}} . \quad (1.5.16)$$

Dieses Verhältnis ist unabhängig vom Abstand und stellt eine Naturkonstante dar. Die Gravitationskraft ist also im Vergleich zur elektrischen Kraft extrem klein. Zur Zeit ist völlig unklar, woher dieser extreme Unterschied kommt (man bedenke, daß man nur zwei unterschiedliche Aspekte des gleichen Dings, des Elektrons, betrachtet). Das Verhältnis in Gl.(1.5.16) ist aber eine Naturkonstante und damit voraussichtlich mit irgendetwas Tiefgehendem in der Natur verknüpft. Man hofft, daß man eines Tages eine “Universalgleichung finden wird, die zu den Wurzeln der phantastisch großen Zahl im Nenner von Gl.(1.5.16) führt.

### 1.5.2 Schwere und träge Masse

Im Gravitationsgesetz (Gl.(1.5.1)) wurde als diejenige Körpereigenschaft, die für die Gravitation verantwortlich ist, die Masse  $m$  des Körpers verwendet, wie man sie aus Beschleunigungsexperimenten erhält. Diese Vorgehensweise ist keineswegs selbstverständlich. Man kann im Gegenteil nicht erwarten, daß die Eigenschaft eines Körpers, die für sein Beharrungsvermögen (“Trägheit”) bei Beschleunigungsversuchen zuständig ist, auch zu einer Gravitationswechselwirkung führt. Begrifflich muß man deshalb zwischen einer *trägen Masse*  $m_t$ , die in der dynamischen Grundgleichung  $F = m_t a$  auftritt, und einer *schweren Masse*  $m_s$ , die als Ursache der Gravitationsanziehung auftritt und in das Gravitationsgesetz einzusetzen

<sup>22</sup>Bis heute konnten die Kernkraft, die schwache Kraft und die elektromagnetische Kraft vereinigt werden. Eine Vereinigung aller vier Fundamentalkräfte (große Vereinheitlichung) steht allerdings noch aus. Zur Zeit wird dies sehr intensiv im Rahmen sogenannter String-Theorien versucht.

ist, unterscheiden. Experimentell steht allerdings fest, daß schwere und träge Masse eng miteinander verknüpft sind. Im Rahmen der Meßgenauigkeit sind  $m_s$  und  $m_t$  streng zueinander proportional:

$$m_s \propto m_t \quad \text{oder} \quad \frac{m_s}{m_t} = \text{const} . \quad (1.5.17)$$

Das Verhältnis von  $m_s$  und  $m_t$  ist also für alle Körper eine Konstante. Moderne Experimente haben gezeigt, daß die Abweichungen von der Konstanz für  $m_s/m_t$  kleiner als  $10^{-11}$  sind.

Die Proportionalität von  $m_s$  und  $m_t$  folgte schon aus Fallversuchen, die von **Galilei** durchgeführt wurden. Auf der Erdoberfläche wirkt die Gravitationsanziehung zwischen der Erde und einem Probekörper der schweren Masse  $m_s$  als *Schwerkraft* oder *Gewicht*. Setzt man in Analogie zur trägen Masse auch für die schwere Masse an, daß sie additiv ist, so beobachtet man experimentell

$$F_G \propto m_s . \quad (1.5.18)$$

Diese Aussage ist bereits im **Newtonschen** Gravitationsgesetz enthalten, aus dem sich

$$F_G = m_s \cdot \frac{G \cdot M_E}{R_E^2} = m_s \cdot g \quad (1.5.19)$$

ergibt (vergleiche Gl.(1.5.1)) mit einer für alle Körper einheitlichen Proportionalitätskonstanten  $g$ . Da sich  $g$  aus Konstanten zusammensetzt ist  $g$  deshalb selbst eine Konstante. Hierbei ist  $M_E$  die Erdmasse und  $R_E$  der Erdradius.

Beim freien Fall wird die Schwerkraft  $F_G$  zur antreibenden Kraft, die als Beschleunigungsursache in der dynamischen Grundgleichung  $F = m_t a$  auftritt. Mit  $F_G = F$  ist daher  $m_s g = m_t a$  oder

$$a = \frac{m_s}{m_t} g . \quad (1.5.20)$$

Für die weitere Argumentation ist nun entscheidend, daß Fallversuche und weitere Experimente an den unterschiedlichsten Körpern ergaben, daß alle Körper gleich schnell fallen, d.h. sie erfahren dieselbe Fallbeschleunigung  $a = \text{const}$ .

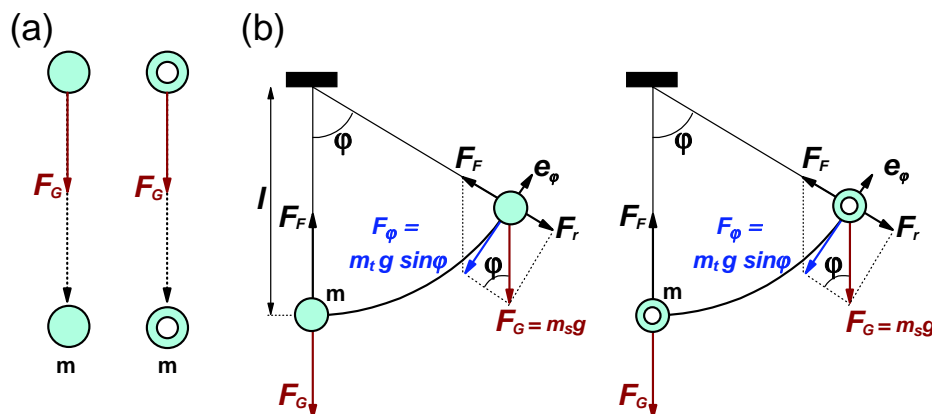


Abbildung 1.38: Fallversuche (a) und Pendelversuche (b) mit identischen Massen aus unterschiedlichen Substanzen. Für die Substanzen mit geringerer Dichte werden Hohlkugeln verwendet.



**Fallversuche:**

Die ersten Fallversuche wurden von **Galilei** vor mehr als 350 Jahren in Pisa durchgeführt, wo er Körper von einem hohen Turm (wahrscheinlich nicht vom bekannten Schiefen Turm) fallen ließ. Er ließ Körper aus Holz und Blei fallen, die die gleiche Form (z.B. Vollkugel und Hohlkugel) hatten, um Unterschiede im Luftwiderstand zu eliminieren. Er stellte fest, daß alle Körper mit der gleichen Beschleunigung fallen.

Den störenden Effekt des Luftwiderstands kann man in Vakuum vermeiden. Läßt man in einer luftgefüllten Röhre eine Bleikugel und einer Feder fallen, so fällt die Bleikugel wesentlich schneller. Die Ursache hierfür ist der höhere Luftwiderstand für die Feder. Wird die Röhre evakuiert, um den Luftwiderstand zu eliminieren, so fallen die Bleikugel und die Feder exakt gleichschnell. <sup>a</sup>

<sup>a</sup>Zur Zeit werden am Bremer Fallturm hochpräzise Fallexperimente durchgeführt, um festzustellen, ob unterschiedliche Körper (z.B. Körper aus Elementen mit unterschiedlicher Baryonen-Zahl) wirklich exakt gleichschnell fallen.

**Pendel-Experimente von Newton:**

**Newton** verglich die Schwingungsdauer von mathematischen Pendeln, an denen gleiche Massen unterschiedlicher Substanzen befestigt waren (siehe Abb. 1.38). Um Effekte des störenden Luftwiderstands zu eliminieren hat er Kugeln mit gleichem Radius verwendet (Vollkugeln oder Hohlkugeln). In die Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels (zur Herleitung siehe Abschnitt 1.6.3),  $-m_s \cdot g \cdot \sin \varphi = m_t \cdot l \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$ , gehen schwere und träge Masse ein. Da bei gleicher schwerer Masse für unterschiedliche Substanzen dieselbe Schwingungsdauer beobachtet wurde, schloß **Newton** auf die Äquivalenz von schwerer und träger Masse.

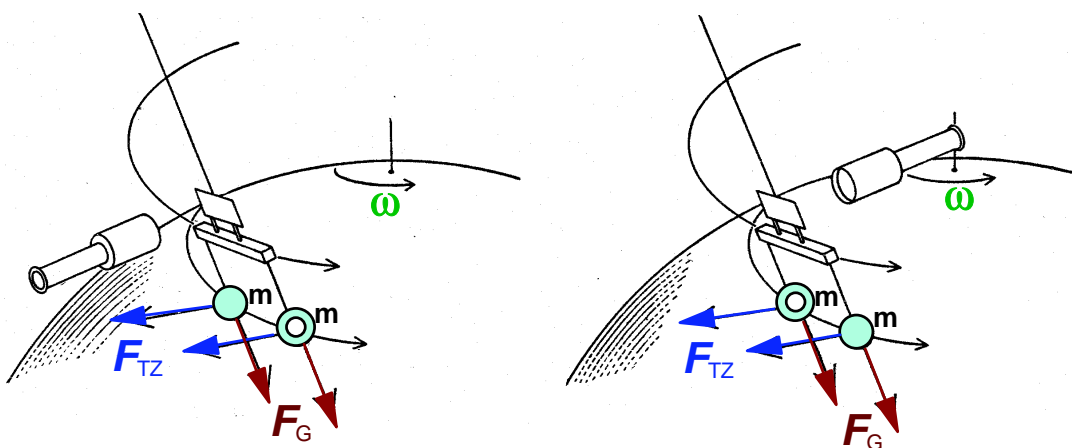


Abbildung 1.39: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus beim Eötvös-Experiment. Durch Beobachtung der Torsionswaage in unterschiedlichen Orientierungen stellte Eötvös fest, daß keine meßbare Rotation stattfand.

**Eötvös-Experiment:**

Der ungarische Physiker **Eötvös**<sup>a</sup> entwickelte einen Versuchsaufbau, mit dem die Äquivalenz von träger und schwerer Masse erstmals mit hoher Genauigkeit ( $\sim 10^{-9}$ ) überprüft werden konnte. Die Experimente wurden zwischen 1889 und 1908 durchgeführt. Der Versuchsaufbau ist in Abb. 1.39 skizziert. **Eötvös** beobachtete den Effekt auf eine Torsionswaage, wenn zwei Massen unterschiedlicher Substanzen, die an einem Balken aufgehängt sind, gleichzeitig von der Schwerkraft  $F_G = m_s \cdot g$  und der Zentrifugalkraft<sup>b</sup>  $F_{TZ} = -m_t \cdot \omega R^2 \hat{n}$  beeinflusst werden. Hierbei ist  $R$  der Erdradius und  $\omega = 2\pi/T = 2\pi/24h$  die Drehfrequenz der Erde um ihre eigene Achse. Ein Unterschied zwischen der trägen und schweren Masse würde zu einem Drehmoment und damit zu einer Rotation des Aufhängebalkens führen. Eine solche Rotation kann mittels eines an dem Balken befestigten Spiegels sehr genau nachgewiesen werden.

Später wurden ähnliche Experimente mit höherer Meßgenauigkeit durchgeführt, aus denen  $(m_s - m_t)/m_t \leq 10^{-11}$  geschlossen werden konnte (z.B. R. H. Dicke, 1960).<sup>c</sup>

<sup>a</sup>Baron Roland von Eötvös, 1848 -1919

<sup>b</sup>Zur Herleitung des Ausdrucks für die Zentrifugalkraft siehe Abschnitt 1.7.

<sup>c</sup>In einigen Experimenten wurden auch Abweichungen zwischen träger und schwerer Masse festgestellt und daraus auf die Existenz einer fünften Fundamentalkraft geschlossen. Diese Experimente konnten allerdings nicht bestätigt werden.

Die Konstanz von  $a$  in Gl.(1.5.20) beweist aber mit  $g = const$  die in Gl.(1.5.17) aufgestellte Behauptung  $m_s \propto m_t$ . Die Proportionalität  $m_s \propto m_t$  beinhaltet, daß Gravitation und Trägheit einander äquivalent sind. Diese Aussage wird als *Äquivalenzprinzip* zum Ausgangspunkt der Relativitätstheorie von **Einstein**. Die Gleichwertigkeit von schwerer und träger Masse wird hier aber nicht als Zufall abgetan, sondern vielmehr zum Grundpostulat einer Theorie der Gravitation erhoben.

Schließlich kann durch eine passende Einheitenwahl

$$m_s = m_t := m \quad (1.5.21)$$

gewählt werden, was einer Gleichsetzung von schwerer und träger Masse entspricht. Als Einheit wird 1 kg verwendet. Bei dieser Einheitenwahl muß man dann aber im Gravitationsgesetz eine Maßsystemkonstante  $G$  vorsehen, da über alle Einheiten der im Gravitationsgesetz auftretenden Größen bereits verfügt wurde. Mit der Festlegung in Gl.(1.5.21) erhält man schließlich mit Gl.(1.5.20) die Fallbeschleunigung

$$a = g \quad . \quad (1.5.22)$$

Auf einen Körper der Masse  $m$  an der Erdoberfläche wirkt die Kraft

$$F = G \frac{m \cdot M_E}{R_E^2} = m \cdot g \quad . \quad (1.5.23)$$

Die Größe  $g$  ist die Fallbeschleunigung auf der Erdoberfläche und wird auch *Erdbeschleunigung* genannt. Da die genaue Masse der Erde nicht bekannt ist, kann man durch Messung der Erdbeschleunigung  $g$  mit den bekannten Größen  $R_E$  und  $G$  die Erdmasse  $M_E$  bestimmen. Mit  $R_E = 6,37 \times 10^6$  m,  $G = 6,67259 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$  und  $g = 9,82 \text{ m/s}^2$  erhält man

$$M_E = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg} \quad . \quad (1.5.24)$$

Die Größe der Erdmasse macht verständlich, daß trotz der kleinen Maßzahl für die Gravitationskonstante  $G$  die Schwerkraft an der Erdoberfläche leicht beobachtbar ist.<sup>23</sup>

Die Erdbeschleunigung  $g$  ist abhängig von der Höhe  $h$  über der Erdoberfläche. Die wirksame Erdbeschleunigung  $g(h)$  ist gegeben durch

$$g(h) = \frac{G \cdot M_E}{(R_E + h)^2} = \frac{G \cdot M_E}{R_E^2 \left(1 + \frac{h}{R_E}\right)^2} \quad . \quad (1.5.25)$$

Für  $h/R_E \ll 1$  läßt sich der Ausdruck  $\left(1 + \frac{h}{R_E}\right)^{-2}$  nach Taylor entwickeln. Mit  $\left(1 + \frac{h}{R_E}\right)^{-2} \approx \left(1 - \frac{2h}{R_E}\right)$  ergibt sich

$$g(h) \simeq G \frac{M_E}{R_E^2} \left(1 - \frac{2h}{R_E}\right) \quad , \quad (1.5.26)$$

d.h. die Erdbeschleunigung nimmt etwa linear mit zunehmender Höhe über der Erdoberfläche ab (wobei die Näherung nur für  $h \ll R_E$  gilt). In einer Höhe von 300 km über der Erdoberfläche hat die Erdbeschleunigung  $g(h)$  im Vergleich zu  $g(0)$  um 10% abgenommen. Da die Erde keine exakte Kugelform besitzt, ist die Erdbeschleunigung abhängig vom genauen Ort auf der Erdoberfläche. Insbesondere ist aufgrund der an den Polen abgeflachten Form der Erde die Erdbeschleunigung dort größer als am Äquator ( $g_{\text{Pol}} = 9,8322 \text{ m/s}^2$ ,  $g_{\text{Äquator}} = 9,7805 \text{ m/s}^2$ ).<sup>24</sup>

### 1.5.3 Die Keplerschen Gesetze

Die Bewegung der Planeten hat schon im Altertum und insbesondere zu Beginn der naturwissenschaftlichen Forschung in der Neuzeit das Interesse der Astronomen und Physiker geweckt. Anhand eines umfangreichen Beobachtungsmaterials gelang es **Kepler**, die wichtigsten Eigenschaften der Planetenbewegung in einfachen empirischen Regeln zusammenzufassen. Diese haben entscheidend dazu beigetragen, das *geozentrische* durch das *heliocentrische Weltbild* zu ersetzen, in dem sich die Planeten um die Sonne und nicht um die Erde bewegen. Der große Verdienst **Newtons** bestand dann darin, die **Keplerschen** Regeln zwanglos aus fundamentalen Naturgesetzen (Newtonsche Axiome, Gravitationsgesetz) abzuleiten.

Die drei **Keplerschen** Gesetze lauten angewandt auf unser Planetensystem:

**1. Keplersches Gesetz:** Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht (siehe Abb. 1.40a).

<sup>23</sup>Mit Hilfe von  $F_G = m_s \cdot \frac{G \cdot M_E}{R_E^2} = m_s \cdot g$  läßt sich auch die Fallbeschleunigung auf dem Mond berechnen: Mit  $M_M = 7,35 \times 10^{22} \text{ kg}$ ,  $R_M = 1,74 \times 10^6 \text{ m}$  erhält man  $g_M = 1,62 \text{ m/s}^2$ . Die Fallbeschleunigung auf dem Mond ist deshalb nur etwa 1/6 der Erdbeschleunigung. Entsprechend ist die Schwerkraft  $F_G = m \cdot g_M$  auf dem Mond etwa um den Faktor 6 kleiner als auf der Erde.

<sup>24</sup>Zu einer Abweichung kommt es allerdings auch aufgrund der durch die Erdrotation verursachten Zentrifugalkraft. Eine genaue Erläuterung erfolgt später bei der Diskussion von Trägheitskräften in Abschnitt 1.7.3.

**2. Keplersches Gesetz:** Der Fahrstrahl von der Sonne zur Erde überstreicht in gleichen Zeiten  $dt$  gleiche Flächen  $dA$ . Anders formuliert: die Flächengeschwindigkeit  $dA/dt$  des Fahrstrahls ist für einen Planeten konstant (siehe Abb. 1.40b).

**3. Keplersches Gesetz:** Die Quadrate der Umlaufzeiten  $T_1$  und  $T_2$  zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen  $a_1$  und  $a_2$  der Bahnellipsen:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad (1.5.27)$$

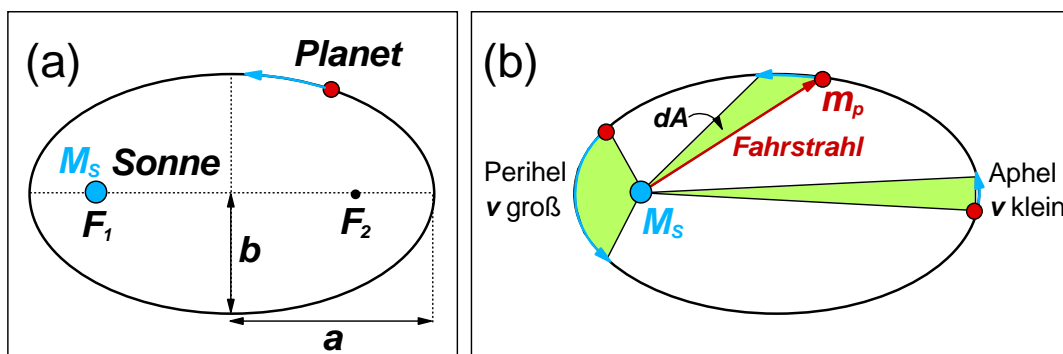


Abbildung 1.40: Zum 1. und 2. Keplerschen Gesetz.

Zur Diskussion des 1. und 3. **Keplerschen** Gesetzes soll lediglich die im 1. Gesetz als Spezialfall enthaltene Kreisbahn eines Planeten um die Sonne diskutiert werden, da diese mathematisch einfacher zu handhaben ist. Beim Kreis fallen die Ellipsenbrennpunkte  $F_1$  und  $F_2$  in Abb. 1.40 zusammen, die beiden Halbachsen  $a$  und  $b$  sind gleich und es gilt  $a = b = r$ . Ferner wird ausgenutzt, daß die Sonnenmasse  $M_S$  viel größer als die Planetenmasse  $m_p$  ist. Man kann dann näherungsweise annehmen, daß der Zentralstern ruht, und für die Planetenbahn eine Kreisbahn ansetzen.<sup>25</sup> Wie in Abb. 1.41 gezeigt ist, soll ein Planet mit Masse  $m_p$  betrachtet werden, der zum Zeitpunkt  $t$  von der Sonne aus mit dem Ortsvektor  $\mathbf{r}(t)$  beschrieben wird. Die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t)$  steht senkrecht auf  $\mathbf{r}(t)$ . Durch die Sonnenmasse erfährt der Planet die Gravitationskraft

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_p M_S}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad , \quad (1.5.28)$$

die auf das Gravitationszentrum, die Sonne, gerichtet ist. Diese Kraft hat eine Beschleunigung  $\mathbf{a}$  des Planeten zur Folge, die sich aus  $\mathbf{F} = m_p \mathbf{a}$  ergibt und ebenfalls zur Sonne weist. Die momentane Beschleunigung steht daher senkrecht zur Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t)$  des Planeten. In der Bezeichnungsweise des Abschnitts 1.3.2 stellt  $\mathbf{a}(t)$  eine Normalbeschleunigung des Planeten dar, wogegen die Tangentialbeschleunigung verschwindet. Gemäß Gl.(1.3.31) bleibt daher der Betrag  $v$  der Geschwindigkeit gleich, während sich die Richtung der Geschwindigkeit ändert, d.h. die Bahnkurve wird gekrümmt. Der Krümmungsradius  $R$  ergibt sich gemäß Gl.(1.3.31) aus

$$\mathbf{a}(t) = \frac{v^2}{R} \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{a}_n \quad , \quad (1.5.29)$$

<sup>25</sup>In Wirklichkeit bewegen sich die Sonne und der Planet um einen gemeinsamen Schwerpunkt. Für  $M_S \gg m_p$  liegt der gemeinsame Schwerpunkt aber praktisch im Mittelpunkt der Sonne.

wobei  $\hat{n}$  der Normalenvektor ist, der vom Planeten auf den Krümmungsmittelpunkt der Bahn gerichtet ist. Wenn nun der Krümmungsradius  $R$  der Bahn mit dem Abstand  $r$  zwischen Sonne und Planet übereinstimmt, d.h.  $R = r$  gilt, so läuft der Planet in der Zeit  $\Delta t$  auf einem Kreisbogen mit Radius  $r$  um die Sonne. In der neuen Position zur Zeit  $t + \Delta t$  steht aber wieder  $\mathbf{v}(t + \Delta t)$  wieder senkrecht zur Gravitationskraft und obige Argumentation gilt von neuem. Insgesamt bewegt sich der Planet auf einer Kreisbahn, in dessen Mittelpunkt sich die Sonne befindet (1. **Keplersches Gesetz**).

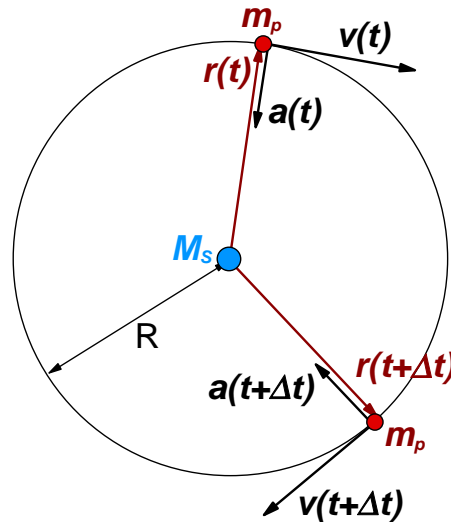


Abbildung 1.41: Umlauf eines Planeten mit Masse  $m_p$  um die Sonne mit Masse  $M_S$  auf einer Kreisbahn.

Im speziellen Fall der Kreisbahn ist die Bahngeschwindigkeit konstant und ergibt sich aus den obigen Gleichungen

$$F = G \frac{m_p \cdot M_S}{r^2} = m_p \cdot a = m_p \frac{v^2}{R} = m_p \frac{v^2}{r} \quad (1.5.30)$$

zu

$$v^2 = G \frac{M_S}{r} \quad (1.5.31)$$

Je enger ein Planet die Sonne umkreist, desto höher ist seine Bahngeschwindigkeit  $v$ . Für die Winkelgeschwindigkeit  $\omega = v/r$  und die Umlaufzeit  $T = 2\pi/\omega$  folgt

$$\omega^2 = G \frac{M_S}{r^3} \quad (1.5.32)$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_S} \quad (1.5.33)$$

Beim Vergleich zweier Planeten auf Kreisbahnen mit Radien  $r_1$  und  $r_2$  um die Sonne liefert Gl.(1.5.33) für das Verhältnis der Umlaufzeiten  $T_1/T_2$  unmittelbar

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \quad (1.5.34)$$

Dies ist der Inhalt des 3. **Keplerschen** Gesetzes für kreisförmige Planetenbahnen. Die Herleitung macht deutlich, daß das 3. **Keplersche** Gesetz nur dann Gültigkeit besitzt, wenn das Gravitationsgesetz einer  $1/r^2$ -Abhängigkeit genügt.

Für die Diskussion des 2. **Keplerschen** Gesetzes sollen die Verhältnisse in zwei ausgewählten Punkten einer ellipsenförmigen Planetenbahn betrachtet werden. Für das *Perihel* (sonnennächster Punkt) und das *Aphel* (sonnenfernster Punkt) ist der Krümmungsradius  $R$  aufgrund der Symmetrieeigenschaften der Ellipse gleich. Für die auftretenden Kräfte (Gravitationskraft = Zentripetalkraft) gilt dann

$$\text{Perihel : } G \frac{m_p \cdot M_S}{r_1^2} = m_p \cdot \frac{v_1^2}{R} \Rightarrow G \frac{M_S}{r_1^2} = \frac{v_1^2}{R} \quad (1.5.35)$$

$$\text{Aphel : } G \frac{m_p \cdot M_S}{r_2^2} = m_p \cdot \frac{v_2^2}{R} \Rightarrow G \frac{M_S}{r_2^2} = \frac{v_2^2}{R} . \quad (1.5.36)$$

Hierbei sind  $r_1$  und  $r_2$  der Abstand von Perihel und Aphel zur Sonne. Aus beiden Gleichungen ergibt sich

$$r_1^2 \cdot v_1^2 = r_2^2 \cdot v_2^2 \quad \text{bzw.} \quad r_1 \cdot v_1 = r_2 \cdot v_2 \quad . \quad (1.5.37)$$

Mit der in der Zeit  $dt$  überstrichenen Fläche  $dA = \frac{1}{2} r ds$  ergibt sich

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} r \cdot v \quad (1.5.38)$$

und damit das 2. **Keplersche** Gesetz

$$\frac{dA_1}{dt} = \frac{dA_2}{dt} = const \quad . \quad (1.5.39)$$

Aus Gl.(1.5.33) läßt sich mit Hilfe der Umlaufzeiten und der Bahnradien der Planeten die Masse der Sonne berechnen. Man erhält

$$M_S = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg} \quad . \quad (1.5.40)$$

Die Masse der Sonne ist also um etwa  $3 \times 10^5$  größer als die Erdmasse und immerhin noch etwa 1000 mal größer als die Masse des größten Planeten (Jupiter). Die obige Annahme  $M_S \gg m_p$  ist also gut erfüllt.

Die **Keplerschen** Gesetze gelten auch für die Monde der Planeten oder künstliche Monde (Satelliten). Der Planet übernimmt hierbei die Rolle des Zentralkörpers. Analog zu Gl.(1.5.33) folgt für die Umlaufzeiten der Satelliten

$$T_{Sat}^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_E} \quad , \quad (1.5.41)$$

wobei  $r$  z.B. der Abstand zwischen Erde und Mond ist. Für künstliche Satelliten folgt mit  $r = R_E + h$  und  $GM_E = gR_E^2$  (vergleiche Gl.(1.5.19)) folgt

$$T_{Sat}^2 = \frac{4\pi^2 (R_E + h)^3}{gR_E^2} \quad . \quad (1.5.42)$$

Hieraus ergibt sich für  $h = 35\,800$  km über dem Äquator eine Umlaufzeit von  $t = 24$  h. Die Position des Satelliten wird dadurch *geostationär*, was für die Nachrichtentechnik wichtig ist.

## 1.6 Anwendungsbeispiele der Bewegungsgleichungen

In diesem Abschnitt soll anhand von einfachen Beispielen beschrieben werden, wie mit Hilfe der Newtonschen Axiome die Gesetzmäßigkeiten von Bewegungsabläufen beschrieben werden können.

### 1.6.1 Die Fallgesetze

Im Schwerfeld der Erde wirkt auf einen Körper mit der schweren Masse  $m_s$  die Schwerkraft  $\mathbf{F}_G = m_s \cdot \mathbf{g}$ . Sie bewirkt eine Beschleunigung  $\mathbf{a}$  der trägen Masse  $m_t$

$$\mathbf{F}_G = m_t \cdot \mathbf{a} = m_t \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m_s \cdot \mathbf{g} . \quad (1.6.1)$$

Da  $m_s = m_t = m$  zu setzen ist, ergibt sich

$$\frac{m d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \cdot \mathbf{g} \quad (1.6.2)$$

Durch Integration erhält man die Geschwindigkeit des Körpers zum Zeitpunkt  $t$  zu

$$\mathbf{v}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{g} dt' = \mathbf{g} \cdot t + \mathbf{v}_0 . \quad (1.6.3)$$

Hierbei ist  $\mathbf{v}_0$  die Anfangsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t = t_0$ . Den Ortsvektor erhält man durch nochmalige Integration zu

$$\mathbf{r}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t') dt' = \int_{t_0}^t (\mathbf{g} \cdot t' + \mathbf{v}_0) dt' \quad (1.6.4)$$

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{g}}{2} t^2 + \mathbf{v}_0 \cdot t + \mathbf{r}_0 , \quad (1.6.5)$$

wobei  $\mathbf{r}_0$  der Ortsvektor zur Zeit  $t = t_0$  ist.

### Freier Fall

Durch geeignete Wahl der Anfangsbedingungen vereinfachen sich obige Beziehungen. Beim freien Fall ist  $\mathbf{v}_0 = 0$  und man kann den Koordinatenursprung so wählen, daß  $\mathbf{r}_0 = 0$  ist. Die Fallrichtung soll außerdem parallel zur  $z$ -Achse sein. Gln.(1.6.3) und (1.6.5) vereinfachen sich dann zu

$$z(t) = h(t) = \frac{g}{2} t^2 \quad (1.6.6)$$

$$v_z(t) = g \cdot t = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} . \quad (1.6.7)$$

Eine vorgegebene Fallhöhe  $h$  wird nach der Zeit  $\sqrt{\frac{2h}{g}}$  erreicht, wodurch sich die erreichte Endgeschwindigkeit zu  $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$  ergibt. Beim freien Fall entspricht die Länge des Ortsvektors  $\mathbf{r}(t)$  der Fallhöhe  $h(t)$ , da es sich um eine geradlinige Bewegung handelt.

### Waagrechter und schiefer Wurf

Beim waagrechten und schiefen Wurf wird der freien Fallbewegung eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_0$  überlagert. Dieser Fall wurde bereits in Abschnitt 1.3.1 und 1.3.2 diskutiert und wird hier nur nochmals kurz rekapituliert.

Zur Zeit  $t_0 = 0$  soll gelten:  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{z}} = -g \cdot \hat{\mathbf{z}}$  und  $\mathbf{r}(0) = 0$ . Durch Integration erhält man

$$\mathbf{v}(t) = -g \cdot t \cdot \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{v}_0 \quad (1.6.8)$$

$$\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \cdot \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{v}_0 t \quad (1.6.9)$$

$$\text{oder } \mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \cdot \hat{\mathbf{z}} + v_{0x}t \cdot \hat{\mathbf{x}} + v_{0y}t \cdot \hat{\mathbf{y}} + v_{0z}t \cdot \hat{\mathbf{z}} \quad (1.6.10)$$

Hierbei sind  $\hat{\mathbf{x}}$ ,  $\hat{\mathbf{y}}$  und  $\hat{\mathbf{z}}$  die Einheitsvektoren in  $x$ ,  $y$  und  $z$ -Richtung und  $g$  der Betrag der Erdbeschleunigung. In Komponentenschreibweise erhält man somit

$$x(t) = v_{0x} \cdot t \quad (1.6.11)$$

$$y(t) = v_{0y} \cdot t \quad (1.6.12)$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z} \cdot t \quad (1.6.13)$$

Durch Auflösen der Gleichungen für  $x(t)$  und  $y(t)$  nach  $t$  und Einsetzen in die Gleichung für  $z(t)$  erhält man

$$z(x) = -\frac{1}{2v_{0x}^2}x^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}} \cdot x \quad (1.6.14)$$

$$z(y) = -\frac{1}{2v_{0y}^2}y^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0y}} \cdot y \quad (1.6.15)$$

Diese Gleichungen stellen Parabeln in der  $zy$ - bzw.  $zx$ -Ebene dar, man nennt sie auch *Wurfparabeln*. Beim waagrechten Wurf ist  $v_{0z} = 0$  und der zweite Term in Gl.(1.6.14) und (1.6.15) verschwindet.

Durch eine Kurvendiskussion lassen sich die Wurfweite  $W$  ( $z(t) = 0$ ), die Scheitelhöhe  $H$  ( $dz/dx = 0$  bzw.  $dz/dy = 0$ ) und die Flugzeit  $T$  berechnen zu

$$W_x = \frac{2v_{0x} \cdot v_{z0}}{g} \quad (1.6.16)$$

$$W_y = \frac{2v_{0y} \cdot v_{z0}}{g} \quad (1.6.17)$$

$$H = \frac{v_{0z}^2}{2g} \quad (1.6.18)$$

$$T = \frac{2v_{0z}}{g} \quad (1.6.19)$$

Durch eine Drehung des Koordinatensystems läßt sich erreichen, daß die Wurfparabel in der  $zx$ -Ebene liegt. Mit der Abwurfgeschwindigkeit  $v_0$  und dem Abwurfwinkel  $\alpha$  gegen die Horizontale wird  $v_{0x} =$



$v_0 \cos \alpha$ , und  $v_{0z} = v_0 \sin \alpha$ . Da ferner  $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$  ist, lassen sich  $W$ ,  $H$  und  $T$  als Funktion des Winkels  $\alpha$  angeben

$$W_x = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \quad (1.6.20)$$

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha \quad (1.6.21)$$

$$T = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha \quad (1.6.22)$$

Wegen  $\sin 2\alpha = 1$  für  $\alpha = 45^\circ$ , erzielt man bei vorgegebener Abwurfgeschwindigkeit  $v_0$  unter einem Abwurfwinkel von  $45^\circ$  die größte Wurfweite  $\frac{v_0^2}{g}$ .

## 1.6.2 Die harmonische Schwingung

### Definition einer harmonischen Schwingung

Man betrachte eine Punkt  $P$  auf einem Kreis mit Radius  $a$ , der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  entgegen dem Uhrzeigersinn periodisch umläuft (siehe Abb. 1.42). Die Kreisbahn soll in der  $xy$ -Ebene liegen und der Kreismittelpunkt soll mit dem Ursprung des Koordinatensystems zusammenfallen. Der Winkel  $\varphi$  zwischen Radiusvektor  $\mathbf{r}$  und der  $x$ -Achse wächst linear mit der Zeit an:  $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$ . Hierbei ist  $\varphi_0$  der Anfangswinkel zur Zeit  $t = 0$ . Die  $x$ - und  $y$ -Koordinate des Punktes  $P$  lassen sich dann wie folgt ausdrücken

$$x(t) = A \cos \varphi(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (1.6.23)$$

$$y(t) = A \sin \varphi(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (1.6.24)$$

Der Verlauf dieser Funktionen ist in Abb. 1.43 dargestellt. Diese Bewegungsform auf der  $x$ - und  $y$ -Achse wird als *harmonische Schwingung* bezeichnet. Man nennt in diesem Zusammenhang  $A$  die *Amplitude*,  $\varphi(t)$  die *Phase* und  $\varphi_0$  die *Anfangsphase* oder *Phasenverschiebung* der Schwingung. Die Zeit, die der Radiusvektor  $\mathbf{r}$  für einen vollen Umlauf braucht, nennt man die *Schwingungsdauer*  $T$ .

Die harmonische Schwingung ist dadurch ausgezeichnet, daß *die Schwingungsdauer unabhängig von der Amplitude*  $A$  ist. Eine positive Phasenverschiebung  $\varphi_0$  entspricht einem zeitlich vorgerückten Vorgang. Die Kurve ist in Richtung kleinerer  $t$ -Werte verschoben. Für  $\varphi_0 < 0$  ist die Kurve nach rechts, d.h. in Richtung größerer  $t$ -Werte gegenüber dem Zustand mit  $\varphi_0 = 0$  verschoben.

Die Geschwindigkeiten bzw. die Beschleunigungen, mit denen die Projektionen des Punktes  $P$  auf der  $x$ - bzw.  $y$ -Achse entlanglaufen, erhält man aus Gl.(1.6.24) durch Differentiation nach der Zeit zu

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (1.6.25)$$

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 \cdot x(t) \quad (1.6.26)$$

$$v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (1.6.27)$$

$$a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 \cdot y(t) \quad (1.6.28)$$

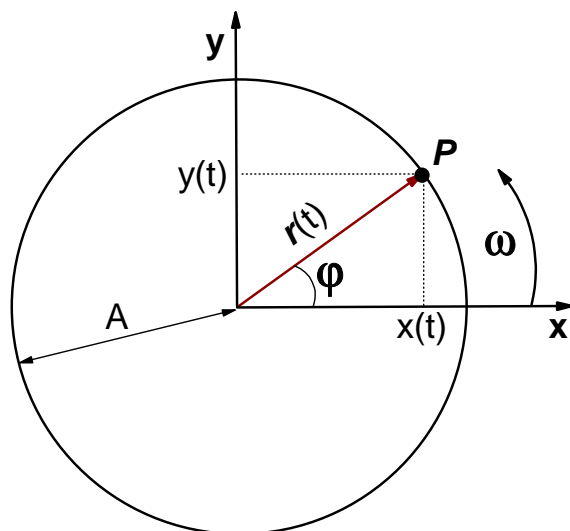


Abbildung 1.42: Die harmonische Schwingung als Projektion eines auf einem Kreis gleichförmig umlaufenden Punktes  $P$  auf die Koordinatenachsen.

Man erhält somit die für eine harmonische Schwingung charakteristischen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\omega^2 \cdot x(t) \quad (1.6.29)$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -\omega^2 \cdot y(t) \quad (1.6.30)$$

Charakteristisch für eine harmonische Schwingung ist also ferner, daß *die Beschleunigung proportional zur Auslenkung* ist. Die Einführung der harmonischen Schwingung als eine Projektion der gleichförmigen Kreisbewegung auf die Koordinatenachsen stellt ein Beispiel für die Zerlegung des Ortsvektors, der Geschwindigkeit und der Beschleunigung in zueinander senkrecht stehende und unabhängig wirkende Komponenten dar (vergleiche hierzu auch Abschnitt 1.3.1).

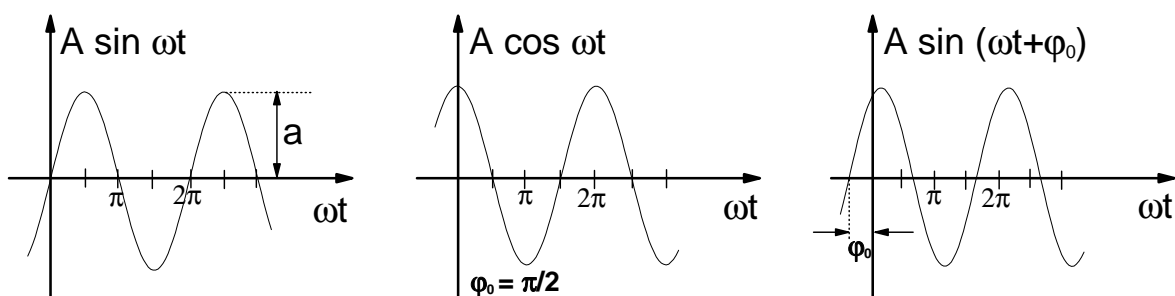


Abbildung 1.43: Harmonische Schwingung.

### Das Masse-Feder Pendel – Federkraft

Lenkt man eine zunächst in Ruhe befindliches System bestehend aus einer Feder und einer Masse  $m$  um die Strecke  $x$  reibungsfrei aus (siehe Abb. 1.44), so muß man die elastische Gegenkraft der Feder

**Experiment: Rotierender Stab:**

Ein rotierender, exzentrisch angebrachter Stab wird zunächst über einen in Ruhe befindlichen Drehspiegel an die Wand projiziert. Man beobachtet den Schatten des Stabes, der sich mit der Umlauffrequenz  $\omega$  auf und ab bewegt. Versetzt man den Drehspiegel in gleichförmige Rotation, so beobachtet man das Bild einer Sinusfunktion, d.h. aus dem zeitlichen Nacheinander des auf- und abschwingenden Schattenbildes wird ein räumliches Nebeneinander.

überwinden. Nach einem Ansatz von **Hooke** ist der Betrag der Rückstellkraft der Feder proportional zur Auslenkung und ihre Richtung ist antiparallel zur Auslenkung. Somit ergibt sich das **Hookesche Gesetz** zu

$$\mathbf{F}_F = F_{Fx} \cdot \hat{\mathbf{x}} = -kx \cdot \hat{\mathbf{x}} \quad . \quad (1.6.31)$$

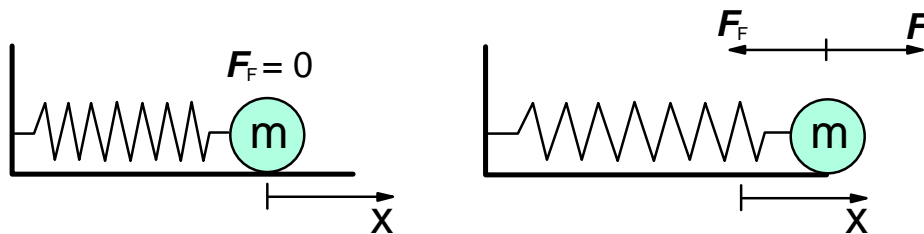


Abbildung 1.44: Masse-Feder Pendel in Ruhelage (links) und mit endlicher Auslenkung (rechts).

Hierbei ist  $k$  die *Federkonstante*. Vernachlässigt man die Federmasse und setzt man in der dynamischen Grundgleichung  $F = ma = m d^2x/dt^2$  die **Hookesche** Beziehung ein, so erhält man

$$-k \cdot x = m \cdot a_x = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad , \quad (1.6.32)$$

oder

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x = -\omega^2 \cdot x \quad . \quad (1.6.33)$$

Dies ist die Differentialgleichung einer harmonischen Schwingung mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \quad , \quad (1.6.34)$$

wobei  $\nu$  die Schwingungsfrequenz ist, also die Zahl der pro Sekunde ausgeführten Schwingungen. Das Federpendel besitzt somit die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad . \quad (1.6.35)$$

Man nennt ganz allgemein Kräfte, die Anlaß zu einer harmonischen Schwingung geben, *harmonische Kräfte*. Der **Hookesche** Ansatz für die Federkraft ist ein Beispiel dafür. Die Aufstellung der Schwingungsgleichung macht klar, daß harmonische Kräfte Rückstellkräfte sind, die betragsmäßig linear mit der Auslenkung aus der Ruhelage anwachsen.

**Experiment: Bestimmung der Federkonstanten:**

Ein auf einer Platte annähernd reibungsfrei beweglicher Wagen mit einer Masse  $m$  ist zwischen zwei seitlich befestigte Federn eingespannt (siehe Abb. 1.45). Durch eine schwere Masse  $M$  wird der Wagen um die Strecke  $x$  aus seiner Ruhelage ausgelenkt. Man variiert nun  $M$  und mißt  $x$  als Funktion von  $M$ . Die Federkonstante berechnet sich zu  $k = M \cdot g/x$ . Setzt man diesen Wert für  $k$  in die Schwingungsgleichung ein, so erhält man die Schwingungsdauer zu  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$  (Schwingung ohne Masse  $M$ ). Diese berechnete Schwingungsdauer läßt sich leicht mit Hilfe einer Stoppuhr überprüfen. Vergrößert man  $m$  auf das Vierfache, so muß sich die doppelte Schwingungsdauer ergeben. Auch dies kann mit Hilfe einer Stoppuhr überprüft werden.

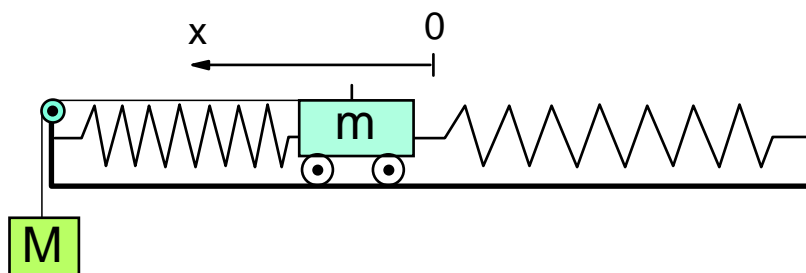


Abbildung 1.45: Anordnung zur Bestimmung der Federkonstante. In der Ruhelage ( $x = 0$ ) sind beide Federn entspannt.

Die obigen Formeln für  $\omega$ ,  $\nu$  und  $T$  bleiben erhalten, wenn an der Masse zusätzlich zur Federkraft eine konstante Kraft einwirkt. Um die Richtigkeit dieser Aussage zu prüfen, wird eine Masse  $m$  betrachtet, die im Gravitationsfeld der Erde an einer Feder mit Federkonstanten  $k$  aufgehängt ist (siehe Abb. 1.46). Die konstante Schwerkraft  $F_G = mg$  führt zu einer Grundausslenkung  $x_G$  aus der Ruhelage der entspannten Feder, die sich aus Gl.(1.6.32) zu  $mg = k|x_G|$  ergibt. Legt man wie in Abb. 1.46 gezeigt den Nullpunkt der  $x$ -Achse in diese Gleichgewichtslage, dann berechnet sich die Kraft  $F_x$  bei einer Auslenkung  $x$  zu

$$F_x = m \cdot g - k \cdot (|x_G| + x) = -k \cdot x \quad . \quad (1.6.36)$$

Die resultierende Kraft ist demnach wieder harmonisch mit der Federkonstanten  $k$  und man beobachtet eine harmonische Schwingung der Masse um die Gleichgewichtslage, wenn die Masse aus dieser ausgelenkt und losgelassen wird.

Es ist lehrreich, sich zu überlegen, wie die Federkonstante  $k$  einer Kombination von Federn (parallel oder hintereinander geschaltet, siehe Abb. 1.47) mit den Federkonstanten  $k_1, k_2, \dots$  der einzelnen Federn zusammenhängt. Bei einer Parallelschaltung von Federn ist die gesamte Rückstellkraft durch die Summe der einzelnen Rückstellkräfte gegeben, d.h. die einzelnen Federkräfte  $F_i = -k_i x$  addieren sich. Da die Auslenkung für alle Federn dieselbe ist, erhält man

$$|F_{\text{ges}}| = \sum_{i=1}^n k_i \cdot x \quad . \quad (1.6.37)$$

Das heißt, bei einer Parallelschaltung von Federn setzt sich die Gesamtfederkonstante aus der Summe der einzelnen Federkonstanten zusammen

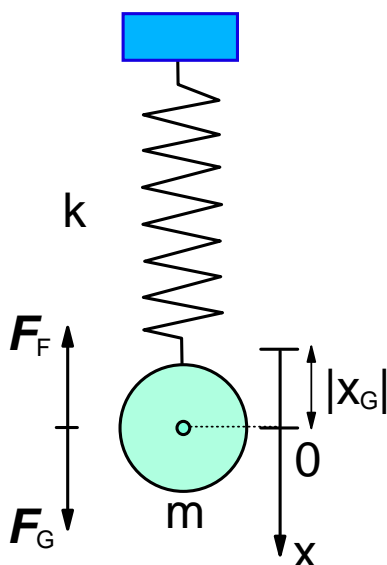


Abbildung 1.46: Das Masse-Feder Pendel im Schwerfeld der Erde.

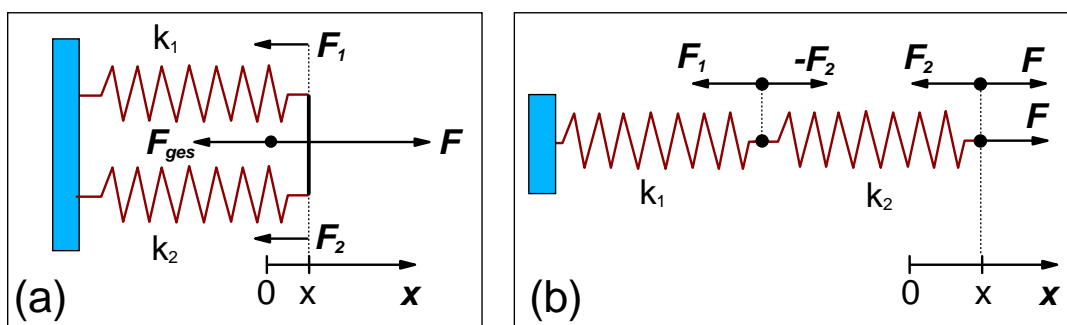


Abbildung 1.47: Parallelschaltung (a) und Serienschaltung (b) zweier Federn.

$$k_{\text{ges}} = k_1 + k_2 + \dots = \sum_{i=1}^n k_i \quad (1.6.38)$$

Bei einer Reihenschaltung von Federn muß in der Ruhelage die Summe der Federkräfte von benachbarten Federn verschwinden, das heißt, alle Kräfte müssen betragsmäßig gleich groß sein:  $|F_i| = |F_j| = F$ . Die gesamte Auslenkung aller Federn ergibt sich durch Summation über alle Einzelauslenkungen, d.h.

$$x_{\text{ges}} = x_1 + x_2 + \dots = \sum_{i=1}^n x_i \quad (1.6.39)$$

Da die Gesamtauslenkung durch  $x_{\text{ges}} = |F_{\text{ges}}|/k_{\text{ges}}$  ausgedrückt werden kann, erhält man

$$x_{\text{ges}} = \frac{|F_{\text{ges}}|}{k_{\text{ges}}} = \frac{F}{k_{\text{ges}}} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} + \dots = F \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \quad (1.6.40)$$

Das heißt, bei einer Serienschaltung von Federn addieren sich die Kehrwerte der Federkonstanten zum Kehrwert der Gesamtfederkonstante,

$$\frac{1}{k_{\text{ges}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} . \quad (1.6.41)$$

**Experiment: Federkonstante einer Serienschaltung von Federn:**

Es werden 4 Federn mit gleichen Federkonstanten  $k$  hintereinander gehängt und mit einer Masse  $m$  belastet. Die Auslenkung aus der Ruhelage ist viermal so groß wie für eine einzelne Feder. Versetzt man die Anordnung in Schwingung, so mißt man eine Schwingungsfrequenz, die nur halb so groß ist wie diejenige einer einzelnen Feder, da die Gesamtfederkonstante  $k_{\text{ges}} = k/4$  ist.

Bei einer Serienschaltung von  $n$  gleichen Federn ist  $k_{\text{ges}} = k/n$  und die Gesamtlänge  $l_{\text{ges}} = n \cdot l$ . Die Größe  $k^*$ , gegeben durch Federkonstante mal Länge, bleibt damit konstant und ist eine Materialeigenschaft des verwendeten Federmaterials. Mit dieser Größe läßt sich das **Hookesche** Gesetz schreiben als

$$F_F = -k^* \cdot \frac{x}{l} . \quad (1.6.42)$$

Dabei ist  $x/l$  die relative Längenänderung der Feder. Die Einheit von  $k^*$  ist 1 N, die Maßzahl von  $k^*$  gibt die Federkonstante einer Feder mit Länge  $l = 1$  m an.

### 1.6.3 Das mathematische Pendel

Unter einem *mathematischen Pendel* versteht man eine punktförmige Masse  $m$ , die an einem masselosen Faden der Länge  $l$  in einem Gravitationsfeld mit der Fallbeschleunigung  $g$  aufgehängt ist (siehe Abb. 1.48). Die Gleichgewichtsposition der Masse liegt lotrecht unter dem Aufhängepunkt. In dieser Position wird die Schwerkraft  $\mathbf{F}_G = m\mathbf{g}$  exakt durch die Fadenspannung  $\mathbf{F}_F = -m\mathbf{g}$  kompensiert, so daß die Gesamtkraft  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_F$  auf die Masse verschwindet (Ruhelage). Bei einer Auslenkung der Masse um den Winkel  $\varphi$  aus der Ruhelage läuft die Masse auf einem Kreisbogen das Wegstück  $s = l\varphi$ . In dieser Position kann die Fadenspannung nicht mehr die gesamte Schwerkraft kompensieren, sondern nur diejenige Komponente von  $\mathbf{F}_G$ , die in Richtung des Fadens liegt. Es verbleibt eine Komponente der Schwerkraft, die senkrecht zum Faden steht und den Pendelkörper in die Ruhelage zurückzutreiben versucht.

Da die Bahn des Massenpunktes auf einer Kreisbahn verläuft, ist es zweckmäßig, zur Beschreibung der Bewegung Kreiskoordinaten zu verwenden. In diesem System wird die Lage des Punktes  $P$  in der Ebene durch zwei Koordinaten  $r$  und  $\varphi$  festgelegt. Dabei gibt  $r$  den Abstand von  $P$  zum Koordinatenursprung an und  $\varphi$  mißt den Winkel zwischen einer vorgegebenen Achse und dem Fahrstrahl vom Ursprung durch den Punkt  $P$ . Von der festen Achse aus werden Winkel entgegen dem Uhrzeigersinn positiv gezählt. Die Koordinaten  $r = \text{const}$  sind zum Ursprung konzentrische Kreise, die Linien  $\varphi = \text{const}$  sind Geraden, die radial vom Ursprung ausgehen.

Für die *Tangentialkomponente* der Schwerkraft erhält man

$$\mathbf{F}_\varphi = m \cdot g \cdot \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi . \quad (1.6.43)$$

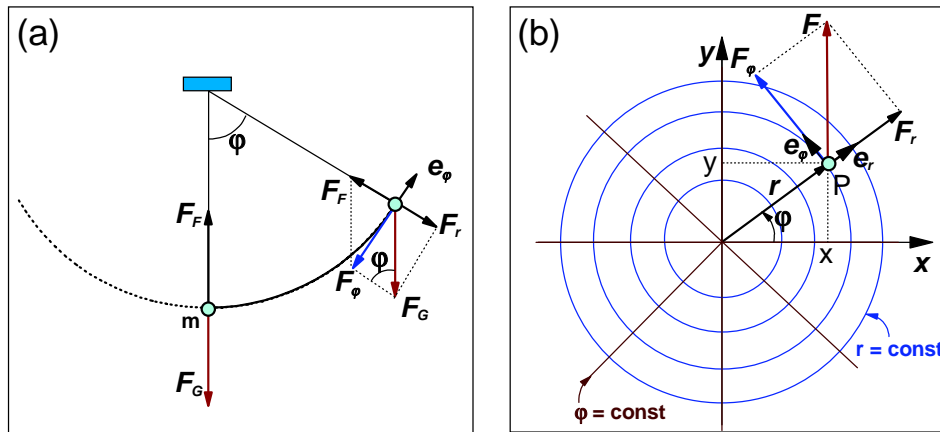


Abbildung 1.48: Mathematisches Pendel (a) und Darstellung in Kreiskoordinaten (b).

Für die *Radialkomponente* ergibt sich

$$\mathbf{F}_r = m \cdot g \cdot \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_r \quad . \quad (1.6.44)$$

Hierbei sind  $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$  und  $\hat{\mathbf{e}}_r$  die Einheitsvektoren in tangentialer und radialer Richtung. Die Radialkomponente der Schwerkraft wird durch die Fadenspannung (Zwangskraft) kompensiert. Die rücktreibende Tangentialkomponente hat wegen  $\mathbf{F}_\varphi = m\mathbf{a}_\varphi$  eine tangentiale Beschleunigung  $\mathbf{a}_\varphi = a_\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi$  zur Folge. Längs des Kreisbogens  $s = l\varphi$  ist  $a_\varphi = dv_\varphi/dt$  und  $v_\varphi = ds/dt = ld\varphi/dt$ . Damit erhält man

$$a_\varphi = l \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad . \quad (1.6.45)$$

Damit ergibt sich die Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels  $F_\varphi = ma_\varphi$  zu

$$-m \cdot g \cdot \sin \varphi = m \cdot l \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (1.6.46)$$

oder

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \varphi \quad . \quad (1.6.47)$$

Diese Gleichung hat nur in der *harmonischen Näherung* eine einfache Lösung. In der harmonischen Näherung wird für kleine Winkel  $\sin \varphi \approx \varphi$  und man erhält die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \varphi \quad (1.6.48)$$

einer harmonischen Schwingung. In Analogie zum Masse-Feder Pendel erhält man die Lösung

$$\varphi(t) = \varphi_m \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (1.6.49)$$

mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad . \quad (1.6.50)$$

Für die Schwingungsfrequenz  $\nu$  und die Schwingungsdauer  $T$  erhält man

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{bzw.} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad . \quad (1.6.51)$$

Es sollte insbesondere darauf hingewiesen werden, daß die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels nicht von der Masse  $m$  des Pendelkörpers abhängt. Das liegt, wie man aus Gl.(1.6.46) erkennen kann an der angesetzten Gleichheit von schwerer und träger Masse, die sich auf der linken und rechten Seite der Gl.(1.6.46) gegenseitig wegheben. **Newton** hat deshalb das mathematische Pendel benutzt, um die Äquivalenz von schwerer und träger Masse zu überprüfen. Für  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  ergibt sich bei einer Pendellänge von  $l = 1 \text{ m}$  die Schwingungsdauer  $T = 1.969 \approx 2 \text{ s}$ .

Bei großen Schwingungsamplituden ist die harmonische Näherung nicht mehr gültig. Die Lösung der exakten Bewegungsgleichung in höherer Näherung ergibt dann die Schwingungsdauer

$$\begin{aligned} T^* &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\varphi_m}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\varphi_m}{2} + \dots \right) \\ T^* &\simeq 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{16} \varphi_m^2 \right) \quad . \end{aligned} \quad (1.6.52)$$

Die Korrekturterme zur harmonischen Näherung lassen die Schwingungsdauer  $T^*$  eine Funktion der Schwingungsamplitude  $\varphi_m$  werden. Für  $\varphi_m = 10^\circ$  ist die relative Abweichung  $\Delta T/T = (T^* - T)/T$  noch vergleichsweise klein, nämlich etwa 0.2%.<sup>26</sup>

## 1.6.4 Reibungskräfte

### Reibung zwischen festen Körpern

Wird ein Körper mit der Normalkraft  $\mathbf{F}_n$  auf eine Unterlage gepreßt ( $\mathbf{F}_n$  steht senkrecht auf der Unterlage), so muß eine bestimmte Kraft  $\mathbf{F}$  tangential zur Unterlage ausgeübt werden, um den Körper auf der Unterlage zu verschieben (siehe Abb. 1.49). Die Ursache hierfür ist die sogenannte *Haftreibungskraft*  $\mathbf{F}_R$ . Die Größe der Haftreibungskraft ist durch die mikroskopische Struktur der beiden Oberflächen gegeben. Im allgemeinen findet man folgenden Zusammenhang zwischen  $|\mathbf{F}_n|$  und  $|\mathbf{F}_R|$ :

$$F_R = \mu_h F_n \quad . \quad (1.6.53)$$

Der Haftreibungskoeffizient  $\mu_h$  ist eine Proportionalitätskonstante, die von der Materialart und der Oberflächenbeschaffenheit der beteiligten Körper abhängt. Wichtig ist, daß die Haftreibungskraft in erster

<sup>26</sup>Es ist interessant, sich die Frage zu stellen, ob man nicht ein amplituden-unabhängiges Pendel konstruieren kann. **Huyghens** hat dieses Problem bereits 1658 gelöst, indem er das *Zykloidenpendel* entwickelt hat. Seine Schwingungsdauer ist in aller Strenge unabhängig von der Schwingungsamplitude. Die Bahnkurve ist statt eines Kreises eine Zykloide. Eine Zykloide erhält man, indem man einen Kreis auf einer Geraden abrollt. Als Zykloiden bezeichnet man die Bahnen der Kreispunkte auf dem Umfang eines Kreises, die man bei diesem Abrollvorgang erhält. Beim Zykloidenpendel rollt der Faden des Pendels auf einer Zykloide ab.



Nährung nicht von der Größe der Auflagefläche abhängt. Man hat deshalb für einen flachen Quader immer die gleiche Haftreibung unabhängig davon, auf welche Seitenfläche man ihn stellt. Die Unabhängigkeit der Haftreibungskraft von der Größe der Auflagefläche kann man sich dadurch klar machen, daß eine technisch ebene Fläche noch keineswegs mathematisch eben ist und man davon ausgehen kann, daß sich zwei starre Körper immer nur in drei Punkten berühren. Bei zwei gegeneinander bewegten Körpern tritt die sogenannte *Gleitreibung* auf, die durch den Gleitreibungskoeffizienten  $\mu_g$  charakterisiert ist. Im allgemeinen gilt  $\mu_g < \mu_h$ .<sup>27</sup>

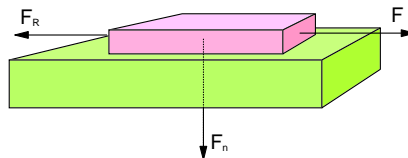


Abbildung 1.49: Zur Definition der Haftreibung.

**Experiment: Bestimmung des Haftreibungskoeffizienten auf der schiefen Ebene:**

Legt man zwei gleichgroße Holzquader auf ein Holzbrett, so beginnen beide ab einem bestimmten Neigungswinkel  $\alpha$  des Brettes gegen die Waagrechte auf dem Brett abzugleiten. Der Tangentialkraft  $F_t = mg \sin \alpha$  wirkt die Haftreibungskraft  $F_R = \mu_h mg \cos \alpha$  entgegen. Der Körper beginnt zu gleiten, wenn  $F_t \geq F_R$  wird. Damit erhält man den Haftreibungskoeffizienten zu  $\mu_h = \tan \alpha$ .

Legt man unter einen der Holzquader ein Filzstuck, so beginnt der Quader ohne Filzunterlage bei einem kleineren Neigungswinkel zu gleiten. Der Haftreibungskoeffizient zwischen Holz und Filz ist also größer als zwischen Holz und Holz.

Man kann außerdem feststellen, daß der Gleitreibungskoeffizient in erster Nährung unabhängig von der Geschwindigkeit der Holzquader ist. Dies gilt für die meisten Festkörper.

### Reibung zwischen Festkörpern und Flüssigkeiten oder Gasen

Für die viskose Reibung (Gleitreibung) bei der Bewegung eines Festkörpers durch eine Flüssigkeit gilt weitgehend

$$F_R \propto v \quad . \quad (1.6.54)$$

Dieser Zusammenhang wird als **Stokessches Gesetz** bezeichnet.

Für den Luftwiderstand von aerodynamisch ungünstig geformten Körpern, sowie allgemein bei hohen Geschwindigkeiten, gilt<sup>28</sup>

$$F_R \propto v^2 \quad . \quad (1.6.55)$$

Die quadratische Zunahme des Luftwiderstands mit der Geschwindigkeit spielt vor allem bei der Konstruktion von Autos eine bedeutende Rolle. Durch geschickte Formgebung versucht man, den Proportionalitätsfaktor in Gl.(1.6.55) möglichst klein zu halten.

<sup>27</sup>Die genauen physikalischen Prozesse, die zur Haft- und Gleitreibung führen, sind äußerst komplex und in vielen Fällen im Detail noch nicht verstanden. Die Physik der Reibung ist Gegenstand vieler aktueller Forschungsarbeiten.

<sup>28</sup>Der Luftwiderstand hängt empfindlich von der Art der Luftströmung (laminare oder turbulente Strömung) ab.

### Freier Fall mit Reibung

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir den freien Fall eines Körpers mit Masse  $m$  in einem viskosen Medium (z.B. Flüssigkeit) mit Reibungskoeffizienten  $\mu$ , wobei die Reibungskraft proportional zur Fallgeschwindigkeit (viskose Reibung) sein soll:

$$\mathbf{F}_R = -\mu \cdot \mathbf{v} . \quad (1.6.56)$$

Der Körper werde zur Zeit  $t = 0$  losgelassen, so daß  $\mathbf{v}(0) = 0$  und  $\mathbf{r}(0) = 0$ . Der Körper wird durch die Schwerkraft  $\mathbf{F}_G = m\mathbf{g}$  beschleunigt und durch die Reibungskraft  $\mathbf{F}_R = -\mu\mathbf{v} = -\mu\frac{d\mathbf{r}}{dt}$  abgebremst. Man erhält somit für die Gesamtkraft  $\mathbf{F}$

$$m \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_R = m \cdot \mathbf{g} - \mu \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} . \quad (1.6.57)$$

Man erhält somit die Differentialgleichung

$$m \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \cdot \mathbf{g} - \mu \cdot \mathbf{v} . \quad (1.6.58)$$

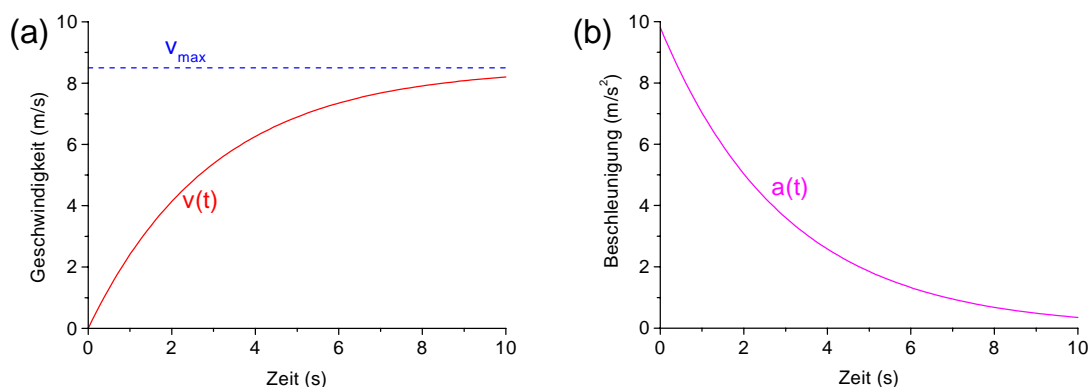


Abbildung 1.50: Zeitlicher Verlauf der Geschwindigkeit (a) und der Beschleunigung beim freien Fall mit Reibung.

Aus dieser Gleichung geht hervor, daß der Körper bei  $t = 0$  wegen  $v(0) = 0$  und damit  $F_R = 0$  zunächst mit der vollen Schwerkraft beschleunigt wird. Mit zunehmendem  $v$  wird allerdings die Reibungskraft immer größer und dadurch die beschleunigende Gesamtkraft immer kleiner, bis sie schließlich bei einer Maximalgeschwindigkeit  $v_{max}$  ganz verschwindet. Der Körper bewegt sich dann mit konstanter Geschwindigkeit weiter, da die angreifende Gesamtkraft  $F_g + F_R$  verschwindet. Die Lösung der Differentialgleichung (1.6.58) ergibt

$$\mathbf{v}(t) = \frac{m \cdot \mathbf{g}}{\mu} \left( 1 - \exp\left(-\frac{\mu}{m}t\right) \right) \quad (1.6.59)$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{g} \exp\left(-\frac{\mu}{m}t\right) \quad (1.6.60)$$

Der Verlauf der Geschwindigkeit und der Beschleunigung ist in Abb. 1.50 gezeigt. Als maximale Geschwindigkeit erhält man  $\mathbf{v}_{max} = \frac{m \cdot \mathbf{g}}{\mu}$ , d.h.  $\mathbf{v}_{max}$  ist umgekehrt proportional zum Reibungskoeffizienten  $\mu$ .

## 1.7 Trägheitskräfte

### 1.7.1 Die d'Alembertsche Gleichung

In der **Newton**schen Bewegungsgleichung  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  bedeutet  $\mathbf{F}$  eine reale Kraft (z.B. Gravitationskraft), die der Wechselwirkung zwischen zwei Körpern entspringt. Bei der Einwirkung dieser Kraft auf einen Probenkörper der Masse  $m$  erfährt dieser eine Beschleunigung  $\mathbf{a}$ . Die reale Kraft  $\mathbf{F}$  ist also die Ursache der Bewegungsänderung, während die träge Masse  $m$  sich der Bewegungsänderung widersetzt. Wie **d'Alembert** gezeigt hat, ist es oft zweckmäßig, die Bewegungsgleichung  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  umzuinterpretieren und neben *realen Kräften* noch fiktive *Pseudo-* oder *Scheinkräfte*, die *Trägheitskräfte* einzuführen. Wir werden zeigen, daß die Trägheitskräfte mit den realen Kräften ins Gleichgewicht treten. Die Dynamik wird dann gewissermaßen auf die Statik zurückgeführt.

In der *Statik* sind nach Definition alle Körper in Ruhe. Ein punktförmiger Körper kann aber nur dann in Ruhe verharren, wenn die Summe der am Körper angreifenden Kräfte verschwindet, wenn also

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = 0 \quad (1.7.1)$$

gilt. Ein Beispiel dafür ist in Abb. 1.51 gezeigt. An der auf einer Unterlage ruhenden Masse  $m$  greift die Gewichtskraft  $\mathbf{F}_G = m\mathbf{g}$  an. Damit der Körper in Ruhe bleibt, muß diese Kraft von einer Zwangskraft  $\mathbf{F}_{el} = -m\mathbf{g}$  exakt kompensiert werden, die von der elastischen Rückstellkraft der mehr oder weniger stark deformierten Unterlage bereitgestellt wird. Die Gesamtkraft verschwindet damit.

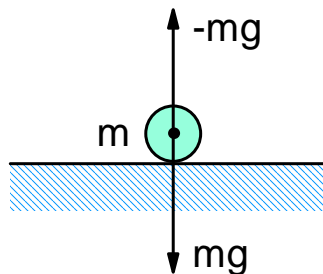


Abbildung 1.51: Statikbedingung: die Summe der realen Kräfte verschwindet.

In der Dynamik sind Bewegungsänderungen zugelassen. Gemäß der **Newton**schen Grundgleichung

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad \text{Newton} \quad (1.7.2)$$

treten genau dann Beschleunigungen auf, wenn die einwirkende reale Kraft nicht verschwindet. Nach **d'Alembert** schreibt man diese Gleichung zu

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a} = 0 \quad (1.7.3)$$

um und führt formal die Trägheitskraft

$$\mathbf{F}_T := -m\mathbf{a} \quad (1.7.4)$$

ein. Damit erhält man

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_T = 0 . \quad \text{d'Alembert} \quad (1.7.5)$$

Die **Newton**sche und die **d'Alemberts**che Gleichung sind zwei gleichberechtigte Beschreibungsweisen der Physik. Die Trägheitskraft  $\mathbf{F}_T$  nach Gl.(1.7.4) ist proportional zur Masse  $m$ . Diese Eigenschaft hat sie gemeinsam mit der Gravitationskraft.

Ein Vergleich von Gl.(1.7.1) und Gl.(1.7.5) zeigt, daß in der Statik die Summe aller einwirkenden realen Kräfte verschwindet, während im Rahmen des **d'Alemberts**chen Formalismus in der Dynamik die Summe aus realen und Trägheitskräften verschwindet: die Trägheitskraft  $\mathbf{F}_T$  kompensiert die reale Kraft  $\mathbf{F}$ .

Es ist wichtig, sich klarzumachen, daß im Unterschied zum Naturgesetz  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , bei dem die Kraft von außen vorgegeben wird (z.B. Gravitation), in der Gleichung  $\mathbf{F}_T = -m\mathbf{a}$  die Trägheitskraft per Definition gleich dem Ausdruck  $-m\mathbf{a}$  gesetzt wird;  $\mathbf{F}_T$  ist also nur die abkürzende Schreibweise für  $-m\mathbf{a}$ . Die Trägheitskraft für sich genommen ruft also keine Beschleunigung hervor. Dies rechtfertigt die Bezeichnung *Scheinkraft*. Die Trägheitskraft tritt nur dann auf, wenn reale Kräfte zunächst eine Beschleunigung  $\mathbf{a} \neq 0$  hervorgerufen haben, d.h. Trägheitskräfte werden durch reale Kräfte erst geweckt. In Analogie zur **Newton**schen Lex Tertia kann man auch formulieren, daß die Trägheitskraft die "reactio" auf die "actio" der realen Kraft ist.

Mit dem Begriff Trägheitskraft lassen sich besonders solche Bewegungen anschaulich beschreiben, bei denen einem Körper durch *Zwangsbedingungen* wie z.B. Schienen bei einer Straßenbahn, Faden beim Pendel etc. *Zwangsbewegungen* aufgeprägt werden. So wird z.B. bei der Kurvenfahrt einer Straßenbahn dem Fahrgast durch die Schienen eine Kreisbewegung und damit eine Beschleunigung  $\mathbf{a}$  vorgeschrieben, die auf den Mittelpunkt des Krümmungsradius zeigt (siehe Abb. 1.52). Die träge Masse des Fahrgasts ist nach dem Trägheitsgesetz aber bestrebt, ihre ursprüngliche Bewegung beizubehalten. Der Fahrgast hat deshalb den Eindruck, entgegengesetzt zur Beschleunigung  $\mathbf{a}$  radial nach außen gedrückt zu werden. Die Trägheitskraft  $\mathbf{F}_T$  erscheint hier also als Kraft, die den Fahrgast in der Kurve umzuwerfen versucht. An diesem Beispiel wird die Bezeichnung Trägheitskraft verständlich.

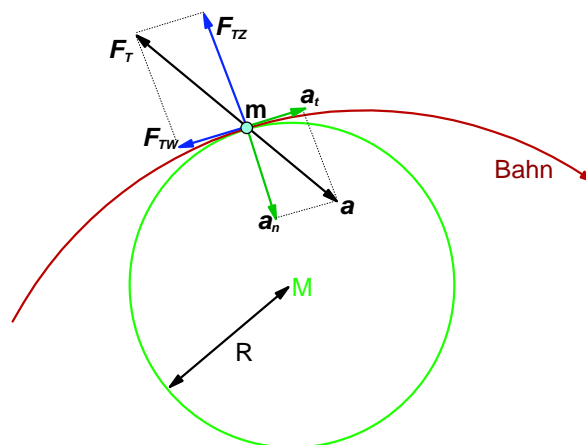


Abbildung 1.52: Die Trägheitskraft  $\mathbf{F}_T = -m\mathbf{a}$  kann in den Trägheitswiderstand  $\mathbf{F}_{TW} = -m\mathbf{a}_t$  und die Zentrifugalkraft  $\mathbf{F}_{TZ} = -m\mathbf{a}_n$  zerlegt werden.

Im folgenden sollen die Trägheitskräfte bei der Kreisbewegung diskutiert werden. Im Abschnitt 1.3.2 wurde abgeleitet, daß die Beschleunigung

$$\mathbf{a}(t) = \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{t}} + \frac{v^2}{R} \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n . \quad (1.7.6)$$

in eine Tangential- und Normalkomponente zerlegt werden kann. Entsprechend lassen sich die Trägheitskräfte klassifizieren. Man definiert

$$\mathbf{F}_{\text{TW}} := -m \cdot \mathbf{a}_t = -m \cdot \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{t}} \quad (1.7.7)$$

als den *Trägheitswiderstand* und

$$\mathbf{F}_{\text{TZ}} := -m \cdot \mathbf{a}_n = -m \frac{v^2}{R} \hat{\mathbf{n}} \quad (1.7.8)$$

als die *Zentrifugalkraft*. Bei einer geradlinig translatorisch beschleunigten Bewegung tritt als Trägheitskraft nur der Trägheitswiderstand, bei einer gekrümmten Bahnkurve, die mit konstanter Bahngeschwindigkeit durchlaufen wird, nur die Zentrifugalkraft auf. Für die gesamte Trägheitskraft  $\mathbf{F}_T$  gilt<sup>29</sup>

$$\mathbf{F}_T = \mathbf{F}_{\text{TW}} + \mathbf{F}_{\text{TZ}} \quad (1.7.9)$$

## 1.7.2 Der Trägheitswiderstand

Der Trägheitswiderstand soll anhand einer Masse  $m$ , die an einer Feder in einem Fahrstuhl aufgehängt ist (siehe Abb. 1.53), veranschaulicht werden. Es können folgende 3 Fälle unterschieden werden:

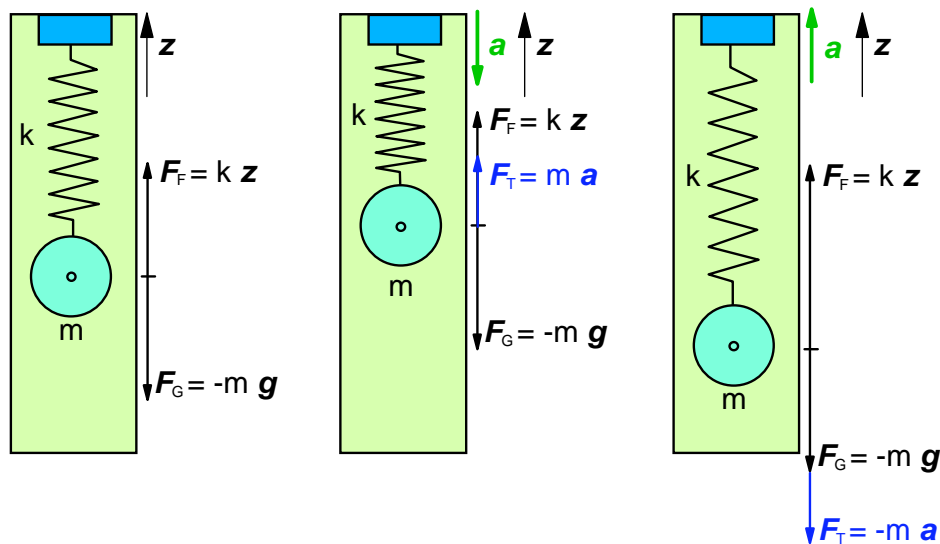


Abbildung 1.53: Fahrstuhlmodell zum Trägheitswiderstand.

### 1. Der Fahrstuhl befindet sich in Ruhe:

Es wirkt die Schwerkraft  $\mathbf{F}_G = m\mathbf{g} = -mg \cdot \hat{\mathbf{z}}$  nach unten. Die Feder wird gedehnt und die daraus resultierende Federkraft  $\mathbf{F}_F = kz \cdot \hat{\mathbf{z}}$  kompensiert die Schwerkraft. Es stellt sich ein Gleichgewichtszustand

<sup>29</sup>Es sei hier angemerkt, daß in rotierenden Systemen bei einer radialen Bewegung ( $R \neq \text{const}$ ), die hier ausgeschlossen wurde, eine weitere Trägheitskraft, die *Coriolis-Kraft*, auftritt. Diese wird erst später im Abschnitt 1.8.2 eingehend diskutiert.

$$\mathbf{F}_G + \mathbf{F}_F = 0 \quad (1.7.10)$$

ein.

## 2. Der Fahrstuhl bewegt sich beschleunigt nach unten:

Wird der Fahrstuhl mit der konstanten Beschleunigung  $-a \cdot \hat{\mathbf{z}}$  nach unten bewegt, so tritt gemäß der **d'Alembertschen** Gleichung eine Trägheitskraft  $\mathbf{F}_T = ma \cdot \hat{\mathbf{z}}$  auf, die entgegengesetzt zur Beschleunigung, also nach oben gerichtet ist. Es genügt deshalb eine kleinere Federkraft, um die Schwerkraft  $\mathbf{F}_G$  zu kompensieren. Die Feder verkürzt sich. Es gilt

$$\mathbf{F}_G + \mathbf{F}_F + \mathbf{F}_T = 0 = -mg \cdot \hat{\mathbf{z}} + kz \cdot \hat{\mathbf{z}} + ma \cdot \hat{\mathbf{z}} . \quad (1.7.11)$$

Ist  $a = g$  (freier Fall des Fahrstuhls), so kompensiert die Trägheitskraft die Schwerkraft vollständig (Schwerelosigkeit) und die Feder ist vollkommen entspannt.

## 3. Der Fahrstuhl bewegt sich beschleunigt nach oben:

Die Trägheitskraft  $\mathbf{F}_T = -ma \cdot \hat{\mathbf{z}}$  zeigt jetzt nach unten und ist parallel zur Schwerkraft. Es wird jetzt eine größere Federkraft benötigt, um die Summe aus Schwerkraft  $\mathbf{F}_G$  und Trägheitskraft  $\mathbf{F}_T$  zu kompensieren. Die Feder wird weiter gedehnt und es gilt

$$\mathbf{F}_G + \mathbf{F}_F + \mathbf{F}_T = 0 = -mg \cdot \hat{\mathbf{z}} + kz \cdot \hat{\mathbf{z}} - ma \cdot \hat{\mathbf{z}} . \quad (1.7.12)$$

Die in dem Beispiel deutlich werdende Gleichwertigkeit von Gravitations- und Trägheitskraft ist schon im *Äquivalenzprinzip* (siehe Abschnitt 1.5.2) festgehalten, wonach schwere und träge Masse zueinander äquivalent sind. Was mit dem Begriff Äquivalenz gemeint ist, läßt sich jetzt noch deutlicher fassen: Nach dem Äquivalenzprinzip ist es generell nicht möglich, zwischen Gravitations- und Trägheitskräften zu unterscheiden. Einem Astronauten im schwerelosen Raum kann man durch eine Beschleunigung des Raumfahrzeugs eine Gravitation "vortäuschen".

Betrachtet man das Fahrstuhlexperiment in der **Newtonschen** und der **d'Alembertschen** Sichtweise, so kommt man zu folgendem Ergebnis. Wird der Fahrstuhl z.B. nach unten beschleunigt, so versucht vom **Newtonschen** Standpunkt aus die Masse  $m$  aufgrund ihrer Trägheit in ihrer Position zu verharren, die Feder muß deshalb eine kleinere Kraft ( $F_F = mg - ma < F_G$ ) aufbringen, um die Gewichtskraft zu kompensieren, und wird somit weniger gedehnt. Vom **d'Alembertschen** Standpunkt aus ist die Situation anders, da für ihn die Summe aller Kräfte zu verschwinden scheint (dynamisches Gleichgewicht). Eine Pseudokraft scheint die Kugel nach oben zu ziehen. Die Pseudokraft ist die **d'Alembertsche** Trägheitskraft  $F_T$ , die die realen Kräfte  $F_G$  und  $F_F$  kompensiert. Mit der Trägheitskraft erhält man das **d'Alembertsche** dynamische Gleichgewicht  $F_G + F_F + F_T = 0$ , in dem die Summe aus realen und Scheinkräften verschwindet.

### 1.7.3 Die Zentrifugalkraft

In den folgenden Beispielen zur Zentrifugalkraft soll zur Vereinfachung nur die Bewegung auf einer Kreisbahn mit Radius  $R$  betrachtet werden, die mit konstanter Bahngeschwindigkeit  $v$  abläuft. In Abb. 1.54 sind die Betrachtungsweise von **Newton** und **d'Alembert** gegenübergestellt. Auf der Kreisbahn unterliegt der Körper einer Normalbeschleunigung  $\mathbf{a}_n = (v^2/R)\hat{\mathbf{n}}$ , die auf den Krümmungsmittelpunkt  $M$  der Kreisbahn zeigt. Nach **Newton** ist hierfür die Kraft  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_n$ , eine *Zentripetalkraft* aufzubringen, die die Trägheit der Masse überwindet und den Körper von der geradlinigen

**Experimente zum Trägheitswiderstand:**

(a) In einem einfachen Experiment zum Trägheitswiderstand stellt man ein Wasserglas auf ein Blatt Papier. Die Frage lautet: kann man das Papier unter dem Wasserglas so wegziehen, daß das Glas stehen bleibt? Die Antwort lautet: ja, wenn man am Papier ruckartig mit sehr großer Beschleunigung  $a$  zieht. In diesem Fall ist der Betrag der Trägheitskraft  $F_T = ma \gg F_R$  und die Trägheitskraft schiebt das Wasserglas von der Unterlage.

(b) Man befestigt eine Masse  $m$  in der Mitte eines Stücks Faden und hängt die Masse mit dem einen Stück Faden an einer Halterung auf, während das andere Stück lose nach unten hängt. Zieht man nun ruckartig an dem unteren Faden, so reißt das untere Stück Faden. Zieht man dagegen langsam, so reißt das obere Stück Faden, an dem die Masse an der Halterung befestigt ist. Beim ruckartigen Ziehen entsteht eine sehr große Trägheitskraft  $F_T = -ma$ , die entgegengesetzt zur Beschleunigung nach oben gerichtet ist. Die sehr große Trägheitskraft führt zum Reißen des unteren Fadens. Beim langsamen Ziehen ist dagegen die Trägheitskraft vernachlässigbar. Auf den oberen Faden wirkt dann die Zug- und die Gewichtskraft, wogegen auf den unteren Faden nur die Zugkraft wirkt. Der obere Faden reißt dadurch zuerst.

(c) Man stellt sich auf eine Waage und bestimmt sein Gewicht. Geht man nun schnell in die Hocke (Beschleunigung des Körperschwerpunkts nach unten) bzw. aus der Hocke wieder in die aufrechte Position (Beschleunigung des Körperschwerpunkts nach oben), so wird der Ausschlag der Waage kleiner bzw. größer (die Erklärung ist analog zum Fahrstuhlmodell).

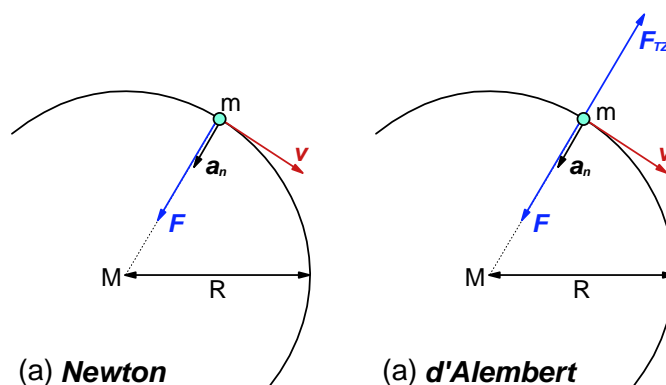


Abbildung 1.54: Gegenüberstellung der Newtonschen und der d'Alembertschen Betrachtungsweise bei der Kreisbewegung.

Bahn auf die Kreisbahn zwingt. Nach **d'Alembert** wird die Tatsache, daß sich die Masse der zentripetalen Beschleunigung widersetzt, so interpretiert, daß aufgrund der Trägheit der Masse eine Trägheitskraft, die *Zentrifugalkraft* angreift, die den Körper vom Zentrum wegtreibt. Die Zentrifugalkraft  $F_{TZ}$  steht dabei im Gleichgewicht mit der Zentripetalkraft  $F = ma_n$ . Für die Zentrifugalkraft erhält man (vergleiche hierzu Abschnitt 1.3.2)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{TZ} + m \cdot \mathbf{a}_n &= 0 \\ \mathbf{F}_{TZ} &= -m \frac{v^2}{R} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -mv\omega \cdot \hat{\mathbf{n}} = -m\omega^2 R \cdot \hat{\mathbf{n}} . \end{aligned} \quad (1.7.13)$$

Man kann die in Abb. 1.54 gezeigte Situation wie folgt diskutieren: In der **Newton**schen Sichtweise wirkt nur die Zentripetalkraft  $F$  (reale Kraft), die zur Normaleschleunigung  $a_n$  führt und die Masse auf der Kreisbahn hält. In der **d'Alembert**schen Sichtweise ist die Masse  $m$  in Ruhe (dynamisches

Gleichgewicht), d.h. die Summe aller Kräfte muß verschwinden. Es muß deshalb eine Scheinkraft  $F_{TZ}$  existieren, die nach außen gerichtet ist und die Zentripetalkraft kompensiert.

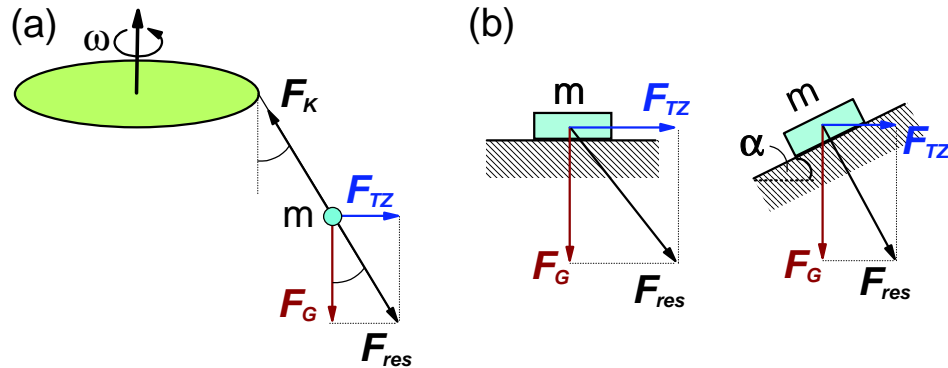


Abbildung 1.55: Zentrifugalkraft beim Kettenkarussell (a) und bei der Kurvenfahrt (b).

### Beispiele für die Zentrifugalkraft:

- Die Zentrifugalkraft ist dafür verantwortlich, daß sich Schleifunken von der rotierenden Schleifscheibe ablösen und sich anschließend nach dem Trägheitsgesetz mit der Tangentialgeschwindigkeit  $v$  geradlinig und gleichförmig weiterbewegen. Ähnliches gilt für Wassertropfen an Fahrzeugreifen.

- Kurvenfahrt: Bei schnellen Kurvenfahrten kann die Zentrifugalkraft auf ein Vielfaches der Schwerkraft anwachsen. Fliegt z.B. ein Flugzeug mit Schallgeschwindigkeit ( $v \simeq 340\text{m/s}$ ) eine Kurve mit Radius  $R = 1000\text{m}$ , so tritt eine Zentrifugalbeschleunigung von etwa  $10g$ , also dem Zehnfachen der Erdbeschleunigung auf. Auf den Piloten wirkt also eine Trägheitskraft, die einem Vielfachen der Gewichtskraft entspricht.<sup>a</sup>

Da die Zentrifugalkraft größer als die Gewichtskraft werden kann, kann man bei entsprechender Geschwindigkeit auf der Achterbahn eine vertikale Schleife durchfahren ("Looping"), ohne aus dem Fahrzeug zu fallen. Hierbei muß  $\omega^2 R \geq g$  gelten.

Bei Kurvenfahrten mit Straßen- oder Schienenfahrzeugen wirkt die resultierende Gesamtkraft  $F_{res} = F_G + F_{TZ}$  aufgrund der endlichen Zentrifugalkraft bei einer horizontalen Fahrbahn nicht normal zur Fahrbahn. Man neigt deshalb die Fahrbahn, um  $F_{res}$  senkrecht zur Fahrbahnoberfläche zu haben. Mit  $\tan \alpha = F_{TZ}/F_G$  (siehe Abb. 1.55b) ergibt sich  $\alpha = v^2/Rg$ , wobei  $R$  der Kurvenradius ist.

<sup>a</sup>Die Toleranzgrenzen für Menschen sind sitzend etwa  $a \simeq 5g$  und liegend  $a \simeq 12g$ .

- Beim Kettenkarussell führt die Zentrifugalkraft  $F_{TZ}$  dazu, daß die Kette aufgrund der Schwerkraft  $F_G$  nicht genau senkrecht nach unten hängt, sondern aufgrund der resultierenden Kraft  $F_{res} = F_G + F_{TZ}$  schräg nach außen gerichtet ist (siehe Abb. 1.55a). Die Kraft  $F_{res}$  wird von der Kettenkraft  $F_K$  kompensiert. Der genaue Winkel wird durch das Verhältnis von Schwerkraft und Zentrifugalkraft bestimmt.



- Die hohen Zentrifugalkräfte bei schnellen Drehbewegungen werden in *Ultrazentrifugen* zur Trennung von Stoffen ausgenutzt. Bei der Sedimentation von Stoffen aus einer Suspension spielen die Reibungskräfte, die die suspendierten Körper erfahren, eine Rolle. Nach **Stokes** gilt  $F_R \propto r \cdot v$ , wobei  $r$  der Radius bei kugelförmiger Gestalt des Körpers ist. Im Schwerfeld der Erde sinken im Gleichgewicht  $F_R = F_G$  von Reibungskraft und Schwerkraft Körper mit konstanter Geschwindigkeit  $v_s$ . Wegen  $r v_s \propto m g$  bzw. wegen  $m = \rho \cdot 4\pi r^3/3$  für geometrisch gleiche Körper folgt  $v_s \propto \rho g$ . Stoffe mit hoher Massendichte sinken schneller ab und sammeln sich am Boden des Gefäßes an. In einer Ultrazentrifuge setzt man die Suspension in Rotation und sedimentiert die Stoffe mit Hilfe der Zentrifugalkraft ab. Bei der Bahnbeschleunigung  $a$  ist die zentrifugale Wanderungsgeschwindigkeit  $v_s \propto \rho a$  und die Stoffe lagern sich mit zunehmender Dichte von innen nach außen ab. Zahlenbeispiel: Bei der Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi \cdot 10^3 \text{s}^{-1}$  und  $R = 1 \text{ cm}$  ist  $a = \omega^2 R \simeq 4 \times 10^4 g$ . Die Sedimentation in der Zentrifuge ist deshalb wesentlich effektiver.

- **Schwerkraftersatz im Raumfahrzeug:** Durch eine Rotationsbewegung eines Raumfahrzeugs entsteht eine radial nach außen gerichtete Zentrifugalkraft  $F_R = m\omega^2 R$ , die als Ersatz für die fehlende Gravitationskraft benutzt werden kann.

- Rotiert man ein kreisförmiges Blatt Papier oder eine ringförmige Kette, so führt die dabei auftretende Zentrifugalkraft zu einer dynamischen Stabilisierung des Blattes und der Kette. Mit dem Blatt kann sogar ein Stück Holz zersägt werden. Die Kette wird scheinbar steif.

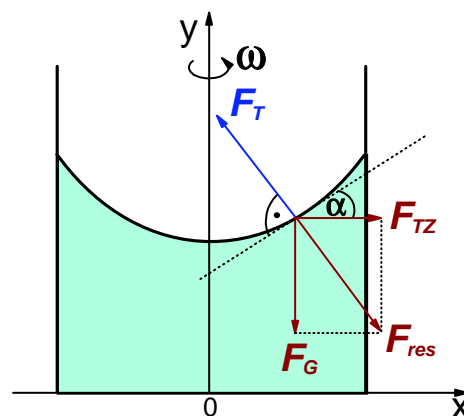


Abbildung 1.56: Der Newtonsche Eimerversuch.

Es soll nun kurz auf den **Newton**schen Eimerversuch eingegangen werden. Ein mit Wasser gefüllter Eimer wird dabei um die vertikal stehende Symmetrieachse in Rotation versetzt. Reibungskräfte sorgen dafür, daß auch das Wasser nach einiger Zeit mitbewegt wird. Die resultierende Kraft  $F_{res}$  aus Gewichtskraft  $F_G$  und Zentrifugalkraft  $F_{TZ}$  muß senkrecht zur Wasseroberfläche stehen. Aus Abb. 1.56 liest man ab:

$$\tan \alpha = \frac{m\omega^2 x}{mg} = \frac{\omega^2 x}{g} = \frac{dy}{dx} . \quad (1.7.14)$$

Durch Integration erhält man schließlich

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + y_0 \quad (1.7.15)$$

Man erhält also eine parabolisch gekrümmte Wasseroberfläche. Nach **Newton** ist die Aufwölbung der Wasseroberfläche ein direkter Beweis für eine beschleunigte Bewegung des Wassereimers. Würde man nämlich in einem Gedankenexperiment den Fixsternhimmel in Drehung versetzen und den Eimer ruhen lassen, so sollte der Wasserspiegel eben bleiben. Man kann also unterscheiden, ob der Fixsternhimmel oder der Wassereimer eine beschleunigte Bewegung ausführt, d.h. die Beschleunigung ist in einem “absoluten” Sinne feststellbar. Von **Mach** wurde dagegen die Idee geäußert, daß bei ruhendem Eimer und rotierendem Fixsternhimmel die Wasseroberfläche sich ebenfalls aufwölben würde (**Machsches Prinzip**). Danach würde sich nur die “relative” Beschleunigung zwischen Eimer und Fixsternhimmel feststellen lassen.<sup>30</sup> Es ist bis heute ein ungelöstes Problem, ob Beschleunigungen absolut oder nur relativ angegeben werden können.

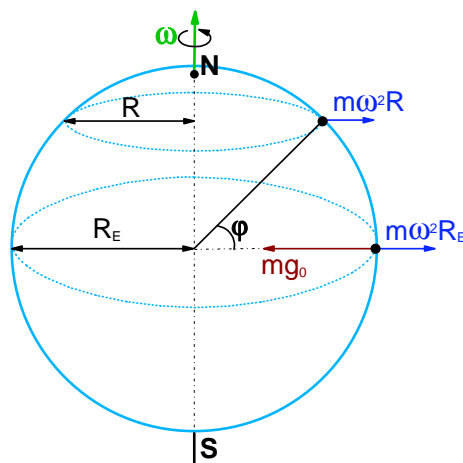


Abbildung 1.57: Die Zentrifugalkraft auf der um ihre eigene Achse rotierenden Erde.

Die jährliche Bewegung der Erde um die Sonne, vor allem aber die tägliche Drehung um ihre eigene Achse führt zu leicht beobachtbaren Effekten der Zentrifugalkraft. Die Zentrifugalkraft aufgrund der Erdrotation um die eigene Achse ist am Äquator maximal (siehe Abb. 1.57) und ist gegeben durch

$$a_{\ddot{A}q} = \omega^2 R_E = \frac{4\pi^2}{T^2} R_E = \frac{4\pi^2 \cdot 6.4 \times 10^6}{(24 \cdot 60 \cdot 60)^2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0.034 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (1.7.16)$$

Die effektive Gewichtskraft  $mg_{\text{eff}}$  am Äquator ist die Differenz zwischen der Gewichtskraft  $mg_0$ , wie sie für eine nichtrotierende Erde erwartet würde, und der Zentrifugalkraft  $ma_{\ddot{A}q}$

$$mg_{\text{eff}} = mg_0 - ma_{\ddot{A}q} \quad \text{bzw.} \quad g_{\text{eff}} = g_0 - a_{\ddot{A}q} \quad (1.7.17)$$

Je schneller die Erde rotieren würde, umso leichter erschien ein Körper am Äquator. An den Polen tritt dagegen wegen  $R = 0$  keine Zentrifugalkraft auf. Dort sollte die Fallbeschleunigung  $g$  direkt meßbar sein. In der Tat ist die Fallbeschleunigung an den Polen höher als am Äquator:

$$g(\text{Pol}) = 9.832 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad g(\ddot{\text{A}}\text{quator}) = 9.780 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (1.7.18)$$

<sup>30</sup> Genauso wie auch nur relative und keine absoluten Geschwindigkeiten (geradlinig, gleichförmig) meßbar sind, siehe hierzu auch Abschnitt 1.8.1.

Die Differenz  $\Delta g = 0.052 \text{ m/s}^2$  dieser Zahlenwerte ist allerdings größer als die Äquatorialbeschleunigung  $a_{\ddot{A}q} = 0.031 \text{ m/s}^2$ . Die unterschiedlichen Fallbeschleunigungen an den Polen sind deshalb nur teilweise auf die Wirkung der Zentrifugalkraft zurückzuführen (siehe hierzu auch Abschnitt 1.5.1). Die verbleibende Abweichung ist auf die Abweichung der Erde von der Kugelform zurückzuführen.<sup>31</sup>

Aus Abb. 1.57 liest man ab, daß ein Körper auf dem Breitengrad  $\varphi$  aufgrund der Erdrotation eine Kreisbahn mit dem Radius  $R = R_E \cos \varphi$  durchläuft. Die resultierende Zentrifugalkraft  $\mathbf{F}_{TZ}(\varphi)$  steht senkrecht auf der Erdachse und weist von der Achse weg. Für den Betrag von  $\mathbf{F}_{TZ}(\varphi)$  gilt

$$F_{TZ} = m\omega^2 R = m\omega^2 R_E \cos \varphi = ma_{\ddot{A}q} \cos \varphi . \quad (1.7.19)$$

Selbst für eine idealisierte homogene Erdkugel ist deshalb die allein beobachtbare Überlagerung der Gravitationskraft  $m\mathbf{g}_0$  und der Zentrifugalkraft  $\mathbf{F}_{TZ}$  nicht exakt auf den Erdmittelpunkt gerichtet.

Die Zentrifugalbeschleunigung  $a_{ES}$  aufgrund der Rotation der Erde um die Sonne erhält man in gleicher Weise zu

$$a_{ES} = \omega_{ES}^2 R_{ES} = \frac{4\pi^2}{T_{ES}^2} R_{ES} = \frac{4\pi^2 \cdot 1.5 \times 10^{11}}{(365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60)^2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0.00578 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} . \quad (1.7.20)$$

Weiter erhält man durch die Rotation der Sonne um das Zentrum der Milchstraße<sup>32</sup>

$$a_{SM} \simeq 10^{-7} a_{ES} . \quad (1.7.21)$$

### Das Erde-Mond-System — die Gezeiten

Da die Masse der Erde nur etwa 80 mal so groß ist wie diejenige des Mondes, rotieren Erde und Mond um einen gemeinsamen Schwerpunkt  $S$ , der etwa  $3/4$  des Erdradius vom Erdmittelpunkt entfernt ist (siehe Abb. 1.58), also noch innerhalb der Erde liegt. Es handelt sich dabei nicht um eine Drehung der Erde um eine Achse, die durch  $S$  geht, sondern, da Erde und Mond nicht starr miteinander verbunden sind, um eine reine Verschiebung, bei der der Erdmittelpunkt in  $27 \frac{1}{3}$  Tagen eine Kreisbahn mit dem Radius  $3/4 R_E$  um den Schwerpunkt  $S$  durchläuft. Alle anderen Punkte der Erde beschreiben ebenfalls Kreise mit Radius  $3/4 R_E$ , aber um andere Mittelpunkte.<sup>33</sup> Durch diese Kreisbewegung wird eine Zentrifugalkraft hervorgerufen, die in jedem Punkt der Erde gleich groß ist. Diese Kraft wirkt in Richtung der Verbindungslinie von Erdpunkt zu Mondmittelpunkt und ist auf den Mond gerichtet.

Ganz anders sieht es mit der Gravitationskraft des Mondes aus. Sie ist aufgrund der nicht zu vernachlässigenden Ausdehnung der Erde an verschiedenen Erdpunkten verschieden groß und wird nur im Erdmittelpunkt von der Zentrifugalkraft kompensiert. In Abb. 1.58b sind die in vier verschiedenen

<sup>31</sup>Die Erde ist ein abgeplattetes Rotationsellipsoid, wodurch der Abstand Pol-Erdmittelpunkt kleiner ist als der Erdradius am Äquator und dadurch die Gravitationskraft an den Polen auch bei ruhender Erde größer sein sollte als am Äquator. Diese Argumentation ist aber gefährlich, da bei einer extremen Abplattung zu einer diskusförmigen Scheibe die Gravitationskraft an den Polen im Gegenteil sogar ganz verschwinden würde. Eine genaue Rechnung für eine Kugel mit einer homogenen Masseverteilung zeigt allerdings, daß für den Fall der Erde die Fallbeschleunigung an den Polen tatsächlich bei einer kleinen Abplattung zuerst zunimmt um dann schließlich bei größeren Abplattungen wieder abzunehmen.

<sup>32</sup>An dieser Stelle setzte **Einsteins** Überlegung an, daß eventuell die Schwerkraft nur eine Trägheitskraft ist, da wir ein falsches Bezugssystem benutzen.

<sup>33</sup>Man spricht hier von Revolution ohne Rotation.

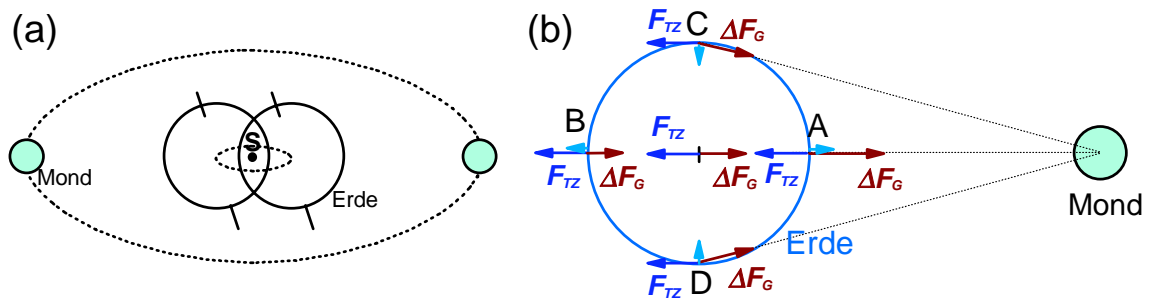


Abbildung 1.58: (a) Bewegung von Erde und Mond um ihren gemeinsamen Schwerpunkt. (b) Zur Erklärung der Gezeiten.

Punkten auf der Erdoberfläche und im Erdmittelpunkt wirkenden Gravitationskräfte und Zentrifugalkräfte gezeigt. In Punkt  $A$  überwiegt  $\Delta F_G$ ,<sup>34</sup> während in Punkt  $B$   $F_{TZ}$  überwiegt. In Punkt  $C$  und  $D$  ist die resultierende Kraft klein und zum Erdmittelpunkt hin gerichtet. Zwischen den Punkten  $C$  und  $D$  einerseits und  $A$  und  $B$  andererseits findet ein kontinuierlicher Übergang der Größe und Richtung der resultierenden Kraft statt. In diesen Zwischenpunkten besitzt die resultierende Kraft eine Tangentialkomponente, die in Richtung Äquator weist. Diese Komponente bewirkt eine Bewegung des Wassers in den Ozeanen in Richtung der Punkte  $A$  und  $B$ , wodurch dort Flutberge entstehen. In den Punkten  $C$  und  $D$  sowie im gesamten, senkrecht durch die Punkte  $C$  und  $D$  verlaufenden Erdmeridians herrscht dagegen Ebbe. Die Vertikalkomponente der resultierenden Kraft bewirkt eine elastische Verformung der Erde, d.h. ein Heben und Senken der Erdoberfläche um einige Dezimeter, wodurch sich eine kleine Zunahme der Erdbeschleunigung  $g$  an den Polen ergibt.

Aufgrund der Drehung des Mondes um die Erde und der Rotation der Erde um ihre eigene Achse verschiebt sich der oben beschriebene Zustand dauernd, so daß innerhalb eines Zeitintervalls von etwa  $24 \frac{3}{4}$  Stunden an einem Ort zweimal Ebbe und Flut eintritt.

<sup>34</sup>  $\Delta F_G$  soll der Unterschied der Gravitationskraft an einem Punkt der Erdoberfläche und im Erdmittelpunkt aufgrund der unterschiedlichen Abstände zum Mittelpunkt des Mondes sein.

## 1.8 Inertial- und Nichtinertialssysteme

### 1.8.1 Inertialsysteme

Ein *Inertialsystem* ist wie folgt definiert:

Ein Inertialsystem ist ein Bezugssystem, in dem das **Galileische Trägheitsgesetz (Lex Prima)** gilt.

Man kann zeigen, daß eine hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines Inertialsystems gegeben ist, wenn sich ein kräftefreier Körper in allen drei Raumrichtungen geradlinig gleichförmig bewegt. Die experimentelle Erfahrung hat gezeigt, daß ein im Fixsternhimmel verankertes Bezugssystem diese Bedingung erfüllt. Ausgehend vom Trägheitsgesetz (Lex Prima) stellt man in einem Inertialsystem die **Newtonschen Axiome** auf, die die Grundlage der gesamten Mechanik bilden. Diese Axiome sind nur in einem Inertialsystem gültig.

### Das Relativitätsprinzip

Es soll nun diskutiert werden, inwieweit der Fixsternhimmel das einzige Inertialsystem ist, oder ob es andere Bezugssysteme gibt, die ebenfalls Inertialsysteme darstellen. Um diese Fragestellung zu diskutieren, muß man überlegen, wie ein und derselbe physikalische Tatbestand von verschiedenen Koordinatensystemen aus beschrieben wird. Hierzu soll der Übergang von einem Bezugssystem  $S$  zu einem Bezugssystem  $S'$ , das sich relativ zu  $S$  mit konstanter Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegt, betrachtet werden. Bezüglich der Transformation der Zeit wird in der klassischen **Newtonschen Mechanik** angenommen, daß die Zeit eine "absolute" Größe ist, die unabhängig vom Bezugssystem ist. Der Übergang von  $S$  nach  $S'$  wird durch die *Galileitransformation* vermittelt. Zur Ableitung der Transformationsformeln zwischen den Koordinaten  $(x, y, z, t)$  in  $S$  und  $(x', y', z', t')$  in  $S'$  werden zwei kartesische Koordinatensysteme betrachtet, deren Ursprung zur Zeit  $t_0 = 0$  zusammenfällt und die sich mit der Geschwindigkeit  $(v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$  gleichförmig gegeneinander bewegen (siehe Abb. 1.59). Man erhält dann folgende Ausdrücke für die Galileitransformation der Ortskoordinaten

$$\begin{aligned}x &= x' + v_{0x}t \\y &= y' + v_{0y}t \\z &= z' + v_{0z}t \quad ,\end{aligned}\tag{1.8.1}$$

der Geschwindigkeit

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v_{0x} \\v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} + v_{0y} \\v_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} + v_{0z} \quad ,\end{aligned}\tag{1.8.2}$$

der Beschleunigung

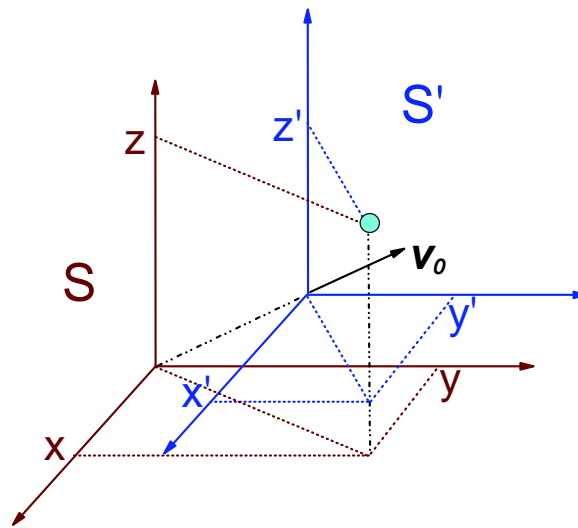


Abbildung 1.59: Zur Ableitung der Galileitransformation zwischen zwei Koordinatensystemen  $S$  und  $S'$ .

$$\begin{aligned}
 a_x &= \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 x'}{dt^2} \\
 a_y &= \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 y'}{dt^2} \\
 a_z &= \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d^2 z'}{dt^2}
 \end{aligned} \tag{1.8.3}$$

und der Zeit

$$t = t' . \tag{1.8.4}$$

In vektorieller Schreibweise erhält man

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}_0 t \\
 \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0 \\
 \mathbf{a} = \mathbf{a}' .
 \end{array} \tag{1.8.5}$$

Aus Gl.(1.8.5) ist ersichtlich, daß sich die in  $S$  und  $S'$  gemessenen Geschwindigkeiten ein und desselben Körpers zwar um  $\mathbf{v}_0$  unterscheiden die Beschleunigung aber in beiden Bezugssystemen gleich ist. Ein kräftefreier Körper, der in  $S$  die Beschleunigung  $\mathbf{a} = 0$  erfährt, hat auch in  $S'$  die Beschleunigung  $\mathbf{a}' = 0$ . Damit ist gezeigt, daß ausgehend von einem Inertialsystem  $S$  alle diejenigen Bezugssysteme  $S'$  wiederum Inertialsysteme sind, die sich gegen  $S$  gleichförmig geradlinig bewegen. Zu einem Inertialsystem gehört also eine Schar von unendlich vielen weiteren Inertialsystemen.

Anhand der **Galileitransformation** sieht man, daß sich Geschwindigkeiten beim Übergang von  $S$  nach  $S'$  vektoriell addieren, während die Beschleunigung gleich bleibt. Man sagt deshalb, daß die Beschleunigung eine bezüglich der **Galileitransformation invariante Größe** oder kurz *Invariante* ist. Es ist ein

weitergehendes Problem, wie sich die dynamischen Größen Kraft und Masse beim Bezugssystemwechsel transformieren. Die Masse wird in der **Newton**schen Mechanik als Körpereigenschaft aufgefaßt, die unabhängig vom Bewegungszustand des Körpers und damit unabhängig von der Geschwindigkeit ist. Nach der speziellen Relativitätstheorie ist dies aber nur näherungsweise richtig, solange die Geschwindigkeit  $v$  der Masse klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit  $c$  ist. In dieser Näherung ist beim Wechsel des Bezugssystems

$$m = m' , \quad (1.8.6)$$

d.h. die Masse ist eine Invariante. Schließlich bleibt noch die Frage, welche Beziehung zwischen der Kraft  $\mathbf{F}$  im System  $S$  und der Kraft  $\mathbf{F}'$  im System  $S'$  besteht. Nach dem Gravitationsgesetz (1.5.1) hängt die Gravitationskraft nur von den invarianten Massen  $m_1$  und  $m_2$  und von dem relativen Abstand  $r = |\mathbf{r}_{21}|$  zweier Körper ab. Da nach Gl.(1.8.1) Abstände zwischen zwei Raumpunkten galileiinvariant sind, erwartet man, daß auch die Gravitationskraft eine Invariante bezüglich der **Galilei**transformation ist. Eine ähnliche Argumentation gilt für die Coulombkraft zwischen zwei Ladungen. Kräfte wie die Reibungskraft, die eine Funktion der Relativgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_{21} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$  zwischen zwei Körpern sind, erweisen sich ebenfalls als galileiinvariant, da nach Gl.(1.8.2) für die relative Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_{21} = \mathbf{v}'_{21}$  gilt. Die magnetischen Wechselwirkungen zwischen zwei bewegten Ladungen hängen dagegen von den Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}_1$  und  $\mathbf{v}_2$  der Ladungsträger selber ab und sind damit nicht galileiinvariant.<sup>35</sup> Läßt man letztere Kräfte, die im Bereich der technischen Mechanik eine untergeordnete Rolle spielen, unberücksichtigt, so ist näherungsweise auch die Kraft eine Invariante bezüglich der **Galilei**transformation:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}' . \quad (1.8.7)$$

Mit Hilfe von Gln.(1.8.6) und (1.8.7) findet man bei der Transformation der **Newton**schen Bewegungsgleichung vom Inertialsystem  $S$  nach  $S'$ :

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{F}' = m' \mathbf{a}' . \quad (1.8.8)$$

Dies ist ein bemerkenswertes Resultat: die dynamische Grundgleichung hat in allen Inertialsystemen dieselbe Form, keines dieser Systeme ist vor dem anderen ausgezeichnet, alle Inertialsysteme sind untereinander gleichwertig. In Anlehnung an die **Galilei**invarianz der **Newton**schen Grundgleichung stellt man ein sehr weitreichendes Prinzip auf, das *spezielle Relativitätsprinzip*:

**Die physikalischen Gesetze haben in allen Inertialsystemen dieselbe Form**

Die **Galilei**invarianz der Bewegungsgleichung in der **Newton**schen Mechanik ist ein Sonderfall des Relativitätsprinzips: wenn alle Größen einer Gleichung invariant sind, bleibt die Form der Gleichung in allen Inertialsystemen trivialerweise erhalten. Das Relativitätsprinzip verlangt etwas weniger. Um die Form einer Gleichung nicht zu verändern, genügt es, daß sich beide Seiten der Gleichung beim Wechsel

<sup>35</sup>Eine genaue Diskussion erfolgt in der Vorlesung zur Elektrodynamik.

des Bezugssystems gleich transformieren. Das Postulat der *Forminvarianz* der Naturgesetze in allen Inertialsystemen hat bislang jeder experimentellen Nachprüfung standgehalten und man sieht es heute als eines der fundamentalen Prinzipien der Physik an.

Als Konsequenz aus dem Relativitätsprinzip ergibt sich, daß Geschwindigkeiten nicht absolut meßbar sind. Da alle Inertialsysteme gleichberechtigt sind, kann man kein “ausgezeichnetes” Inertialsystem finden, von dem aus man die Geschwindigkeit eines Körpers als “absolut” bezeichnen könnte. Man mißt also Geschwindigkeiten grundsätzlich relativ zu Bezugssystemen.

### Die Lorentztransformation

Führt man eine **Galilei**transformation der **Maxwellschen** Gleichungen, die den Elektromagnetismus in einem einheitlichen System beschreiben, durch, so stellt man fest, daß ihre Form nicht gleich bleibt.<sup>36</sup> Das bedeutet, daß die Gesetze des Elektromagnetismus ( $\mathbf{F} \neq \mathbf{F}'$ ), die **Newtonsche** Bewegungsgleichung  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  mit der invarianten Masse  $m = m'$ , die **Galilei**transformation ( $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$ ) und das Relativitätsprinzip ( $\mathbf{F} = m\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{F}' = m'\mathbf{a}'$ ) nicht miteinander verträglich sind. Das kommt einer Verletzung des Relativitätsprinzips gleich. Diese Schwierigkeit wurde in der *Speziellen Relativitätstheorie* (**Einstein**, 1905) überwunden.<sup>37</sup> Ausgehend vom Relativitätsprinzip und der experimentell beobachteten Konstanz der Lichtgeschwindigkeit  $c$  hat **Einstein** vor allem den **Newtonschen** Begriff der Zeit einer Kritik unterworfen und konnte zeigen, daß die Galilei transformation durch eine allgemeinere Transformation, die *Lorentztransformation*, ersetzt werden muß. Wir werden sehen, daß die Lorentztransformation für kleine Relativgeschwindigkeiten ( $v \ll c$ ) zwischen den Inertialsystemen in die Galilei transformation übergeht. Bezüglich der Lorentztransformation sind der Relativabstand zwischen zwei Körpern, die Zeit und die Masse eines Körpers keine Invarianten mehr sondern hängen vielmehr von dem Inertialsystem ab, in dem sie beobachtet werden.

Ursprünglich glaubte man, daß die **Maxwellschen** Gleichungen falsch sein mußten. Zahlreiche Experimente führten aber zu dem Ergebnis, daß die **Maxwellschen** Gesetze der Elektrodynamik korrekt waren und die Schwierigkeiten wahrscheinlich woanders liegen. **H. A. Lorentz** stellte fest, daß folgende Transformation die **Maxwellschen** Gleichungen unverändert läßt:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - v_{0x}t}{\sqrt{1 - v_{0x}^2/c^2}} \\ y' &= \frac{y - v_{0y}t}{\sqrt{1 - v_{0y}^2/c^2}} \\ z' &= \frac{z - v_{0z}t}{\sqrt{1 - v_{0z}^2/c^2}} \\ t' &= \frac{t - v r/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} . \quad (1.8.9) \end{aligned}$$

Die Gleichungen (1.8.9) sind als *Lorentztransformation* bekannt. **Einstein** schlug vor, daß alle physikalischen Gesetze unter einer *Lorentztransformation* unverändert bleiben sollten. Das bedeutet, daß

<sup>36</sup>In einem bewegten und ruhenden Raumschiff wären dann die elektrischen und optischen Phänomene verschieden. Man könnte deshalb diese optischen Phänomene dazu benutzen, die Geschwindigkeit des Raumschiffes zu bestimmen, insbesondere könnte die “absolute” Geschwindigkeit des Raumschiffes bestimmt werden. Dies widerspricht dem Relativitätsprinzip.

<sup>37</sup>Im Jahre 1915 veröffentlichte **Einstein** eine zusätzliche Theorie, die *Allgemeine Relativitätstheorie*. Diese Theorie behandelt die Erweiterung der Speziellen Relativitätstheorie auf den Fall des Gravitationsgesetzes. Diese Theorie wird hier nicht diskutiert.



man die Gesetze der Mechanik und nicht diejenigen der Elektrodynamik ändern muß. Die Frage lautet also, wie müssen die **Newtonschen** Gesetze geändert werden, damit sie unter einer Lorentztransformation unverändert bleiben. Es zeigte sich, daß es genügt, die Masse  $m$  in den **Newtonschen** Gleichungen durch

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1.8.10)$$

zu ersetzen, wobei  $m_0$  die "Ruhemasse" des nichtbewegten Körpers ist.<sup>38</sup>

Während die alte, **Galileische** Transformation zwischen den Koordinaten und der Zeit selbstverständlich erscheint, sieht die neue, die **Lorentzsche** Transformation zunächst eigenartig aus. Die Gültigkeit der **Lorentztransformation** für die Gesetze der Mechanik wurde mittlerweile aber in vielen Experimenten bestätigt. Um sie zu verstehen, muß man, wie **Einstein** es getan hat, nicht nur die Gesetze der Mechanik studieren sondern seine Vorstellungen von *Raum und Zeit* analysieren.<sup>39</sup>

## 1.8.2 Nicht-Inertialsysteme

Bezugssysteme, die sich relativ zu einem Inertialsystem translatorisch oder rotatorisch beschleunigt bewegen, sind selbst keine Inertialsysteme, da das Trägheitsgesetz in diesen Systemen verletzt ist.

In Inertialsystemen lassen sich zwar die Bewegungsgleichungen am einfachsten formulieren, in der Praxis hat man es aber oft mit Nicht-Inertialsystemen zu tun. Ein Beispiel ist die Erde, die aufgrund ihrer täglichen Rotationsbewegung um die eigene Achse und ihrer jährlichen Bewegung um die Sonne kein Inertialsystem darstellt, da ein auf der Erde verankertes Bezugssystem aufgrund dieser Bewegungen beschleunigt ist. Ebenso wäre ein in der Sonne verankertes Bezugssystem kein Inertialsystem, da die Sonne eine Bahnbewegung um das galaktische Zentrum ausführt, die mit einer Zentripetalbeschleunigung verknüpft ist. Da man es also in der Praxis häufig mit Nicht-Inertialsystemen zu tun hat, ist es sinnvoll, auch die für Nicht-Inertialsysteme gültigen Bewegungsgleichungen abzuleiten.

Im folgenden werden zwei häufig auftretende beschleunigte Bezugssysteme diskutiert, und zwar das gleichförmig translatorisch beschleunigte und das mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierende Bezugssystem.

### Das translatorisch beschleunigte Bezugssystem

Wir betrachten zwei kartesische Koordinatensysteme  $S$  und  $S'$ , die wie in Abb. 1.60 gezeigt ist achsenparallel zueinander stehen und sich der Einfachheit halber nur längs der  $x$ -Achse gegeneinander bewegen sollen.  $S$  sei ein Inertialsystem und  $S'$  bewege sich mit konstanter Beschleunigung  $\mathbf{a}_0 = a_0 \cdot \hat{\mathbf{x}}$ . Für den Übergang von  $S$  nach  $S'$  setzen wir die **Galilei**transformation von Gl.(1.8.1) an

$$\begin{aligned} x &= x' + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_0t^2 \\ y &= y' + v_{0y}t \\ z &= z' + v_{0z}t \end{aligned} \quad (1.8.11)$$

<sup>38</sup>Es wird in Abschnitt 1.8.3 gezeigt, daß sich dieser zunächst nicht einsichtige Ausdruck für die Masse aus der von **Einstein** postulierten Äquivalenz von Masse und Energie ableiten läßt.

<sup>39</sup>Eine Diskussion der **Einsteinschen** Ideen und deren Folgerungen für die Gesetze der Mechanik erfordert einige Breite und soll deshalb hier nicht durchgeführt werden.

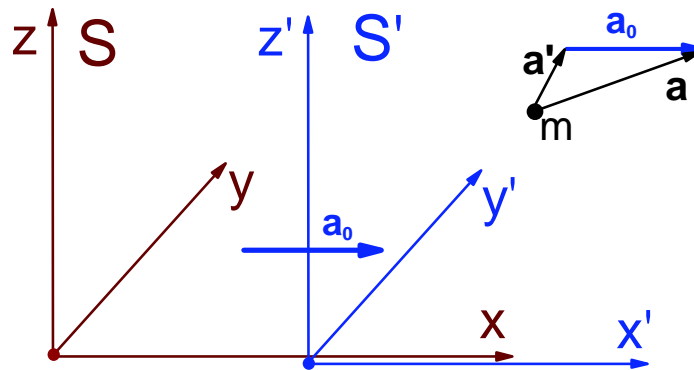


Abbildung 1.60: Bezugssystem  $S'$  wird mit der Beschleunigung  $\mathbf{a}_0$  relativ zum Inertialsystem  $S$  bewegt.

und erhalten durch Differenzieren nach der Zeit

$$\begin{aligned}
 v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v_{0x} + a_0 t \\
 v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} + v_{0y} \\
 v_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} + v_{0z} .
 \end{aligned} \tag{1.8.12}$$

Durch nochmaliges Differenzieren erhält man

$$\begin{aligned}
 a_x &= \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 x'}{dt^2} + a_0 \\
 a_y &= \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 y'}{dt^2} \\
 a_z &= \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d^2 z'}{dt^2}
 \end{aligned} \tag{1.8.13}$$

oder in Vektorschreibweise.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_0 . \tag{1.8.14}$$

Beschleunigungen werden also nach Gl.(1.8.14) von System  $S$  und  $S'$  unterschiedlich beurteilt. Bewegt sich z.B. ein kräftefreier Körper der Masse  $m$  im Inertialsystem  $S$  aus gesehen mit der Beschleunigung  $\mathbf{a} = 0$ , so ist im System  $S'$  für  $\mathbf{a}_0 = \text{const} \neq 0$  die Beschleunigung  $\mathbf{a}'$  im System  $S'$  von Null verschieden:  $\mathbf{a}' = -\mathbf{a}_0 \neq 0$ . Damit ist in System  $S'$  das Trägheitsgesetz verletzt oder – gleichbedeutend –  $S'$  ist kein Inertialsystem.

Für die dynamischen Größen Masse  $m$  und reale Kraft  $\mathbf{F}$  setzen wir mit ähnlichen Argumenten wie im vorangegangenen Abschnitt an, daß auch bei einem Übergang von einem Inertialsystem zu einem Nicht-Inertialsystem

$$m = m' \tag{1.8.15}$$

und

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}' . \quad (1.8.16)$$

gelten soll. Im Inertialsystem ist die Bewegungsgleichung  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  bekannt. Mit Gl.(1.8.14)-(1.8.16) läßt sich diese Gleichung in das System  $S'$  übersetzen und man erhält

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}' = m\mathbf{a} = m'\mathbf{a}' + m'\mathbf{a}_0 . \quad (1.8.17)$$

Es ist zweckmäßig, die *Scheinkraft*  $\mathbf{F}_A$

$$\mathbf{F}_A = -m\mathbf{a}_0 \quad (1.8.18)$$

einzuführen, die wie die **d'Alembertsche** Trägheitskraft  $\mathbf{F}_T$  aus Abschnitt 1.7 proportional zur Masse ist. Mit dieser Definition schreibt sich Gl.(1.8.17) in der Form

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_A = m'\mathbf{a}' . \quad (1.8.19)$$

Gl.(1.8.19) ist die gesuchte Bewegungsgleichung im translatorisch beschleunigten Bezugssystem  $S'$ . Da die zusätzliche Kraft  $\mathbf{F}_A$  keiner Wechselwirkung zwischen Körpern entspricht, ist die Bezeichnung Scheinkraft gerechtfertigt. Der Zusatzterm  $\mathbf{F}_A$  in Gl.(1.8.19) zeigt klar, daß die **Newtonschen** Bewegungsgleichungen nur in einem Inertialsystem Gültigkeit besitzen.

Die Bedeutung der Scheinkraft wird klarer, wenn man analog zur Trägheitskraft  $\mathbf{F}_T = -m\mathbf{a}$  im Inertialsystem  $S$  auch für das Nichtinertialsystem  $S'$  die Trägheitskraft  $\mathbf{F}'_T$

$$\mathbf{F}'_T = -m\mathbf{a}' \quad (1.8.20)$$

definiert. Mit Gl.(1.8.14) ergibt sich dann

$$\mathbf{F}_T = -m\mathbf{a} = -m\mathbf{a}' - m\mathbf{a}_0 = \mathbf{F}'_T + \mathbf{F}_A . \quad (1.8.21)$$

Diese Beziehung macht klar, daß im Gegensatz zu der realen Kraft ( $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$ ) beim Wechsel des Bezugssystems die Trägheitskräfte nicht invariant sind. Die Scheinkraft  $\mathbf{F}_A$  ist identisch mit der Trägheitskraft  $\mathbf{F}_T$  im Inertialsystem, wenn die Trägheitskraft im Nicht-Inertialsystem verschwindet. Dieser Fall liegt z.B. dann vor, wenn der Körper relativ zum beschleunigten System ruht, d.h.  $\mathbf{a}' = 0$  gilt. Die Scheinkraft  $\mathbf{F}_A$  ist dann identisch mit dem in Abschnitt 1.7 eingeführten Trägheitswiderstand  $\mathbf{F}_{TW}$  und trägt damit den Charakter einer Trägheitskraft. Die Scheinkraft  $\mathbf{F}_A$  wird deshalb vielfach auch als Trägheitskraft bezeichnet.

**Beispiele:**

- **Fahrgast in Straßenbahn:**

Die enge Beziehung zwischen  $\mathbf{F}_A$  in  $S'$  und  $\mathbf{F}_{TW}$  in  $S$  wird an folgendem Beispiel klar. Man betrachte einen Fahrgast in einer anfahrenen oder abbremsenden Straßenbahn. Vom beschleunigten System  $S'$  aus wirkt auf den Fahrgast die Kraft  $\mathbf{F}_A = -m\mathbf{a}_0$  ein. Der Fahrgast muß sich festhalten, d.h. eine reale Kraft aufbringen, um von der Scheinkraft nicht umgeworfen zu werden und mit  $\mathbf{a}' = 0$  die Gleichung  $\mathbf{F} + \mathbf{F}_A = 0$  zu erfüllen. Eine sehr ähnliche Argumentation wurde in Abschnitt 1.7 benutzt, wo von der **d'Alembertschen** Bewegungsgleichung  $\mathbf{F} + \mathbf{F}_T = 0$  im Inertialsystem  $S$  ausgegangen wurde

- **Masse-Feder-System:**

Ein Körper der Masse  $m$  ist über eine Feder mit einer Aufhängung verbunden, die sich gegenüber  $S$  mit der Beschleunigung  $\mathbf{a}_0$  bewegt. Die Masse ruht im System  $S'$ , d.h.  $\mathbf{a}' = 0$ . Mit  $\mathbf{F}' = \mathbf{F} = \mathbf{F}_F$  folgt dann  $\mathbf{F} + \mathbf{F}_A = m\mathbf{a}' = 0$  und deshalb  $\mathbf{F}_F = -\mathbf{F}_A = m\mathbf{a}_0$ .

- **Mathematisches Pendel in startender Rakete:**

Wird ein mathematisches Pendel in einer Rakete entgegen der Erdbeschleunigung  $\mathbf{g}$  mit der Beschleunigung  $\mathbf{a}_0$  beschleunigt, so greifen an der Masse  $m$  des Pendels die Schwerkraft  $\mathbf{F}_G = m\mathbf{g}$ , die Fadenspannung  $\mathbf{F}_F$  und die Scheinkraft  $\mathbf{F}_A = -m\mathbf{a}_0$ . Ähnlich wie bei Pendel im Inertialsystem zerlegt man die Kraft  $\mathbf{F}_G + \mathbf{F}_A$  in eine Normalkomponente  $\mathbf{F}_r$  in Fadenrichtung und eine tangentielle Komponente  $\mathbf{F}_\varphi$  senkrecht zum Faden (siehe Abb. 1.61). Die Normalkomponente wird von der Fadenspannung kompensiert. Als wirksame Kraft verbleibt alleine die Tangentialkomponente  $\mathbf{F}_{\varphi'} = -m(\mathbf{g} + \mathbf{a}_0) \sin \varphi'$ . Damit ergibt sich die Schwingungsdauer  $T'$  im System  $S'$  zu

$$\mathbf{T}' = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + a_0}} . \quad (1.8.22)$$

Das heißt, daß beim Starten der Rakete die Schwingungsperiode des mathematischen Pendels kürzer wird. Aus der Schwingungsdauer des Pendels läßt sich sofort die Beschleunigung  $\mathbf{a}_0$  der Rakete bestimmen. Durch Integration über die Zeit lassen sich hieraus die Geschwindigkeit und der seit dem Start zurückgelegte Weg berechnen und z.B. mit einer vorgegebenen Sollbahn vergleichen. Bei Abweichungen von der Sollbahn kann man entsprechend nachsteuern ("Trägheitssteuerung").

Bewegt sich die Rakete aus dem Weltraum beschleunigt auf die Erde zu, so erhält man

$$\mathbf{T}' = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g - a_0}} . \quad (1.8.23)$$

Beim freien Fall ( $\mathbf{a}_0 = \mathbf{g}$ ) wird die Schwingungsdauer unendlich groß. Das Pendel bleibt im beschleunigten System dann bei beliebiger Auslenkung  $\varphi'$  aus der Nulllage stehen.

Es sei abschließend angemerkt, daß in Gln.(1.8.22) und (1.8.23) das Äquivalenzprinzip zum Tragen kommt. Die durch die Gravitation und die Beschleunigung auftretenden Trägheitskräfte sind gleichwertig.

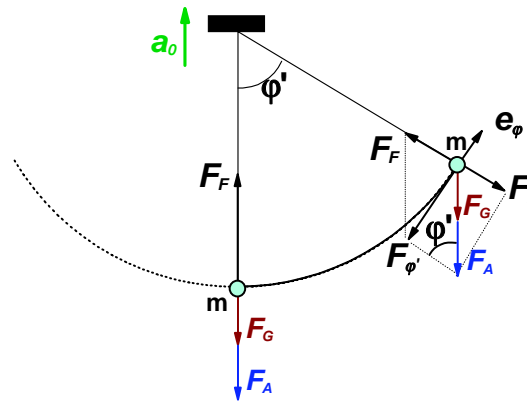


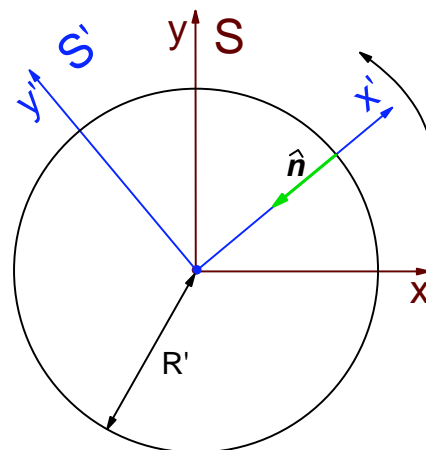
Abbildung 1.61: Mathematisches Pendel in einem beschleunigten Bezugssystem.

### Das rotierende Bezugssystem

Auch mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierende Bezugssysteme sind beschleunigte Systeme, da zur Aufrechterhaltung der Drehbewegung eine Zentripetalbeschleunigung  $\omega \cdot \hat{n}$  notwendig ist (vergleiche hierzu Abschnitt 1.3.2). In Analogie zum translatorisch beschleunigten System erwartet man in einem rotierenden Bezugssystem  $S'$  (siehe Abb. 1.62) für einen Körper im Abstand  $R'$  von der Drehachse folgenden Ausdruck für das Kräftegleichgewicht

$$\begin{aligned} \mathbf{F} + \mathbf{F}_A &= m' \mathbf{a}' \\ \text{mit} \quad \mathbf{F}_A &= -m\omega^2 R' \cdot \hat{n} \end{aligned} \quad (1.8.24)$$

Die Scheinkraft  $\mathbf{F}_A = -m\mathbf{a}_0$  entspricht dabei der *Zentrifugalkraft*.

Abbildung 1.62: Bezugssystem  $S'$  rotiert gegenüber Bezugssystem  $S$  mit konstanter Winkelgeschwindigkeit.

Im folgenden sollen anhand von Abb. 1.63 kurz die zwei Grenzfälle  $\mathbf{a} = 0$  und  $\mathbf{F} = 0$  diskutiert werden:

**A:**  $\mathbf{a}' = 0$ :

Man erhält

$$\mathbf{F}_F + \mathbf{F}_A = m' \mathbf{a}' = 0$$

und damit

$$\mathbf{F}_F = -\mathbf{F}_A = m\omega^2 R' \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (1.8.25)$$

Aus  $\mathbf{a}' = 0$  schließt der Beobachter im System  $S'$ , daß die Gesamtkraft verschwindet, also muß die Scheinkraft  $\mathbf{F}_A$  die Federkraft  $\mathbf{F}_F$  kompensieren.

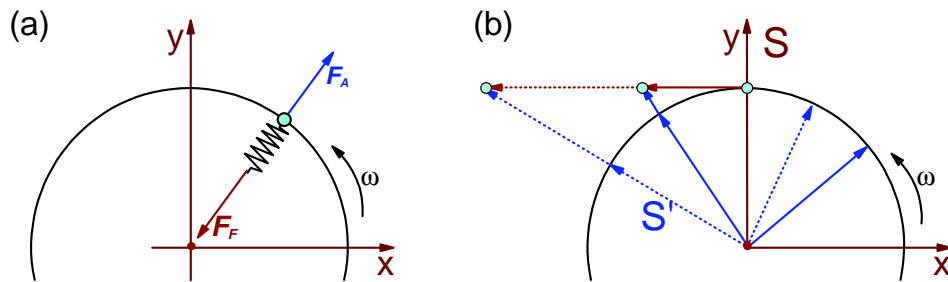


Abbildung 1.63: (a) Die Beschleunigung der Masse  $m$  im Bezugssystem  $S'$  sei  $\mathbf{a}' = 0$ . (b) Die real auf die Masse  $m$  wirkende Kraft sei  $\mathbf{F} = \mathbf{F}' = 0$ .

**B:  $\mathbf{F} = 0$ :**

Dieser Fall liegt z.B. im Fall von tangential von einer Schleifscheibe abspringenden Funken vor. Aus  $\mathbf{F}_F + \mathbf{F}_A = m' \mathbf{a}'$  folgt mit  $\mathbf{F} = 0$

$$\mathbf{F}_A = m' \mathbf{a}' = m\omega^2 R' \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (1.8.26)$$

Ein Beobachter im Bezugssystem  $S'$  sieht die Masse (Schleiffunken) radial nach außen fliegen, da  $\mathbf{a}' \neq 0$  (siehe Abb. 1.63b). Er schließt daraus auf die (Schein-) Kraft  $\mathbf{F}_A = m\omega^2 R' \cdot \hat{\mathbf{n}}$ . Diese Beobachtung gilt nur für den Anfang der Flugbahn. Im Laufe der Zeit sieht der radial nach außen blickende Beobachter im System  $S'$  eine Rechtsabweichung, da der Massenpunkt auf seiner gleichförmigen Bahn hinter dem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit sich drehenden Sehstrahl des Beobachters zurückbleibt. Er muß daraus auf eine weitere Scheinkraft schließen, die bei radialer Bewegung auftritt und in obigem Ausdruck noch nicht enthalten ist.

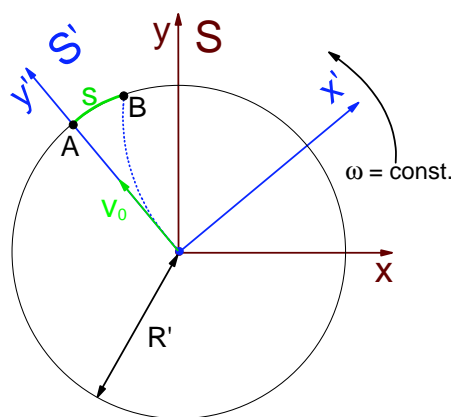


Abbildung 1.64: Zur Veranschaulichung der Corioliskraft.

Die bei radialer Bewegung zusätzlich auftretende Scheinkraft kann anhand von folgendem Versuch klar gemacht werden: Man bewegt einem Bleistift auf einer rotierenden Scheibe in radialer Richtung nach außen. Dabei entstehen gekrümmte Linien, da sich die Scheibe unter dem Bleistift wegbewegt. Bei einer Rotation im Uhrzeigersinn sind die Striche nach links, bei einer Rotation gegen den Uhrzeigersinn nach rechts gekrümmt (siehe Abb. 1.64). Ein Beobachter auf der Scheibe (im System  $S'$ ) schließt auf eine Scheinkraft, die Ursache für die Ablenkung des Stiftes ist. Der Einfachheit halber soll angenommen werden, daß sich der Stift vom Mittelpunkt der Scheibe mit konstanter Geschwindigkeit  $v_0$  in radialer Richtung nach außen bewegt. Der mitrotierende Beobachter im System  $S'$  erwartet, daß der Stift nach der Zeit  $T = R/v_0$  den Punkt  $A$  erreicht. Die Scheibe dreht sich aber um das Wegstück  $s = v \cdot t = \omega \cdot R \cdot t = \omega \cdot v_0 \cdot t^2$  nach  $B$  weiter. Für den mitrotierenden Beobachter scheint eine senkrecht zu  $v_0$  gerichtete Beschleunigung  $a_c$  stattzufinden. Mit  $s = \frac{1}{2}a_c t^2$  erhält man

$$\frac{a_c}{2} t^2 = \omega \cdot v_0 \cdot t^2 \Rightarrow a_c = 2 \cdot v_0 \cdot \omega . \quad (1.8.27)$$

Die Beschleunigung  $a_c$  heißt *Coriolisbeschleunigung*, für die die Scheinkraft

$$F_C = 2 \cdot m \cdot v_0 \cdot \omega \quad (1.8.28)$$

verantwortlich ist, die als *Corioliskraft* bezeichnet wird. Ein Körper, der sich in einem rotierenden Bezugssystem relativ zu diesem mit der Geschwindigkeit  $v_0$  bewegt, erfährt also neben der Zentrifugalkraft noch eine weitere Trägheitskraft, nämlich die Corioliskraft. Bei einer Rotation im Uhrzeigersinn zeigt die Corioliskraft "nach links" relativ zur Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ , bei einer Rotation gegen den Uhrzeigersinn ist sie nach rechts gerichtet.

Für die Herleitung allgemeinerer Ausdrücke für die Zentrifugalkraft und die Corioliskraft, muß zuerst eine allgemeinere Beschreibung von Drehbewegungen gemacht werden.

### Beschreibung von Drehbewegungen

Infinitesimale Drehungen können durch *axiale Vektoren* dargestellt werden. Der Grund hierfür ist die Komponentenerlegbarkeit der gleichförmigen Bewegung. Eine Drehung ist durch die Vorgabe einer Drehachse und eines Drehwinkels  $d\varphi$  um die Drehachse charakterisiert (siehe Abb. 1.65). Die Lage der Drehachse im Raum legt man durch einen in der Achse liegenden Vektor  $d\varphi$  fest, dessen Länge  $d\varphi$  den Drehwinkel angibt. Damit ist der Vektor  $d\varphi$  bis auf sein Vorzeichen eindeutig. Um die Wahl zwischen den beiden Möglichkeiten  $d\varphi$  und  $-d\varphi$  zu treffen, fordert man noch, daß der Drehsinn zusammen mit der Richtung von  $d\varphi$  eine Rechtsschraube bildet.<sup>40</sup> Es sei hier ausdrücklich darauf hingewiesen, daß endliche Drehungen nicht als axiale Vektoren darstellbar sind.<sup>41</sup>

Verläuft wie in Abb. 1.65 gezeigt die Drehachse durch den Ursprung des Koordinatensystems, so kann man die aus einer Drehung resultierende Verrückung  $dr$  eines Massenpunktes mit Ortsvektor  $r$  zum Drehvektor  $d\varphi$  in Beziehung setzen. Bei der Drehung läuft die Masse  $m$  auf einem Kreis mit Radius  $\rho = r \sin \alpha$  um die Achse. Dabei ist

<sup>40</sup>Man bezeichnet dies als *Korkenzieherregel* oder *Daumenregel* der rechten Hand. Zeigt der Daumen der rechten Hand in Richtung von  $d\varphi$ , so geben die übrigen Finger der rechten Hand den Drehsinn an.

<sup>41</sup>Nacheinander um verschiedene Achsen ausgeführte Drehungen mit endlichem Drehwinkel  $\Delta\varphi$  sind nicht kommutativ und verletzen daher eine wesentliche Vektoreigenschaft. Nur im Limes infinitesimaler Drehwinkel werden Drehungen kommutativ.

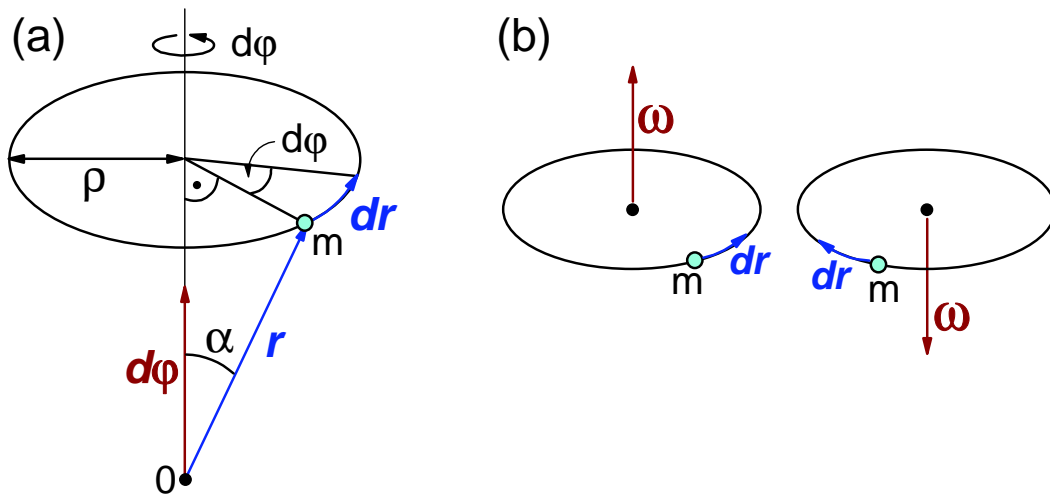


Abbildung 1.65: (a) Darstellung einer infinitesimalen Drehung als Axialvektor  $d\varphi$ . (b) Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und zugehöriger Drehsinn.

$$dr = \rho d\varphi = (r \sin \alpha) d\varphi = d\varphi \cdot r \cdot \sin \alpha = |d\varphi \times \mathbf{r}| . \quad (1.8.29)$$

Da ferner  $d\mathbf{r} \perp d\varphi$  und  $d\mathbf{r} \perp \mathbf{r}$  und  $(d\varphi, \mathbf{r}, d\mathbf{r})$  ein Rechtsdreiein bilden, folgt insgesamt<sup>42</sup>

$$d\mathbf{r} = d\varphi \times \mathbf{r} . \quad (1.8.30)$$

Es bietet sich ferner an, die Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$  zu verallgemeinern und eine vektorielle Schreibweise

$$\boldsymbol{\omega} := \frac{d\varphi}{dt} \quad (1.8.31)$$

zu definieren. Für die Beträge der Winkelgeschwindigkeit gilt nach wie vor Gl.(1.3.44). Mit  $d\varphi$  ist aber auch  $\boldsymbol{\omega}$  ein axialer Vektor, d.h. mit der Richtung von  $\boldsymbol{\omega}$  ist ein Drehsinn (Rechtsschraube) verknüpft (siehe Abb. 1.65b).

Da die Geschwindigkeit durch  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  gegeben ist, erhält man mit Gl.1.8.30 und der Definition (1.8.31)

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} . \quad (1.8.32)$$

für die Drehgeschwindigkeit eines Körpers, der von der Drehachse aus den Ortsvektor  $\mathbf{r}$  hat<sup>43</sup>

<sup>42</sup>Zur Feststellung der Richtung von  $d\mathbf{r}$  benutzt man die Rechte-Hand-Regel: Zeigt der rechtwinklig abgespreizte Daumen in Richtung von  $d\varphi$  und der Zeigefinger in Richtung von  $\mathbf{r}$ , so zeigt der ebenfalls rechtwinklig abgespreizte Mittelfinger in Richtung von  $d\mathbf{r}$ .

<sup>43</sup>Es ist hier anzumerken, daß das Vektorprodukt aus einem axialen Vektor ( $\boldsymbol{\omega}$ ) und einem polaren Vektor ( $\mathbf{r}$ ) wiederum einen polaren Vektor ( $\mathbf{v}$ ) liefert.



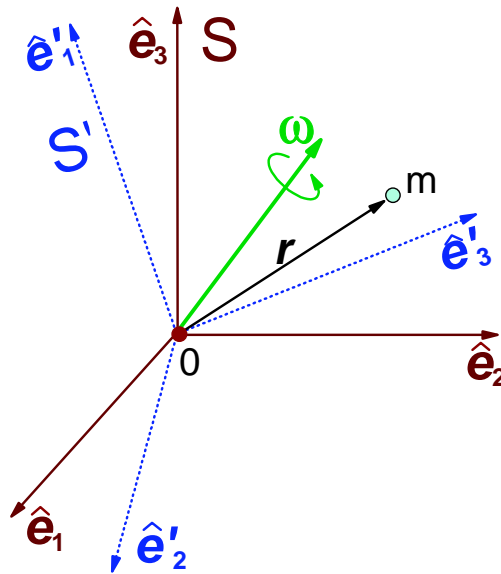


Abbildung 1.66: Das Bezugssystem  $S'$  rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  gegenüber dem Inertialsystem  $S$ .

Nach dieser Einführung in die Beschreibung von Drehbewegungen, können die Bewegungsgleichungen in einem System  $S'$ , das mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \text{const}$  relativ zu einem Inertialsystem rotiert, in allgemeiner Form abgeleitet werden. Die Ursprünge der beiden Systeme sollen wie in Abb. 1.66 gezeigt ist zusammenfallen. Zur Vereinfachung der Schreibweise werden die Basiseinheitsvektoren mit  $\hat{e}_1 = \hat{x}$ ,  $\hat{e}_2 = \hat{y}$  und  $\hat{e}_3 = \hat{z}$  bzw. mit  $\hat{e}'_1 = \hat{x}'$ ,  $\hat{e}'_2 = \hat{y}'$  und  $\hat{e}'_3 = \hat{z}'$ , die Koordinaten mit  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  und  $x_3 = z$  bzw. mit  $x'_1 = x'$ ,  $x'_2 = y'$ ,  $x'_3 = z'$  bezeichnet. Vom jeweiligen System aus gesehen ist dann der Ortsvektor eines Massenpunktes  $m$  gegeben durch

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{e}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{r}' = \sum_{i=1}^3 x'_i \hat{e}'_i . \quad (1.8.33)$$

Da beide Systeme den gleichen Ursprung haben gilt

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' . \quad (1.8.34)$$

Für die Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{v}'$  relativ zu  $S$  und  $S'$  erhält man

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 \frac{dx_i}{dt} \hat{e}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{v}' = \sum_{i=1}^3 \frac{dx'_i}{dt} \hat{e}'_i . \quad (1.8.35)$$

Wegen  $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  gilt auch für die Einheitsvektoren

$$\frac{d\hat{e}'_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{e}'_i . \quad (1.8.36)$$

Aus Gln.(1.8.33) bis (1.8.36) folgt dann unter Berücksichtigung der Produktregel für die Differentiation

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}'}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^3 x'_i \hat{\mathbf{e}}'_i = \sum_{i=1}^3 \frac{dx'_i}{dt} \hat{\mathbf{e}}'_i + \sum_{i=1}^3 x'_i \frac{d\hat{\mathbf{e}}'_i}{dt} \\ \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}' + \sum_{i=1}^3 x'_i (\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{e}}'_i) \\ &= \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \left( \sum_{i=1}^3 x'_i \hat{\mathbf{e}}'_i \right) = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' .\end{aligned}\quad (1.8.37)$$

Man erhält also insgesamt

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' . \quad (1.8.38)$$

Gl.(1.8.38) kann man sich folgendermaßen plausibel machen: wenn ein Körper in  $S$  ruht ( $\mathbf{v}' = 0$ ), so hat er nach Gl.(1.8.32) in  $S$  die Drehgeschwindigkeit  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ . Bewegt sich der Körper in  $S$  mit  $\mathbf{v}' \neq 0$ , so überlagert sich diese Geschwindigkeit noch der Drehgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  und man erhält insgesamt Gl.(1.8.38).

Für die Beschleunigungen  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{a}'$  in  $S$  und  $S'$

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 \frac{d^2 x_i}{dt^2} \hat{\mathbf{e}}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{a}' = \sum_{i=1}^3 \frac{d^2 x'_i}{dt^2} \hat{\mathbf{e}}'_i \quad (1.8.39)$$

erhält man nach Ausführen der zeitlichen Differentiation von Gl.(1.8.38) unter Benutzung von  $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$  folgende Ausdrücke

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^3 \frac{dx'_i}{dt} \hat{\mathbf{e}}'_i + \boldsymbol{\omega} \times \left( \sum_{i=1}^3 x'_i \hat{\mathbf{e}}'_i \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{d^2 x'_i}{dt^2} \hat{\mathbf{e}}'_i + \sum_{i=1}^3 \frac{dx'_i}{dt} \frac{d\hat{\mathbf{e}}'_i}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \left( \sum_{i=1}^3 \frac{dx'_i}{dt} \hat{\mathbf{e}}'_i \right) + \boldsymbol{\omega} \times \left( \sum_{i=1}^3 x'_i \frac{d\hat{\mathbf{e}}'_i}{dt} \right) \\ &= \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') .\end{aligned}\quad (1.8.40)$$

Man erhält also insgesamt

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') . \quad (1.8.41)$$

Wie beim translatorisch beschleunigten Bezugssystem setzen wir auch hier an, daß beim Wechsel vom Inertialsystem  $S$  zum Nicht-Inertialsystem  $S'$  Massen und reale Kräfte invariant sind, d.h.  $m = m'$  und  $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$  (vergleiche Gln.(1.8.15) und (1.8.16)). Mit Gl.(1.8.41) lautet dann die Übersetzung der Bewegungsgleichung  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  des Inertialsystems

$$\mathbf{F}' = m \cdot \mathbf{a}' + 2m' \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + m' \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') . \quad (1.8.42)$$

Definiert man im nächsten Schritt zur Masse proportionale Scheinkräfte, nämlich die *Corioliskraft*  $\mathbf{F}_C$

$$\mathbf{F}_C := -2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' = 2m \mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega} \quad (1.8.43)$$

und die *Zentrifugalkraft*  $\mathbf{F}_Z$

$$\mathbf{F}_Z := -m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = m \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) \quad (1.8.44)$$

so erhält man Gl.(1.8.42) in der Form<sup>44</sup>

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_Z = m \mathbf{a}' . \quad (1.8.45)$$

Die Beziehung (1.8.45) stellt die gesuchte Bewegungsgleichung in einem mit  $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$  rotierenden Bezugssystem  $S'$  dar. Im Nicht-Inertialsystem treten in der dynamischen Grundgleichung  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  des Inertialsystems die Korrekturterme  $\mathbf{F}_C$  und  $\mathbf{F}_Z$  auf.

Die **d'Alembertsche** Trägheitskraft im System  $S'$  ist definiert als  $\mathbf{F}'_T := -m\mathbf{a}'$ . Durch Multiplikation von Gl.(1.8.41) mit  $(-m)$  erhält man  $-m\mathbf{a} = -m\mathbf{a}' - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$  und man erhält somit

$$\mathbf{F}_T = \mathbf{F}'_T + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_Z . \quad (1.8.46)$$

Diese Gleichung gibt die Transformation der Trägheitskräfte an, die wegen  $\mathbf{a} \neq \mathbf{a}'$  nicht invariant sind. Für den Fall der unbeschleunigten Bewegung in  $S'$  ( $\mathbf{a}' = 0$  und damit  $\mathbf{F}'_T = 0$ ) haben die Scheinkräfte  $\mathbf{F}_C$  und  $\mathbf{F}_Z$  im Inertialsystem  $S$  die Bedeutung einer Trägheitskraft:  $\mathbf{F}_T = \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_Z$ .

**Veranschaulichung der Corioliskraft am Beispiel einer rotierenden Scheibe:**

Anhand von Abb. 1.67a sollen die Coriolis- und die Zenrifugalkraft auf einer rotierenden Scheibe veranschaulicht werden. Die Corioliskraft tritt nur dann auf, wenn sich ein Körper im System  $S'$  mit endlicher Geschwindigkeit  $\mathbf{v}'$  bewegt und steht sowohl senkrecht auf  $\mathbf{v}'$  und der Drehachse  $\boldsymbol{\omega}$ . In unserem Beispiel soll  $\boldsymbol{\omega} \parallel \hat{z}$  (bzw.  $\hat{e}_3$ ) sein und die Koordinatenachsen  $\hat{z}$  und  $\hat{z}'$  sollen zusammenfallen. Die Corioliskraft liegt dann in der  $x'y'$ -Ebene. Für  $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{z}$  mit  $\omega > 0$  (Drehung gegen den Uhrzeigersinn) wird ein Körper der sich auf der Scheibe bewegt, von der Corioliskraft immer nach "rechts" abgelenkt (bei einer Drehung gegen den Uhrzeigersinn immer nach "links"). Die Begriffe rechts und links gelten dabei für einen Beobachter, der auf der Scheibe steht. Da  $\mathbf{v}' \perp \boldsymbol{\omega}$ , ergibt sich der Betrag der Corioliskraft zu  $F_C = 2mv'\omega$ , wie er schon oben anhand des einfachen Beispiels mit dem auf einem rotierenden Papier nach außen geführten Bleistifts abgeleitet wurde.

<sup>44</sup>In den Gleichungen (1.8.43) bis (1.8.45) wurden überflüssige Strichindizes nicht mitgeführt.

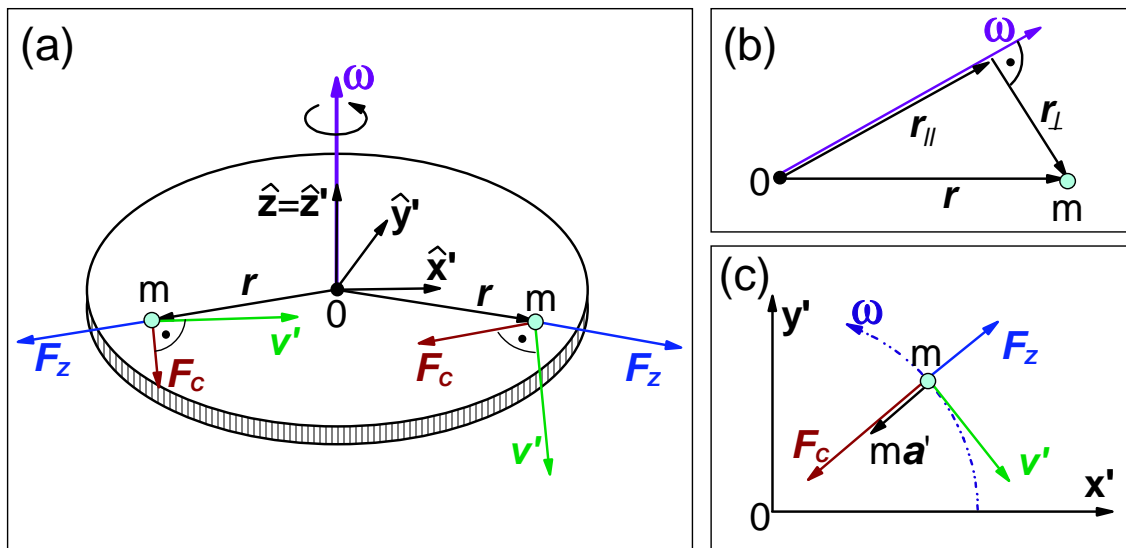


Abbildung 1.67: (a) Corioliskraft  $F_C$  und Zentrifugalkraft  $F_Z$  auf einer rotierenden Scheibe. (b) Zerlegung des Ortsvektors  $r$  in eine Komponente parallel und senkrecht zur Winkelgeschwindigkeit. (c) Ein im Inertialsystem  $S$  ruhender Massenpunkt wird vom Nicht-Inertialsystem  $S'$  aus betrachtet.

#### Veranschaulichung der Zentrifugalkraft am Beispiel einer rotierenden Scheibe:

Zur Diskussion der Zentrifugalkraft  $F_Z$  betrachten wir Abb. 1.67b. Der Ortsvektor  $r$  lässt sich immer in eine Komponente  $r_{\parallel}$  parallel und  $r_{\perp}$  senkrecht zur Drehachse zerlegen. Da  $r_{\parallel} \times \omega$  verschwindet, vereinfacht sich im Ausdruck für die Zentrifugalkraft der Term  $(r \times \omega)$  zu  $(r_{\perp} \times \omega)$  mit dem Betrag  $|r_{\perp} \times \omega| = r_{\perp} \omega$ . Da ferner  $(r_{\perp} \times \omega) \perp \omega$ , wird  $|\omega \times (r \times \omega)| = \omega^2 r_{\perp}$ . Durch wiederholte Anwendung der Rechte-Hand-Regel überzeugt man sich, daß die Richtungen der Vektoren  $\omega \times (r \times \omega)$  und  $r_{\perp}$  identisch sind. Insgesamt erhält man somit

$$F_Z = m\omega^2 r_{\perp} . \quad (1.8.47)$$

Die Zentrifugalkraft zeigt deshalb wie in Abb. 1.67a gezeigt senkrecht von der Drehachse weg radial nach außen. Im Unterschied zur Corioliskraft ist die Zentrifugalkraft auch für einen im rotierenden System  $S'$  ruhenden Körper wirksam. In der Tat bewegt sich der Körper vom Inertialsystem  $S$  aus gesehen dann gleichförmig auf einer Kreisbahn. Hierzu muß eine reale Zentripetalkraft aufgebracht werden. Der Beobachter in  $S'$  interpretiert, daß die reale Kraft von einer Scheinkraft, der Zentrifugalkraft, zu Null kompensiert werden muß, denn nur bei verschwindender Kraft wird für ihn  $a' = 0$  verständlich.

Es ist instruktiv, einen in  $S$  ruhenden Körper ( $v = 0$ ) vom Nicht-Inertialsystem  $S'$  aus zu betrachten (siehe Abb. 1.67c). Im System  $S'$  bewegt sich der Körper gleichförmig auf einer Kreisbahn mit einer Geschwindigkeit  $v' = -\omega \times r$ . Die zugehörige Normalbeschleunigung ist betragsmäßig  $a' = v'^2/r$  und auf das Drehzentrum  $O$  gerichtet, also  $a' = (-v'^2/r) \hat{r}$ . Da  $\omega \perp r$ , ist  $v' = \omega r$  und daher  $a' = -\omega^2 r \hat{r} = -\omega^2 r$ . Man kann leicht nachprüfen, daß sich das gleiche Ergebnis aus der Bewegungsgleichung in  $S'$  ergibt.

#### Die Erde als rotierendes Bezugssystem

Die Erde ist das naheliegendste Beispiel für ein rotierendes Bezugssystem. In diesem Abschnitt sollen Effekte diskutiert werden, die insbesondere durch die Corioliskraft in einem Bezugssystem hervorgerufen

werden, das an der Erdoberfläche verankert ist. Die Auswirkungen der Corioliskraft sind dabei ein von astronomischen Beobachtungen unabhängiger Beweis für die Drehung der Erde um ihre eigene Achse.

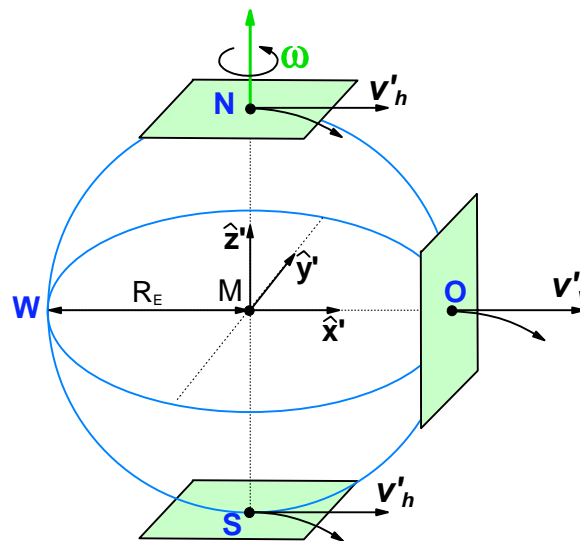


Abbildung 1.68: Zur Bahnablenkung bei der Bewegung von Körpern auf der rotierenden Erde.

In Abb. 1.68 ist die Erde mit ihrer vom Süd- zum Nordpol gerichteten Drehachse dargestellt. Die Erde dreht sich von West nach Ost. Im Laufe von  $T = 24 \text{ h} = 8,64 \times 10^4 \text{ s}$  erscheint die “mittlere” Sonne von der Erde aus in derselben Position (mittlerer Sonnentag). Die daraus berechnete Winkelgeschwindigkeit  $\omega = 2\pi/T$  ist allerdings nur ein Näherungswert. Die wahre Winkelgeschwindigkeit muß auf das Inertialsystem des Fixsternhimmels bezogen werden. Es interessiert also die Zeit  $T^*$ , die verstreicht, bis die Erde bezüglich des Fixsternhimmels wieder dieselbe Drehposition einnimmt (“mittlerer Sterntag”). Da die Erde im Laufe eines Jahres mit demselben Drehsinn wie ihre Eigenrotation einmal um die Sonne läuft, hat ein Jahr 365,25 Sonnentage und 366,25 Sterntage. Die Dauer eines mittleren Sterntages ist deshalb etwas kürzer als die eines mittleren Sonnentages und beträgt

$$T^* = \frac{365.25}{366.25} T = 8,616 \times 10^4 \text{ s} . \quad (1.8.48)$$

Damit erhält man die Winkelgeschwindigkeit der Erde zu

$$\omega = \frac{2\pi}{T^*} = 7,292 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1} . \quad (1.8.49)$$

Wie in Abb. 1.68 gezeigt ist, steht an den Polen die Drehachse der Erde senkrecht zur Horizontalebene. Wegen  $\mathbf{F}_C = 2m\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}$  führt daher nur eine Horizontalkomponente  $\mathbf{v}'_h \neq 0$  der Geschwindigkeit zu einer endlichen Corioliskraft. Am Nordpol liefert  $\mathbf{F}_C$  eine Rechtsabweichung der Bahnkurve, am Südpol dagegen eine Linksabweichung.<sup>45</sup> Vom Inertialsystem des Fixsternhimmels aus betrachtet ist die Bahnablenkung trivial: die Erde dreht sich unter der Bahn weg.

Ein bekanntes Experiment dazu ist der *Foucaultsche Pendelversuch*. Die im Inertialsystem invariante Schwingungsebene eines mathematischen Pendels dreht sich am Pol für einen irdischen Beobachter innerhalb eines Sterntages um exakt den Winkel  $\Delta\alpha = 2\pi$  (siehe hierzu Abb. 1.69), also in guter Näherung

<sup>45</sup>Man beachte hierbei, daß am Südpol der Beobachter mit den Beinen auf der Horizontalebene steht und daher in Abb. 1.68 “kopfunter” erscheint.

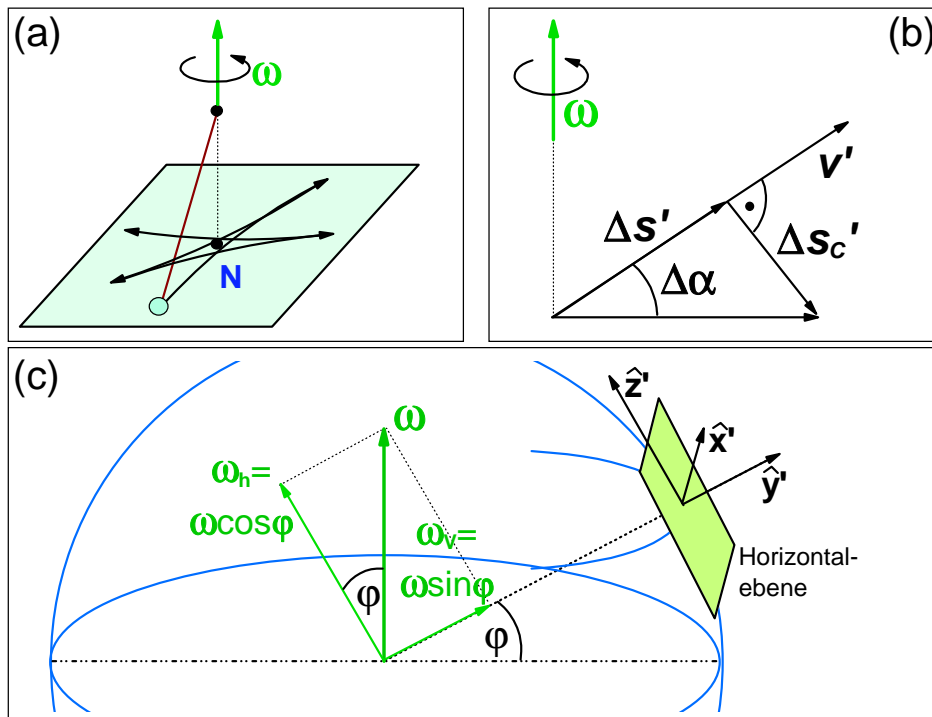


Abbildung 1.69: (a) Das Foucaultsche Pendel. (b) Zur Bahnablenkung beim Foucaultschen Pendel. (c) Zur Komponentenzersetzung der Winkelgeschwindigkeit der Erde in eine Vertikalkomponente  $\omega_v$  und eine Horizontalkomponente  $\omega_h$ .

innerhalb von 24 h um  $360^\circ$  bzw. in 1 h um  $15^\circ$ . In der Zeit  $\Delta t$  ist der Drehwinkel  $\Delta\alpha = \omega\Delta t$ . Am Äquator ist die Situation anders. Hier liegt  $\omega$  parallel zur Horizontalebene und bei einer Bewegung des Körpers in der Horizontalebene mit der Geschwindigkeit  $v'_h$  trägt nur die zu  $\omega$  senkrechte Komponente längs des Äquators (d.h. längs des Breitengrades  $\varphi = 0$ ) zur Corioliskraft  $\mathbf{F}_C = 2m\mathbf{v}' \times \omega$  bei. Für eine Bewegung von Ost nach West bzw. West nach Ost wird dadurch der Körper schwerer bzw. leichter, d.h. die effektive Schwerkraft wird größer bzw. kleiner.

**Der Foucaultsche Pendelversuch:**

Die Anregung für seinen Pendelversuch erhielt **Léon Foucault** durch einen in eine schnell rotierende Drehbank eingespannten Stahlstab. Versetzt er diesen in Schwingungen, so stellte er fest, daß die Schwingungsebene nicht mit dem Stab mitrotierte. **Foucault** erkannte, daß der vibrierende Stab und die rotierende Klemme der Drehbank einem Pendel und der rotierenden Erde entsprechen. Im Keller seines Hauses konstruierte er zunächst ein Pendel mit einem 5 kg schweren Messinggewicht an einer 2 m langen Schnur. Beim ersten Versuch am 3. Januar 1851 riß der Faden. Doch 5 Tage später hatte **Foucault** Erfolg. Die Schwingungsebene des Pendels drehte sich.

Auf Einladung **Aragos** installierte **Foucault** am Pariser Observatorium nun ein 11 m langes Pendel. Mit Unterstützung des Präsidenten der Republik, Louis-Napoléon Bonaparte wurde im Frühjahr 1851 für eine spektakuläre öffentliche Demonstration ein noch größeres Pendel (28 kg Gewicht an einem 67 m langen Stahlseil) im Pariser Panthéon installiert. Die Verlagerung der Schwingungsebene wurde durch einen Stift an der Unterseite des Gewichts markiert, der an den Umkehrpunkten einen feuchten Sandwall durchpflügte.

Das Pendel muß äußerst sorgfältig konstruiert und in Schwingung versetzt werden, da es sonst eine Rosettenbahn beschreibt. Man lenkt dazu das Pendel mit einem dünnen Faden seitlich aus und läßt es in dieser Position vollkommen zur Ruhe kommen. Dann wird der Faden vorsichtig mit einer Flamme durchtrennt.

**Der Foucaultsche Pendelversuch im Kölner Dom:**

Der Pendelversuch wurde im Jahr 1852 von Kölner Gymnasiallehrer Prof. Caspar Garthe im Kölner Dom wiederholt. Er benutzte eine 34 Pfund (17 kg) schwere Kugel, die in der Kuppel des Doms an einem 145 rheinische Fuß langen Eisendraht (Durchmesser 0.7 mm) aufgehängt war. Im Hörsaal I der Physikalischen Institute befindet sich ein Foucaultsches Pendel mit einer 35 kg schweren Stahlkugel an einem 8 m langen Stahlseil. Die Schwingungsamplitude dieses Pendels wird über einen Wirbelstromantrieb konstant gehalten.

**Der Foucaultsche Pendelversuch – Zeitdauer für vollständige Drehung der Schwingungsebene:**

Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  läßt sich in Komponenten parallel zu den Koordinatenachsen zerlegen:  $\omega = (0, \omega \sin \varphi, \omega \cos \varphi)$  (siehe hierzu Abb. 1.69c). Auf einen Massenpunkt, der sich parallel zur Erdoberfläche ( $v_y = 0$ ) bewegt, wirkt dann die Corioliskraft

$$\mathbf{F}_C = 2m \cdot \left( -\frac{dz}{dt} \omega \sin \varphi, -\frac{dx}{dt} \omega \cos \varphi, \frac{dx}{dt} \omega \sin \varphi \right) . \quad (1.8.50)$$

Interessiert man sich nur für die Kraft in der  $xy$ -Ebene (Horizontalebene, die anderen Komponenten werden durch Zwangskräfte kompensiert), dann erhält man

$$|\mathbf{F}_{C,\text{hor}}| = 2m \cdot \omega \cdot \sin \varphi \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = 2m \cdot \omega \cdot v \cdot \sin \varphi . \quad (1.8.51)$$

Entsprechend benötigt das Pendel für eine vollständige Drehung der Schwingungsebene die Zeit

$$T_\varphi = \frac{2\pi}{\omega \sin \varphi} = \frac{2\pi}{\omega \sin \varphi} . \quad (1.8.52)$$

Für Paris ( $\varphi = 48,5^\circ$ ) erhält man damit  $T_\varphi \simeq 33$  h. Für Köln ( $\varphi = 50^\circ, 55', 21''$ ) ist diese Zeit sehr ähnlich. Man erwartet eine Drehung der Schwingungsebene von etwa  $11^\circ$  pro Stunde.

**Corioliskraft beim freien Fall:**

Im windgeschützten Innern eines hohen Turmes fällt ein Körper nicht entlang eines frei hängenden Lots, denn die Turmspitze hat infolge der größeren Entfernung zum Erdmittelpunkt eine größere Umlaufgeschwindigkeit. Der fallende Körper behält diese wegen seiner Trägheit bei. Er erreicht den Boden deshalb nicht am Fußpunkt des Lots, sondern ein Stück weiter östlich. Mit der Komponentenerlegung aus Abb. 1.69 und  $\mathbf{v} = (0, -v_y, 0)$  erhält man die Corioliskraft

$$\mathbf{F}_C = -2m(\omega \cdot v_y \cdot \sin \varphi, 0, 0) . \quad (1.8.53)$$

Das heißt, man erhält nur eine Corioliskraft in  $x$ -Richtung. Der Effekt ist am Äquator am größten ( $\varphi = 0, \cos \varphi = 1$ ) und verschwindet an den Polen ( $\varphi = \pi/2, \cos \varphi = 0$ ). Ein ähnliches Phänomen wird beim senkrechten Wurf beobachtet.

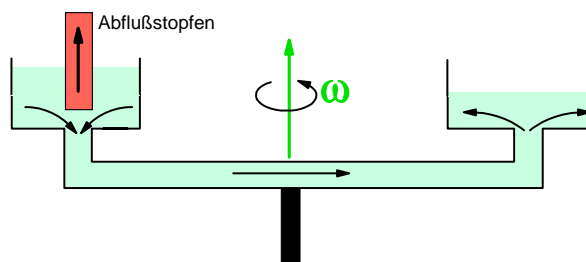


Abbildung 1.70: Zur Bildung eines Zyklon-Antizyklon-Paares durch die Corioliskraft.



**Corioliskraft – Luft- und Wasserwirbel:**

Der Einfluß der Corioliskraft macht sich auf der Nordhalbkugel (Südhalkugel) durch folgende Phänomene bemerkbar: Meeres- und Luftströmungen werden nach rechts (links) umgelenkt (z.B. Golfstrom, Passatwinde). Ferner strömt Luft aus einem Hochdruckgebiet nicht radial aus, sondern spiralförmig und zwar auf der Nordhalbkugel im (auf der Südhalkugel gegen den) Uhrzeigersinn. Aufgrund der Corioliskraft wird der rechte (auf der Südhalkugel der linke) Schienenstrang des Eisenbahnnetzes stärker abgenutzt.

Ein einfaches Experiment zum spiralförmigen Ein- und Ausströmen von Wasser oder Luft ist in Abb. 1.70 gezeigt. Der Wasserspiegel ist zunächst in beiden Behältern unterschiedlich hoch. Der Abfluß ist verschlossen. Nachdem in beiden Behältern das Wasser die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  des Experimentiertisches angenommen hat, entfernt man den Abflußstopfen. Es entstehen in beiden Behältern entgegengesetzt drehende Wirbel (Bildung von Zyklon-Antizyklon-Paar).

**1.8.3 Moderne Theorie der Gravitation****Gravitation und Relativität**

Es soll in diesem Unterabschnitt kurz auf die **Einsteinsche** Abänderung des **Newtonschen** Gravitationsgesetzes hingewiesen werden, ohne auf die Details der speziellen oder allgemeinen Relativitätstheorie einzugehen. Es wurde durch **Einstein** abgeändert, um die Relativitätstheorie zu berücksichtigen.

Nach **Newton** ist der Gravitationseffekt instantan, d.h. wenn an irgendeinem Ort eine Masse bewegt wird, spürt man instantan an einem anderen Ort die geänderte Gravitationswirkung. Auf diese Weise könnten wir Signale mit unendlich hoher Geschwindigkeit übertragen, da bei einer Bewegung von Masse 1 eine weit entfernte Masse 2 die Änderung der Gravitationskraft durch Änderung des Abstandes instantan spüren würde. **Einstein** dagegen argumentierte, daß wir keine Signale mit einer Geschwindigkeit größer als die Lichtgeschwindigkeit übermitteln können. Also kann das Gravitationsgesetz nicht richtig sein. Durch eine Korrektur zur Berücksichtigung einer endlichen Verzögerung erhält man ein neues, das **Einsteinsche** Gravitationsgesetz.

In Abschnitt 1.8.1 wurde bereits darauf hingewiesen, daß die **Newtonschen** Gesetze invariant unter einer **Lorentztransformation** werden, wenn man die Masse  $m$  in den **Newtonschen** Gleichungen durch  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$  ersetzt. Man kann für  $v \ll c$  die Wurzel in eine Potenzreihe entwickeln und erhält

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = m_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \right). \quad (1.8.54)$$

Man sieht, daß diese Reihe für  $v \ll c$  schnell konvergiert und man die höheren Glieder vernachlässigen kann. Man erhält somit

$$m \simeq m_0 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \left( \frac{1}{c^2} \right). \quad (1.8.55)$$

Da  $\frac{1}{2} m_0 v^2$  die kinetische Energie im altmodischen **Newtonschen** Sinn ist, kann man sagen, daß die Massenzunahme des Gesamtkörpers gleich der Zunahme der kinetischen Energie dividiert durch  $c^2$  ist.<sup>46</sup>

<sup>46</sup>Eine genaue Definition der kinetischen Energie erfolgt in Abschnitt 1.9.

Diese Beobachtung führte **Einstein** zu der Vermutung, daß die Masse eines Körpers einfacher als durch Gl.(1.8.10) ausgedrückt werden kann, wenn man sagt, daß die Masse  $m$  gleich dem Gesamtenergieinhalt des Körpers dividiert durch  $c^2$  ist (Äquivalenz von Masse und Energie:  $E = mc^2$ ). Multipliziert man Gl.(1.8.55) mit  $c^2$  so erhält man

$$mc^2 = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 + \dots \quad (1.8.56)$$

Hierbei stellt die linke Seite der Gleichung die Gesamtenergie eines Körpers dar und man erkennt als zweites Glied auf der rechten Seite die kinetische Energie. **Einstein** interpretierte das große konstante Glied  $m_0c^2$  als einen Teil der Gesamtenergie des Körpers, als eine innere Energie, bekannt als die *Ruheenergie*.

Als Konsequenz der **Einsteinschen** Annahme, daß die Energie eines Körpers immer gleich  $mc^2$  ist, ergibt sich, wie in folgendem kurz gezeigt werden soll, direkt Gl.(1.8.10), die ad hoc angenommen wurde, um zu erreichen, daß bei einer **Lorentz**transformation die **Newtonschen** Gesetze unverändert bleiben. Wir werden in Abschnitt 1.9 sehen, daß die zeitliche Änderung der Energie,  $dE/dt$ , gleich der Kraft mal der Geschwindigkeit  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$  ist. Mit  $F = d(mv)/dt$  erhält man dann

$$\frac{d(mc^2)}{dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \quad (1.8.57)$$

Durch Umformen erhält man

$$c^2 \frac{d(m^2)}{dt} = \frac{d(m^2v^2)}{dt} \quad (1.8.58)$$

Da die Ableitungen zweier Größen genau dann gleich sind, wenn sich die Größen selbst nur um eine Konstante  $C$  unterscheiden, erhält man

$$m^2c^2 = m^2v^2 + C \quad (1.8.59)$$

Da Gleichung (1.8.59) auch für  $v = 0$  gelten muß, folgt  $m_0^2c^2 = 0 + C$  oder  $C = m_0^2c^2$  und man erhält

$$m^2c^2 = m^2v^2 + m_0^2c^2 \quad (1.8.60)$$

Nach Division durch  $c^2$  und erneutem Umformen erhält man schließlich

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1.8.61)$$

Dies ist exakt Gl.(1.8.10), die sich also aus der von **Einstein** postulierten Äquivalenz von Masse und Energie ableiten läßt.

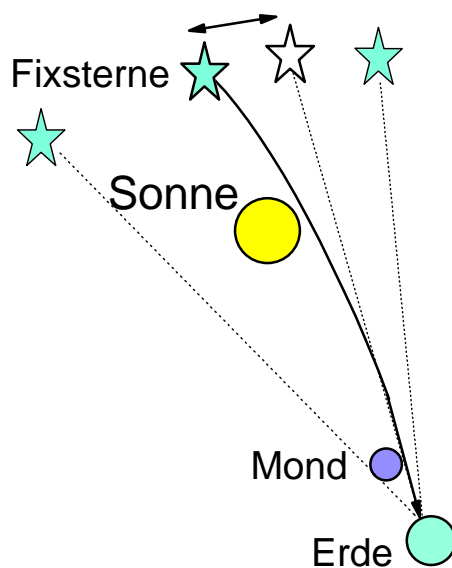


Abbildung 1.71: Zur Ablenkung von Lichtstrahlen durch große Massen.

Die in unserem Alltagsleben auftretenden Energieänderungen resultieren allerdings in extrem kleinen Massenänderungen. Selbst die bei einer Atombombenexplosion frei werdende Energie entspricht gemäß der Beziehung  $\Delta E = \Delta(m c^2)$  nur einer Massenänderung im Gramm-Bereich. Die Theorie der Äquivalenz von Masse und Energie ist sehr schön durch Experimente verifiziert, in denen Masse völlig in Energie umgewandelt wird. Stoßen z.B. ein Elektron und ein Positron mit den Ruhemassen  $m_0$  zusammen, so werden sie in zwei Gammaquanten zerstrahlt, die jeweils die Energie  $m_0 c^2$  besitzen.

In der **Einsteinschen** Relativitätstheorie hat jedes Ding, das *Energie* besitzt, eine Masse und zwar Masse in dem Sinn, daß es der Gravitationswirkung unterliegt. Selbst Licht besitzt demnach "Masse". Wenn ein Lichtstrahl deshalb eine große Masse wie z.B. unsere Sonne passiert, so erfährt er durch diese eine Anziehung. Das Licht wandert also nicht geradlinig, sondern es wird abgelenkt. Zum Beispiel erscheinen bei einer Sonnenfinsternis die hinter der Sonne am Fixsternhimmel stehenden Sterne durch die Ablenkung der die Sonne passierenden Lichtstrahlen etwas verschoben zu den Positionen, die sie besäßen, wenn die Sonne nicht da wäre (siehe Abb.1.71). Dies wurde in der Tat beobachtet. Der gravitative Effekt auf Lichtquanten kann auch beim **Möbbaauer**-Effekt im Schwerfeld der Erde beobachtet werden. Am spektakulärsten tritt der gravitative Effekt auf Lichtquanten in der Nähe von sogenannten *Schwarzen Löchern* zu Tage.<sup>47</sup> Die Schwerkraft  $F_G$  ist hier so groß, daß Licht im Schwerfeld des Schwarzen Loches gefangen bleibt und dieses für uns unsichtbar ("schwarz") bleibt.

**Einstein** hat auch aus der Äquivalenz von träger und schwerer Masse (Äquivalenzprinzip, 1911) weitreichende Folgerungen gezogen. Wegen  $m_s = m_t$  ist der Aufenthalt in einem Gravitationsfeld identisch mit dem in einem beschleunigten Bezugssystem, d.h. die Gravitationskraft ist nicht von einer Trägheitskraft unterscheidbar. Zum Beispiel verspürt eine Person in einem nach oben beschleunigten Fahrstuhl eine zusätzliche Kraft, die sie auf den Boden drückt. Die Person kann aber, wenn sie nichts von der Außenwelt weiß, nicht unterscheiden, ob diese zusätzliche Kraft aus einer Beschleunigung oder einer geänderten Schwerkraft resultiert. **Einstein** ging schließlich noch einen Schritt weiter und hat postuliert, daß die Gravitationskraft eine Trägheitskraft ist, die wir spüren, da wir das falsche Bezugssystem benutzen. Das richtige Bezugssystem wäre demnach ein gekrümmter dreidimensionaler Raum,<sup>48</sup> der nur in vier Dimensionen darstellbar ist (sogenanntes vierdimensionales Raum-Zeit-Kontinuum).

<sup>47</sup>Schwarze Löcher besitzen einen sehr kleinen Radius und eine enorme Dichte ( $\rho \sim 10^{23} \text{ kg/m}^3$ ). Die Masse unserer Sonne kann bei dieser Dichte in einer Kugel mit einem Radius von nur  $R \sim 100 \text{ m}$  untergebracht werden.

<sup>48</sup>Die Krümmung wird durch Massen verursacht.

## 1.9 Die Energie

In der Natur treten bestimmte physikalische Größen auf, die bei allen Zustandsänderungen erhalten bleiben, d.h. ihr Wert, egal ob es sich um einen Skalar oder Vektor handelt, ändert sich als Funktion der Zeit nicht. Größen, für die derartige *Erhaltungssätze* gelten, sind also zeitlich konstant und werden als *Erhaltungsgrößen* bezeichnet. Allein die Tatsache, daß es Erhaltungsgrößen gibt, ist schon interessant. Man muß also versuchen zu klären, warum und unter welchen Voraussetzungen eine physikalische Größe zu einer Erhaltungsgröße wird. Zum anderen sind Erhaltungsgrößen oft die natürlichen Variablen eines Problems, die eine Interpretation von physikalischen Vorgängen einfacher machen. Bei der Anwendung von Erhaltungssätzen auf Bewegungsabläufe (diese können wir jetzt mit Hilfe der **Newton'schen** Axiome berechnen) gewinnt man ferner Aussagen, die unabhängig von den im einzelnen wirkenden Kräften sind, d.h. die Kräfte brauchen gar nicht bekannt sein. Wir werden insgesamt sehen, daß man mit Hilfe von Erhaltungsgrößen Bewegungsabläufe häufig viel einfacher beschreiben kann.

In diesem Abschnitt soll als erste Erhaltungsgröße die *Energie* eingeführt werden. In den darauf folgenden Abschnitten werden dann *Impuls* und *Drehimpuls* als weitere Erhaltungsgrößen diskutiert.

### 1.9.1 Arbeit und Leistung

Um zu dem Energiebegriff zu gelangen, definieren wir zunächst die *Arbeit*. Aus unserer Alltagserfahrung wissen wir, daß mechanische Arbeit proportional zu Kraft und Weg ist.<sup>49</sup> Wird ein Körper unter der Wirkung einer Kraft  $F$  längs des Weges  $s$  verschoben, so wird hierbei die Arbeit  $W$  (“ $W$ ” vom Angelsächsischen “work”)

$$\begin{aligned} W &:= F s & (1.9.1) \\ \text{Arbeit} &:= \text{Kraft} \cdot \text{Weg} \end{aligned}$$

verrichtet. Diese Definition gilt allerdings nur dann, wenn (i) die Kraft längs des Weges konstant ist und (ii) die Kraft  $\mathbf{F}$  und die Verschiebung  $s$  gleichgerichtet sind. Wie Abb. 1.72 zeigt, müssen aber  $\mathbf{F}$  und  $s$  nicht unbedingt parallel sein. Mit dem Winkel  $\alpha$  zwischen Kraft  $\mathbf{F}$  und der Verschiebung  $s$  definiert man die längs des Weges verrichtete Arbeit  $W$  zu

$$W := |\mathbf{F}| |s| \cos \alpha . \quad (1.9.2)$$

Zerlegt man die Kraft, wie in Abb.1.72b gezeigt, in eine Normalkomponente  $\mathbf{F}_n$  senkrecht zu  $s$  und eine Tangentialkomponente  $\mathbf{F}_t$  parallel zu  $s$ , so gilt mit dem Einheitsvektor  $\hat{s} = s/|s|$  in  $s$ -Richtung  $\mathbf{F}_t = F_t \hat{s}$  mit  $F_t = F \cos \alpha$ . Für die Arbeit folgt daher

$$W = F_t s = F \cos \alpha s , \quad (1.9.3)$$

d.h. nur die zur Bewegungsrichtung tangentiale Kraftkomponente ist maßgebend für die geleistete Arbeit. Insbesondere erhält man

<sup>49</sup>Diese Erfahrung macht man z.B. beim Heben eines Gewichts oder beim Ziehen eines Wagens.

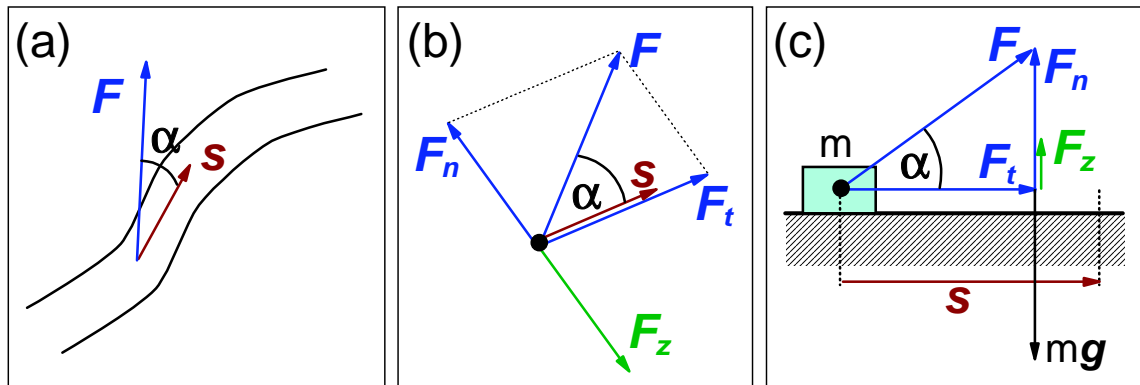


Abbildung 1.72: (a) Zur Definition der Arbeit  $W$ , die eine konstante Kraft  $\mathbf{F}$  längs des geradlinigen Wegstückes  $s$  verrichtet. (b) Zerlegung der Kraft in eine Komponente  $F_t$  tangential und eine Komponente  $F_n$  normal zum Wegstück  $s$ . Die Normalkomponente wird üblicherweise durch eine Zwangskraft  $F_z$  kompensiert. (c) Kräftezerlegung beim Ziehen eines Körpers über eine horizontale Unterlage. Die Zwangskraft der Unterlage kompensiert die verbleibende Normalkomponente  $F_n - mg$ .

$$\begin{aligned}
 W > 0 & \text{ wenn } \mathbf{F} \text{ in gleicher Richtung wie } s & (\cos \alpha > 0) \\
 W < 0 & \text{ wenn } \mathbf{F} \text{ in Gegenrichtung zu } s & (\cos \alpha < 0) .
 \end{aligned} \tag{1.9.4}$$

Dieses Ergebnis ist einleuchtend: eine die Bewegung antreibende Kraft ( $\mathbf{F} \parallel s$ ) (Beispiel: anfahrende Lokomotive) verrichtet eine positive Arbeit, während eine Bremskraft ( $\mathbf{F} \parallel -s$ ) dagegen eine “negative” Arbeit verrichtet. Für  $\mathbf{F} \perp s$  ( $\alpha = \pi/2$  und  $\cos \alpha = 0$ ) wird die verrichtete Arbeit  $W = 0$ . Beispielsweise leistet die Gravitationskraft keine Arbeit bei einer Bewegung in einer Horizontalebene parallel zur Erdoberfläche und ebensowenig die Zentripetalkraft bei einer Kreisbewegung.

Die bei der Definition der Arbeit angesetzte Verknüpfung zwischen  $\mathbf{F}$  und  $s$  tritt vielfach in der Physik auf und es ist zweckmäßig für die Produktbildung der Vektoren einen besonderen Namen, das *skalare Produkt*, und eine besondere Schreibweise

$$W = \mathbf{F} \cdot s \tag{1.9.5}$$

einzuführen.<sup>50</sup>

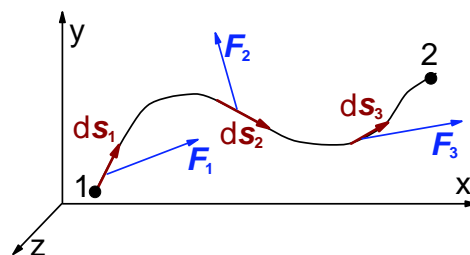


Abbildung 1.73: Zur Definition der längs des Weges von 1 nach 2 verrichteten Arbeit.

<sup>50</sup>Allgemein definiert man zu zwei Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  das skalare Produkt  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  als  $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = ab \cos \alpha$ .

Wir müssen nun den Begriff der Arbeit auf Wegelemente verallgemeinern, die nicht geradlinig verlaufen und auf Kräfte, die entlang des Weges nicht konstant sind (siehe Abb. 1.73). In diesem Fall muß man den Weg in infinitesimale Wegstücke  $ds$  unterteilen, die wiederum als geradlinig angenommen werden können und entlang derer die wirkende Kraft konstant ist. Um die gesamte Arbeit  $W_{21}$  zu erhalten, die längs des Weges zwischen zwei Punkten 1 und 2 geleistet wurde, muß über alle Beiträge  $dW_i$  auf den einzelnen Wegelementen aufsummiert werden und man erhält

$$W_{21} := dW_1 + dW_2 + dW_3 + \dots = \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{s}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{s}_2 + \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{s}_3 + \dots \quad (1.9.6)$$

bzw.

$$W_{21} := \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.9.7)$$

Man nennt ein derartiges Integral ein *Linien-* oder *Wegintegral* und entsprechend ist die Arbeit gegeben durch das Wegintegral der Kraft.<sup>51</sup> Die Indizes bei der Arbeit  $W_{21}$ , die zwischen Anfangspunkt 1 und Endpunkt 2 verrichtet wird, sind analog zum Verschiebungsvektor  $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  vom Anfangspunkt  $\mathbf{r}_1$  zum Endpunkt  $\mathbf{r}_2$  gewählt.

Man bezeichnet

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.9.8)$$

als das ‘‘Differential’’ der Arbeit. Es kann wegen  $d\mathbf{s} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}}$  in Komponenten  $dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz$  zerlegt werden. Wirken gleichzeitig mehrere Kräfte  $\mathbf{F}_a, \mathbf{F}_b, \dots$  so ergibt sich die geleistete Gesamtarbeit  $dW$  als Summe der Einzelarbeiten  $dW_a, dW_b, \dots$  und man erhält

$$dW = (\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b + \dots) \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{F}_a \cdot d\mathbf{s} + \mathbf{F}_b \cdot d\mathbf{s} + \dots = dW_a + dW_b + \dots \quad (1.9.9)$$

Man sieht ferner aus Gl.(1.9.8), daß bei einer Umkehrung des Weges mit  $d\mathbf{s}' = -d\mathbf{s}$  auch die Arbeit das Vorzeichen wechselt. Entsprechend gilt für die auf dem Weg von 1 nach 2 und von 2 nach 1 geleistete Arbeit die Beziehung

$$W_{21} = -W_{12} \quad (1.9.10)$$

Die Dimension der Arbeit ist nach obigen Gleichungen  $\dim W = \dim(\text{Kraft} \times \text{Weg})$  und für die im SI-System mit Joule bezeichnete Einheit ergibt sich

$$[W] = 1 \text{ Nm} := 1 \text{ Joule} = 1 \text{ J} \quad (1.9.11)$$

Für die Arbeit kommt es nur auf den Weg, aber nicht auf die Zeit an, in der der Weg durchlaufen wird, d.h. bei gleicher Kraft und gleichem Weg kann Arbeit in unterschiedlichen Zeiten verrichtet werden. Umgangssprachlich sagt man, es liege eine hohe Leistung vor, wenn Arbeit in kurzer Zeit verrichtet wird. In Anlehnung daran führt man in der Physik die *Leistung*  $P$  (‘‘ $P$ ’’ vom Angelsächsischen ‘‘power’’)

<sup>51</sup>Es soll hier nicht darauf eingegangen werden, wie Linienintegrale im einzelnen auszuwerten sind. Es werden später einige einfache Beispiele vorgestellt.

$$P := \frac{dW}{dt} \quad (1.9.12)$$

ein. Die Leistung ist zeitabhängig und die Momentanleistung  $P(t)$  ist durch die im Zeitintervall  $dt$  zur Zeit  $t$  verrichtete Arbeit dividiert durch das Zeitintervall  $dt$  gegeben. Die Einheit der Leistung im SI-System heißt das *Watt*. Aus Gl.(1.9.12) folgt

$$[P] = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{Joule}}{\text{s}} := 1 \text{ Watt} = 1 \text{ W} . \quad (1.9.13)$$

Ist die Leistung  $P$  als Funktion der Zeit bekannt, so kann die zwischen zwei Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_2$  verrichtete Arbeit durch eine Zeitintegration zu

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt \quad (1.9.14)$$

erhalten werden. Die Kombination der Gln.(1.9.8) und (1.9.14) führt schließlich auf  $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = P dt$  bzw. wegen  $\mathbf{v} = d\mathbf{s}/dt$  auf

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} . \quad (1.9.15)$$

## 1.9.2 Kinetische und potentielle Energie – Der Energieerhaltungssatz

### Kinetische Energie

Greift an einem Körper der Masse  $m$  die Kraft  $\mathbf{F}$  an, so wird er beschleunigt. Die von  $\mathbf{F}$  längs des Weges  $s$  geleistete Arbeit beträgt

$$\begin{aligned} dW &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = m \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{s} = m d\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} \\ &= m d\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = d \left( \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 + \frac{1}{2} m v_z^2 \right) = d \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) , \end{aligned} \quad (1.9.16)$$

wobei  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$  das Betragsquadrat der Geschwindigkeit ist. Gl.(1.9.16) gibt Anlaß zur Definition der *kinetischen Energie*  $E_{\text{kin}}$  eines Körpers mit Masse  $m$ , der sich mit der Geschwindigkeit  $v = |\mathbf{v}|$  bewegt:

$$E_{\text{kin}} := \frac{1}{2} m v^2 . \quad (1.9.17)$$

Mit dieser Definition ergibt sich aus Gl.(1.9.16)

$$dE_{\text{kin}} = dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = d \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) , \quad (1.9.18)$$

d.h. die von der Kraft  $\mathbf{F}$  an einem Körper verrichtete Arbeit  $dW$  ist gleich der Änderung der kinetischen Energie des Körpers. Für  $dW > 0$  gilt  $dE_{\text{kin}} > 0$  und umgekehrt. Da eine Zu- oder Abnahme von  $E_{\text{kin}}$  bei konstanter Masse eine Zu- oder Abnahme der Geschwindigkeit bedeutet und damit einer Beschleunigung des Körpers entspricht, nennt man  $dW$  in Gl.(1.9.18) auch die "Beschleunigungsarbeit".

Durch Summation der Beiträge  $dW$  und  $dE_{\text{kin}}$  längs des gesamten Weges vom Anfangspunkt 1 zum Endpunkt 2 folgt aus Gl.(1.9.18)

$$W_{21} = \int_1^2 dW = \int_1^2 dE_{\text{kin}} = E_{\text{kin}}(2) - E_{\text{kin}}(1) := \Delta E_{\text{kin}} \quad , \quad (1.9.19)$$

bzw.

$$W_{21} = \Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad . \quad (1.9.20)$$

Die Einheit der kinetischen Energie stimmt aufgrund der Definitionsgleichung (1.9.16) mit derjenigen der Arbeit überein. Wie die Arbeit ist auch die kinetische Energie ein Skalar.

### Kraftfeld und konservative Kräfte

Neben der kinetischen Energie kann man einem Körper unter bestimmten Voraussetzungen auch eine *potentielle Energie*  $E_{\text{pot}}$  zuordnen. Dazu müssen wir zuerst den Begriff des *Kraftfeldes*  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  diskutieren. Man sagt, es liege ein Kraftfeld vor, wenn ein Körper in jedem Raumpunkt  $\mathbf{r}$  eine wohldefinierte Kraft  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  erfährt. Ein Beispiel hierfür ist das Gravitationsfeld der Erde, das für jeden massebehafteten Körper in einer wohldefinierten Gravitationskraft resultiert. Ist das Kraftfeld so beschaffen, daß die Arbeit  $W_{21}$ , die das Feld am Körper bei einer Verrückung von 1 nach 2 verrichtet, unabhängig vom gewählten Weg ist (siehe hierzu Abb. 1.74a), dann nennt man das Kraftfeld bzw. die Kraft *konservativ*.

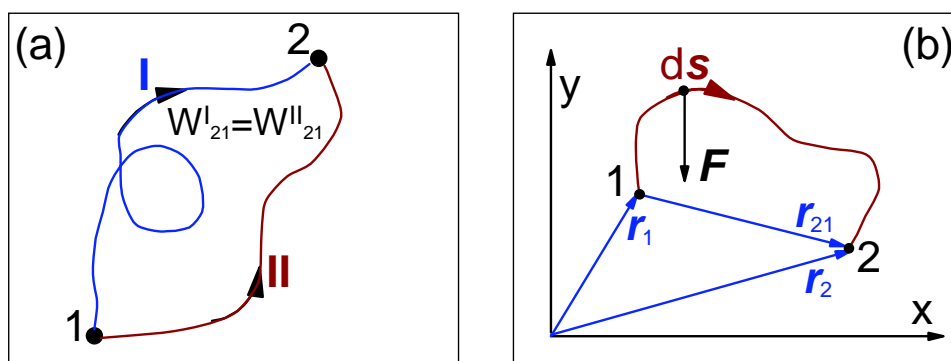


Abbildung 1.74: (a) Wegunabhängigkeit der Arbeit in einem konservativen Kraftfeld. (b) Zur Arbeit in einem konstanten Kraftfeld.

Für ein konstantes Kraftfeld  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ , wie es z.B. an einem Punkt auf der Erdoberfläche vorherrscht, läßt sich zeigen (siehe Abb. 1.74b), daß wegen  $\mathbf{r}_1 + \int_1^2 d\mathbf{s} = \mathbf{r}_2$

$$W_{21} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{F} \cdot \int_1^2 d\mathbf{s} = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_{21} \quad (1.9.21)$$



gilt. Die Arbeit hängt also nur von der Kraft und dem Verschiebungsvektor ab, dagegen aber nicht vom eingeschlagenen Weg.

Ein allgemeineres Kriterium für die Wegunabhängigkeit der Arbeit und damit für ein konservatives Kraftfeld gewinnt man, wenn man auf demselben Weg I von 1 nach 2 und dann wieder von 2 zurück nach 1 läuft (siehe Abb. 1.75a). Nach Gl.(1.9.10) gilt dann

$$W_{21}^I = -W_{12}^I . \quad (1.9.22)$$

Setzt man ein konservatives Kraftfeld an, so ist nach Definition für die Wege I und II

$$W_{21}^I = W_{21}^{II} \quad \text{bzw.} \quad W_{12}^I = W_{12}^{II} . \quad (1.9.23)$$

Damit wird aber für den geschlossenen Weg die insgesamt vom Kraftfeld verrichtete Arbeit  $W_O = W_{21}^I + W_{12}^{II} = -W_{12}^I + W_{12}^I = 0$ . Ebenso zeigt man umgekehrt, daß  $W_{21}^I = W_{21}^{II}$  aus  $W_O = 0$  folgt. Ein konservatives Kraftfeld liegt also genau dann vor, wenn die geleistete Arbeit  $W_O = 0$  entlang eines geschlossenen Weges verschwindet.<sup>52</sup>

$$W_O = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0 . \quad (1.9.24)$$

Wir können also insgesamt folgendes festhalten:

Bei einem konservativen Kraftfeld verschwindet die Arbeit bei der Verschiebung eines Körpers längs eines geschlossenen Weges.

Ein Beispiel für ein eindimensionales konservatives Kraftfeld ist die Federkraft, für ein dreidimensionales das Schwerkraftfeld der Erde.

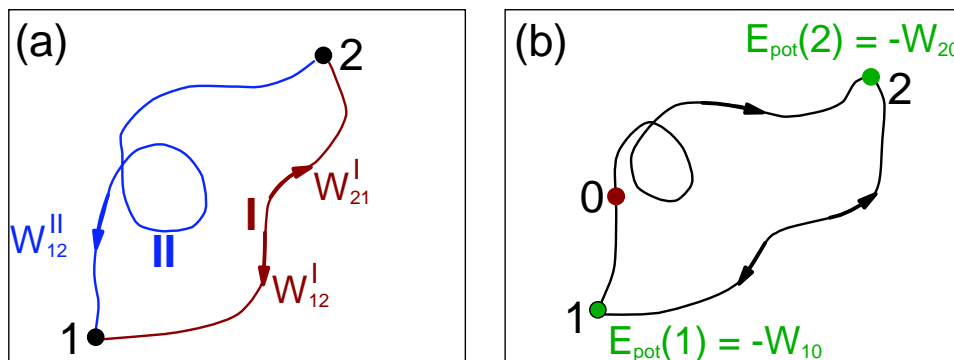


Abbildung 1.75: (a) Zur Wegunabhängigkeit des Arbeitsintegrals. (b) Definition der potentiellen Energie.

<sup>52</sup>Hierbei bedeutet  $\oint$  eine Integration über einen geschlossenen Pfad.

### Potentielle Energie

Wir nehmen im folgenden ein konservatives Kraftfeld als gegeben hin und nutzen die Eigenschaft dieses Feldes aus, daß die bei der Verschiebung eines Körpers verrichtete Arbeit nicht vom speziellen Weg, sondern nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängt. Daher ist es in einem konservativen Kraftfeld möglich, jedem Raumpunkt  $P$  eine Zahl zuzuordnen, die die Arbeit  $W_P$  angibt, die von dem Kraftfeld bei einer Verrückung des Körpers vom Ausgangspunkt  $P$  in einen beliebigen aber festen Endpunkt  $O$  geleistet werden mußte. Diese Arbeit definiert man als die *potentielle Energie* des Körpers im Raumpunkt  $P$ . Der Raumpunkt  $O$  heißt Bezugspunkt der potentiellen Energie. In Formeln ergibt sich

$$E_{\text{pot}} := W_P = \int_P^O \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} . \quad (1.9.25)$$

Es ist allerdings zweckmäßiger, den festen Bezugspunkt  $O$  nicht als Endpunkt, sondern als Anfangspunkt zu wählen. Mit Gl.(1.9.10) und (1.9.25) ergibt sich dann

$$E_{\text{pot}}(P) := W_P = - \int_0^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} . \quad (1.9.26)$$

Nach dieser Gleichung verschwindet die potentielle Energie im Bezugspunkt  $O$ :  $E_{\text{pot}}(O) = 0$ .

Bei einem festen Bezugspunkt  $O$  ist für ein vorgegebenes konservatives Kraftfeld die potentielle Energie eine wohldefinierte Funktion der Raumkoordinate  $\mathbf{r}$ . Da die potentielle Energie also nur von der Lage im Raum abhängt, bezeichnet man sie auch als "Lageenergie", um sie von der kinetischen Energie abzuheben. *Physikalisch relevant ist nur die Differenz der potentiellen Energie zu der bei einem Bezugspunkt, da diese die meßbare Größe ist.* Deshalb kann der Bezugspunkt der potentiellen Energie willkürlich und damit zweckmäßig gewählt werden.

Die Differenz der potentiellen Energie in zwei Raumpunkten 1 und 2 läßt sich leicht berechnen (siehe Abb. 1.75b). Unter Berücksichtigung der Wegunabhängigkeit des Integrals erhält man

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{pot}} &= E_{\text{pot}}(2) - E_{\text{pot}}(1) = - \int_O^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_O^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_O^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_O^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \\ &= - \int_1^O \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_O^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -W_{21} . \end{aligned} \quad (1.9.27)$$

bzw. kurz

$$\Delta E_{\text{pot}} = E_{\text{pot}}(2) - E_{\text{pot}}(1) = -W_{21} . \quad (1.9.28)$$

Eine von dem Kraftfeld bei der Verschiebung von 1 nach 2 geleistete Arbeit ist damit gleich der Abnahme der potentiellen Energie des Körpers. Differentiell erhält man wegen

$$\Delta E_{\text{pot}} = -W_{21} = - \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.9.29)$$

schließlich

$$dE_{\text{pot}} = -dW = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad . \quad (1.9.30)$$

Wir verwenden den Begriff potentielle Energie nun dazu, die Arbeit anzugeben, die externe Kräfte  $\mathbf{F}^*$  aufbringen müssen, um einen Körper in einem konservativen Kraftfeld zu verrücken. Da die äußere Kraft, ohne den Körper zu beschleunigen und damit kinetische Energie einzubringen, mindestens die Kraft  $\mathbf{F}$  des gegebenen Kraftfeldes überwinden muß, ist  $\mathbf{F}^* = -\mathbf{F}$  und man erhält für die Arbeit  $W_{21}^*$  des äußeren Feldes

$$W_{21}^* = \int_1^2 \mathbf{F}^* \cdot d\mathbf{s} = - \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -W_{21} \quad (1.9.31)$$

und damit mit Gl.(1.9.28)

$$W_{21}^* = \Delta E_{\text{pot}} \quad (\text{für } \mathbf{F}^* = -\mathbf{F}) \quad , \quad (1.9.32)$$

bzw. differentiell

$$dW^* = dE_{\text{pot}} = \mathbf{F}^* \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{für } \mathbf{F}^* = -\mathbf{F}) \quad . \quad (1.9.33)$$

Eine von außen gegen das Kraftfeld aufgebrauchte Arbeit  $W_{21}^* > 0$  findet sich also als Zunahme der potentiellen Energie  $dE_{\text{pot}} > 0$  wieder. Die potentielle Energie ist demnach als "Arbeitsspeicher" anzusehen, die nach Wegnahme der äußeren Kompensationskraft wieder als Arbeitsleistung des Kraftfeldes verfügbar ist. Die Dimension der potentiellen Energie ist

$$[E_{\text{pot}}] = 1 \text{ Joule} = 1 \text{ J} \quad . \quad (1.9.34)$$

### Energieerhaltungssatz

Mit den bis jetzt gemachten Definitionen für die kinetische und die potentielle Energie kann man den *Energieerhaltungssatz* für konservative Kräfte ableiten. Nach Gln.(1.9.18) und (1.9.30) ist

$$dW = dE_{\text{kin}} = -dE_{\text{pot}} \quad (1.9.35)$$

bzw.

$$dE_{\text{kin}} + dE_{\text{pot}} = d(E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}) = 0 \quad , \quad (1.9.36)$$

d.h. die zeitliche Änderung der Summe aus kinetischer und potentieller Energie verschwindet. Definiert man die *Gesamtenergie*  $E_{\text{tot}}$  eines Körpers als

$$E_{\text{tot}} := E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} , \quad (1.9.37)$$

so lautet der *Energieerhaltungssatz für konservative Kräfte*  $dE_{\text{tot}} = 0$ , bzw.<sup>53</sup>

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{const} . \quad (1.9.38)$$

Der Satz von der Erhaltung der Gesamtenergie in einem konservativen Kraftfeld ist von fundamentaler Bedeutung. Das System “Körper im Kraftfeld” nennt man ein *abgeschlossenes System*, wenn für den Körper nur die systemeigenen “inneren” Kräfte des vorgegebene Kraftfeldes wirksam sind und keine zusätzlichen äußeren Kräfte  $\mathbf{F}^*$  einwirken. Für abgeschlossene Systeme besagt der Energiesatz, daß zwar potentielle in kinetische Energie und umgekehrt umgewandelt werden kann, die Summe aus beiden Energien aber konstant bleibt. Die aus dem Vorrat an potentieller Energie in kinetische Energie umgewandelte Energie ist dabei gemäß Gl.(1.9.20) und (1.9.32) gerade die verrichtete Arbeit  $W_{21} = \Delta E_{\text{kin}} = -\Delta E_{\text{pot}}$ . Es gibt keine experimentellen Erfahrungen, die dem Prinzip der Energieerhaltung widersprechen.<sup>54</sup>

Der Energieinhalt eines Systems kann nur durch äußere Kräfte  $\mathbf{F}^*$  verändert werden, die für  $\mathbf{F}^* = -\mathbf{F}$  keine Beschleunigung verursachen und somit nur die potentielle Energie ändern. In diesem allgemeinen Fall ist die Arbeit  $W_{21}^*$  der äußeren Kraft gegeben durch

$$W_{21}^* = \Delta E_{\text{tot}} = \Delta E_{\text{kin}} + \Delta E_{\text{pot}} . \quad (1.9.39)$$

### Nichtkonservative Kräfte

Streng genommen darf es nichtkonservative Kräfte nicht geben, da alle Elementarkräfte in der Natur konservative Kräfte sind und alle Kräfte auf diese zurückgeführt werden können. Man bezeichnet trotzdem Kräfte, die die Bedingung  $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$  verletzen, als nichtkonservativ. Ein Beispiel hierfür ist die Reibungskraft  $\mathbf{F}_{\mathbf{R}}$ . Zu jedem Wegelement  $d\mathbf{s}$  ist die Reibungskraft  $\mathbf{F}_{\mathbf{R}}$  antiparallel ausgerichtet, d.h. das Wegintegral dieser Kraft über einen geschlossenen Weg kann nicht verschwinden. Die Frage lautet jetzt: Gilt der Energiesatz auch dann, wenn solche nichtkonservative Kräfte im Spiel sind? Zur Beantwortung dieser Frage kann geltend gemacht werden, daß die vier fundamentalen Kräfte, auf die alle anderen Kräfte in der Natur zurückgeführt werden können, alle konservativ sind.<sup>55</sup>

Das heißt, die Gültigkeit des Energieerhaltungssatzes ist gesichert. Allerdings ist bei nichtkonservativen Kräften der Energiesatz nicht in der Form  $E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{const}$  aufrechtzuerhalten, da man für nichtkonservative Kräfte nach Durchlaufen eines geschlossenen Weges nicht mehr zum ursprünglichen Ausgangszustand zurückkehrt. So erwärmt sich z.B. bei der viskosen Reibung eines in einem zähen Medium bewegten Körpers (siehe Abb. 1.76) das Medium, d.h. nach Durchlaufen eines geschlossenen Weges hat sich der mikroskopische Bewegungszustand der Partikel des zähen Mediums geändert. Die mit der Wärmebewegung der Partikel verknüpfte Energie  $Q$  muß im Energiesatz berücksichtigt werden und man erhält

<sup>53</sup>Vielfach wird die Gesamtenergie eines Körpers mit  $E$ , die kinetische Energie mit  $T$  und die potentielle Energie mit  $V$  bezeichnet, so daß sich der Energieerhaltungssatz  $E = T + V = \text{const}$  schreibt.

<sup>54</sup>Lediglich in der Quantenmechanik kann für endliche Zeitintervalle  $\Delta t$  der Energiesatz um  $\Delta E$  aufgrund der **Heisenbergschen** Unschärferelation  $\Delta E \Delta t \geq \hbar$  verletzt sein. Im Zeitmittel gilt aber auch hier der Energieerhaltungssatz.

<sup>55</sup>Da alle Kräfte auf die fundamentalen, konservativen Kräfte zurückgeführt werden können, ist es deshalb streng genommen nicht sinnvoll, von “nichtkonservativen” Kräften zu reden.

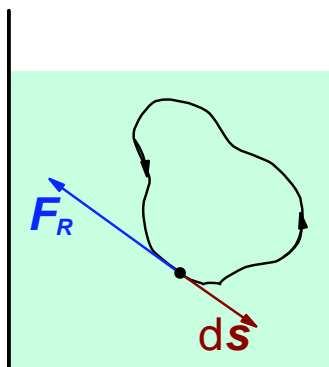


Abbildung 1.76: Die Reibungskraft als Beispiel für eine nichtkonservative Kraft. Eine Kugel wird durch ein viskoses Medium bewegt.

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} + Q = \text{const} . \quad (1.9.40)$$

Dies ist der Energiesatz in einem abgeschlossenen System mit nichtkonservativen Kräften.<sup>56</sup>

### Kraft als Gradient der potentiellen Energie

In diesem Abschnitt soll überlegt werden, inwieweit die Vorgabe einer Kraft bzw. einer potentiellen Energie in jedem Raumpunkt  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  zwei zueinander äquivalente Beschreibungsweisen sind. In Gln.(1.9.25) und (1.9.26) wurde beschrieben, wie aus einem vorgegebenen Kraftfeld die potentielle Energie berechnet werden kann. Es soll nun überlegt werden, wie umgekehrt bei bekannter potentieller Energie  $E_{\text{pot}}(x, y, z)$  das zugehörige Kraftfeld  $\mathbf{F}(x, y, z)$  berechnet werden kann. Mit  $dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz$  und  $dW = -dE_{\text{pot}}$  folgt

$$dE_{\text{pot}} = -F_x dx - F_y dy - F_z dz . \quad (1.9.41)$$

Andererseits läßt sich für infinitesimale Verrückungen  $d\mathbf{s} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}}$  die Änderung der potentiellen Energie  $dE_{\text{pot}}(x, y, z) = E_{\text{pot}}(x + dx, y + dy, z + dz) - E_{\text{pot}}(x, y, z)$  schreiben als<sup>57</sup>

$$dE_{\text{pot}}(x, y, z) = \frac{\partial E_{\text{pot}}(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial E_{\text{pot}}(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial E_{\text{pot}}(x, y, z)}{\partial z} dz . \quad (1.9.42)$$

Durch Koeffizientenvergleich der beiden letzten Gleichungen erhält man dann

$$F_x = -\frac{\partial E_{\text{pot}}(x, y, z)}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_{\text{pot}}(x, y, z)}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_{\text{pot}}(x, y, z)}{\partial z} . \quad (1.9.43)$$

<sup>56</sup>Es sei hier angemerkt, daß die Wärmemenge  $Q$  natürlich auch als zusätzliche kinetische Energie der Partikel des zähen Mediums aufgrund der erhöhten Temperatur ausgedrückt werden kann. Dies wäre aber sehr kompliziert, da man dann den Bewegungszustand von sehr vielen Teilchen kennen müßte. Man sagt deshalb, daß die verlorene kinetische und potentielle Energie in eine Wärmeenergie übergegangen ist.

<sup>57</sup>Die geschweiften Differentialsymbole bringen dabei zum Ausdruck, daß z.B. in  $\partial E_{\text{pot}}(x, y, z)/\partial x$  bei konstant gehaltenen Variablen  $y$  und  $z$  nach  $x$  differenziert wird.

Diese drei Komponentengleichungen lassen sich in der Vektorgleichung<sup>58</sup>

$$\mathbf{F} = -\text{grad}E_{\text{pot}} = \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \quad (1.9.44)$$

zusammenfassen. Da die Komponentendarstellung der Kraft  $\mathbf{F} = F_x\hat{\mathbf{x}} + F_y\hat{\mathbf{y}} + F_z\hat{\mathbf{z}}$  ist, stimmen die Komponenten aus Gl.(1.9.44) mit den physikalisch hergeleiteten Gln.(1.9.43) überein, d.h. Gl.(1.9.44) ist tatsächlich eine kompakte Schreibweise der Gl.(1.9.43).

Die Gleichung  $\mathbf{F} = -\text{grad}E_{\text{pot}}$  zeigt, daß *konservative Kräfte als Gradientenfelder der potentiellen Energie darstellbar sind*. Zur Charakterisierung von Wechselwirkungen zwischen Körpern ist es daher nicht notwendig, die Wechselwirkungskraft anzugeben, es genügt, allein die potentielle Energie des Zweikörper-Systems in Abhängigkeit von der relativen Lage zu kennen. Da die Kraft ein Vektor ist, die Energie dagegen ein Skalar, wird die Wechselwirkung zwischen Teilchen einfacher und durchsichtiger mit einer Wechselwirkungsenergie statt einer Wechselwirkungskraft beschrieben.

### Potentialextrema und Kräftegleichgewicht

Im Kräftegleichgewicht gilt

$$\mathbf{F}_{\text{ges}} = \sum_i \mathbf{F}_i = 0 \quad (1.9.45)$$

Mit Gl.(1.9.44) folgt dann (im eindimensionalen Fall)

$$F_x = -\frac{\partial E_{\text{pot}}(x)}{\partial x} = 0 \quad (1.9.46)$$

d.h. die potentielle Energie besitzt ein Extremum. Je nach Art des Extremums spricht man von *stabilem* ( $\partial^2 E_{\text{pot}}(x)/\partial x^2 > 0$ ), *indifferentem* ( $\partial^2 E_{\text{pot}}(x)/\partial x^2 = 0$ ) oder *labilem Gleichgewicht* ( $\partial^2 E_{\text{pot}}(x)/\partial x^2 < 0$ ). Stabiles Gleichgewicht liegt bei einem Minimum, labiles bei einem Maximum der potentiellen Energie vor.

### Andere Energieformen

Wir haben bisher hauptsächlich die Energie von mechanischen Systemen (kinetische Energie und potentielle Energie in Form von Hubarbeit, Spannarbeit etc.) diskutiert. Das Konzept der potentiellen Energie kann aber auch auf elektromagnetische Kräfte, auf molekulare Kräfte, die in der Chemie eine wichtige Rolle spielen, oder auf Kernkräfte, die in der Kernphysik zentral sind, übertragen werden. So kann z.B. die potentielle Energie für die Wechselwirkung zweier Atome oder zweier Nukleonen (Proton, Neutron) in einem Atomkern als Funktion ihres Abstandes angegeben werden. Die in chemischen Bindungen oder in einem System wechselwirkender Nukleonen (Atomkern) gespeicherte potentielle Energie kann durch bestimmte Prozesse (z.B. Verbrennen von Benzin, Spalten von Atomkernen) in andere Energieformen wie z.B. kinetische Energie umgewandelt werden. Hierbei bleibt die Summe aller verschiedenen Energieformen (kinetische, chemische, nukleare, molekulare, thermische Energie) immer konstant.

<sup>58</sup>Hierbei bedeutet das Symbol "grad" (Gradient) einen Vektoroperator, der angewandt auf eine differenzierbare skalare Funktion  $f(x, y, z)$  einen Vektor  $\text{grad}f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$  liefert.

Es sei an dieser Stelle auch darauf hingewiesen, daß für die Energieversorgung auf unserer Erde aufgrund des Energieerhaltungssatzes im Prinzip kein Energiemangel herrscht.<sup>59</sup> Die durch die elektromagnetische Strahlung der Sonne auf die Erde eingestrahlte Energie entspricht der von der Erde wieder abgestrahlten Energie. Durch Veränderung unserer Atmosphäre (Treibhauseffekt) stellen wir nur das Gleichgewicht auf einem anderen Niveau ein. Das Problem ist also nicht, daß wir zu wenig Energie haben, sondern daß wir Energie nicht in der richtigen Form haben, in der wir sie benötigen. In diesem Zusammenhang kann man eine Energiewertigkeit einführen, indem man die Fähigkeit, aus Energie mechanische Arbeit zu gewinnen, berücksichtigt. Wir werden bei der Diskussion der Wärmelehre sehen, daß eine Zunahme der Entropie gleichbedeutend mit einer Abnahme der Energiewertigkeit ist. Insofern haben wir auf unserer Erde kein Energie- sondern eher ein Entropieproblem.

### 1.9.3 Beispiele zur potentiellen Energie und Energieerhaltungssatz

#### Konstantes Gravitationsfeld

Auf der Erdoberfläche kann das Gravitationsfeld in guter Näherung als konstant angenommen werden, d.h.  $\mathbf{F} = m \mathbf{g} = \text{const.}$  Wählt man als Bezugspunkt für die potentielle Energie die Erdoberfläche, so erhält man für die potentielle Energie eines Körpers der Masse  $m$ , der sich in einer Höhe  $h$  über der Erdoberfläche befindet, die potentielle Energie

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}}(h) &= - \int_0^h \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_0^h F ds \cos(\mathbf{F}, d\mathbf{s}) \\ &= - \int_0^h mg ds (-1) = mg \int_0^h ds \quad , \end{aligned} \quad (1.9.47)$$

wobei  $\mathbf{F} \parallel -d\mathbf{s}$  angenommen wurde. Man erhält also

$$E_{\text{pot}}(h) = mgh \quad . \quad (1.9.48)$$

Die potentielle Energie eines der Schwerkraft ausgesetzten Körpers nimmt also linear mit der Höhe  $h$  über der Erdoberfläche zu. Man erhält dieses Ergebnis unabhängig davon, auf welchem Weg man die Höhe  $h$  über der Erdoberfläche erreicht (siehe hierzu Abb. 1.77), d.h. die potentielle Energie hängt nur von der Höhe  $h$  und nicht dem gewählten Weg ab. Man kann aus dieser potentiellen Energie nun auch wieder rückwärts die Schwerkraft berechnen. Mit  $h = z$  ist  $E_{\text{pot}}(z) = mgz$  und man erhält  $F_z = -dE_{\text{pot}}/dz = -mg$ .

Die Beziehung (1.9.48) hat zusammen mit dem Energiesatz vielfache Anwendungsmöglichkeiten. So ist z.B. beim freien Fall eines Körpers zu Beginn  $v = 0$  und damit  $E_{\text{kin}}(1) = 0$  und  $E_{\text{tot}}(1) = E_{\text{pot}}(1) = mgh$ . Bei der Ankunft am Erdboden ist dagegen  $E_{\text{pot}}(2) = 0$  und  $E_{\text{tot}}(2) = \frac{1}{2}mv^2$ . Die Energieerhaltung verlangt  $E_{\text{tot}}(1) = E_{\text{tot}}(2)$  und damit  $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$  oder

$$v = \sqrt{2gh} \quad (1.9.49)$$

in Übereinstimmung mit Gl.(1.6.7). In den Zwischenlagen  $0 < z < h$  trägt zur Gesamtenergie sowohl potentielle als auch kinetische Energie bei, aber immer so, daß  $E_{\text{tot}} = \text{const.}$

<sup>59</sup>Aufgrund des Energieerhaltungssatzes kann man Energie nicht verbrauchen, man kann sie nur aus der einen Form in eine andere Form umwandeln, wobei die Gesamtenergie erhalten bleibt.

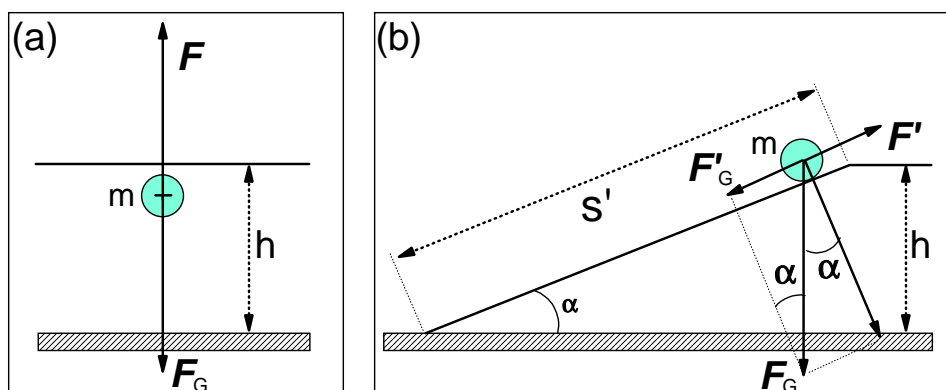


Abbildung 1.77: Zur Unabhängigkeit der Hubarbeit vom gewählten Weg. In (a) ist  $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = mgh$ . In (b) ist  $W = \mathbf{F}' \cdot \mathbf{s}' = (mg \sin \alpha) \cdot (h / \sin \alpha) = mgh$ .

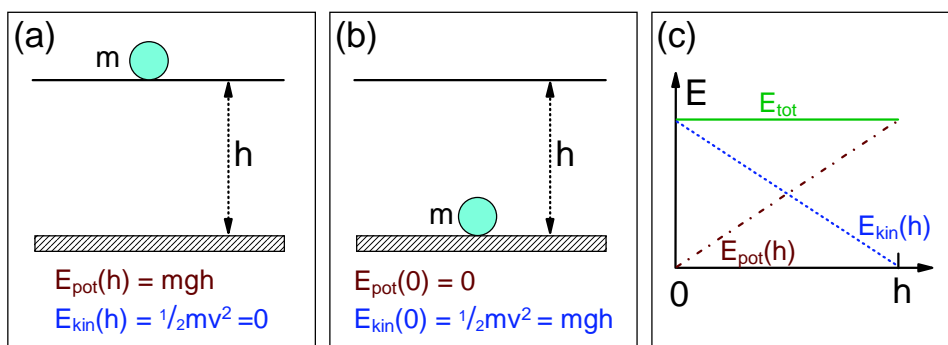


Abbildung 1.78: Potentielle und kinetische Energie beim Springen einer Stahlkugel auf einer elastischen Unterlage.

Ist die Unterlage derartig beschaffen, daß beim Auftreffen des Körpers nur konservative Kräfte wirken (hier elastische Kräfte), d.h. daß keine Energie in Form von Wärmeenergie “verloren” wird, so wird der Körper reflektiert und kann wieder bis zur vollen Höhe  $h$  aufsteigen. Dabei wird dann kinetische Energie wieder in potentielle Energie umgewandelt.<sup>60</sup> Eine Stahlkugel, die auf eine Stahlplatte fällt, springt periodisch zwischen den Höhen 0 und  $h$  auf und ab, wobei ständig kinetische in potentielle Energie und umgekehrt umgewandelt wird. Es gilt hierbei  $E_{\text{pot}}(h) = mgh$  und  $E_{\text{kin}}(h) = 0$  sowie  $E_{\text{pot}}(0) = 0$  und  $E_{\text{kin}}(0) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(gt)^2 = mg(\frac{1}{2}gt^2) = mgh$ . Der Verlauf der potentiellen und kinetischen Energie ist in Abb. 1.78 gezeigt.

Bei der Schwingung eines mathematischen Pendels wechselt die Energie ebenfalls ständig zwischen potentieller und kinetischer Energie hin und her. Mit einer ähnlichen Argumentation wie beim freien Fall ist bei einer Anfangsauslenkung  $\varphi_0$  bzw. einer Hebung der Pendelmasse  $m$  auf die Höhe  $h$  die Geschwindigkeit beim Nulldurchgang durch  $v = \sqrt{2gh}$  gegeben. Diese Beziehung gilt auch für große Auslenkungswinkel, für die die harmonische Näherung für die Schwingungsform nicht mehr gültig ist. Die Einhaltung des Energieerhaltungssatzes beim mathematischen Pendel läßt sich auch schön anhand eines Fangpendels demonstrieren, bei dem ab einem bestimmten Auslenkungswinkel die Pendellänge verkürzt wird (siehe hierzu Abb. 1.79). Die Pendelmasse steigt auch in diesem Fall exakt auf die gleich Höhe  $h$ , da die potentielle Energie nur von der Höhe  $h$  aber nicht von dem genauen Weg, wie die Masse auf diese Höhe gelangt, abhängt.

<sup>60</sup>Streng genommen müßte man hier zeigen, daß beim Aufprall keine kinetische Energie auf die Erde übertragen wird. Wir werden in Abschnitt 1.10 sehen, daß dies in der Tat der Fall ist.



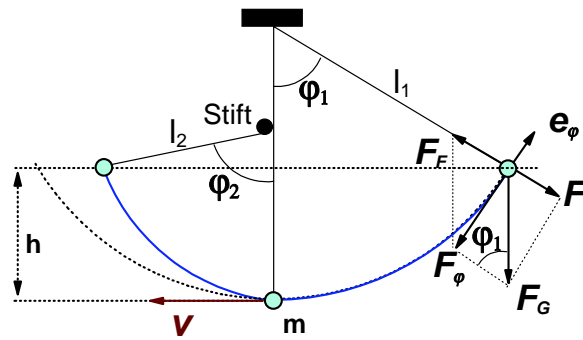


Abbildung 1.79: Zur Energieerhaltung beim Fangpendel.

### Das Gravitationspotential

Ein Körper der Masse  $m$  erfährt im Abstand  $r$  von einem zweiten Körper der Masse  $M$  die Gravitationskraft  $\mathbf{F}_G = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$ , die auf den Körper  $M$  gerichtet ist (siehe Abb. 1.80). Die Masse  $M$  baut somit ein radiales, kugelsymmetrisches Gravitationsfeld auf. Kräfte, die alle auf einen festen Punkt hin bzw. von einem Punkt weg gerichtet sind, nennt man *Zentralkräfte*. Zentralkräfte, die zudem nur vom Abstand zum Zentrum, nicht aber von der Raumrichtung abhängen, sind zudem konservativ. Dies wird sofort aus Abb. 1.80a klar, wenn man die Arbeitsbeiträge entlang des Weges  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$  betrachtet. Die Beiträge der Wegstücke von  $A \rightarrow B$  und von  $C \rightarrow D$  kompensieren sich gerade, da hier  $\mathbf{F}_G \parallel ds$  bzw.  $\mathbf{F}_G \perp ds$  und die Kraft nur von  $r$  abhängt. Die Beiträge der Wegelemente von  $B \rightarrow C$  und von  $D \rightarrow A$  verschwinden, da hier  $\mathbf{F}_G \perp ds$ . Insgesamt verschwindet also die Arbeit,  $\oint \mathbf{F}_G \cdot ds = 0$ , für den speziell gewählten in sich geschlossenen Weg. Da man jeden beliebigen Weg immer aus infinitesimalen radialen Wegelementen und Kreisbogenelementen aufbauen kann, folgt, daß die Arbeit für jeden geschlossenen Weg verschwindet und damit die Gravitationskraft eine konservative Kraft darstellt.

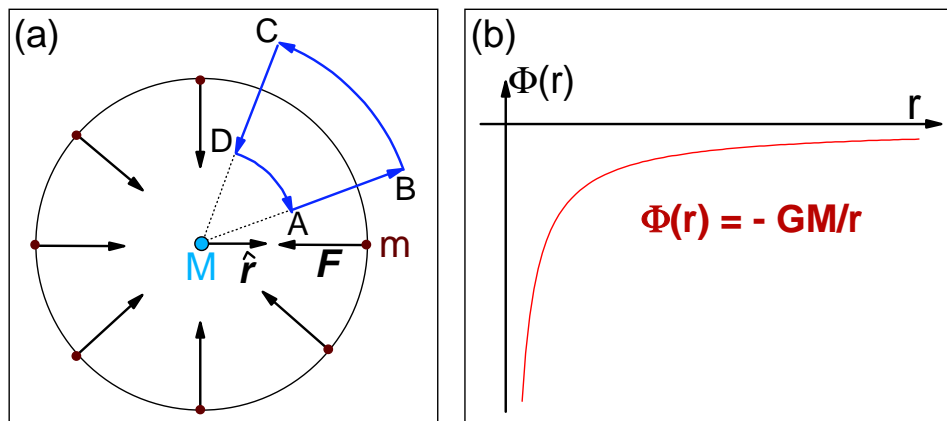


Abbildung 1.80: (a) Zentralkräfte mit Kugelsymmetrie sind konservativ. (b) Das Gravitationspotential  $\Phi(r) = -GM/r$ .

Die potentielle Energie der Gravitationskraft ergibt sich zu

$$E_{\text{pot}}(r) = \int_r^\infty \mathbf{F} \cdot ds = - \int_r^\infty G \frac{Mm}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot ds \quad (1.9.50)$$

Integriert man längs eines Radiusstrahls, so ist  $\hat{\mathbf{r}} \parallel ds$  und es ist  $\hat{\mathbf{r}} \cdot ds = dr$ . Damit ergibt sich

$$E_{\text{pot}}(r) = - \int_r^\infty G \frac{Mm}{r^2} dr \quad (1.9.51)$$

bzw.

$$E_{\text{pot}}(r) = -G \frac{Mm}{r} . \quad (1.9.52)$$

Die letzte Gleichung zeigt, daß die Wahl des Bezugspunktes zweckmäßig war, da die potentielle Energie der Gravitationswechselwirkung für zwei unendlich weit voneinander entfernte Körper verschwindet. Bewegt sich der Körper mit Masse  $M$  mit der Geschwindigkeit  $V$  und der Körper mit Masse  $m$  mit Geschwindigkeit  $v$ , so ergibt sich die Gesamtenergie

$$E_{\text{tot}}(r) = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{Mm}{r} . \quad (1.9.53)$$

Da die potentielle Energie nach Gl.(1.9.52) linear von der Probenmasse  $m$  abhängt, führt man das *Gravitationspotential*  $\Phi(r)$  in der Form

$$E_{\text{pot}}(r) := m\Phi(r) \quad (1.9.54)$$

mit

$$\boxed{\Phi(r) := -G \frac{M}{r} \quad (1.9.55)}$$

ein. Das Potential  $\Phi(r)$  hängt nur von der Masse  $M$  des Zentralkörpers und dem Abstand  $r$  eines Probekörpers ab. Der Funktionsverlauf von  $\Phi(r)$  ist in Abb. 1.80b gezeigt. Die Äquipotentialflächen sind konzentrische Kugelflächen um  $M$  als Mittelpunkt.<sup>61</sup>

Die Einführung des Gravitationspotentials bringt den Vorteil, daß bei Anwesenheit mehrerer Massen  $M_1, M_2, \dots$  das Gesamtpotential  $\Phi$  in einem Raumpunkt durch die skalare Summe der Einzelpotentiale gegeben ist

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \Phi_i = - \sum_{i=1}^n G \frac{M_i}{r_i} . \quad (1.9.56)$$

Die einfache Addition der Potentiale ist hierbei eine direkte Konsequenz des in Abschnitt 1.5.1 diskutierten Superpositionsprinzips. Eine Probemasse hat in diesem Raumpunkt dann die potentielle Energie  $E_{\text{pot}} = m\Phi$  und die Kraft auf die Masse ergibt sich dann aus  $\mathbf{F} = -\text{grad}E_{\text{pot}}$ . Auf diese Weise umgeht man die unbequeme vektorielle Addition der Einzelkräfte.

<sup>61</sup>In Abschnitt 1.5 wurde gezeigt, daß die Gravitationskraft im Innern einer Hohlkugel verschwindet. Die potentielle Energie der Gravitationskraft muß deshalb im Innern einer Hohlkugel konstant sein und beträgt  $E_{\text{pot}}(r) = - \int_R^\infty G \frac{Mm}{r} dr = -G \frac{Mm}{R}$  für  $r \leq R$ , wobei  $R$  der Radius der Hohlkugel ist. Das Integral  $\int_r^R$  trägt aufgrund des Verschwindens der Gravitationskraft im Innern der Hohlkugel nichts bei.

**Entweichen aus den Gravitationsfeld der Erde:**

Anhand von Gl.(1.9.53) kann berechnet werden, mit welcher Startgeschwindigkeit ein Körper der Masse  $m$  von der Erde ( $M_E = 5.98 \times 10^{24}\text{kg}$ ,  $R_E = 6.38 \times 10^6\text{m}$ ,  $V = 0$ ) aus gesehen abgeschossen werden muß, um aus dem Gravitationsfeld der Erde zu entweichen. Die Geschwindigkeit ergibt sich aus der Bedingung, daß  $E_{\text{pot}}(\infty) = 0$ , während  $E_{\text{kin}}(\infty) \geq 0$  sein soll. Im Grenzfall  $E_{\text{kin}}(\infty) = 0$  kommt der Körper im Unendlichen gerade mit  $v = 0$  an, seine Gesamtenergie ist dann  $E_{\text{tot}} = 0$ . Aus dem Energieerhaltungssatz folgt dann für seine Geschwindigkeit auf der Erde

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{M_E m}{R_E} \quad (1.9.57)$$

oder

$$v = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}} \quad (1.9.58)$$

Die Geschwindigkeit ist also unabhängig von der Masse  $m$  des Körpers. Mit obigen Zahlenwerten ergibt sich  $v = 11.2 \times 10^3\text{m/s}$ .

**Das Masse-Feder-Pendel – das harmonische Oszillatorpotential**

Die Federkraft ist bei Vernachlässigung von Reibungskräften proportional zur Auslenkung:  $F_x = -kx$ . Diese Kraft ist konservativ. Für die Berechnung der potentiellen Energie wählt man als Bezugspunkt den unausgelenkten Zustand  $x = 0$  (siehe Abb. 1.81a). Damit ergibt sich

$$E_{\text{pot}}(x) = \int_0^x \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^x F_x dx = \int_0^x kx dx = k \int_0^x x dx \quad (1.9.59)$$

und somit

$$E_{\text{pot}}(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (1.9.60)$$

Die potentielle Energie wächst also quadratisch mit der Auslenkung  $x$  an. Man bezeichnet  $E_{\text{pot}}(x)$  als *harmonisches Oszillatorpotential*, da man durch Gradientenbildung  $F_x = -dE_{\text{pot}}/dx = kx$  eine harmonische Kraft erhält. Die Gleichgewichtslage  $x = 0$  stellt, wie Abb. 1.81b zeigt, ein Extremum der potentiellen Energie ( $dE_{\text{pot}}/dx = 0$ ) und zwar ein Minimum dar, was zu einer stabilen Gleichgewichtslage bei  $x = 0$  führt.

Verschiebt man die Federmasse aus ihrer Gleichgewichtsposition, so setzt eine harmonische Schwingung ein, bei der ständig potentielle in kinetische Energie und umgekehrt umgewandelt wird. In den Endpunkten der Schwingung ist  $E_{\text{tot}} = E_{\text{pot}}$  und  $E_{\text{kin}} = 0$ , während beim Nulldurchgang  $E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}}$  und  $E_{\text{pot}} = 0$  ist. Durch zeitliche Ableitung der Gesamtenergie ergibt sich

$$\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = 0 = \frac{d\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right)}{dt} = m \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + kx \frac{dx}{dt}, \quad (1.9.61)$$

woraus für  $\frac{dx}{dt} \neq 0$

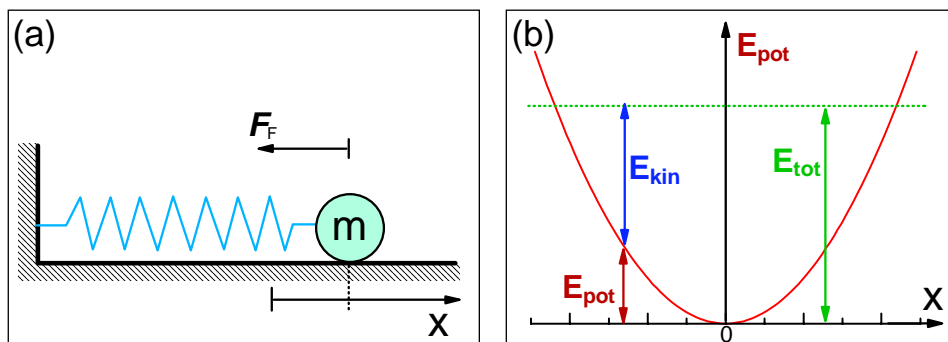


Abbildung 1.81: (a) Zur potentiellen Energie einer gespannten Feder. (b) Das harmonische Oszillatorpotential einer Feder.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (1.9.62)$$

folgt, also genau die schon in Abschnitt 1.6 aus den **Newton**schen Bewegungsgleichungen abgeleitete Bewegungsgleichung. Dieses Beispiel macht also auch deutlich, daß die Energiebetrachtung gleichwertig zur **Newton**schen Beschreibungsweise ist.

**Beispiel: Masse-Feder-Pendel mit endlicher Federmasse:**

Die Anwendung des Energiesatzes führt oft zu einer einfacheren Darstellung eines Problem, wie anhand des Masse-Feder-Pendels mit endlicher Federmasse  $m_F$  gezeigt werden soll. Die Ruhelänge der Feder sei  $l_0$  und sie habe eine Massenbelegung pro Längeneinheit von  $\eta = m_F/l_0$ . Mit  $\eta$  kann die Masse  $dm$  eines Federstücks  $dl$  durch  $dm = \eta dl$  ausgedrückt werden. Bei der Auslenkung der Federmasse  $m$  um das Stück  $x$ , wird das Federelement  $dl$  im Abstand  $l$  von der Befestigung um  $x_l = x \frac{l}{l_0}$  ausgelenkt. Damit erhält man für die kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} k \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \int_0^{l_0} \frac{1}{2} dm \left( \frac{dx_l}{dt} \right)^2. \quad (1.9.63)$$

Mit  $(dx_l/dt)^2 dm = (dx/dt)^2 (l^2/l_0^2) \eta dl = (dx/dt)^2 (l^2/l_0^2) (m_F/l_0) dl$  ergibt sich

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} k \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{m_F}{l_0^3} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \int_0^{l_0} l^2 dl = \frac{1}{2} k \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{m_F}{l_0^3} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \frac{1}{3} l_0^3 \\ &= \frac{1}{2} \left( m + \frac{1}{3} m_F \right) \left( \frac{dx}{dt} \right)^2. \end{aligned} \quad (1.9.64)$$

Die potentielle Energie ist nach wie vor  $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k x^2$ . Die Anwendung des Energieerhaltungssatzes liefert nach Gl.(1.9.61) die Differentialgleichung der Schwingung, die für einen harmonischen Ansatz auf die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + m_F/3}{k}}. \quad (1.9.65)$$

führt, wonach die Federmasse zu einem Drittel zur effektiv schwingenden Masse beiträgt.

### 1.9.4 Das Prinzip der virtuellen Arbeit

Wir haben oben gesehen, daß die Bedingung für statisches Kräftegleichgewicht sich sehr einfach als ein Minimum in der potentiellen Energie ausdrücken läßt. Das jetzt zu diskutierende *Prinzip der virtuellen Arbeit* kann als eine Verallgemeinerung der obigen Überlegungen betrachtet werden.

Wir betrachten ein System von  $n$  Massenpunkten mit Massen  $m_i$ , die zunächst alle frei beweglich sein sollen. Auf den  $i$ -ten Massenpunkt wirke die Gesamtkraft  $\mathbf{F}_i$  ein, die sich aus der Summe der inneren Kräfte  $\mathbf{F}_{ki}$  ( $k = 1, \dots, n; k \neq i$ ), die vom  $k$ -ten auf den  $i$ -ten Massenpunkt wirken, und der von außen an dem  $i$ -ten Massenpunkt angreifenden äußeren Kraft  $\mathbf{F}_i^*$  zusammensetzt. Die *eingeprägte Kraft*  $\mathbf{F}_i$  ist deshalb

$$\mathbf{F}_i = \sum_{k=1; k \neq i}^n \mathbf{F}_{ki} + \mathbf{F}_i^* . \quad (1.9.66)$$

Das System wird genau dann im Zustand der Ruhe verharren (statisches Gleichgewicht), wenn die Kraft  $\mathbf{F}_i$  auf jeden einzelnen Massenpunkt verschwindet. Die Gleichgewichtsbedingung lautet somit

$$\mathbf{F}_i = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n . \quad (1.9.67)$$

Um diese Gleichgewichtsbedingung in anderer Form auszudrücken, wird die *virtuelle Verrückung*  $\delta \mathbf{s}_i$  eingeführt.<sup>62</sup> Diese Verrückung soll einerseits so schnell erfolgen, daß die Kräfte als zeitlich konstant angenommen werden können, andererseits aber langsam genug, damit keine Trägheitskräfte geweckt werden. Mit der virtuellen Verrückung  $\delta \mathbf{s}_i$  für den  $i$ -ten Massenpunkt ist die virtuelle Arbeit  $\delta W_i = \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{s}_i$  verbunden. Im statischen Gleichgewicht gilt wegen Gl.(1.9.67) trivialerweise

$$\delta W = \sum_i^n \delta W_i = \sum_i^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{s}_i = 0 . \quad (1.9.68)$$

Das heißt, *im statischen Gleichgewicht verschwindet die virtuelle Arbeit der eingepägten Kräfte*. In Gl.(1.9.68) sind alle Verrückungen  $\delta \mathbf{s}_i$  unabhängig voneinander.

Sind die Kräfte  $\mathbf{F}_i$  alle aus einem Potential ableitbar und bezeichnet man die gesamte potentielle Energie mit  $E_{\text{pot}}$ , so wird mit Gl.(1.9.30) aus Gl.(1.9.68)

$$\delta W = \sum_i^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{s}_i = - \sum_i^n \delta E_{\text{pot},i} = -\delta E_{\text{pot}} = 0 . \quad (1.9.69)$$

Das heißt, *im statischen Gleichgewicht eines Systems von freien Massenpunkten nimmt die potentielle Energie ein Minimum ein*. Dies wurde oben anhand des Masse-Feder-Pendels bereits festgestellt.

Der wirkliche Nutzen der virtuellen Arbeit tritt aber erst dann zu Tage, wenn man die Voraussetzung fallen läßt, daß sich die Massenpunkte frei bewegen können sollen. Wir wollen jetzt annehmen, daß die

<sup>62</sup>In folgendem wird zur Unterscheidung vom Symbol "d" bei den wirklichen Größen für die virtuellen Größen das Symbol "δ" verwendet.

**Virtuelle Arbeit: Beispiel Masse-Feder-Pendel:**

Ein Masse-Feder-Pendel habe die Gleichgewichtsposition  $x$  und es greife an der Masse  $m$  eine vorgegebene äußere Kraft  $\mathbf{F}^*$  an. Mit der Federkraft  $\mathbf{F}$  und der virtuellen Verrückung  $\delta\mathbf{s} = \delta x \hat{\mathbf{x}}$  wird aus Gl.(1.9.68)

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{s} + \mathbf{F}^* \cdot \delta\mathbf{s} = F_x \delta x + F_x^* \delta x = 0 \quad . \quad (1.9.70)$$

Mit der potentiellen Energie  $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}kx^2$  ist  $F_x \delta x = -\delta E_{\text{pot}} = -kx \delta x$ . Damit folgt für die Gleichgewichtslage  $x$  aus  $-kx \delta x + F_x^* \delta x = 0$  die Bedingung  $x = F_x^*/k$ . Diese Bedingung hätte man im vorliegenden Fall, für den die Federkraft bekannt ist, viel schneller aus der Gleichgewichtsbedingung (1.9.67) für die Kräfte ableiten können. Es kommt aber in vielen Fällen vor, daß man die potentielle Energie der inneren Kräfte viel einfacher berechnen kann als die Kräfte selbst. Führt man hier äußere Kräfte  $\mathbf{F}^*$  ein, die den inneren Kräften das Gleichgewicht halten, so lassen sich diese nach dem eben beschriebenen Verfahren auffinden.

Massenpunkte gewissen *Zwangskräften* ausgesetzt sind, die ihre Bewegungsmöglichkeiten einschränken (z.B. Bewegung entlang von vorgeschriebener Bahn, Schiene, Unterlage, etc.). Als Zwangsbedingung kann auch ein konstanter Abstand der Massenpunkte gefordert werden oder daß Körper in einem bestimmten Volumen eingeschlossen sein sollen (Moleküle von Gasen, Flüssigkeiten). Für die Einhaltung der Zwangsbedingungen sorgen *Zwangskräfte*  $\mathbf{f}$ , die von den Führungen, Wänden, Unterlagen etc. auf die Massenkörper übertragen werden. Am  $i$ -ten Massenpunkt greift dann zusätzlich zur inneren Kraft  $\mathbf{F}_i$  die Zwangskraft  $\mathbf{f}_i$  an. Im Gleichgewichtszustand muß die Vektorsumme aus  $\mathbf{F}_i$  und  $\mathbf{f}_i$  für jeden einzelnen Massenpunkt verschwinden, wodurch Gl.(1.9.67) zu

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n \quad (1.9.71)$$

verallgemeinert wird. Bei der praktischen Anwendung von Gl.(1.9.71) tritt die Schwierigkeit auf, daß man zur Berechnung der äußeren Kräfte, die das System von Massenpunkten ins Gleichgewicht bringen, die Zwangskräfte  $\mathbf{f}_i$  kennen muß, was bei komplizierten mechanischen Apparaturen (z.B. Kurbel) nicht der Fall ist. Das Prinzip der virtuellen Arbeit bringt nun den entscheidenden Vorteil, daß es ohne Kenntnis der Zwangskräfte auskommt. Um dies zu zeigen, führt man wieder virtuelle Verrückungen  $\delta\mathbf{q}$  der Massenpunkte ein, die jetzt aber mit den Zwangsbedingungen verträglich sein müssen. Wir betrachten dazu das in Abb. 1.82 gezeigte System aus zwei Massenpunkten mit Masse  $m_1$  und  $m_2$ , die über eine starre Stange aneinander gekoppelt sind. Die virtuellen Verrückungen  $\delta\mathbf{s}_1$  und  $\delta\mathbf{s}_2$  lassen sich immer als eine Translation der Stange um  $\delta\mathbf{s}_1$  und eine Rotation der Stange um  $m_1$  als Drehpunkt darstellen. Bei infinitesimal kleinen Verrückungen ist dabei die bei der Rotation erzielte Verschiebung der Masse  $m_2$  immer senkrecht zur Stange, so daß die Verrückung  $\delta\mathbf{s}_2$  als  $\delta\mathbf{s}_2 = \delta\mathbf{s}_1 + \delta\mathbf{s}_n$  ausgedrückt werden kann.

Die mit den Verrückungen  $\delta\mathbf{s}_i$  aus der Gleichgewichtslage heraus berechnete virtuelle Arbeit  $\delta W$  ist dann mit Gl.(1.9.71)

$$\delta W = \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i) \cdot \delta\mathbf{s}_i = 0 \quad . \quad (1.9.72)$$

Man kann nun ansetzen, daß die Zwangskräfte in einem mechanischen System für sich genommen keine Arbeit verrichten können, d.h. es gilt

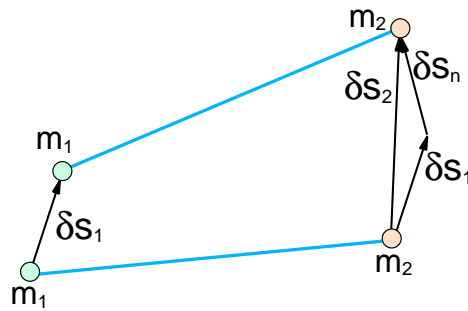


Abbildung 1.82: Virtuelle Verrückung zweier starr gekoppelter Massen.

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{s}_i = 0 . \quad (1.9.73)$$

Dieser Ansatz läßt sich bei einer Schienenführung z.B. damit begründen, daß die zulässigen Verrückungen nur in Richtung der Schiene (tangential) verlaufen dürfen, die von den Schienen ausgeübte Zwangskraft aber immer normal zur Schiene gerichtet ist. Somit wird das Skalarprodukt  $\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{s}_i = 0$ .<sup>63</sup>

Faßt man die Gleichungen (1.9.72) und (1.9.73) zusammen, so erhält man das *Prinzip der virtuellen Arbeit* in der Form

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{s}_i = 0 . \quad (1.9.74)$$

Im Gleichgewicht verschwindet also die virtuelle Arbeit der eingepprägten Kräfte  $\mathbf{F}_i$  für Verrückungen  $\delta \mathbf{s}_i$ , die gemäß den Zwangsbedingungen zulässig sind. Die Zwangskräfte treten hier zwar nicht mehr auf, man muß aber berücksichtigen, daß die einzelnen Verrückungen jetzt nicht mehr unabhängig voneinander sind. Daher kann man jetzt nicht mehr auf  $\mathbf{F}_i = 0$  schließen.<sup>64</sup>

Sind die eingepprägten Kräfte alle konservativ, so wird mit der potentiellen Energie  $E_{\text{pot}}$  des Gesamtsystems wegen Gl.(1.9.30)

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{s}_i = -\delta E_{\text{pot}} = 0 . \quad (1.9.75)$$

*Im Gleichgewicht nimmt deshalb die potentielle Energie der eingepprägten Kräfte auch bei Anwesenheit von Zwangskräften ein Extremum ein, wobei allerdings das Extremum die Zwangsbedingungen als Nebenbedingungen enthalten muß.*

<sup>63</sup>Ein allgemeiner Beweis für die Richtigkeit dieses Ansatzes soll hier nicht geführt werden.

<sup>64</sup>Bei der Diskussion der Gleichgewichtsbedingungen muß man sich nicht mehr um die im einzelnen auftretenden Zwangsbedingungen kümmern. Trotzdem spielen diese bei vielen mechanischen Systemen (z.B. Brückenkonstruktionen, Kran, etc.) eine wichtige Rolle und ihre Kenntnis ist bei der Konstruktion notwendig. Auf **Lagrange** geht ein allgemeines Verfahren zurück, das im Anschluß an das Prinzip der virtuellen Arbeit die Bestimmung von Zwangskräften gestattet. Darauf soll aber hier nicht eingegangen werden.

**Prinzip der virtuellen Arbeit: Beispiel schiefe Ebene:**

Abb. 1.83a zeigt eine schiefe Ebene, auf der eine Masse  $m_1$  reibungsfrei gleiten kann und durch eine Masse  $m_2$  über ein Seil und eine Umlenkrolle im Gleichgewicht gehalten wird. Die eingeprägten Kräfte sind  $\mathbf{F}_1 = m_1\mathbf{g}$  und  $\mathbf{F}_2 = m_2\mathbf{g}$ . Mit den zulässigen Verrückungen  $\delta s_1$  und  $\delta s_2$  sowie den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  erhält man

$$\begin{aligned}\delta W &= \mathbf{F}_1 \cdot \delta \mathbf{s}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \delta \mathbf{s}_2 = m_1\mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{s}_1 + m_2\mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{s}_2 \\ &= m_1g\delta s_1 \cos \alpha + m_2g\delta s_2 \cos \pi = m_1g\delta s_1 \sin \beta - m_2g\delta s_2 .\end{aligned}\quad (1.9.76)$$

Wegen  $\delta s_1 = \delta s_2$  folgt daher aus der Gleichgewichtsbedingung  $\delta W = 0$

$$m_2 = m_1 \sin \beta .\quad (1.9.77)$$

Bei diesem einfachen Beispiel hätte man wohl dieses Resultat einfacher anhand einer Komponentenerlegung der eingeprägten Kräfte erhalten. Das Beispiel zeigt aber immerhin, daß das Prinzip der virtuellen Arbeit die Ermittlung der Zwangskraft der Unterlage überflüssig macht.

**Prinzip der virtuellen Arbeit: Beispiel Flaschenzug:**

Abb. 1.83b zeigt einen *Flaschenzug*, bei dem ein Seil über eine lose und eine feste Rolle geführt ist. Gesucht ist die Kraft  $\mathbf{F}_2$  die der Last  $\mathbf{F}_1$  das Gleichgewicht hält. Das Prinzip der virtuellen Arbeit verlangt

$$\delta W = \mathbf{F}_1 \cdot \delta \mathbf{s}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \delta \mathbf{s}_2 = 0 .\quad (1.9.78)$$

Bei Anhebung der losen Rolle um  $\delta s_1$  gewinnt man die Seillänge  $2\delta s_1$ , d.h.  $2\delta s_1 = \delta s_2$ . Da außerdem  $\mathbf{F}_1 \parallel -\delta \mathbf{s}_1$  und  $\mathbf{F}_2 \parallel \delta \mathbf{s}_2$  folgt

$$\begin{aligned}-F_1\delta s_1 + F_2\delta s_2 &= -F_1\delta s_1 + F_22\delta s_1 = 0 \\ \text{oder} \quad F_2 &= \frac{1}{2}F_1 .\end{aligned}\quad (1.9.79)$$

Auch hier muß man sich nicht um die Zwangskräfte kümmern.

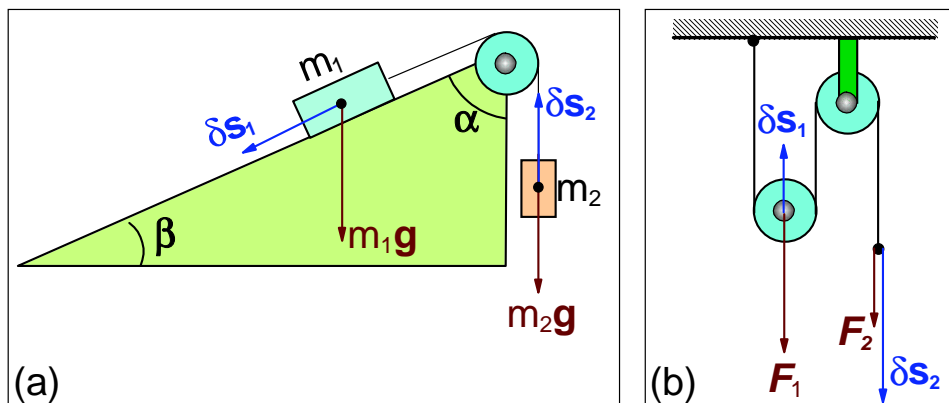


Abbildung 1.83: (a) Gleichgewichtsbedingung bei der schiefen Ebene. (b) Gleichgewichtsbedingung beim Flaschenzug.

Zum Abschluß dieses Abschnitts soll noch darauf hingewiesen werden, daß man mit dem Prinzip der



virtuellen Arbeit auch dynamische Probleme betrachten kann. Dazu muß man lediglich mit Hilfe der **d'Alembertschen** Trägheitskraft  $\mathbf{F}_T = -m\mathbf{a}$  die **Newtonsche** Bewegungsgleichung  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  zu  $\mathbf{F} - m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_T = 0$  umschreiben und damit die Dynamik formal auf ein Gleichgewichtsproblem zwischen realen und Trägheitskräften zurückführen. Macht man auch in der Dynamik den Ansatz, daß die Zwangskräfte keinen Beitrag zur virtuellen Arbeit liefern, so erhält man das **d'Alembertsche** Prinzip

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \left( \mathbf{F}_i - m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} \right) \cdot \delta \mathbf{s}_i = 0 \quad . \quad (1.9.80)$$

In dieser Formulierung der Dynamik sind die Bewegungsgleichungen uminterpretiert worden zu einer Aussage über die virtuelle Arbeit. Vom **d'Alembertschen** Prinzip ausgehend werden die *Lagrange-Gleichungen* und die *Hamilton-Gleichungen* abgeleitet, die die Grundlage der theoretischen Mechanik bilden.<sup>65</sup> Der für **Newton** zentrale Begriff der Kraft tritt dabei in den Hintergrund zugunsten der Begriffe Energie, Impuls und Drehimpuls.

### 1.9.5 Was ist Energie ?

Wir haben soeben gelernt, daß es ein Gesetz gibt, daß alle Naturphänomene beherrscht, die bis heute bekannt sind, nämlich das Gesetz der Energieerhaltung. Es besagt, daß eine Größe, die wir Energie nennen, bei allen Vorgängen in der Natur unverändert bleibt. Im Prinzip ist dies eine sehr abstrakte Aussage, ja ein mathematisches Prinzip. Es besagt, daß eine numerische Größe existiert, die sich nicht verändert. Es ist zunächst unverständlich, daß wir eine Zahl berechnen können und, wenn wir nach einiger Zeit, in der in der Natur viel passiert ist, diese Zahl wieder berechnen, feststellen, daß diese Zahl gleich geblieben ist.

Es ist wichtig, sich klar zu machen, daß wir in der heutigen Physik nicht wissen, was Energie ist. Wir haben kein Bild davon, daß z.B. Energie in kleinen Klumpen definierter Größe vorkommt. Aber wir haben mathematische Formeln, mit denen wir eine numerische Größe berechnen können, die immer die gleiche Zahl besitzt. Insofern ist Energie eine abstrakte Sache.

Zum Anschluß soll noch ein Hinweis auf den Zusammenhang zwischen der Energieerhaltung und einer Symmetrieeigenschaft der physikalischen Gesetze gegeben werden. Es zeigt sich, daß die physikalischen Gesetze bezüglich einer Translation in der Zeit unverändert bleiben, was gleichbedeutend mit der Energieerhaltung ist. Allgemein gibt es in der Quantenmechanik für jede Symmetrieeigenschaft ein entsprechendes Erhaltungsgesetz, d.h. es gibt eine definierte Verbindung zwischen den Erhaltungsgesetzen und den Symmetrien der physikalischen Gesetze. Im Moment können wir dies natürlich nur ohne irgendeinen Versuch einer Erklärung behaupten. Eine genaue Erörterung folgt im Rahmen der Quantenmechanik.

<sup>65</sup>Diese Gleichungen werden ausführlich in den Vorlesungen zur Theoretischen Physik diskutiert.

## 1.10 Der Impuls

Nach der Energie, die durch das Wegintegral der Kraft  $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  gegeben ist, beschäftigen wir uns in diesem Abschnitt mit einer weiteren Größe, dem Zeitintegral der Kraft  $\int \mathbf{F} dt$ , für die ebenso ein Erhaltungssatz gilt und uns zum Begriff des *Impulses* führt. Die neue Größe  $\int \mathbf{F} dt$  wird *Kraftstoß* genannt. Es läßt sich ein Impulserhaltungssatz formulieren, der zusammen mit dem Energieerhaltungssatz zu den Fundamentalgesetzen der Physik gehört. Wegen seiner fundamentalen Bedeutung soll der *Impulserhaltungssatz* ausgehend von unterschiedlichen Voraussetzungen bewiesen werden. Für Systeme von Massenpunkten wird der *Massenmittelpunkt* oder *Schwerpunkt* eingeführt und damit der *Schwerpunktsatz* abgeleitet, der eine Aussage über den Gesamtimpuls des Systems macht. Schließlich wird die Energie- und Impulserhaltung angewendet, um die *Stoßgesetze* aufzustellen.

### 1.10.1 Impuls und Kraftstoß

Als Impuls  $\mathbf{p}$  eines Körpers (Massenpunktes) mit Masse  $m$  und Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bezeichnet man den Vektor

$$\mathbf{p} := m\mathbf{v} . \quad (1.10.1)$$

Der Impuls hat also die gleiche Richtung wie die Geschwindigkeit und seine Einheit im SI-System ist

$$[p] = 1\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} . \quad (1.10.2)$$

Mit Hilfe des Impulses läßt sich die **Newton'sche** Bewegungsgleichung zu

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (1.10.3)$$

umschreiben. D.h. eine an einem Körper angreifende Kraft führt zu einer Änderung des Impulses und die Impulsänderungsgeschwindigkeit ist gleich der Kraft.<sup>66</sup>

Die allgemeinere Formulierung (1.10.3) führt zu einem dynamischen Grundgesetz für Körper zeitlich veränderlicher Masse

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \mathbf{v} = m\mathbf{a} + \frac{dm}{dt} \mathbf{v} . \quad (1.10.4)$$

Das Gesetz  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  deckt in Gl.(1.10.4) also nur den Spezialfall  $m = \text{const}$  ab.

Geschwindigkeitsabhängige, d.h. variable Massen, treten in der **Einstein'schen** speziellen Relativitätstheorie auf. Nach **Einstein** ist die maximale Geschwindigkeit, mit der sich Körper bewegen können, die Lichtgeschwindigkeit  $c$ . Für Geschwindigkeiten  $v \approx c$  muß deshalb die Beschleunigung  $\mathbf{a}$  auch dann verschwinden, wenn eine Kraft  $\mathbf{F} \neq 0$  in Bewegungsrichtung einwirkt. Dennoch führt die einwirkende Kraft über den Term  $\frac{dm}{dt} \mathbf{v}$  zu einer Impulsänderung  $d\mathbf{p}/dt$  des Körpers, die sich in einer relativistischen Massenänderung manifestiert. Für  $\mathbf{F} \parallel \mathbf{v}$  entspricht die Vergrößerung des Impulses um  $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$  einer Massenzunahme  $dm/dt > 0$ , die sich wegen  $a \approx 0$  zu  $d\mathbf{p}/dt \approx \frac{dm}{dt} \mathbf{v} \approx \frac{dm}{dt} c$  ergibt. Bei extrem

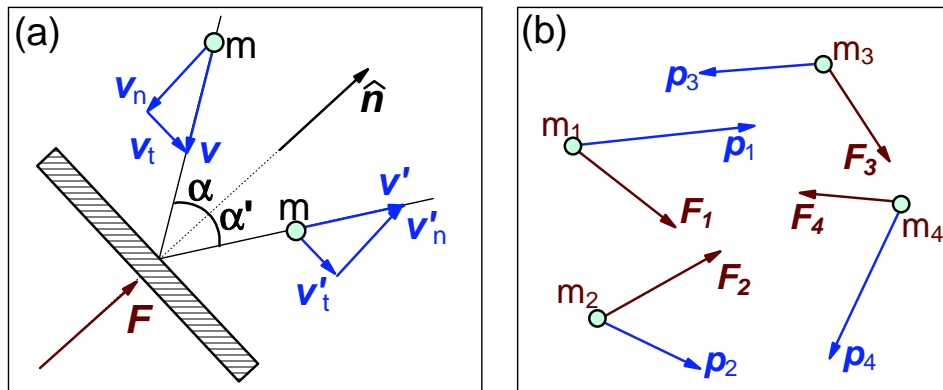


Abbildung 1.84: (a) Reflexion von Stahlkugeln an einer Stahlplatte. (b) Zur Veranschaulichung des Gesamtimpulses und der Gesamtkraft in einem System von Massenpunkten.

relativistischen Geschwindigkeiten  $v \approx c$  kann man also in Gl.(1.10.4) den Term  $m\mathbf{a}$ , den wir bisher ausschließlich betrachtet haben, gegenüber  $\frac{dm}{dt}\mathbf{v}$  sogar vernachlässigen.

In folgendem soll angenommen werden, daß die auftretenden Geschwindigkeiten  $v$  klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sind und deshalb die Massen der einzelnen Körper als konstant angenommen werden können. Als Beispiel betrachten wir eine Stahlkugel der Masse  $m$ , die unter dem Winkel  $\alpha$  relativ zur Flächennormalen  $\hat{\mathbf{n}}$  mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  auf eine Stahlplatte (siehe Abb. 1.84a) aufprallt. Man beobachtet, daß die Stahlkugel in der von  $\mathbf{v}$  und  $\hat{\mathbf{n}}$  aufgespannten Ebene mit dem Ausfallswinkel  $\alpha'$  und der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}'$  reflektiert wird. Dabei gilt für die Winkel das Spiegelungsgesetz  $\alpha = \alpha'$  und für die Beträge der Geschwindigkeiten  $v = v'$ . Die Kugel erfährt dann nach Abb. 1.84a eine Impulsänderung  $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}' - \mathbf{p} = m\mathbf{v}' - m\mathbf{v} = (m\mathbf{v}'_n + m\mathbf{v}'_t) - (m\mathbf{v}_n + m\mathbf{v}_t) = m\mathbf{v}'_n - m\mathbf{v}_n$ , die normal zur Oberfläche steht und wegen der Antiparallelität von  $\mathbf{v}'_n$  und  $\mathbf{v}_n$  den Betrag  $\Delta p = 2mv_n = 2mv \cos \alpha$  besitzt. Wenn nun im Zeitintervall  $dt$  genau  $N$  Kugeln auftreffen, so ist die Auftreffrate  $n = dN/dt$  und in der Zeit  $dt$  muß der Impuls  $dp = dN \cdot \Delta p = n dt \cdot 2mv \cos \alpha$  von der Stahlplatte auf die Kugeln übertragen werden. Nach Gl.(1.10.3) ist dazu die Kraft

$$F = \frac{dp}{dt} = 2nmv \cos \alpha \quad (1.10.5)$$

erforderlich, mit der die Platte in Richtung der Flächennormalen gedrückt werden muß<sup>67</sup>

Um von der Idealisierung der Körper zu Massenpunkten weg zu kommen, betrachten wir nun einen Gesamtkörper, den wir uns aus einem System von Massenpunkten zusammengesetzt denken können (siehe Abb. 1.84b). Bei diesem System von Massenpunkten mit den Massen  $m_i$ , den Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}_i$  und den Impulsen  $\mathbf{p}_i$ , auf die die Kräfte  $\mathbf{F}_i$  einwirken, gilt zunächst für jeden einzelnen Massenpunkt

$$\mathbf{F}_i = \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \quad (1.10.6)$$

Man führt dann den Gesamtimpuls  $\mathbf{p}_{\text{tot}}$  des Systems als

<sup>66</sup>Newton hat übrigens seine Lex Secunda als  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$  formuliert und nicht, wie von uns bisher angesetzt, als  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ . Beide Formulierungen sind natürlich bei konstanter Masse identisch.

<sup>67</sup>In unserem Alltagsleben entspricht dieses Experiment dem Anstemmen eines Regenschirms gegen die auftretenden Wasser- und Luftmoleküle.

$$\mathbf{p}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \quad (1.10.7)$$

und entsprechend die Gesamtkraft  $\mathbf{F}_{\text{tot}}$  als

$$\mathbf{F}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad (1.10.8)$$

ein und erhält aus Gl.(1.10.6) bis (1.10.8) den Ausdruck

$$\mathbf{F}_{\text{tot}} = \frac{d\mathbf{p}_{\text{tot}}}{dt} . \quad (1.10.9)$$

Diese Gleichung ist das *dynamische Grundgesetz* für Systeme von Massenpunkten, die teilweise oder ganz in ausgedehnten makroskopischen Körpern zusammengefaßt sein können.

Wir betrachten nun wieder Gl.(1.10.3), bringen sie in die Form

$$\mathbf{F} dt = d\mathbf{p} . \quad (1.10.10)$$

und integrieren von der Anfangszeit  $t_1$  bis zur Endzeit  $t_2$ . Man erhält

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} d\mathbf{p} = \mathbf{p}(t_2) - \mathbf{p}(t_1) := \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 := \Delta\mathbf{p} \quad (1.10.11)$$

bzw. bei konstanter Masse

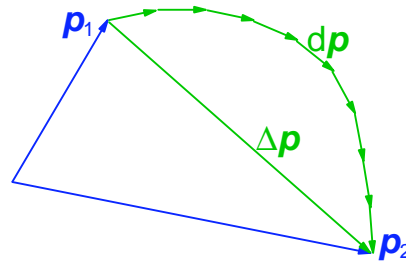
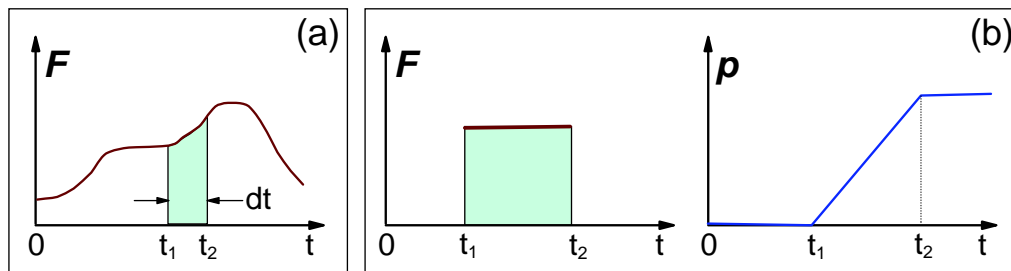
$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \Delta\mathbf{p} = m(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) . \quad (1.10.12)$$

Die Integration ist in Abb. 1.85 veranschaulicht. Insbesondere wird klar, daß

$$\mathbf{p}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} d\mathbf{p} = \mathbf{p}(t_2) \quad \text{bzw.} \quad \int_{t_1}^{t_2} d\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \Delta\mathbf{p} . \quad (1.10.13)$$

Das Zeitintegral der Kraft nennt man den *Kraftstoß* (siehe Abb. 1.86), der nicht mit dem Wegintegral der Kraft, der Arbeit  $W_{21}$ , verwechselt werden darf. Zusammenfassend kann man festhalten, daß *der auf einen Körper übertragene Kraftstoß gleich dessen Impulsänderung  $\Delta\mathbf{p}$  ist.*

Für einen sich kräftefrei bewegenden Körper ist  $\mathbf{F} = 0$  und damit verschwindet auch der Kraftstoß und die Impulsänderung. Das heißt, der Impuls des Körpers ist konstant. Dies ist lediglich eine andere

Abbildung 1.85: Zur Veranschaulichung der Impulsänderung zwischen den Zeiten  $t_1$  und  $t_2$ .Abbildung 1.86: (a) Zur Definition des Kraftstoßes. Die getönte Fläche unter der Kurve entspricht dem Kraftstoß  $\int_{t_1}^{t_2} F dt$ . (b) Impulsänderung durch eine im Zeitintervall zwischen  $t_1$  und  $t_2$  zeitlich konstante Kraft.

Formulierung des **Galileischen** Trägheitsgesetzes aus Abschnitt 1.4, da für  $\mathbf{p} = \text{const}$  bei  $m = \text{const}$  auch  $\mathbf{v} = \text{const}$ .

Schließlich kann man eine direkte Beziehung zwischen Impuls und kinetischer Energie ableiten. Es ist

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{(m\mathbf{v}) \cdot (m\mathbf{v})}{2m} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}{2m} \quad (1.10.14)$$

oder

$$E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m} . \quad (1.10.15)$$

Für einen Körper mit definierter Masse sind also kinetische Energie und Impuls nicht unabhängig voneinander vorgebar.

### 1.10.2 Impulserhaltungssatz

Wir betrachten zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$ , zwischen denen die inneren Kräfte  $\mathbf{F}_1$  und  $\mathbf{F}_2$  wirken. Es sollen keine äußeren Kräfte  $\mathbf{F}^*$  vorhanden sein. Man sagt dann, die Massen bilden ein *abgeschlossenes System*. Aus dem 3. **Newtonschen** Axiom (actio = reactio) folgt dann

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \Rightarrow \mathbf{F}_{\text{tot}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0 . \quad (1.10.16)$$

Mit der Bewegungsgleichung  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$  folgt dann

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = -\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} \Rightarrow \frac{d(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)}{dt} = 0 \quad (1.10.17)$$

und somit für den Gesamtimpuls  $\mathbf{p}_{\text{tot}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$

$$\frac{d\mathbf{p}_{\text{tot}}}{dt} = 0 . \quad (1.10.18)$$

Das heißt:

Der Gesamtimpuls der Teilchen eines abgeschlossenen Systems ist zeitlich konstant:

$$\mathbf{p}_{\text{tot}} = \text{const} \quad (\text{abgeschlossenes System}) \quad (1.10.19)$$

Dies ist der Inhalt des *Impulserhaltungssatzes* oder kurz *Impulssatzes*. Einen analogen Erhaltungssatz für die Energie haben wir in Abschnitt 1.9.2 aufgestellt.

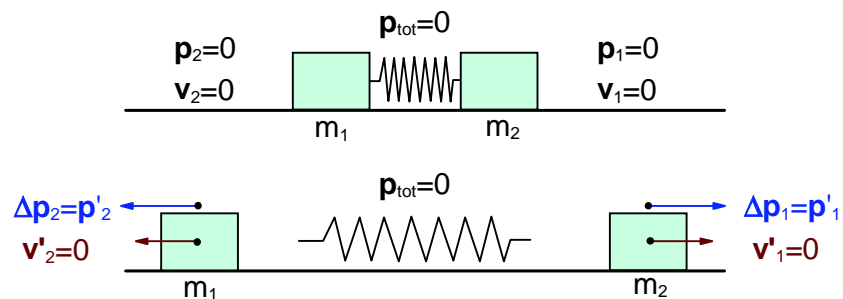


Abbildung 1.87: Zur Impulserhaltung in einem abgeschlossenen System.

Zur Veranschaulichung des Impulssatzes betrachten wir die in Abb. 1.87 gezeigte Versuchsanordnung, bei der zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$  auf einer horizontalen Unterlage reibungsfrei gleiten können. Zu Beginn des Experiments werden die beiden Massen unter Wirkung der äußeren Kraft  $\mathbf{F}^*$  zusammengeschoben und dabei eine masselos angenommene Feder gestaucht. Von dem Moment an, zu dem die Massen losgelassen werden, stellt das System ein abgeschlossenes System dar, da keine externen Kräfte mehr wirken. Am Anfang gilt  $\mathbf{v}_1 = 0$  und  $\mathbf{v}_2 = 0$  sowie  $\mathbf{p}_1 = 0$  und  $\mathbf{p}_2 = 0$ , wodurch  $\mathbf{p}_{\text{tot}} = 0$ . Die Federkräfte  $\mathbf{F}_1$  und  $\mathbf{F}_2$  können zum Zeitpunkt  $t_0$ , zu dem die äußeren Kräfte entfernt werden, mit der Beschleunigung und damit der Impulsänderung der Massen  $m_1$  und  $m_2$  beginnen. Die Federkräfte bleiben eine Zeitspanne  $\Delta t$  wirksam, bis die Feder völlig entspannt ist. Zu jedem Zeitpunkt gilt hierbei aufgrund des Wechselwirkungsgesetzes  $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$  und damit für die Impulsänderung im Zeitintervall  $dt$

$$d\mathbf{p}_1 = \mathbf{F}_1 dt = -\mathbf{F}_2 dt = -d\mathbf{p}_2 . \quad (1.10.20)$$

Die Integration dieser Gleichung von  $t_0$  bis  $(t_0 + \Delta t)$  ergibt

$$\Delta \mathbf{p}_1 = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \mathbf{F}_1 dt = - \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \mathbf{F}_2 dt = -\Delta \mathbf{p}_2 \quad (1.10.21)$$

oder

$$\Delta \mathbf{p}_{\text{tot}} = \Delta \mathbf{p}_1 + \Delta \mathbf{p}_2 = 0 \quad (1.10.22)$$

Das heißt, der Impulserhaltungssatz  $\Delta \mathbf{p}_{\text{tot}} = 0$  bzw.  $\mathbf{p}_{\text{tot}} = \text{const}$  ist erfüllt und zwar im Gegensatz zu Gl.(1.10.18) nicht nur für infinitesimale Impulsänderungen, sondern für das gesamte Zeitintervall  $\Delta t$ . Da der Gesamtimpuls zu Versuchsbeginn  $\mathbf{p}_{\text{tot}} = 0$  war, verschwindet er auch bei Versuchsende, obwohl hier die Einzelimpulse  $\mathbf{p}'_1$  und  $\mathbf{p}'_2$  bzw. die Einzelgeschwindigkeiten  $\mathbf{v}'_1$  und  $\mathbf{v}'_2$  nicht verschwinden. Aufgrund des nicht verschwindenden Kraftstoßes in Gl.(1.10.21) ist  $\Delta \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1$  und  $\Delta \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2$  endlich. Außerdem folgt aus Gl.(1.10.21) und (1.10.22), daß die Impulse  $\mathbf{p}'_1$  und  $\mathbf{p}'_2$  betragsmäßig gleich groß sind und antiparallel zueinander gerichtet sind. Für das Verhältnis der Geschwindigkeiten erhält man deshalb

$$\frac{v'_1}{v'_2} = \frac{m_2}{m_1} \quad (1.10.23)$$

Die Geschwindigkeiten verhalten sich also umgekehrt wie ihre Massen.

Die Beziehung zwischen den Kraftstößen bzw. den Impulsänderungen läßt sich so interpretieren, daß bei der Wechselwirkung zwischen zwei Körpern ein Impuls  $\Delta \mathbf{p}$  ausgetauscht wird, und zwar so, daß der Impuls, den der Körper 2 abgibt ( $\Delta \mathbf{p} = -\Delta \mathbf{p}_2$ ), von dem Körper 1 aufgenommen wird ( $\Delta \mathbf{p} = \Delta \mathbf{p}_1 = -\Delta \mathbf{p}_2$ ). Die zum abgegebenen Impuls  $-\Delta \mathbf{p}_2$  antiparallele Impulsänderung  $\Delta \mathbf{p}_2$  von Körper 2 wird als *Rückstoß* auf den Körper 2 bezeichnet. Insgesamt läßt sich festhalten, daß der wechselseitige Impulsaustausch letztendlich nur eine andere Formulierung von *actio = reactio* ist.<sup>68</sup>

### Verallgemeinerung auf n-Teilchen-Systeme

Die bislang für ein abgeschlossenes System aus zwei Teilchen gemachten Überlegungen können leicht für ein n-Teilchen-System verallgemeinert werden. Die Gesamtkraft  $\mathbf{F}_i$  auf den  $i$ -ten Massenpunkt setzt sich dabei aus den Zweikörperkräften  $\mathbf{F}_{ki}$  zwischen dem betrachteten Körper und allen anderen zusammen:

$$\mathbf{F}_i = \sum_{k=1; k \neq i}^n \mathbf{F}_{ki} \quad (1.10.24)$$

Für den  $i$ -ten Massenpunkt ist  $\mathbf{F}_i = d\mathbf{p}_i/dt$  und für das Gesamtsystem mit der Kraft  $\mathbf{F}_{\text{tot}}$  und dem Impuls  $\mathbf{p}_{\text{tot}}$  gilt

<sup>68</sup>Es wird weiter unten gezeigt, daß die Impulserhaltung allgemein aus der Translationsinvarianz physikalischer Prozesse folgt.

$$\mathbf{F}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{p}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i, \quad (1.10.25)$$

woraus  $\mathbf{F}_{\text{tot}} = d\mathbf{p}_{\text{tot}}/dt$  folgt. Damit ist dann

$$\frac{d\mathbf{p}_{\text{tot}}}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1; k \neq i}^n \mathbf{F}_{ki}. \quad (1.10.26)$$

Mit dem **Newtonschen** Wechselwirkungsgesetz verschwindet die Summe auf der rechten Seite von Gl.(1.10.26), da bei der Summation jedes Teilchenpaar  $(i, k)$  zur Gesamtkraft  $\mathbf{F}_{ki}$  und  $\mathbf{F}_{ik}$  beitragen, die sich gegenseitig aufheben. Daher gilt für ein abgeschlossenes  $n$ -Teilchen-System ebenfalls:

$$\mathbf{F}_{\text{tot}} = 0 \quad (\text{abgeschlossenes System}) \quad (1.10.27)$$

und der Gesamtimpuls des Systems bleibt erhalten:

$$\mathbf{p}_{\text{tot}} = \text{const} \quad (\text{abgeschlossenes System}) \quad (1.10.28)$$

### Startende Rakete

Als Beispiel für das *Rückstoßprinzip* soll hier kurz der Raketenantrieb diskutiert werden. Bei Raketentriebmotoren wird Treibstoff entzündet und die bei der Verbrennung entstehenden Gase entweichen mit hoher Geschwindigkeit aus dem Auspuff. Der zum Impuls der ausgestoßenen Gasmoleküle antiparallele Rückstoß wird zur Beschleunigung der Rakete benutzt. Die entsprechende Raketengleichung soll in folgendem für eine im Schwerfeld der Erde senkrecht nach oben startende Rakete aufgestellt werden (siehe Abb. 1.88). Die Gesamtmasse  $m(t)$  der Rakete zum Zeitpunkt  $t$  können wir uns als aus der Masse  $|dm|$  der Auspuffgase, die in der Zeit  $dt$  zwischen  $t$  und  $t + dt$  entstehen, und der Restmasse  $m - |dm|$  zusammengesetzt denken. Im Zeitintervall  $dt$  kann in guter Näherung angenommen werden, daß die Gasteilchen mit konstanter Geschwindigkeit  $-\mathbf{u}$  relativ zur Rakete abgestoßen werden. Für einen Beobachter außerhalb der Rakete haben die Gasteilchen dann die Geschwindigkeit  $-\mathbf{u} + \mathbf{v}$ . Die Restmasse  $m - |dm|$  der Rakete wird beschleunigt und hat nach der Zeit  $dt$  die Geschwindigkeit  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ . Die Bewegungsgleichung des Gesamtsystems ist mit Gl.(1.10.9) gegeben durch  $\mathbf{F}_{\text{tot}} = d\mathbf{p}_{\text{tot}}/dt$ . Für die Gesamtkraft  $\mathbf{F}_{\text{tot}}$  ist zu beachten, daß sich die bei der Treibstoffverbrennung entwickelten inneren Kräfte wegen *actio = reactio* gegenseitig kompensieren, so daß für die Impulsänderung nur die als äußere Kraft wirkende Schwerkraft  $\mathbf{F}_G = m\mathbf{g}$  zu berücksichtigen ist. Die inneren Kräfte liefern für sich genommen aufgrund des Impulssatzes die Impulsänderung  $d\mathbf{p}_{\text{tot}}/dt = 0$ . Man erhält somit

$$m\mathbf{g} = \frac{d\mathbf{p}_{\text{tot}}}{dt}. \quad (1.10.29)$$

Mit den oben angegebenen Massen und Geschwindigkeiten berechnet sich daraus die Impulsänderung des Systems Rakete+Gas zu



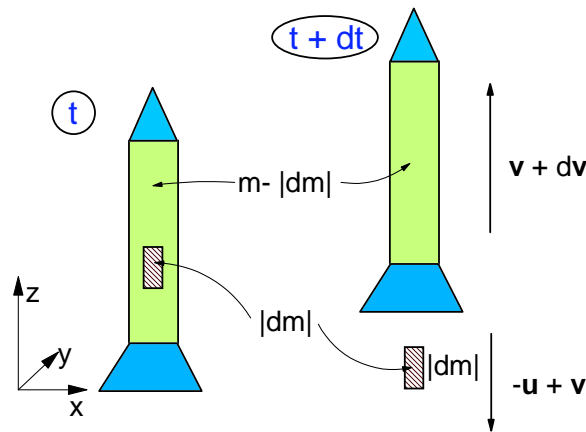


Abbildung 1.88: Zum Rückstoßprinzip bei einem Raketenstart.

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{p}_{\text{tot}} &= \mathbf{p}_{\text{tot}}(t + dt) - \mathbf{p}_{\text{tot}}(t) \\
 &= (m - |dm|)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) + |dm|(-\mathbf{u} + \mathbf{v}) - (m - |dm|)\mathbf{v} - |dm|\mathbf{v} \\
 &= (m - |dm|)d\mathbf{v} - |dm|\mathbf{u} = m d\mathbf{v} - |dm|\mathbf{u} .
 \end{aligned} \tag{1.10.30}$$

unter Vernachlässigung des 2. Ordnung Terms ( $|dm|d\mathbf{v}$ ). Durch Einsetzen in Gl.(1.10.29) erhält man

$$m\mathbf{g} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{|dm|}{dt} \mathbf{u} . \tag{1.10.31}$$

In dieser Gleichung stellt  $\eta := |dm|/dt$  die Verbrennungsrate des Treibstoffes dar. Setzt man  $\eta = \text{const}$  an, so erhält man mit der Startmasse  $M$  die nach der Flugzeit  $t$  noch verbleibende Raketenmasse zu  $m(t) = M - \eta t$ . Die maximale Brennzeit des Triebwerks ergibt sich aus  $m(t) = 0$  zu  $T = M/\eta$ . Mit der Verbrennungsrate  $\eta$  ergibt sich aus Gl.(1.10.31) die sogenannte *Raketengleichung*

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \eta \mathbf{u} + m\mathbf{g} . \tag{1.10.32}$$

Nach dieser Gleichung ist die Beschleunigung  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$  der Rakete durch die Summe aus *Schubkraft*  $\eta \mathbf{u}$  des Raketenmotors und *Schwerkraft*  $m\mathbf{g}$  gegeben.<sup>69</sup> Mit  $m(t) = M - \eta t$  und einer Bewegung nur in  $z$ -Richtung senkrecht zur Erdoberfläche erhält man

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\eta u}{M - \eta t} - g = \frac{u}{T - t} - g \tag{1.10.33}$$

und damit mit  $v(0) = 0$  und  $g = \text{const}$  die Geschwindigkeit

<sup>69</sup>Raketentriebwerke erreichen Schubkräfte  $\eta u \sim 10^6 \text{ N}$  und sind damit in der Lage, eine Startmasse im Bereich von  $M \sim 10^5 \text{ kg}$  von der Erde abzuheben.

$$v(t) = u \ln \frac{T}{T-t} - gt . \quad (1.10.34)$$

Durch nochmalige Integration erhält man mit  $z(0) = 0$

$$z(t) = ut + u(T-t) \ln \frac{T-t}{T} - \frac{1}{2}gt^2 . \quad (1.10.35)$$

Diese Gleichung gilt natürlich nur für  $t < T$ . Für  $t \rightarrow T$  wird die Geschwindigkeit der Rakete in unserem idealisierten Experiment, in dem die gesamte Rakete aus Treibstoff besteht, unendlich groß und die verbleibende Raketenmasse unendlich klein.

In realen Raketensystemen wird immer eine Nutzlast  $m_n$  transportiert, so daß nach Verbrennen des Treibstoffes von der Gesamtmasse die Nutzlast übrigbleibt. Aus Gl.(1.10.32) erhält man in diesem Fall

$$\frac{dv}{dt} = \frac{u}{m} \frac{|dm|}{dt} + g . \quad (1.10.36)$$

Durch Integration erhält man mit  $v(0) = 0$  und unter Vernachlässigung des Terms  $g$  die nach Verbrennen des gesamten Treibstoffs erreichte Geschwindigkeit zu

$$v(t) = -u \int_M^{m_n} \frac{|dm|}{m} = u \ln \left( \frac{M}{m_n} \right) . \quad (1.10.37)$$

Für eine hohe Endgeschwindigkeit benötigt man also eine hohe Austrittsgeschwindigkeit der Gasteilchen und eine geringe Nutzlast.

### Impulserhaltung und Translationsinvarianz

Der Impulssatz wurde unter der Voraussetzung, daß alle inneren Kräfte dem **Newton**schen Wechselwirkungsgesetz (actio = reactio) unterliegen, abgeleitet. Es soll jetzt gezeigt werden, daß die Gültigkeit des Impulssatzes aber viel weitreichender ist. Wie hier allerdings nicht in voller Allgemeinheit gezeigt werden kann, folgt der Impulssatz aus einer Symmetrieeigenschaft des Raumes gegenüber Translationen. Darunter versteht man, daß ein bestimmter physikalischer Vorgang genau gleich abläuft, wenn man den Versuchsaufbau im Raum verschiebt. Diese *Translationsinvarianz* ist eine Folge der *Homogenität* des Raumes und bis heute ist kein Experiment bekannt, das der Translationsinvarianz widersprechen würde. Um anzudeuten, wie man den Impulserhaltungssatz aus der Forderung nach Translationsinvarianz erhalten kann, betrachten wir wieder zwei Teilchen, die auf der  $x$ -Achse die Positionen  $x_1$  und  $x_2$  einnehmen und deren Wechselwirkung durch die potentielle Energie  $E_{pot}(x_1, x_2)$  beschrieben wird. Die Translationsinvarianz besagt nun, daß die potentielle Energie unverändert bleibt, wenn beide Teilchen auf der  $x$ -Achse um die Strecke  $s$  versetzt werden. Das heißt, es muß  $E_{pot}(x_1, x_2) = E_{pot}(x_1 + s, x_2 + s)$  gelten. Dies ist genau dann erfüllt, wenn die potentielle Energie nicht von der Absolutposition der Teilchen sondern nur von ihrem relativen Abstand  $x_{21} = x_2 - x_1$  abhängt, der sich bei einer Verschiebung  $s$  nicht ändert. Es muß also gelten

$$E_{pot}(x_1, x_2) = f(x_{21}) = f(x_2 - x_1) , \quad (1.10.38)$$

wobei  $f(x_{21})$  eine stetig differenzierbare Funktion (sonst beliebig) sein soll.<sup>70</sup> Mit Hilfe von Gl.(1.9.43) kann man die Kräfte  $F_{x_1}$  und  $F_{x_2}$  auf Teilchen 1 und 2 berechnen zu

$$\begin{aligned} F_{x_1} &= -\frac{\partial E_{pot}(x_2 - x_1)}{\partial x_1} = -\frac{dE_{pot}(x_{21})}{dx_{21}} \cdot \frac{\partial x_{21}}{\partial x_1} = -\frac{dE_{pot}(x_{21})}{dx_{21}} \cdot (-1) \\ F_{x_2} &= -\frac{\partial E_{pot}(x_2 - x_1)}{\partial x_2} = -\frac{dE_{pot}(x_{21})}{dx_{21}} \cdot \frac{\partial x_{21}}{\partial x_2} = -\frac{dE_{pot}(x_{21})}{dx_{21}} \cdot (+1) \end{aligned} \quad (1.10.39)$$

und damit

$$F_{x_1} = -F_{x_2} . \quad (1.10.40)$$

Damit sind wir wieder beim **Newtonschen** Wechselwirkungsgesetz angelangt und haben mit dem Beweisgang von Gl.(1.10.15) zum Impulssatz in Gl.(1.10.16) insgesamt gezeigt, daß die Impulserhaltung aus der Translationsinvarianz der potentiellen Energie folgt.<sup>71</sup>

Es sei abschließend darauf hingewiesen, daß die Impulserhaltung eine der am besten gesicherten Erkenntnisse der Physik ist. Abweichungen treten nur im atomaren Bereich aufgrund der **Heisenbergschen** Unschärferelation  $\Delta p \Delta x \geq h$  auf. Innerhalb der Impulsunschärfe  $\Delta p$  kann der Impulssatz verletzt sein. Für klassische Objekte ist diese Unschärfe aber vernachlässigbar klein, da auf einer atomaren Skala klassische Körper nur ungenau lokalisiert sind.

### 1.10.3 Massenmittelpunkt und Schwerpunktsatz

Zu zwei punktförmigen Massen  $m_1$  und  $m_2$  läßt sich ein *Massenmittelpunkt* als ein Raumpunkt definieren, der auf der Verbindungslinie der beiden Massen liegt und den Abstand der beiden Massen im umgekehrten Verhältnis der beiden Massen teilt. Liegen die beiden Massen wie in Abb. 1.89 gezeigt auf der  $x$ -Achse und bezeichnet man mit  $x_{cm}$  die  $x$ -Koordinate des Massenmittelpunktes  $CM$  (CM: Center of Mass) und mit  $s_1$  und  $s_2$  die Abstände zwischen Masse 1 bzw. 2 und  $CM$ , so ist nach Definition

$$\frac{s_1}{s_2} := \frac{m_2}{m_1} . \quad (1.10.41)$$

Der Massenmittelpunkt befindet sich also immer näher bei der größeren Masse. Wegen  $s_1 = x_{cm} - x_1$  und  $s_2 = x_2 - x_{cm}$  ergibt sich

<sup>70</sup>Ein Beispiel dafür ist die potentielle Energie der Gravitation:  $f(x_{21}) = -G \frac{Mm}{x_{21}}$ .

<sup>71</sup>Es sei hier noch angemerkt, daß bei keiner Wechselwirkung zwischen Körpern das **Newtonsche** Wechselwirkungsgesetz exakt zu jedem Zeitpunkt gilt, da letztlich die Wechselwirkung nicht "momentan" erfolgt, sondern nur mit einer endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit (maximal mit  $c$ ). Dies manifestiert sich vor allem in Kraftwirkungen, die bei bewegten Körpern von deren Geschwindigkeit abhängen, wie z.B. der magnetischen Wechselwirkung zwischen bewegten Ladungen. Um die Impulserhaltung auch in diesen allgemeineren Fällen zu erfüllen, muß man neben den Teilchenimpulsen auch noch dem Kraftfeld, das die Wechselwirkung vermittelt und damit Impuls überträgt, einen Impuls zuordnen.

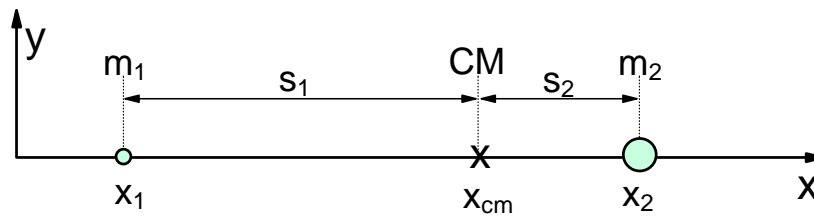


Abbildung 1.89: Zur Definition des Massenmittelpunktes.

$$m_1(x_{cm} - x_1) = m_2(x_2 - x_{cm}) \Rightarrow x_{cm}(m_1 + m_2) = m_1x_1 + m_2x_2 \quad (1.10.42)$$

oder

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \quad (1.10.43)$$

Bei allgemeiner Lage der Massen erhält man in Analogie zu Gl.(1.10.43) den Ortsvektor des Massenmittelpunktes zu

$$\mathbf{r}_{cm} := \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (1.10.44)$$

Schließlich läßt sich diese Definition auf  $n$  Massenpunkte mit Massen  $m_i$  und Ortsvektoren  $\mathbf{r}_i$  erweitern zu

$$\mathbf{r}_{cm} := \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (1.10.45)$$

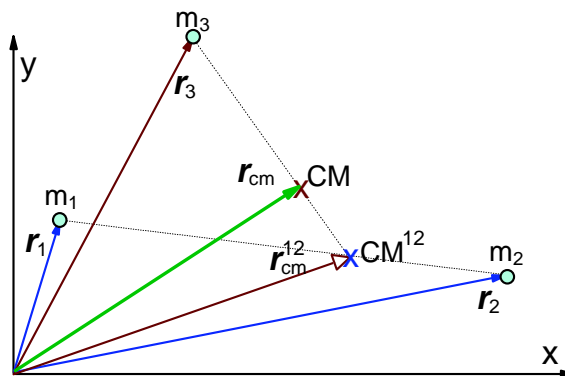


Abbildung 1.90: Zur sukzessiven Bestimmung des Massenmittelpunktes von mehreren Massenpunkten.

Bei mehr als 2 Massen liegt der Massenmittelpunkt im allgemeinen nicht mehr auf der Verbindungslinie zweier Massen, wie in Abb. 1.90 für 3 Massen veranschaulicht ist. Der Massenmittelpunkt läßt sich sukzessive ermitteln. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\text{cm}}^{12} &= \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \\ \Rightarrow \mathbf{r}_{\text{cm}} &= \frac{(m_1 + m_2) \mathbf{r}_{\text{cm}}^{12} + m_3 \mathbf{r}_3}{(m_1 + m_2) + m_3} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3} . \end{aligned} \quad (1.10.46)$$

Dieses Verfahren läßt sich auf  $n$  Massenpunkte erweitern, wodurch man zu Gl.(1.10.45) gelangt.

Mit der Gesamtmasse  $M = \sum_{i=1}^n m_i$  wird aus Gl.(1.10.45)

$$M \mathbf{r}_{\text{cm}} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i . \quad (1.10.47)$$

Die Differentiation dieses Ausdrucks nach der Zeit liefert für zeitlich konstante Massen

$$M \frac{d\mathbf{r}_{\text{cm}}}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} . \quad (1.10.48)$$

Hierbei bedeutet  $d\mathbf{r}_{\text{cm}}/dt := \mathbf{v}_{\text{cm}}$  die Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes. Denkt man sich die Gesamtmasse  $M$  des Systems im Massenmittelpunkt vereinigt, so erhält man den Impuls des Massenmittelpunktes zu

$$\mathbf{p}_{\text{cm}} := M \mathbf{v}_{\text{cm}} := M \frac{d\mathbf{r}_{\text{cm}}}{dt} . \quad (1.10.49)$$

Andererseits sind in Gl.(1.10.48)  $\mathbf{v}_i = d\mathbf{r}_i/dt$  die Geschwindigkeit und  $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$  der Impuls des  $i$ -ten Körpers des Gesamtsystems, so daß sich mit Gl.(1.10.7) für den Gesamtimpuls des Systems

$$\boxed{\mathbf{p}_{\text{cm}} = \mathbf{p}_{\text{tot}} \quad (1.10.50)}$$

ergibt. Das heißt, *der Impuls des Gesamtsystems ist gleich dem Impuls des Massenmittelpunktes*. Wenn man also vom Impuls eines ausgedehnten Körpers spricht, so meint man damit immer den Impuls seines Massenmittelpunktes.

Führt man nach Gl.(1.10.8) die Gesamtkraft  $\mathbf{F}_{\text{tot}}$  auf das System ein, so erhält man durch Differenzieren von Gl.(1.10.50) die Bewegungsgleichung des Gesamtsystems

$$\boxed{\mathbf{F}_{\text{tot}} = \frac{d\mathbf{p}_{\text{tot}}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}_{\text{cm}}}{dt} \quad (1.10.51)}$$

*Der Massenmittelpunkt des Systems bewegt sich also gerade so, wie wenn die Summe der an den Massen  $m_i$  angreifenden Kräfte  $\mathbf{F}_i$  auf einen Massenpunkt der Gesamtmasse  $M$  im Massenmittelpunkt einwirken würde.* Da der Massenmittelpunkt auch der *Schwerpunkt* des Systems genannt wird, heißt die Beziehung Gl.(1.10.51) auch der *Schwerpunktsatz*.

Ist das System abgeschlossen, d.h. wirken auf die Massen nur innere Kräfte, so verschwindet nach Gl.(1.10.27) die Gesamtkraft  $\mathbf{F}_{\text{tot}}$  und aus dem Schwerpunktsatz folgt

$$\mathbf{p}_{\text{cm}} = \text{const} \quad (\text{abgeschlossenes System}) \quad (1.10.52)$$

Der Massenmittelpunkt eines abgeschlossenen Systems gehorcht daher dem **Galileischen** Trägheitsprinzip.<sup>72</sup> Wenn äußere Kräfte wirken, wird  $\mathbf{F}_{\text{tot}}^* \neq 0$  und der Massenmittelpunkt erfährt eine Beschleunigung:

$$\mathbf{F}_{\text{tot}}^* = \frac{d\mathbf{p}_{\text{tot}}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}_{\text{cm}}}{dt} \quad (1.10.53)$$

Der Vergleich der Beziehungen (1.9.39) und (1.10.53) zeigt, daß die äußeren Kräfte sowohl für die Energie- als auch die Impulsänderung des Gesamtsystems von Massenpunkten verantwortlich sind.

Eine interessante Folgerung des Schwerpunktsatzes ist, daß die Flugbahn des Massenmittelpunkts in einem äußeren Kraftfeld unverändert bleibt, wenn ein Körper im Flug aufgrund von inneren Kräften mit  $\mathbf{F}_{\text{tot}} = 0$  explodiert. Dies kann bei einem explodierenden Feuerwerkskörper beobachtet werden. Der Massenmittelpunkt der Bruchstücke fliegt nach der Explosion auf einer Wurfparabel weiter.

#### Beispiel: Massenmittelpunkt des Systems Erde-Mond

Die Masse der Erde ist  $m_E = 5.98 \times 10^{24}$  kg, die des Mondes  $m_M = 7.35 \times 10^{22}$  kg und der mittlere Abstand der Mittelpunkte von Erde und Mond beträgt  $r_{EM} = 3.84 \times 10^8$  m.<sup>a</sup> Für den Abstand  $s_E$  und  $s_M$  des Erd- bzw. Mondmittelpunkts vom Massenmittelpunkt des Erde-Mond-Systems folgt dann  $s_E/s_M = m_M/m_E$ . Da nun  $r_{EM} = (s_E + s_M)$  ist (siehe Abb. 1.91), folgt

$$\frac{s_E}{r_{EM} - s_E} = \frac{m_M}{m_E} \Rightarrow s_E m_E = r_{EM} m_M - s_E m_M \Rightarrow s_E (m_E + m_M) = r_{EM} m_M$$

oder  $s_E = \frac{r_{EM} m_M}{m_E + m_M}$  . (1.10.54)

Mit obigen Zahlenwerten erhält man  $s_E = 4.66 \times 10^6$  m. Da der Erdradius  $r_E = 6.38 \times 10^6$  m beträgt, liegt der Massenmittelpunkt bei etwa 3/4 des Erdradius, also innerhalb der Erde. Dies liegt an dem großen Massenverhältnis von  $m_E/m_M \simeq 81$ .

<sup>a</sup>Der Massenmittelpunkt einer homogenen Kugel liegt dabei im Kugelmittelpunkt. Daher fällt der partielle Massenmittelpunkt der Erde und des Mondes mit dem jeweiligen Erd- bzw. Mondmittelpunkt zusammen. Beide Körper werden als Kugeln mit homogener Massenverteilung approximiert.

### Schwerpunktsystem

Die in einem Inertialsystem beobachtete geradlinig gleichförmige Bewegung des Massenmittelpunktes eines *abgeschlossenen Systems* von Massenpunkten eröffnet die Möglichkeit, auf ein Bezugssystem überzugehen, dessen Ursprung mit dem Massenschwerpunkt zusammenfällt und sich relativ zum Inertialsystem, das wir im folgenden mit *Laborsystem* bezeichnen werden, mit der konstanten Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_{\text{cm}}$  bewegt. Dieses Bezugssystem heißt *Schwerpunktsystem* und ist wiederum ein Inertialsystem. Laut Definition gilt für die Geschwindigkeit des Massenmittelpunkts im Schwerpunktsystem, also des Koordinatenursprungs<sup>73</sup>

<sup>72</sup>Es sei darauf hingewiesen, daß dies lediglich eine etwas abgewandelte Formulierung des Impulserhaltungssatzes ist.

<sup>73</sup>Die Größen im Schwerpunktsystem werde im folgenden zur Unterscheidung von denjenigen im Laborsystem mit einer Schlange versehenen.

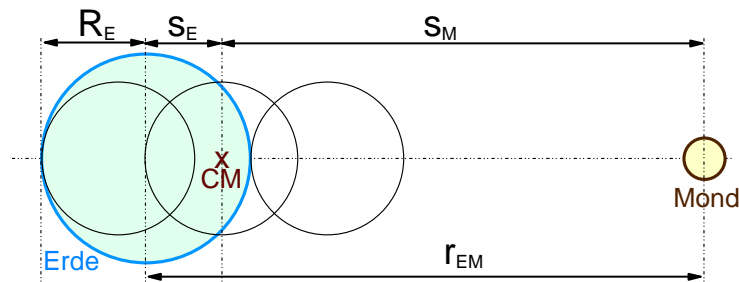


Abbildung 1.91: Massenmittelpunkt des Erde-Mond-Systems. Der Erdmittelpunkt und mit ihm alle Erdpunkte bewegen sich auf einer Kreisbahn um den Massenmittelpunkt. Da in guter Näherung die Erdachse im Raum stehen bleibt, ist die Bewegungsform der Erde allerdings keine Rotation um den Schwerpunkt sondern vielmehr eine Translationsbewegung der Erde parallel zu sich selbst auf einer Kreisbahn. Folglich durchlaufen alle Erdpunkte Kreise mit einheitlichem Radius  $s_E$ . Dies ist für den Erdmittelpunkt sowie den mond nächsten und mondfernten Erdpunkt gezeigt.

$$\tilde{\mathbf{v}}_{\text{cm}} = 0, \quad (1.10.55)$$

wobei der Übergang zum Schwerpunktsystem durch die **Galilei**transformation aus Abschnitt 1.8.1 vermittelt wird. Im Rahmen der nicht-relativistischen klassischen Mechanik sind dabei neben Beschleunigungen auch Massen und Kräfte galileiinvariant und man erhält

$$\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{a}}, \quad m = \tilde{m}, \quad \mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}}, \quad (1.10.56)$$

Dagegen transformiert sich die Geschwindigkeit und die kinetische Energie eines Massenpunktes bei der Transformation wie

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{v}_{\text{cm}}. \quad (1.10.57)$$

Das Schwerpunktsystem hat die bemerkenswerte Eigenschaft, daß der Gesamtimpuls  $\tilde{\mathbf{p}}_{\text{tot}}$  in diesem System verschwindet, was man einfach anhand von einem Zweikörpersystem mit den Massen  $m_1$  und  $m_2$  zeigen kann. Im Laborsystem ist  $\mathbf{p}_{\text{tot}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2$ . Die Schwerpunktgeschwindigkeit ergibt sich damit mit  $\mathbf{p}_{\text{cm}} = M \mathbf{v}_{\text{cm}} = \mathbf{p}_{\text{tot}} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2$  zu

$$\mathbf{v}_{\text{cm}} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (1.10.58)$$

Damit erhält man mit Gl.(1.10.57) den Gesamtimpuls im Schwerpunktsystem

$$\tilde{\mathbf{p}}_{\text{tot}} = \tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2 = m_1 \tilde{\mathbf{v}}_1 + m_2 \tilde{\mathbf{v}}_2 = m_1 (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{\text{cm}}) + m_2 (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{\text{cm}}), \quad (1.10.59)$$

woraus sich

$$\tilde{\mathbf{p}}_{\text{tot}} = 0 \quad (1.10.60)$$

ergibt.

Schließlich interessiert noch der Zusammenhang zwischen der kinetischen Energie  $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$  im Labor- und  $\tilde{E}_{kin} = \frac{1}{2}m\tilde{v}^2$  im Schwerpunktsystem. Für ein Zweikörpersystem ist die gesamte kinetischen Energie  $T_{tot} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$  und  $\tilde{T}_{tot} = \frac{1}{2}m_1\tilde{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\tilde{v}_2^2$ . Mit den obigen Transformationen erhält man

$$T_{\text{tot}} = \tilde{T}_{\text{tot}} + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 \quad (1.10.61)$$

Die gesamte kinetische Energie läßt sich also zerlegen in einen Anteil  $\tilde{T}_{\text{tot}}$ , der die kinetische Energie der Massenpunkte im Schwerpunktsystem (aufgrund ihrer Bewegung relativ zum Massenschwerpunkt) beschreibt, und einen Anteil  $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$ , der die Bewegung des Systems als ganzes erfaßt.<sup>74</sup>

Im vorangegangenen Abschnitt hatten wir gefunden, daß die potentielle Energie  $V = E_{\text{pot}}$  aufgrund der Translationsinvarianz der Wechselwirkung zwischen 2 Körpern nur von den Relativabständen der Körper abhängen kann. Da die **Galilei**transformation aber Relativabstände unverändert läßt, ist der Ansatz

$$V = \tilde{V} \quad (1.10.62)$$

für die **Galilei**invarianz der potentiellen Energie innerhalb der klassischen Mechanik konsistent. Die Gesamtenergie als Summe aus kinetischer und innerer potentieller Energie wird im Schwerpunktsystem als *innere Energie*  $U$  bezeichnet und ist durch

$$U := \tilde{T}_{\text{tot}} + \tilde{V}_{\text{tot}} \quad (1.10.63)$$

gegeben. Dabei steht  $\tilde{T}_{\text{tot}}$  für die Summe aller kinetischen Einzelenergien der Massenpunkte und  $\tilde{V}_{\text{tot}}$  für die Summe aller Wechselwirkungsenergien zwischen Paaren von Massenpunkten. Für die Gesamtenergie  $E$  im abgeschlossenen ursprünglichen Inertialsystem folgt dann mit  $E = T_{\text{tot}} + V_{\text{tot}} = \tilde{T}_{\text{tot}} + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \tilde{V}_{\text{tot}}$  die wichtige Beziehung

$$E = U + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 \quad (1.10.64)$$

Die Energie eines abgeschlossenen Systems von Massenpunkten ist demnach durch die Summe aus innerer Energie  $U$  und kinetischer Energie aufgrund der Schwerpunktsbewegung gegeben. Bei einem aus vielen Massenpunkten aufgebauten makroskopischen Körper meint man mit der kinetischen Energie immer nur den Term  $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$ , der die allen Massenpunkten gemeinsame Bewegung des Körpers beschreibt, während der Energieanteil der inneren Energie, der die innere Bewegung im Schwerpunktsystem berücksichtigt, nicht mitgerechnet wird.

<sup>74</sup>So ist beispielsweise für einen ruhenden Kasten, in dem sich Gasmoleküle bewegen, nur  $\tilde{T}_{\text{tot}} \neq 0$ , während bei einer Bewegung des gesamten Kastens noch die kinetische Energie  $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$  aufgrund der allen Gasmolekülen aufgeprägten Geschwindigkeit  $v_{cm}$  dazukommt.



Der Energiesatz besagt, daß für ein abgeschlossenes System die Gesamtenergie  $E$  nach Gl.(1.10.64) konstant sein soll. Da aber auch der Gesamtimpuls  $\mathbf{p}_{\text{tot}} = \mathbf{p}_{\text{cm}} = M\mathbf{v}_{\text{cm}} = \text{const}$  ist, gilt sogar einzeln  $\frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 = \text{const}$  und  $U = \text{const}$ . Bei der Verletzung dieser Gesetzmäßigkeit könnte sich z.B. die Bewegungsenergie eines einzelnen Körpers in innere Energie umwandeln, d.h. ein bewegter Körper könnte spontan zu Ruhe kommen ( $\mathbf{v}_{\text{cm}} = 0$ ) und dabei seine innere Energie erhöhen ("heiß" werden).

#### Experiment zum Impulserhaltungssatz: Luftkissenfahrzeuge

Durch das Zusammenschieben von zwei Luftkissenfahrzeugen wird eine zwischen diesen Fahrzeugen befindliche Feder gestaucht und mit Hilfe eines Fadens in dieser Stellung festgehalten. Es handelt sich dann um ein abgeschlossenes System, da keine äußeren Kräfte mehr einwirken. Der Gesamtimpuls  $\mathbf{p}_{\text{tot}}$  des Systems verschwindet, da sich beide Fahrzeuge in Ruhe befinden. Durchtrennt man nun den Faden, so erhalten die Fahrzeuge Kraftstöße  $\mathbf{F}\Delta t$  durch die Federkraft und damit Impulse, welche aufgrund von *actio = reactio* die gleiche Größe aber die entgegengesetzte Richtung haben:  $m_1\mathbf{v}_1 = -m_2\mathbf{v}_2$  oder  $m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = 0$ . Die Summe der Impulse verschwindet zu jedem Zeitpunkt und der Massenmittelpunkt bleibt in Ruhe. Für die Geschwindigkeiten gilt  $\mathbf{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\mathbf{v}_2$  und man erhält z.B.  $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2$  für  $m_1 = m_2$  oder  $\mathbf{v}_1 = -2\mathbf{v}_2$  für  $m_2 = 2m_1$ .

#### Experiment zum Impulserhaltungssatz: Abschluß von Pfeil

Ein Pfeil soll aus einem Rohr abgeschossen werden, das an einem Faden beweglich aufgehängt ist. Das Rohr bewegt sich beim Abschluß nach hinten, da es aufgrund der Impulserhaltung einen zum wegfliegenden Pfeil entgegengesetzten Impuls erhalten hat. Wird der Pfeil durch ein mit dem Rohr verbundenes Brett wieder aufgefangen, so bleibt das Gesamtsystem in Ruhe, da der Pfeil beim Auftreffen den Rückstoß des Rohres wieder exakt kompensiert.

Auf dem Satz der Erhaltung des Gesamtimpulses bei Abwesenheit von äußeren Kräften beruht auch der bereits oben diskutierte Raketenantrieb.

### 1.10.4 Die Stoßgesetze

Im folgenden soll der Stoß zwischen zwei Körpern unter Anwendung des Energie- und Impulssatzes diskutiert werden. Dabei wird unter Stoß die Wechselwirkung zwischen zwei Körpern verstanden. Um den Energie- und Impulssatz anwenden zu können, müssen wir annehmen, daß das Zwei-Körpersystem abgeschlossen ist. Das heißt, die Körper 1 und 2 sollen nur einer gegenseitigen Wechselwirkung  $V_{12}$  unterliegen, aber keinerlei Wechselwirkung  $V^*$  mit äußeren Kräften  $\mathbf{F}^*$  haben. Nur im speziellen Fall einer während des Stoßes konstanten potentiellen Energie  $V^*$  (z.B. durch konstantes Schwerfeld an der Erdoberfläche beim Stoß von Billardkugeln in einer horizontalen Ebene) sind äußere Kräfte zugelassen, da die damit verbundene potentielle Energie  $V^*$  in der Energiebilanz vor und nach dem Stoß nicht zum Tragen kommt. Weiterhin wollen wir nur das sogenannte *asymptotische Verhalten* der Stoßpartner diskutieren, d.h. Energie und Impuls vor und nach der Wechselwirkung sollen für einen Zeitpunkt, zu dem sich die beiden Körper bereits weit voneinander entfernt bewegen, betrachtet werden. Man erreicht dadurch, daß die Wechselwirkungsenergie  $V_{12}$  vernachlässigt werden kann. Diese Annahme vereinfacht die Analyse von Stoßprozessen wesentlich, da die genaue Form der Wechselwirkung gar nicht bekannt sein muß. Die abgeleiteten *Stoßgesetze* bekommen dadurch eine universelle Gültigkeit. Man kann sie in der gleichen Weise für den Stoß von makroskopischen Körpern wie Billardkugeln und von Elementarteilchen wie Elektronen, Protonen, Neutronen etc. anwenden. Andererseits verzichtet man bei einer solchen Analyse auf Aussagen über die Größe der Wechselwirkung und der ausgetauschten Impulse. Damit beschreiben die Stoßgesetze nicht die Dynamik des Prozesses, sondern lediglich die durch die Energie- und Impulserhaltung aufgezwungene Kinematik.

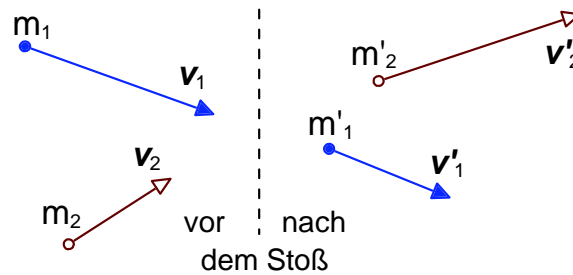


Abbildung 1.92: Zum Stoß zweier Massen.

Wir betrachten den in Abb. 1.92 skizzierten Stoß zwischen zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$  sowie mit den Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}_1$  und  $\mathbf{v}_2$  vor und  $\mathbf{v}'_1$  und  $\mathbf{v}'_2$  nach dem Stoß. Im allgemeinen sind die Körper aus vielen Massenpunkten aufgebaut und sind deswegen als Teilsysteme anzusehen, deren Energie  $E$  durch die Summen der inneren Energie  $U$  und der Bewegungsenergie  $\frac{1}{2}mv^2$  der jeweiligen Schwerpunkte gegeben ist. Der Impuls jedes Systems ist der Schwerpunktimпульs  $m\mathbf{v}$  des jeweiligen Körpers. Da das System der beiden Körper abgeschlossen sein soll, folgt aus dem Energie- und Impulssatz

	$E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2$	(1.10.65)
bzw.	$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + U_1 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + U_2 = \frac{1}{2}m'_1v_1'^2 + U'_1 + \frac{1}{2}m'_2v_2'^2 + U'_2$	(1.10.66)
und	$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2$	(1.10.67)
bzw.	$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m'_1\mathbf{v}'_1 + m'_2\mathbf{v}'_2$	(1.10.68)

Es ist zweckmäßig, Stoßprozesse in *elastische* und *inelastische Stöße* zu klassifizieren. Führt man mit  $\Delta U := (U'_1 + U'_2) - (U_1 + U_2)$  die beim Stoßprozeß eingetretene Änderung der gesamten inneren Energie ein, so erhält man durch Umformen von Gl.(1.10.66)

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m'_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m'_2v_2'^2 + \Delta U \quad (1.10.69)$$

Man kann somit folgende Klassifizierung vornehmen

$\Delta U = 0$	elastischer Stoß	
$\Delta U > 0$	inelastischer Stoß, endotherm	
$\Delta U < 0$	inelastischer Stoß, exotherm	(1.10.70)

Entsprechend dem Vorzeichen von  $\Delta U$  verändert sich die Summe der kinetischen Energien vor und nach dem Stoß.<sup>75</sup> Bei inelastisch exothermen Stößen nimmt die kinetische Energie beim Stoß zu. Solche Prozesse kommen hauptsächlich bei chemischen Reaktionen oder Kernreaktionen vor. Bei chemischen Reaktionen oder Kernreaktionen kann sich auch die Masse der Stoßpartner beim Stoß ändern. Im folgenden soll aber immer  $m_1 = m'_1$  und  $m_2 = m'_2$  gelten.

<sup>75</sup>Häufig wird zur Klassifizierung von Stößen auch die *Wärmetönung* oder  $Q$ -Wert der Reaktion verwendet, wobei  $Q = -\Delta U$  gilt.

### Der elastische Stoß

Wir wollen zuerst den elastischen Stoß näher diskutieren, bei dem  $\Delta U = 0$  gilt und deshalb die kinetische Energie über den Stoßprozeß hinweg erhalten bleibt. Die Wechselwirkung zwischen den Körpern ist hier durch eine potentielle Energie  $V_{12}$  beschreibbar, oder, anders formuliert, die Wechselwirkung wird durch konservative Kräfte vermittelt. Mit  $m_1 = m'_1$  und  $m_2 = m'_2$  ergibt sich aus Gl.(1.10.66) und (1.10.68)

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \quad (1.10.71)$$

$$\text{und} \quad m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2' \quad (1.10.72)$$

Bei vorgegebenen Anfangsbedingungen ( $m_1, m_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ) sind das 4 Gleichungen (eine skalare und eine vektorielle) für insgesamt 6 unbekannte Komponenten von  $\mathbf{v}_1'$  und  $\mathbf{v}_2'$ . Zwei Parameter bleiben daher unbestimmt und sind frei wählbar (z.B. die Flugrichtung des Teilchen 2 nach dem Stoß). Im allgemeinen benötigt man zur exakten Lösung Zusatzinformationen. Diese stecken in der genauen Wechselwirkung der Stoßpartner, die im Moment aber nicht diskutiert werden soll.

Bei Stoßexperimenten im Laboratorium wird i.a. das bewegte Teilchen 1 an dem ruhenden Teilchen 2 gestreut und der Energie- und Impulssatz vereinfachen sich zu

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \quad (1.10.73)$$

$$\text{und} \quad m_1\mathbf{v}_1 = m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2' \quad (1.10.74)$$

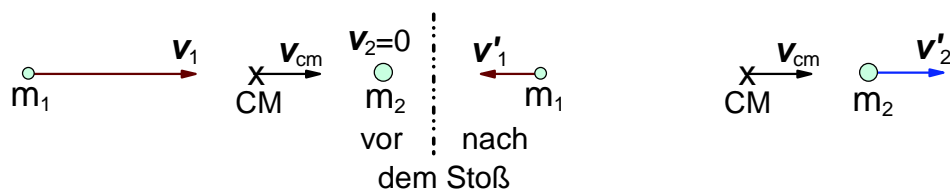


Abbildung 1.93: Zentraler Stoß im Laborsystem.

Wir beschränken uns nun vorerst auf den in Abb. 1.93 gezeigten *zentralen Stoß*, bei dem der Winkel zwischen  $\mathbf{v}_1$  und  $\mathbf{v}_2$  entweder  $0^\circ$  oder  $180^\circ$  betragen soll.<sup>76</sup> Durch Quadrieren von Gl.(1.10.74) erhält man

$$m_1^2v_1^2 = m_1^2v_1'^2 + m_2^2v_2'^2 + 2m_1m_2v_1v_2 \cos(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \quad (1.10.75)$$

Die Lösung des Gleichungssystems aus (1.10.73) und (1.10.75) ergibt für den *zentralen Stoß* mit  $\mathbf{v}_2 = 0$

$$\boxed{\mathbf{v}_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{v}_1 \quad (1.10.76)}$$

<sup>76</sup>Durch Vorgabe der Flugrichtung von Körper 2 ist das Gleichungssystem jetzt voll lösbar.

Man kann folgende Sonderfälle des zentralen Stoßes betrachten:

- $m_1 = m_2 \Rightarrow \mathbf{v}'_1 = 0$  und  $\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_1$ .  
Nach dem Zusammenstoß bleibt Körper 1 in Ruhe und gibt seinen gesamten Impuls an  $m_2$  ab.

**Beispiel: Kugelspiel**

Beispiel: Es werden identische Stahlkugeln an gleichlangen Fäden so aufgehängt, daß sie sich gerade berühren. Lenkt man die äußerste linke Kugel aus und läßt sie gegen die anderen, ruhenden Kugeln schwingen, so bleiben alle Kugeln in Ruhe bis auf die äußerste rechte Kugel, auf die der volle Impuls übertragen wird und dadurch ausschwingt. Die rechte Kugel schwingt dann wieder zurück und der gleiche Vorgang wiederholt sich in umgekehrter Richtung.

- $m_1 > m_2 \Rightarrow \mathbf{v}'_1 \parallel \mathbf{v}_1$  und  $|\mathbf{v}'_2| > |\mathbf{v}_1|$ .  
Körper 1 und 2 bewegen sich nach dem Stoß in die gleiche Richtung, Körper 2 besitzt die größere Geschwindigkeit.
- $m_1 < m_2 \Rightarrow \mathbf{v}'_1 \parallel -\mathbf{v}_1$  und  $|\mathbf{v}'_2| < |\mathbf{v}_1|$ .  
Körper 1 und 2 bewegen sich nach dem Stoß in die entgegengesetzte Richtung, Körper 2 besitzt die kleinere Geschwindigkeit.
- $m_1 \gg m_2 \Rightarrow \mathbf{v}'_1 \simeq \mathbf{v}_1$  und  $\mathbf{v}'_2 \simeq 2\mathbf{v}_1$ .  
Diese Situation beschreibt z.B. den Stoß eines Atomkerns mit einem Elektron. Die maximale Geschwindigkeit, die dem Körper 2 verliehen werden kann, ist die doppelte Anfangsgeschwindigkeit  $2v_1$ .
- $m_1 \ll m_2 \Rightarrow \mathbf{v}'_1 \simeq -\mathbf{v}_1$  und  $\mathbf{v}'_2 \simeq 0$ .  
Diese Situation beschreibt z.B. den Stoß eines Elektrons mit einem Atomkern. Wie erwartet, bewegt sich die große Masse nicht, während die kleine Masse reflektiert wird.

**Stoßexperimente mit Luftkissenbahn:**

Auf einer Luftkissenbahn können sich Massen unterschiedlicher Größe reibungsfrei bewegen. Mit einer solchen Bahn können die obigen Fälle in einem einfachen Experiment realisiert werden.

Wir betrachten nun die Energieverhältnisse für den zentralen elastischen Stoß ( $\mathbf{v}_2 = 0$ ). Mit den Ausdrücken (1.10.76) für die Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}'_1$  und  $\mathbf{v}'_2$  erhält man

$$\mathbf{E}'_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = \frac{1}{2} m_1 \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 v_1^2 = \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 E_1 \quad (1.10.77)$$

$$\mathbf{E}'_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m_2 \left( \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 v_1^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_1 \quad (1.10.78)$$

Das Verhältnis  $E'_2/E_1$  stellt die *relative Energieabgabe* des Körpers 1 an den Körper 2 dar und ist gegeben durch

$$\frac{E'_2}{E_1} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \quad (1.10.79)$$

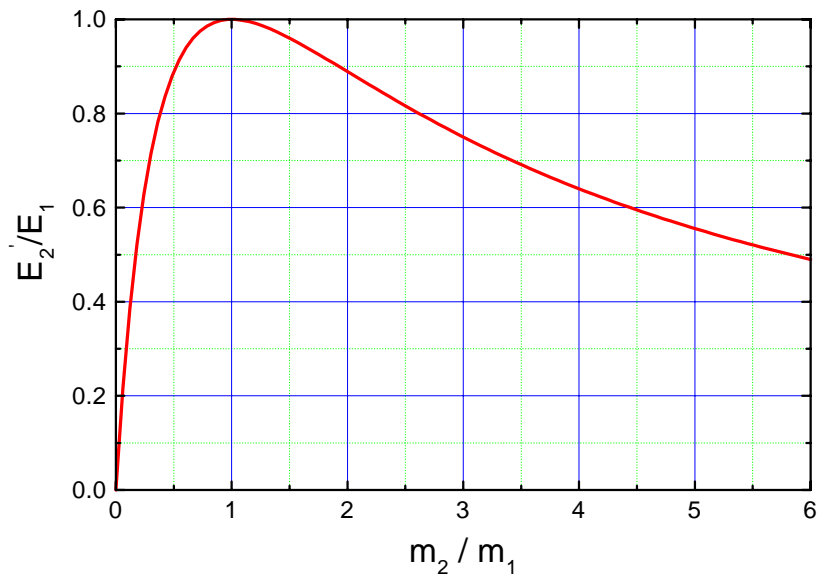


Abbildung 1.94: Energieübertrag beim zentralen elastischen Stoß.

Der Energieübertrag ist in Abb. 1.94 gezeigt. Er ist immer kleiner oder gleich Eins, d.h.  $E'_2 \leq E_1$ . Körper werden deshalb bei Stoßprozessen immer abgebremst (themalisiert). Der Energieübertrag ist maximal für  $m_1 = m_2$ . Hier ist  $E'_2 = E_1$ , d.h. beim zentralen Stoß gleichgroßer Massen wird die Energie vollständig übertragen.

**Beispiel: Thermalisierung von Neutronen**

Die Tatsache, daß beim Stoß gleichgroßer Massen am meisten Energie transferiert werden kann, macht man sich z.B. in Kernreaktoren zum Bremsen (Thermalisieren) von schnellen Neutronen zu Nutze. Beim Stoß eines Neutrons mit Masse  $m_n$  und Geschwindigkeit  $v_n$  mit einem Stoßpartner der Masse  $m_2$  und Geschwindigkeit  $v_2$  gilt  $v'_n = \frac{m_n - m_2}{m_n + m_2} v_n$ . Das heißt,  $v'_n$  wird sehr klein, wenn  $m_2 \simeq m_n$ . Man benutzt deshalb zur Moderation von schnellen Neutronen in Kernreaktoren Wasser, da die Protonen des Wassers eine sehr ähnliche Masse wie die Neutronen besitzen ( $m_n \simeq m_p$ ).

**Beispiel: Stoß einer Masse mit über Feder gekoppeltem Massenpaar**

Auf einer Luftkissenbahn befinden sich drei identische Massen, wobei zwei Massen über eine Feder miteinander gekoppelt sind (siehe Abb. 1.95). Alle Massen können sich reibungsfrei auf der Bahn bewegen. Die Masse 1 bewegt sich mit Geschwindigkeit  $v_1$  auf das ruhende Massenpaar ( $v_2 = 0$ ) zu und vollzieht mit diesem einen Stoß. Der Stoß geschieht allerdings nur mit einer Masse des Paares, da die Stoßzeit kurz gegenüber der charakteristischen Schwingungsdauer des Masse-Feder-Systems ist. Da alle drei Massen gleich sein sollen, wird  $v'_1 = 0$ . Durch den Stoß erhält das Massenpaar eine endliche Translationsgeschwindigkeit  $v_2$  (Schwerpunktgeschwindigkeit) und wird gleichzeitig zu einer Schwingung angeregt. Aus dem Impulssatz  $mv_1 = 2mv'_2$  folgt  $v'_2 = v_1/2$ . Aus dem Energiesatz  $\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(2m)v_2'^2 + E_{\text{vibrat}}$  ergibt sich  $E_{\text{vibrat}} = \frac{1}{4}mv_1^2 = T/2$ . Das heißt, jeweils die Hälfte der kinetischen Energie der stoßenden Masse 1 wird in Schwingungsenergie und in kinetische Energie der Schwerpunktbewegung des Massenpaares umgesetzt.

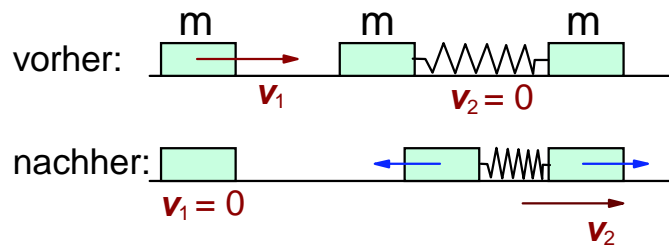


Abbildung 1.95: Zentraler Stoß zwischen einer Masse  $m$  und einem über eine Feder gekoppelten Massenpaar.

**Blasenkammeraufnahme:  $\beta$ -Zerfall und Neutrino**

Würde der  $\beta$ -Zerfall von  ${}^6_2\text{He}$  nach der Reaktion  ${}^6_2\text{He} \rightarrow {}^6_3\text{Li} + e^-$  ablaufen, so würde man, da sich  ${}^6_2\text{He}$  vor dem Zerfall in Ruhe befinden soll, nach dem Impulssatz erwarten, daß sich die beim Zerfall entstandenen Teilchen entgegengesetzt auseinander bewegen. In einem Blasenkammerexperiment beobachtet man, daß beim Zerfall zwar zwei Teilchen entstehen, daß aber der Winkel zwischen ihren Geschwindigkeitsvektoren kleiner als  $180^\circ$  ist. Man kann daraus folgern, daß beim Zerfall ein weiteres, für den Blasenkammernachweis unsichtbares Teilchen entstanden sein muß. Dieses Teilchen ist ein Antineutrino und die richtige Reaktionsgleichung für den  $\beta$ -Zerfall lautet:  ${}^6_2\text{He} \rightarrow {}^6_3\text{Li} + e^- + \bar{\nu}$ .

Es soll nun der nichtzentrale oder *schiefe elastische Stoß* diskutiert werden. Hierbei treten beliebige Stoßwinkel zwischen der Einfallsrichtung von Körper 1 und den Emissionsrichtungen der Teilchen 1 und 2 auf. Wie in Abb. 1.96 gezeigt ist, fliegt die Masse  $m_2$  beim schiefen Stoß in Richtung der Stoßachse (Verbindungsline der Mittelpunkte der beiden Massen) weg, da nur in der Stoßachsenrichtung Impuls übertragen wird. Die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Stoßachse bleibt unbeeinflusst, weil keine Kräfte wirken. Die Geschwindigkeitskomponente in Stoßrichtung ist  $v_1 \cos \varphi$ . Mit dieser läßt sich der schiefe Stoß als zentraler Stoß in Richtung der Stoßachse mit der Einschußgeschwindigkeit  $v_1 \cos \varphi$  interpretieren. Für den relativen Energieübertrag gilt dann

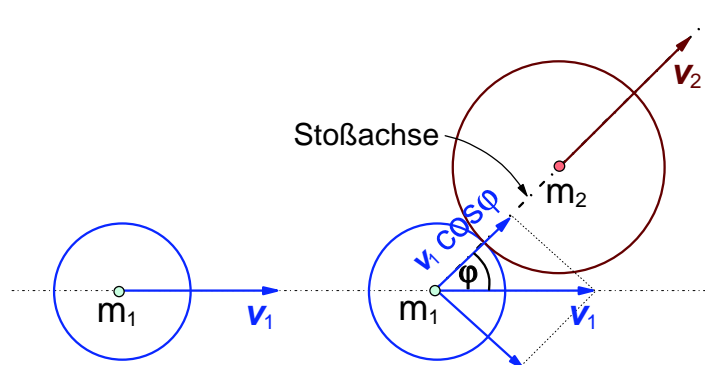


Abbildung 1.96: Impulsdiagramm des schiefen elastischen Stoßes.

$$\frac{E'_2}{E_1} = \frac{4m_1m_2 \cos^2 \varphi}{(m_1 + m_2)^2} \quad (1.10.80)$$

Es gelten nach wie vor die Beziehungen (1.10.73) und (1.10.74) für die Energie- und Impulserhaltung. Für die Geschwindigkeiten ergeben sich aus diesen Beziehungen allerdings komplizierte Ausdrücke, die

hier nicht im Detail diskutiert werden sollen. Im Falle gleicher Massen  $m_1 = m_2$  vereinfacht sich jedoch die Ausgangsgleichung zu

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \quad (1.10.81)$$

$$\text{und} \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_2' \Rightarrow v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 + 2|\mathbf{v}_1'| |\mathbf{v}_2'| \cos(\mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2') . \quad (1.10.82)$$

Beide Beziehungen lassen sich nur dann erfüllen, wenn  $\cos(\mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2') = 0$  bzw.  $(\mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2') = 90^\circ$  ist. Beispiele dafür sind der Stoß zweier Billardkugeln, die Streuung von  $\alpha$ -Teilchen an Heliumkernen bzw. die Streuung von Protonen an Protonen. Letztere Streuprozesse von Elementarteilchen können eindrucksvoll anhand von Nebel- oder Blasenkammeraufnahmen sichtbar gemacht werden.

### Der inelastische Stoß

Treten zum Zeitpunkt des Zusammentreffens zweier Körper auch nichtkonservative Kräfte auf (diese führen z.B. zu einer Deformation der Körper beim Stoß), so gilt der Energiesatz nur in seiner erweiterten Form. Wir nehmen an, daß Körper 2 vor dem Stoß ruht ( $\mathbf{v}_2 = 0$ ) und die Massen vor und nach dem Stoß gleich groß sind ( $m_1 = m_1'$  und  $m_2 = m_2'$ ). Aus den Gln.(1.10.73) und (1.10.74) folgt dann

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + \Delta U \quad (1.10.83)$$

$$\text{und} \quad m_1 \mathbf{v}_1 = m_1 \mathbf{v}_1' + m_2 \mathbf{v}_2' . \quad (1.10.84)$$

Das sind bei vorgegebenem  $m_1$ ,  $m_2$  und  $\mathbf{v}_1$  vier Gleichungen mit sechs Unbekannten in  $\mathbf{v}_1'$  und  $\mathbf{v}_2'$  und der zusätzlichen Unbekannten  $\Delta U$ . Wenn wir Stöße zwischen makroskopischen Körpern ins Auge fassen, so ist die Reaktion endotherm und die Zunahme  $\Delta U$  der inneren Energie geht zu Lasten der kinetischen Schwerpunktsenergien der einzelnen Körper. Vom Energiesatz aus gesehen sind für  $\Delta U$  alle Werte in Bereich  $0 \leq \Delta U \leq \frac{1}{2} m_1 v_1^2$  zulässig. Der Grenzfall  $\Delta U = 0$  wurde beim elastischen Stoß bereits behandelt. Der andere Grenzfall,  $\Delta U = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$ , ist dagegen in Wirklichkeit nicht erreichbar, da hierzu gleichzeitig  $v_1' = 0$  und  $v_2' = 0$  sein müßten, was im Widerspruch zum Impulssatz steht.

Im folgenden soll überlegt werden, wie groß  $\Delta U$  maximal werden kann, um noch mit dem Impulssatz verträglich zu sein. Anschaulich ist klar, daß der maximale Wert für  $\Delta U$  beim zentralen Stoß erreicht wird, da dies dem "kräftigsten" Stoß entspricht, bei dem Körper 1 den Körper 2 voll trifft. Der zentrale Stoß verläuft entlang einer Geraden und im folgenden sollen die Geschwindigkeitskomponenten entlang der Gerade einfach mit  $v$  bezeichnet werden. Aus den Beziehungen (1.10.83) und (1.10.84) erhält man dann

$$v_2' = \frac{m_1}{m_2} v_1 - \frac{m_1}{m_2} v_1' = \frac{m_1}{m_2} (v_1 - v_1') \quad (1.10.85)$$

$$\text{und} \quad \Delta U = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 - \frac{1}{2} m_2 \frac{m_1^2}{m_2^2} (v_1 - v_1')^2 . \quad (1.10.86)$$

Den Extremalwert von  $\Delta U$  finden wir aus der Bedingung  $d(\Delta U)/dv_1' = 0$  oder

$$-m_1 v_1' - \frac{m_1^2}{m_2} (v_1 - v_1')(-1) = 0 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} v_1 = v_1' + \frac{m_1}{m_2} v_1' = \frac{m_1 + m_2}{m_2} v_1' \quad (1.10.87)$$

$$\text{bzw.} \quad v_1' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 . \quad (1.10.88)$$

Mit obigem Ausdruck für  $v_2'$  erhält man dann

$$v_2' = \frac{m_1}{m_2}(v_1 - v_1') = \frac{m_1}{m_2} \left( v_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \right) = \frac{m_1(m_1 + m_2) - m_1^2}{m_2(m_1 + m_2)} v_1 \quad (1.10.89)$$

$$\text{bzw.} \quad v_2' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (1.10.90)$$

Wir haben also das wichtige Resultat, daß der *vollkommen inelastische Stoß* mit maximalem  $\Delta U$ -Wert durch

$$v_1' = v_2' \quad (1.10.91)$$

charakterisiert ist. Beide Körper fliegen nach dem Stoß mit gleicher Geschwindigkeit weiter (siehe Abb. 1.97), die dann auch der Schwerpunktsgeschwindigkeit entspricht, d.h.  $v_1' = v_2' = v_{cm}$ . Beispiele für einen voll inelastischen Stoß sind z.B. der Einfang eines Neutrons in einem Atomkern oder das Steckenbleiben eines Geschosses in einem Stück Holz.

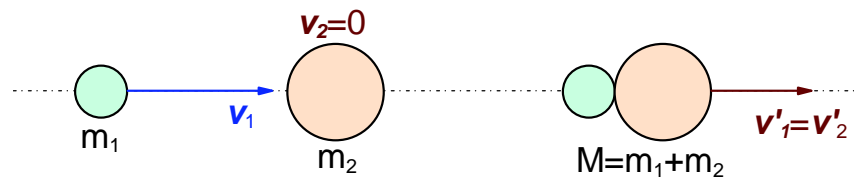


Abbildung 1.97: Der vollkommen inelastische Stoß zweier Körper mit Masse  $m_1$  und  $m_2$ . Die Geschwindigkeiten nach dem Stoß sind identisch,  $v_1' = v_2' = v_{cm}$ .

Zur Berechnung des maximalen  $\Delta U$  Wertes setzen wir Gl.(1.10.91) in Gl.(1.10.83) ein und erhalten

$$\Delta U_{\max} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{cm}^2 \quad (1.10.92)$$

$$\text{bzw.} \quad \Delta U_{\max} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} M v_{cm}^2 \quad (1.10.93)$$

Diese Beziehung besagt, daß allenfalls die um die Schwerpunktsenergie  $\frac{1}{2} M v_{cm}^2$  verminderte anfängliche Energie  $T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$  für eine Energieumwandlung zur Verfügung steht. Wegen  $v_{cm} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$  ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} \Delta U_{\max} &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \frac{m_1^2 v_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \\ &= \frac{1}{2} m_1 \left( 1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_1^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1^2 \end{aligned} \quad (1.10.94)$$

bzw. mit der reduzierten Masse  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

$$\Delta U_{\max} = \frac{1}{2} \mu v_1^2 \quad (1.10.95)$$



Für das Verhältnis von  $\Delta U_{\max}$  zu der anfangs zur Verfügung stehenden Energie  $T_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2$  findet man

$$\frac{\Delta U_{\max}}{T_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{1 + m_1/m_2} \quad (1.10.96)$$

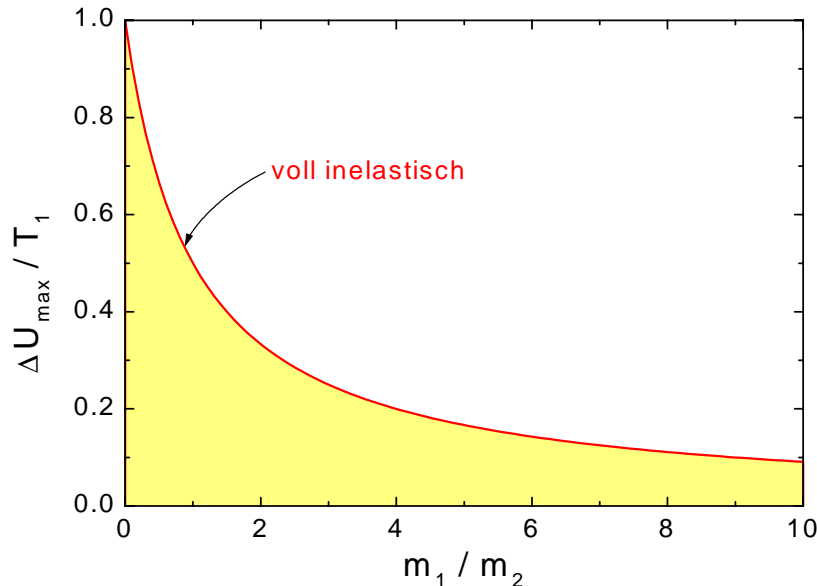


Abbildung 1.98: Zur Umwandlung von kinetischer in innere Energie beim inelastischen Stoß. Die durchgezogene Linie zeigt den Energieübertrag beim vollkommen inelastischen Stoß. Die getönte Fläche gibt den möglichen Wertebereich zwischen elastischem ( $\Delta U/T_1 = 0$ ) und voll inelastischem Stoß an.

Die Funktion  $\frac{\Delta U_{\max}}{T_1}(m_1/m_2)$  ist in Abb. 1.98 gezeigt. Je kleiner  $m_1$  im Vergleich zu  $m_2$  ist, umso besser kann die kinetische Energie  $T_1$  in innere Energie umgewandelt werden.

#### Experiment: Das ballistische Pendel

Eine Gewehr­kugel der Masse  $m_1$  wird mit einer Geschwindigkeit  $v_1$  auf ein Pendel geschossen. Das Pendel soll sich in der Ruhelage befinden ( $v_2 = 0$ ) und die Kugel soll im Pendelkörper der Masse  $m_2$  beim Aufprall stecken bleiben (siehe Abb. 1.99). Ist die Abbremszeit der Gewehr­kugel klein gegen die Schwingungsdauer des Pendels, so kann man ansetzen, daß das Pendel den gesamten Stoß in der Ruhelage  $\varphi = 0$  erfährt und die Geschwindigkeit  $v_2'$  identisch mit der Maximalgeschwindigkeit  $v_{\max}$  der harmonischen Pendelschwingung im Nulldurchgang ist (*ballistisches Pendel*). Mit der Schwingungsamplitude  $\varphi_0$  und der Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi/T$  ist  $\varphi(t) = \varphi_0 \sin \omega t$ ,  $d\varphi/dt = \omega \varphi_0 \cos \omega t$  und  $v_{\max} = l \frac{d\varphi}{dt}(0) = l\omega \varphi_0$ , wenn  $l$  die Pendellänge bedeutet. Insgesamt ergibt sich damit

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} v_2' = \frac{m_1 + m_2}{m_1} l\omega \varphi_0 \quad (1.10.97)$$

Die Größen auf der rechten Seite lassen sich alle leicht messen, wodurch Gl.(1.10.97) eine einfache Bestimmung von Geschößgeschwindigkeiten gestattet.

### 1.10.5 Stoßvorgänge im Schwerpunktsystem

Die Behandlung von Stoßprozessen wird häufig einfacher, wenn man die Vorgänge statt im Laborsystem im Schwerpunktsystem beschreibt, wie es in Abschnitt 1.10.3 eingeführt wurde. Für das Schwerpunkt-

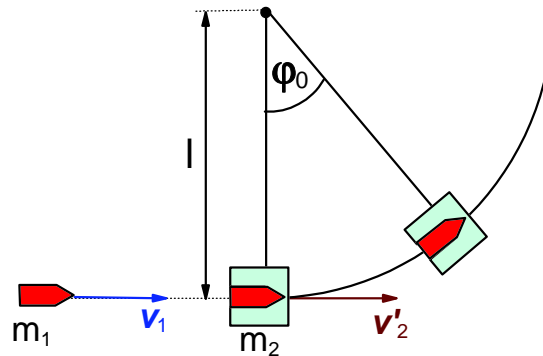


Abbildung 1.99: Das ballistische Pendel.

system gilt für den elastischen Stoß (vergleiche Gl.(1.10.58) bis (1.10.61))<sup>77</sup>

$$\tilde{\mathbf{p}}_{\text{tot}} = m_1 \tilde{\mathbf{v}}_1 + m_2 \tilde{\mathbf{v}}_2 = 0 \quad \text{vor dem Stoß} \quad (1.10.98)$$

$$\tilde{\mathbf{p}}'_{\text{tot}} = m_1 \tilde{\mathbf{v}}'_1 + m_2 \tilde{\mathbf{v}}'_2 = 0 \quad \text{nach dem Stoß} \quad (1.10.99)$$

Das heißt, die Impulse vor und nach dem Stoß sind entgegengesetzt und gleich groß. Aus diesen Beziehungen für den Impuls folgen zusammen mit dem Energieerhaltungssatz

$$\frac{1}{2} m_1 \tilde{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \tilde{v}_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \tilde{v}'_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 \tilde{v}'_2{}^2 \quad (1.10.100)$$

die Aussagen

$$|\tilde{\mathbf{v}}'_1| = |\tilde{\mathbf{v}}_1| \quad |\tilde{\mathbf{v}}'_2| = |\tilde{\mathbf{v}}_2| \quad (1.10.101)$$

$$\text{und} \quad |\tilde{\mathbf{p}}'_1| = |\tilde{\mathbf{p}}_1| \quad |\tilde{\mathbf{p}}'_2| = |\tilde{\mathbf{p}}_2| \quad (1.10.102)$$

Im Schwerpunktsystem werden also die Beträge der Geschwindigkeit durch den elastischen Stoß nicht verändert. Die kinetischen Energien beider Teilchen werden somit im Schwerpunktsystem einzeln erhalten. In Abschnitt 1.10.3 wurde bereits gezeigt, daß sich die gesamte kinetische Energie  $T_{\text{tot}}$  im Laborsystem als Summe der gesamten kinetischen Energie  $\tilde{T}_{\text{tot}}$  im Schwerpunktsystem und einem Anteil  $\frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2$  ausdrücken läßt, der die kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung erfaßt. Die gesamte kinetische Energie im Schwerpunktsystem ist folglich immer kleiner als diejenige im Laborsystem,  $\tilde{T}_{\text{tot}} \leq T_{\text{tot}}$ .<sup>78</sup>

Aufgrund der Beziehung zwischen den Impulsen und Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß (Gln.(1.10.98) bis (1.10.102)) und der Geschwindigkeitstransformation zwischen Labor und Schwerpunktsystem,  $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{v}_{\text{cm}}$  (vergleiche Gl.(1.10.57)) lassen sich die Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}'_1$  und  $\mathbf{v}'_2$  nach dem Stoß im Laborsystem geometrisch konstruieren (siehe Abb. 1.100).

<sup>77</sup>Die gestrichelten Größen bezeichnen diejenigen nach dem Stoß. Die Größen im Schwerpunktsystem sind zur Unterscheidung zu denjenigen im Laborsystem wie in Abschnitt 1.10.3 mit einer Schlange versehen.

<sup>78</sup>Für den Spezialfall  $v_2 = 0$ , bei dem der Körper 2 im Laborsystem vor dem Stoß ruht, erhält man  $\tilde{T}_{\text{tot}} = \frac{m_1}{m_1+m_2} T_{\text{tot}}$ .

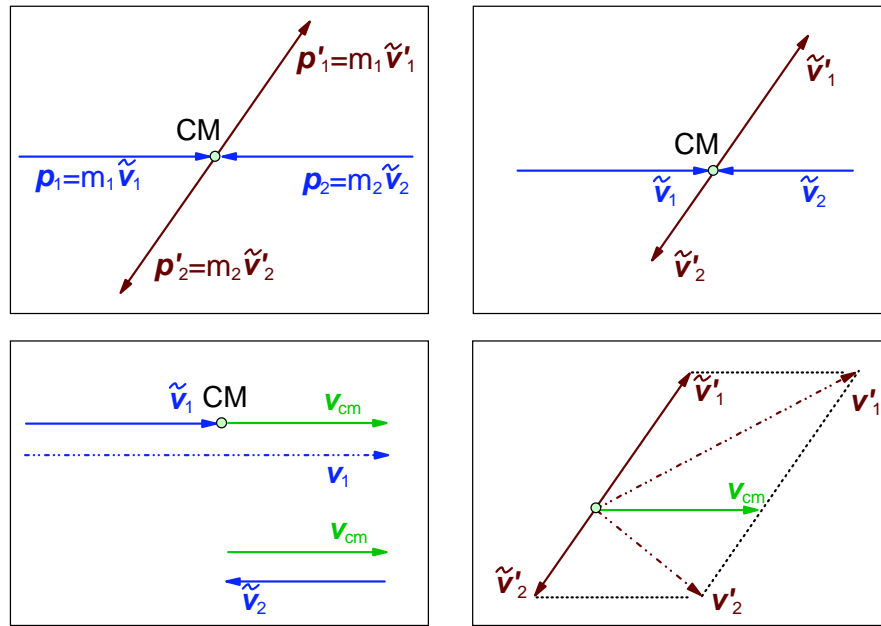


Abbildung 1.100: Impulse und Geschwindigkeiten beim elastischen Stoß im Labor- und Schwerpunktsystem für  $v_2 = 0$ . Die mit einer Schlange versehenen Größen stellen die Geschwindigkeiten und Impulse im Schwerpunktsystem dar. Die gestrichelten Größen entsprechen den Größen nach dem Stoß.

Die Endpunkte der Vektoren  $\tilde{v}'_1$  und  $\tilde{v}'_2$  liegen auf Kreisen um den Massenmittelpunkt mit Radien  $|\tilde{v}'_1|$  und  $|\tilde{v}'_2|$ . Außerdem stehen  $\tilde{v}'_1$  und  $\tilde{v}'_2$  antiparallel zueinander. Diesen Geschwindigkeiten im Schwerpunktsystem überlagert sich im Laborsystem die Schwerpunktschwindigkeit  $v_{cm}$ . Die Endpunkte von  $v'_1$  und  $v'_2$  liegen demnach auf dem um  $v_{cm}$  verschobenen Kreisen.

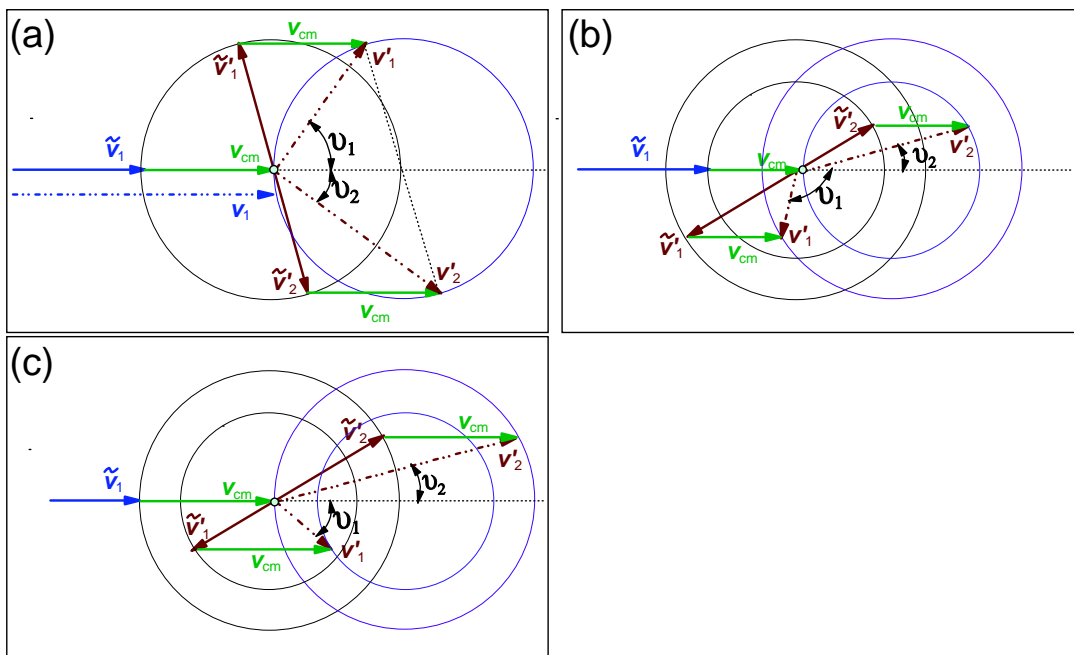


Abbildung 1.101: Impulsdiagramm des schiefen elastischen Stoßes im Laborsystem für  $m_1 = m_2$  (a),  $m_1 < m_2$  (b) und  $m_1 > m_2$  (c).

Man unterscheidet 3 Fälle:

1.  $m_1 = m_2$  (siehe Abb. 1.101a):

Aus obigen Überlegungen folgt:

$$\mathbf{v}_2 = 0; \quad \mathbf{v}_{\text{cm}} = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1; \quad |\tilde{\mathbf{v}}'_1| = |\tilde{\mathbf{v}}_1| = \frac{1}{2}|\mathbf{v}_1| = |\tilde{\mathbf{v}}'_2| = |\tilde{\mathbf{v}}_2| = |\mathbf{v}_{\text{cm}}| .$$

Aus Abb. 1.101a wird klar, daß der Winkel  $\alpha = \vartheta_1 + \vartheta_2$  zwischen den beiden Stoßpartnern nach **Thales** stets  $90^\circ$  ist. Man kann ferner folgende Grenzfälle diskutieren:

- (a) Wenn  $\vartheta_1 = 90^\circ$ , dann ist  $\vartheta_2 = 0^\circ$  und damit  $\mathbf{v}'_1 \rightarrow 0$ . Das heißt,  $m_1$  ist nach dem Stoß in Ruhe (zentraler Stoß, vergleiche Abschnitt 1.10.4).  
 (b) Wenn  $\vartheta_1 = 0^\circ$ , dann ist  $\vartheta_2 = 90^\circ$  und damit  $\mathbf{v}'_2 \rightarrow 0$ . Das heißt,  $m_2$  ist nach dem Stoß in Ruhe (streifender Stoß).

2.  $m_1 < m_2$  (siehe Abb. 1.101b):

Aus obigen Überlegungen folgt:

$$|\mathbf{v}_{\text{cm}}| < \frac{1}{2}|\mathbf{v}_1|; \quad |\tilde{\mathbf{v}}'_1| = |\tilde{\mathbf{v}}_1| > \frac{1}{2}|\mathbf{v}_1|; \quad |\tilde{\mathbf{v}}'_2| = |\tilde{\mathbf{v}}_2| = |\mathbf{v}_{\text{cm}}| .$$

Der Winkel  $\alpha$  zwischen den beiden Stoßpartnern ist in diesem Fall größer als  $90^\circ$  (siehe Abb. 1.101b). Man kann wiederum folgende Grenzfälle diskutieren:

- (a) Wenn  $\vartheta_1 = 180^\circ$ , dann ist  $\vartheta_2 = 0^\circ$  und  $m_1$  bewegt sich nach dem Stoß rückwärts,  $m_2$  vorwärts (zentraler Stoß).  
 (b) Wenn  $\vartheta_1 = 0^\circ$ , dann wird  $\mathbf{v}'_2 \rightarrow 0$ . Das heißt,  $m_2$  ist nach dem Stoß in Ruhe (streifender Stoß).

3.  $m_1 > m_2$  (siehe Abb. 1.101c):

Aus obigen Überlegungen folgt:

$$|\mathbf{v}_{\text{cm}}| > \frac{1}{2}|\mathbf{v}_1|; \quad |\tilde{\mathbf{v}}'_1| = |\tilde{\mathbf{v}}_1| < \frac{1}{2}|\mathbf{v}_1|; \quad |\tilde{\mathbf{v}}'_2| = |\tilde{\mathbf{v}}_2| = |\mathbf{v}_{\text{cm}}| .$$

Man erkennt, daß in allen Fällen der Winkel  $\vartheta_2 \leq 90^\circ$  ist (siehe Abb. 1.101c). Man kann wiederum folgende Grenzfälle diskutieren:

- (a) Wenn  $\vartheta_2 = 0^\circ$ , dann wird auch  $\vartheta_1 = 0^\circ$ . Das heißt,  $m_1$  und  $m_2$  bewegen sich nach dem Stoß in Vorwärtsrichtung (zentraler Stoß).  
 (b) Wenn  $\vartheta_1 = 0^\circ$ , dann wird  $\vartheta_2 \rightarrow 0$  und  $m_2$  bleibt nach dem Stoß in Ruhe (streifender Stoß).

Allgemein gilt für den zentralen Stoß, daß sich  $m_2$  nach dem Stoß immer in Vorwärtsrichtung bewegt und sich  $m_1$  nur für  $m_1 < m_2$  in Rückwärtsrichtung bewegt, für  $m_1 = m_2$  dagegen in Ruhe bleibt und für  $m_1 > m_2$  nach vorne fliegt. Das bedeutet, daß Teilchen mit  $m_1 < m_2$  in den ganzen Raum, solchen mit  $m_1 = m_2$  nur in den vorderen Halbraum und schließlich solche mit  $m_1 > m_2$  nur in einen Bruchteil des vorderen Halbraums gestreut werden. Der erlaubte Winkelbereich ist also abhängig vom Massenverhältnis der Stoßpartner. Durch Bestimmung des maximalen Stoßwinkels läßt sich dieses Massenverhältnis experimentell bestimmen.

### 1.10.6 Winkelverteilung und Wirkungsquerschnitt

Die bisherigen Betrachtungen gestatten nur kinematische Aussagen über den Zusammenhang zwischen den Impulsen bzw. Energien der Stoßpartner nach dem Stoß und den Streuwinkeln. Es konnten aber keine Aussagen über die Wahrscheinlichkeit gemacht werden, mit der die Stoßpartner unter einem bestimmten Streuwinkel auseinander fliegen. Hierzu ist die Kenntnis der Kräfte bei der Wechselwirkung der beiden Stoßpartner notwendig. Dies soll in folgendem am Beispiel zweier harter Kugeln (Billardspiel) veranschaulicht werden.

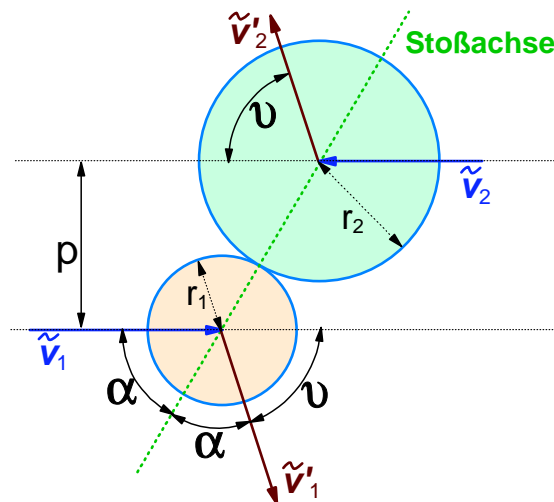


Abbildung 1.102: Zum elastischen Stoß zweier Kugeln.

Zwei Kugeln der Masse  $m_1$  und  $m_2$  und den Radien  $r_1$  und  $r_2$  stoßen, wie in Abb. 1.102 gezeigt ist, zusammen. Die Geschwindigkeiten im Schwerpunktsystem seien  $\tilde{v}_1$  und  $\tilde{v}_2$ . Der Abstand der beiden Geraden, auf denen die Kugelmittelpunkte aufeinander zufliegen, wird als *Stoßparameter*  $p$  bezeichnet. Beim zentralen Stoß ist  $p = 0$  und die als Stoßachse bezeichnete Verbindungsachse der Massenmittelpunkte beim Stoß liegt parallel zur Einfallsrichtung. Beim nichtzentralen Stoß bildet die Stoßachse gegen die Einfallsrichtung den Winkel  $\alpha$ . Aus Abb. 1.102 folgt

$$\sin \alpha = \frac{p}{r_1 + r_2} \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{1}{2}(\pi - \vartheta) \quad , \quad (1.10.103)$$

wobei  $\vartheta$  der Streuwinkel im Schwerpunktsystem ist. Für den Stoßparameter folgt somit

$$p = (r_1 + r_2) \sin \alpha \quad (1.10.104)$$

$$\text{und damit} \quad \frac{dp}{d\alpha} = (r_1 + r_2) \cos \alpha \quad (1.10.105)$$

$$\text{oder} \quad p dp = (r_1 + r_2)^2 \sin \alpha \cos \alpha d\alpha = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)^2 \sin 2\alpha d\alpha \quad . \quad (1.10.106)$$

Daraus ergibt sich mit  $\alpha = (\pi - \vartheta)/2$  und  $d\alpha/d\vartheta = -1/2$

$$p dp = -\frac{1}{4}(r_1 + r_2)^2 \sin \vartheta d\vartheta \quad . \quad (1.10.107)$$

Diese Beziehung gibt den Zusammenhang zwischen Stoßparameter und Streuwinkel an. Eine Zunahme des Stoßparameters entspricht einer Abnahme des Streuwinkels. Damit die Kugeln überhaupt noch stoßen, muß  $p < r_1 + r_2$  sein. Der Fall  $p = r_1 + r_2$  beschreibt den streifenden Einfall. Beim Zusammenprall der Kugeln wirken entlang der Stoßachse elastische Rückstellkräfte durch eine elastische Deformation der Kugeln. Diese Kräfte führen zu einer Impulsänderung in Richtung der Stoßachse. Die Impulskomponenten senkrecht zur Stoßachse bleiben unverändert, da in dieser Richtung keine Kraft wirksam ist.

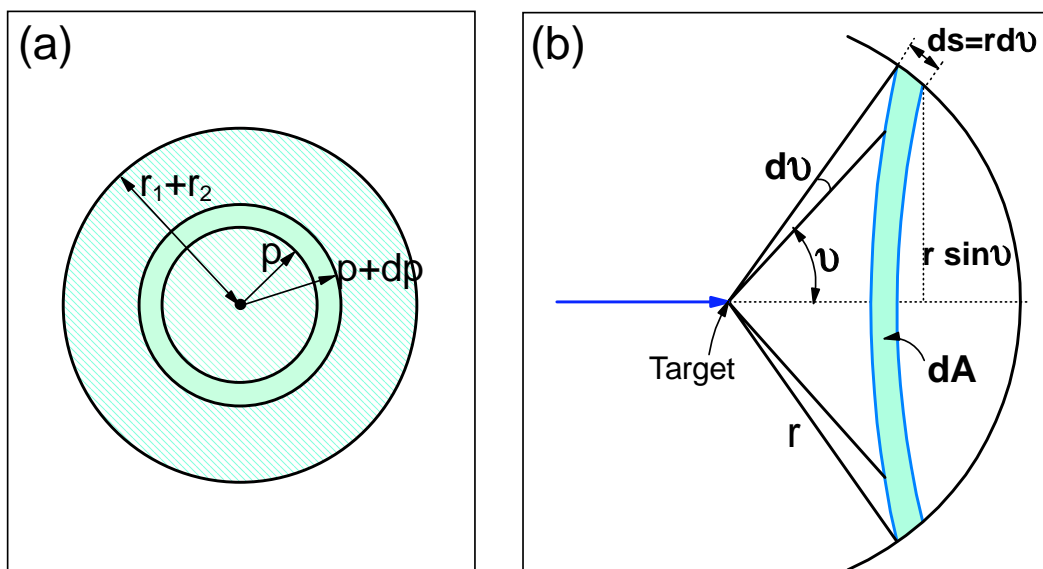


Abbildung 1.103: (a) Zur Definition der Stoßzone (getönte Fläche). Die schraffierte Fläche gibt die Größe der gesamten Zielscheibe an. Der Mittelpunkt der Scheiben entspricht dem Mittelpunkt von  $m_2$ . (b) Zur Veranschaulichung des Raumwinkelements  $d\Omega$ . Die getönte Fläche entspricht  $dA$ .

Es soll nun der der elastische Stoß einer bewegten Kugel mit einer ruhenden Kugel diskutiert werden. Die Wahrscheinlichkeit für eine Streuung der stoßenden Kugel in einen Winkelbereich zwischen  $\vartheta$  und  $\vartheta + d\vartheta$  ist proportional zur Fläche der sogenannten Stoßzone. Darunter versteht man die Fläche  $d\sigma$  einer Ringscheibe mit Radius  $p$  und Breite  $dp$ , d.h.  $d\sigma = 2\pi p dp$  (siehe Abb. 1.103a). Mit der obigen Beziehung zwischen Stoßparameter und Streuwinkel erhält man

$$d\sigma = 2\pi \frac{1}{4} (r_1 + r_2)^2 \sin \vartheta d\vartheta . \quad (1.10.108)$$

Dieser Ausdruck ist ein Maß dafür, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Kugel beim Stoß in den Raumwinkelbereich zwischen  $\vartheta$  und  $\vartheta + d\vartheta$  gestreut wird (siehe Abb. 1.103b). Die Größe des Raumwinkelements  $d\Omega$  ergibt sich aus Abb. 1.103b zu

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \frac{2\pi r \sin \vartheta ds}{r^2} = \frac{2\pi r \sin \vartheta r d\vartheta}{r^2} = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta , \quad (1.10.109)$$

wobei  $dA = a ds$  mit dem Kreisumfang  $a = 2\pi r \sin \vartheta$  und der Bogenlänge  $ds = r d\vartheta$  benutzt wurde. Damit erhält man folgende Beziehung zwischen Stoßzone und Raumwinkelement

$$d\sigma = 2\pi \frac{1}{4} (r_1 + r_2)^2 \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{4} (r_1 + r_2)^2 d\Omega . \quad (1.10.110)$$

Die Wahrscheinlichkeit für die Streuung in einen Bereich zwischen  $\vartheta$  und  $\vartheta + d\vartheta$  normiert auf das Raumwinkelement  $d\Omega$  heißt *differentieller Wirkungsquerschnitt*  $d\sigma/d\Omega$  und ist gegeben durch

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4}(r_1 + r_2)^2, \quad (1.10.111)$$

d.h. der differentielle Wirkungsquerschnitt ist unabhängig vom Streuwinkel: Die Streuung an der ruhenden Kugel ist isotrop.

Die Wahrscheinlichkeit, daß sich überhaupt ein Stoß ereignet, erhält man durch Integration über den gesamten Raumwinkelbereich. Sie wird *totaler Wirkungsquerschnitt*  $\sigma$  genannt und ist gegeben durch

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \pi(r_1 + r_2)^2. \quad (1.10.112)$$

Der totale Wirkungsquerschnitt entspricht, wie man intuitiv erwartet, der gesamten Fläche der in Abb. 1.103a gezeigten "Zielscheibe".

Liegt ein anderes Kraftgesetz vor, so ändert sich der Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt. So erhält man für die **Rutherford**-Streuung (Coulomb-Wechselwirkung zwischen geladenen punktförmigen Stoßpartnern) den Ausdruck

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\sin^4 \vartheta/2}. \quad (1.10.113)$$

Es soll abschließend darauf aufmerksam gemacht werden, daß die Ausdrücke für die Wirkungsquerschnitte im Schwerpunktsystem abgeleitet wurden, während Experimente üblicherweise im Laborsystem durchgeführt werden. Zum Vergleich zwischen Experiment und Theorie müssen die experimentellen Ergebnisse deshalb immer erst ins Schwerpunktsystem umgerechnet werden.

## 1.11 Der Drehimpuls

Aus den **Newton**schen Axiomen lässt sich ein Erhaltungssatz für eine weitere Größe – den *Drehimpuls* ableiten. Wie der Name bereits klar macht, spielt der Drehimpuls bei Drehbewegungen eine zum Impuls bei der Translationsbewegung vergleichbare Rolle. Nach der Definition von *Drehmoment* und *Drehimpuls* wird der *Drehimpulserhaltungssatz* aufgestellt. Es soll ferner kurz skizziert werden, wie dieser Satz aus einer sehr allgemeinen Forderung nach der Invarianz des Raumes gegenüber Drehungen folgt. Abschließend wird der Drehimpulserhaltungssatz auf einige Bewegungsprobleme angewandt.

### 1.11.1 Drehmoment und Drehimpuls

Wir betrachten einen Massenpunkt mit Ortsvektor  $\mathbf{r}$ , an dem die Kraft  $\mathbf{F}$  angreift. Dann definiert man das *Drehmoment*  $\mathbf{T}$  der Kraft  $\mathbf{F}$  bezüglich des Bezugspunktes  $O$  (in diesem Fall des Koordinatenursprungs) als das Vektorprodukt

$$\mathbf{T} := \mathbf{r} \times \mathbf{F} . \quad (1.11.1)$$

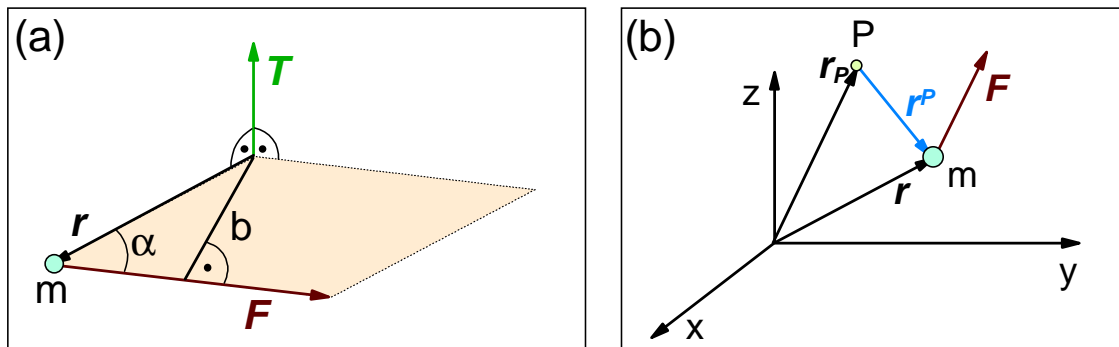


Abbildung 1.104: (a) Zur Definition des Drehmoments  $\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ . (b) Das Drehmoment  $\mathbf{T}_P$  bezüglich des Raumpunktes  $P$ :  $\mathbf{T}_P = \mathbf{r}^P \times \mathbf{F}$ .

Das Drehmoment, das manchmal auch als Kraftmoment oder Torsionsmoment bezeichnet wird, steht senkrecht auf der von  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{F}$  aufgespannten Fläche und definiert eine Drehachse, um die die angreifende Kraft die Masse in Bewegung zu setzen sucht (siehe Abb. 1.104a). Die Richtung von  $\mathbf{T}$  gibt den Drehsinn im Sinne einer Rechtsschraube an (daher der Name Drehmoment). Mit Hilfe des Winkels  $\alpha$  zwischen  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{F}$  lässt sich der Betrag des Drehmoments wie folgt ausdrücken:

$$T = F r \sin \alpha . \quad (1.11.2)$$

Die Größe  $b = r \sin \alpha$  bezeichnet man als *Kraftarm*, wodurch der Betrag von  $\mathbf{T}$  als

$$\text{Drehmoment} = \text{Kraft} \cdot \text{Kraftarm} \quad (1.11.3)$$

gegeben ist.

Die Einheit des Drehmoments im SI-System ergibt sich aus der Definitionsgleichung (1.11.1) zu



$$[T] = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} . \quad (1.11.4)$$

Die Einheit des Drehmoments ist formal mit der Einheit der Energie  $1 \text{ J} = 1 \text{ Nm}$  identisch. Die Benutzung der Einheit  $1 \text{ J}$  für das Drehmoment ist aber nicht üblich.

Es ist sehr wichtig, sich klar zu machen, daß das Drehmoment vom Bezugspunkt abhängt, bezüglich dessen es angegeben wird. Das Drehmoment  $\mathbf{T}^P$  in bezug auf den Raumpunkt  $P$  (siehe Abb.1.104b) ist definiert als

$$\mathbf{T}^P := \mathbf{r}^P \times \mathbf{F} , \quad (1.11.5)$$

wobei  $\mathbf{r}^P$  den Verschiebungsvektor vom Bezugspunkt  $P$  zum Angriffspunkt der Kraft  $\mathbf{F}$  bezeichnet. Nach Abb.1.104b gilt

$$\mathbf{r} := \mathbf{r}_P + \mathbf{r}^P \quad (1.11.6)$$

und daher

$$\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_P \times \mathbf{F} + \mathbf{r}^P \times \mathbf{F} \quad (1.11.7)$$

$$\text{oder} \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}_P + \mathbf{r}^P \times \mathbf{F} . \quad (1.11.8)$$

Beim Wechsel des Bezugssystems ändert sich somit auch das Drehmoment.

In enger Analogie zum ‘‘Kraftmoment’’  $\mathbf{T}$  führt man das ‘‘Impulsmoment’’ oder den *Drehimpuls*  $\mathbf{L}$  ein. Hat die Masse  $m$  mit dem Ortsvektor  $\mathbf{r}$  den Impuls  $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ , so ist der Drehimpuls definiert als

$$\boxed{\mathbf{L} := \mathbf{r} \times \mathbf{p} .} \quad (1.11.9)$$

Als Vektorprodukt von  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{p}$  steht  $\mathbf{L}$  senkrecht auf der von  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{p}$  aufgespannten Fläche (siehe Abb.1.105).

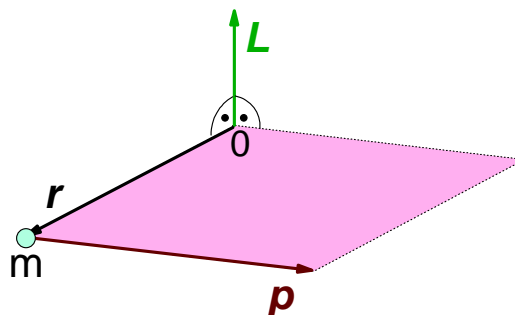


Abbildung 1.105: (a) Zur Definition des Drehimpulses  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ .

Die Einheit des Drehimpulses im SI-System ist definitionsgemäß

$$[L] = 1 \text{ m} \frac{\text{kgm}}{\text{s}} = 1 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} . \quad (1.11.10)$$

Wegen  $1 \text{ kg m}^2/\text{s} = 1 \text{ Nms} = 1 \text{ Js}$  hat der Drehimpuls die Dimension von Energie  $\times$  Zeit. Eine Größe mit dieser Dimension nennt man eine *Wirkung*.

**Kreisbewegung:**

Ist die Bewegung eines Massenpunktes, wie in Abb.1.106a gezeigt, auf die  $xy$ -Ebene beschränkt, so verschwinden die  $x$ - und  $y$ -Komponente des Drehimpulses und man hat nur  $L_z \neq 0$ . Zur Beschreibung der Bewegung verwendet man zweckmäßigerweise *Kreis-* oder *Polarkoordinaten*  $(r, \varphi)$ . Mit den Basisvektoren  $\hat{e}_r$  und  $\hat{e}_\varphi$ , die senkrecht auf den Koordinatenlinien  $r = \text{const}$  und  $\varphi = \text{const}$  stehen, läßt sich die Geschwindigkeit als  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\varphi = v_r \hat{e}_r + v_\varphi \hat{e}_\varphi$  ausdrücken. Aus Abb.1.106a läßt sich  $v_r = dr/dt$  und  $v_\varphi = r d\varphi/dt$  ablesen. Da der Ortsvektor  $\mathbf{r}$  parallel zu  $\mathbf{v}_r$  steht, verschwindet das Vektorprodukt  $\mathbf{r} \times \mathbf{v}_r$  und man erhält

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v} = m \mathbf{r} \times \mathbf{v}_r + m \mathbf{r} \times \mathbf{v}_\varphi = m \mathbf{r} \times \mathbf{v}_\varphi \quad (1.11.11)$$

bzw. für den Betrag des senkrecht auf der  $(r, \varphi)$ -Ebene stehenden Drehimpulses  $L$

$$L = m r v_\varphi = m r^2 \frac{d\varphi}{dt} . \quad (1.11.12)$$

Im Falle einer Kreisbewegung (siehe Abb.1.106b) läßt sich diese Beziehung unter Benutzung der Kreisfrequenz  $\omega$  umformen. Mit  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  erhält man (wegen  $\mathbf{v}_r = 0$ )  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\varphi = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  und damit mit  $v_\varphi = \omega r$  den Ausdruck

$$L = m r^2 \omega . \quad (1.11.13)$$

Da  $L$  und  $\omega$  parallel zueinander sind, gilt sogar vektoriell

$$\mathbf{L} = m r^2 \boldsymbol{\omega} . \quad (1.11.14)$$

Anhand von Gl.(1.11.14) kann man eine interessante Analogie zwischen einer geradlinigen und einer Kreisbewegung aufstellen. Bei einer geradlinigen gleichförmigen Bewegung ist nach dem Trägheitsgesetz der Impuls  $\mathbf{p} = \text{const}$ . Ähnlich hierzu ist bei einer gleichförmigen Kreisbewegung wegen  $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$  der Drehimpuls  $\mathbf{L} = \text{const}$ . Dies rechtfertigt die Namensgebung "Drehimpuls".

Wie beim Drehmoment muß auch für den Drehimpuls nicht notwendigerweise der Koordinatenursprung als Bezugspunkt verwendet werden. Für einen beliebigen Bezugspunkt  $P$  erhält man

$$\mathbf{L}_P = \mathbf{r}^P \times \mathbf{p} , \quad (1.11.15)$$

wobei  $\mathbf{r}^P$  wiederum den Vektor vom Raumpunkt  $P$  zum Massenpunkt  $m$  darstellt. Mit Gl.(1.11.6) erhält man

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_P + \mathbf{r}_P \times \mathbf{p} , \quad (1.11.16)$$

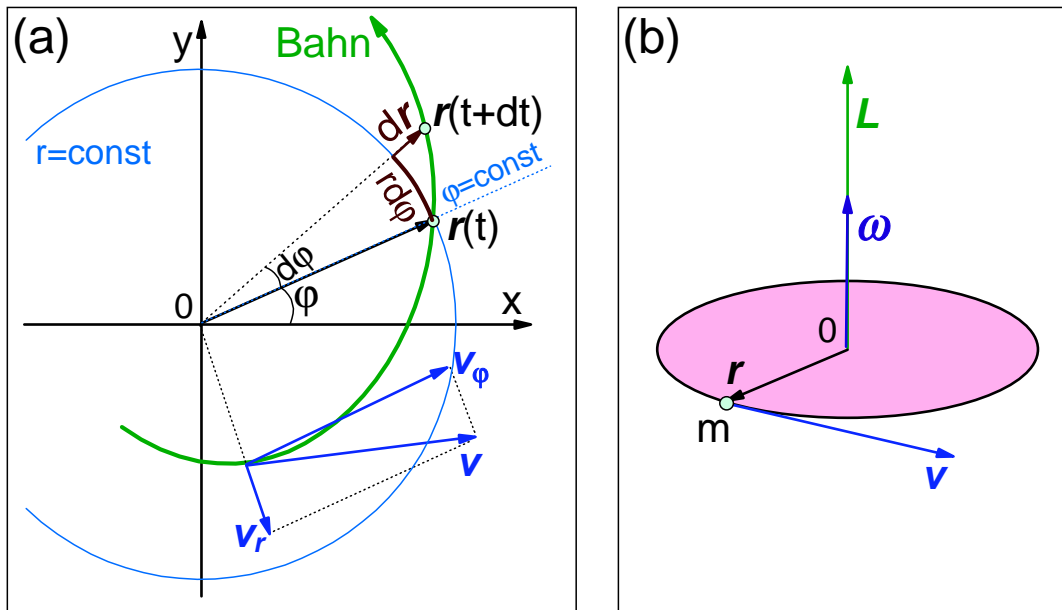


Abbildung 1.106: (a) Bewegung in der  $xy$ -Ebene in Kreiskoordinaten. (b) Drehimpuls bei der Kreisbewegung.

wobei  $\mathbf{r}_P$  der Ortsvektor des Bezugspunktes  $P$  ist. Der Drehimpuls ist also wie das Drehmoment abhängig vom gewählten Bezugspunkt.<sup>79</sup>

Wir wollen im folgenden ein Inertialsystem als Bezugssystem benutzen, in dem die **Newton'sche** Bewegungsgleichung  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$  Gültigkeit besitzt. Wir wollen zeigen, daß in einem Inertialsystem ein einfacher Zusammenhang zwischen Drehmoment und Drehimpuls besteht. Differenziert man den Ausdruck  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  nach der Zeit so erhält man unter Berücksichtigung der Produktregel der Differentiation

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} , \quad (1.11.17)$$

da  $\mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0$ . Wegen  $\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  folgt somit

$$\boxed{\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} . \quad (1.11.18)}$$

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses wird also durch ein Drehmoment hervorgerufen. Aufgrund dieses Zusammenhangs kann man für die Drehbewegung eine dem 1. **Newton'schen** Axiom entsprechende Aussage machen:

<sup>79</sup>Man beachte, daß die Aussage  $\mathbf{L} = \text{const}$  für die gleichförmige Kreisbewegung nur dann Gültigkeit besitzt, wenn man als Bezugspunkt den Mittelpunkt der Kreisbahn gewählt hat.

Ein Körper verharrt bezüglich der Rotation im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Kreisbewegung, wenn die Summe der an ihm angreifenden Drehmomente verschwindet:

$$\sum \mathbf{T}_i = 0 \Rightarrow \mathbf{L} = \text{const.} \quad (1.11.19)$$

Durch Integration der Gl.(1.11.18) im endlichen Zeitintervall  $\Delta t = t_2 - t_1$  erhält man den *Drehimpulsstoß*<sup>80</sup>

$$\Delta \mathbf{L} = \mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{T}(t) dt . \quad (1.11.20)$$

Gibt man Drehmoment und Drehimpuls nicht bezüglich des Koordinatenursprungs sondern bezüglich des Bezugspunktes  $P$  an, so erhält man mit den Beziehungen (1.11.6) und (1.11.16)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_P}{dt} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r}^P \times \mathbf{p}) = \frac{d}{dt}((\mathbf{r} - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{p}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) - \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_P \times \mathbf{p}) \\ &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_P}{dt} \times \mathbf{p} - \mathbf{r}_P \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \\ &= 0 + \mathbf{r} \times \mathbf{F} - \frac{d\mathbf{r}_P}{dt} \times \mathbf{p} - \mathbf{r}_P \times \mathbf{F} \\ &= \mathbf{T} - \mathbf{r}_P \times \mathbf{F} - \frac{d\mathbf{r}_P}{dt} \times \mathbf{p} = \mathbf{T}_P - \frac{d\mathbf{r}_P}{dt} \times \mathbf{p} \\ \text{oder } \mathbf{T}_P &= \frac{d\mathbf{L}_P}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_P}{dt} \times \mathbf{p} . \end{aligned} \quad (1.11.21)$$

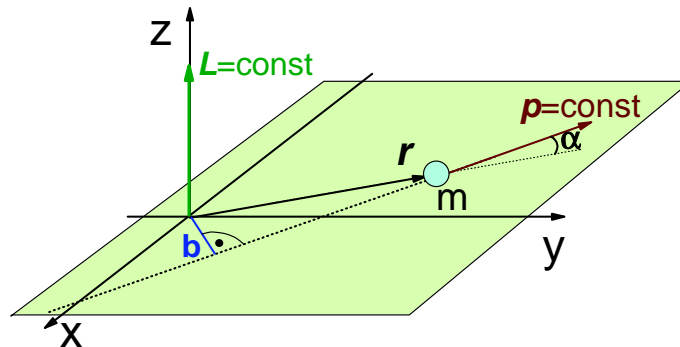
Danach gilt nur für einen in einem Inertialsystem ruhenden Bezugspunkt  $P$ , d.h. einen raumfesten Bezugspunkt mit  $d\mathbf{r}_P/dt = 0$ , die zu Gl.(1.11.18) analoge Beziehung  $\mathbf{T}_P = d\mathbf{L}_P/dt$ .

**Bewegung eines kräftefreien Massenpunktes:**

Ein sehr einfaches Beispiel für die Beziehung  $\mathbf{T} = d\mathbf{L}/dt$  ist ein sich kräftefrei bewegendes Massenpunkt. Mit  $\mathbf{F} = 0$  ist auch  $\mathbf{T} = 0$  und daher  $\mathbf{L} = \text{const.}$  Wie Abb.1.107 zeigt, ist für einen sich in der  $xy$ -Ebene gleichförmig bewegendem Massenpunkt der Drehimpuls immer in  $z$ -Richtung orientiert und der Betrag von  $\mathbf{L}$  ist  $L = r p \sin \alpha = b p = \text{const.}$  Hierbei ist  $b = r \sin \alpha$  der Abstand der Flugbahn vom Koordinatenursprung  $O$ .

Liegt ein System von  $n$  Massenpunkten mit Massen  $m_i$ , Ortsvektoren  $\mathbf{r}_i$  und Impulsen  $\mathbf{p}_i$  vor, auf die die Kräfte  $\mathbf{F}_i$  einwirken, so definiert man naheliegenderweise das Gesamtdrehmoment  $\mathbf{T}_{\text{tot}}$  und den Gesamtdrehimpuls  $\mathbf{L}_{\text{tot}}$  als

<sup>80</sup>Man beachte die Analogie der Beziehungen  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$  und  $\mathbf{T} = d\mathbf{L}/dt$  für den Zusammenhang zwischen Kraft und Impulsänderung bzw. Drehmoment und Drehimpulsänderung sowie  $\Delta \mathbf{p} = \int \mathbf{F} dt$  und  $\Delta \mathbf{L} = \int \mathbf{T} dt$  für den Kraftstoß bzw. Drehmomentstoß.

Abbildung 1.107: Drehimpuls bei einer kräftefreien Bewegung in der  $xy$ -Ebene.

$$\mathbf{T}_{\text{tot}} := \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \quad (1.11.22)$$

$$\text{und } \mathbf{L}_{\text{tot}} := \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i . \quad (1.11.23)$$

Entsprechend zu Gl.(1.11.18) findet man dann

$$\mathbf{T}_{\text{tot}} = \frac{d\mathbf{L}_{\text{tot}}}{dt} . \quad (1.11.24)$$

Dieser Ausdruck ist analog zu der Beziehung  $\mathbf{F}_{\text{tot}} = d\mathbf{p}_{\text{tot}}/dt$  zwischen Gesamtkraft und Änderung des Gesamtimpulses in einem System aus  $n$  Massenpunkten.

Beim Wechsel des Bezugspunktes vom Koordinatenursprung zu einem beliebigen Raumpunkt  $P$  erhält man die Verallgemeinerung von Gl.(1.11.21)

$$\mathbf{T}_{\text{tot},P} = \frac{d\mathbf{L}_{\text{tot},P}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_P}{dt} \times \mathbf{p}_{\text{tot}} \quad (1.11.25)$$

mit dem Gesamtimpuls  $\mathbf{p}_{\text{tot}}$  des Systems.

### 1.11.2 Der Drehimpulserhaltungssatz

Wir haben im vorherigen Abschnitt gesehen, daß der Drehimpuls für eine kräftefreie Bewegung zeitlich konstant ist und damit eine Erhaltungsgröße der Bewegung darstellt. Aus der Beziehung (1.11.18) bzw. (1.11.24) kann man allgemein folgenden Erhaltungssatz für den Drehimpuls angeben:

Greifen keine äußeren Drehmomente an einem Körper an,  
so bleibt sein Drehimpuls zeitlich nach Betrag und  
Richtung konstant:

$$\mathbf{L} = \text{const} \quad \text{für} \quad \mathbf{T} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 . \quad (1.11.26)$$

Wir wollen uns im folgenden mit der Frage beschäftigen, in welchen Fällen die Bedingung  $\mathbf{T} = 0$  erfüllt ist. Wie werden zeigen, daß das Drehmoment insbesondere für folgende 3 Fälle verschwindet:

### Kräftefreie Bewegung

Wir haben bereits diskutiert, daß für  $\mathbf{F} = 0$  das Drehmoment  $\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  verschwindet und damit  $\mathbf{L} = \text{const}$  wird.

### Zentralkräfte

Unter *Zentralkräften* versteht man solche Kräfte, die auf einen festen Punkt hin oder von einem festen Punkt wegzeigen. Man kann Zentralkräfte deshalb schreiben als

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) := f(r) \hat{\mathbf{r}}, \quad (1.11.27)$$

wobei  $f(r)$  eine skalare Funktion des Positionsvektors  $\mathbf{r}$  und  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$  ist. Als Beispiel dafür haben wir die Gravitationskraft kennengelernt, für die  $f(r) = -Gm_1 m_2 / r^2$  ist. Wählt man als Bezugspunkt das Zentrum der Zentralkraft so ergibt sich mit der durch (1.11.27) gegebenen Eigenschaft von Zentralkräften  $\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = f(r) \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{r}} = 0$  und damit

$$\mathbf{T} = 0 \quad (1.11.28)$$

$$\text{und } \mathbf{L} = \text{const.} \quad \text{Zentralkräfte} \quad (1.11.29)$$

Das heißt, unter der Voraussetzung, daß das Kraftzentrum zum Koordinatenzentrum des Inertialsystems gemacht werden kann, erhält man für die Bewegung eines Körpers im Zentralfeld einen zeitlich konstanten Drehimpuls.

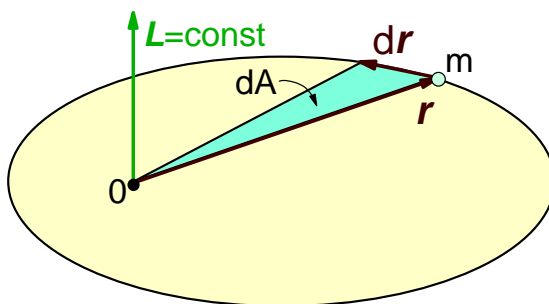


Abbildung 1.108: Die Erhaltung des Drehimpulses und der Flächensatz bei Zentralkräften.

Aus dem Drehimpulserhaltungssatz lassen sich das 1. und 2. **Keplersche Gesetz** ableiten. Da der Drehimpuls  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  immer senkrecht auf der von  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{p}$  aufgespannten Ebene steht, muß sich ein Körper bei  $\mathbf{L} = \text{const}$  in einer Ebene bewegen, die durch die Anfangsbedingungen  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$  und  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$  zur Zeit  $t = t_0$  festgelegt ist. Die Ebene steht senkrecht auf  $\mathbf{L}$  und geht durch das Kraftzentrum. Dies ist in Übereinstimmung mit dem 1. **Keplerschen Gesetz**, wonach die Planetenbahnen ebene Bahnen um die Sonne sind. Die Konstanz des Drehimpulses läßt sich anhand von Abb.1.108 leicht geometrisch

interpretieren. Wenn der Planet in der Zeit  $dt$  den Weg  $d\mathbf{r}$  zurücklegt, dann ist die in der Zeit  $dt$  vom Fahrstrahl überstrichene Fläche  $dA$  aufgrund der geometrischen Bedeutung des Vektorproduktes durch  $dA = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}|$  gegeben. Daraus folgt für die Flächengeschwindigkeit

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}| = \frac{1}{2m}|\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = \frac{|\mathbf{L}|}{2m}, \quad (1.11.30)$$

woraus für  $\mathbf{L} = \text{const}$

$$\frac{dA}{dt} = \text{const} \quad (1.11.31)$$

folgt. Dies ist aber genau das 2. **Keplersche** Gesetz.

#### Laborexperiment zum Drehimpulserhaltungssatz:

Wie in Abb.1.109 gezeigt ist, soll sich eine Masse  $m$  reibungsfrei auf einer Unterlage mit konstantem Impuls  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  bewegen. An der Masse ist ein dünner Faden befestigt, der durch ein enges Loch in der Unterlage geführt wird. Zieht man an dem Faden, so übt man auf die Masse  $m$  eine Kraft  $\mathbf{F}$  aus, die auf die lochförmige Öffnung in der Unterlage gerichtet ist. Das Loch stellt also das Kraftzentrum dar. Legt man den Koordinatenursprung in dieses Kraftzentrum, so verschwindet das Drehmoment  $\mathbf{T}$  und der Drehimpuls bleibt zeitlich konstant. Zu Beginn sei die wirksame Fadenlänge  $r_0$  und die Masse laufe auf einer Kreisbahn mit Radius  $r_0$  mit einer Geschwindigkeit  $v_0$ . Der Drehimpuls ist damit  $L = r_0 m v_0$ . Dann wird der Faden sehr langsam eingezogen, so daß in guter Näherung die Bahnkurve immer als Kreis angesehen werden kann, dessen Radius langsam schrumpft. Bei Verkürzung des Bahnradius auf  $r$  folgt aus der Konstanz des Drehimpulses  $r_0 m v_0 = r m v$  oder

$$v = \frac{L}{mr}. \quad (1.11.32)$$

Bei Annäherung an das Kraftzentrum steigt also die Geschwindigkeit  $\propto 1/r$  an. Die zugehörige kinetische Energie ist

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \frac{L^2}{m^2 r^2} = \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (1.11.33)$$

Je kleiner also der Bahnradius wird, umso größer wird die durch den konstanten Drehimpuls erzwungene kinetische Energie. Die Zunahme der kinetischen Energie wird durch die gegen die Zentrifugalkraft  $F_{TZ} = mv^2/r$  geleistete Arbeit beim Verkürzen des Fadens aufgebracht. Ein äquivalentes Experiment kann auf einem Drehschemel durchgeführt werden. Eine Versuchsperson sitzt auf dem Drehschemel und hält zwei Gewichte mit gestreckten Armen nach außen. Der Drehschemel wird dann in eine Rotationsbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit versetzt. Die Versuchsperson zieht dann die Gewichte an den Körper, wodurch der Bahnradius der Gewichte verkleinert wird. Wie bereits diskutiert wurde, nimmt dadurch die durch den konstanten Drehimpuls erzwungene kinetische Energie zu. Insgesamt erhält man eine höhere Drehgeschwindigkeit. Durch Ausstrecken der Arme kann die Drehgeschwindigkeit wieder auf den alten Wert reduziert werden. Diese Technik wird von Schlittschuhläufern ausgenutzt, um bei Pirouetten hohe Drehgeschwindigkeiten zu erreichen (siehe hierzu auch Abschnitt 2.3).

Für ein *konservatives zentrales Kraftfeld* lassen sich die obigen Überlegungen noch verallgemeinern. Für ein konservatives Kraftfeld kann die Differenz der potentiellen Energie in zwei Punkten 1 und 2 durch

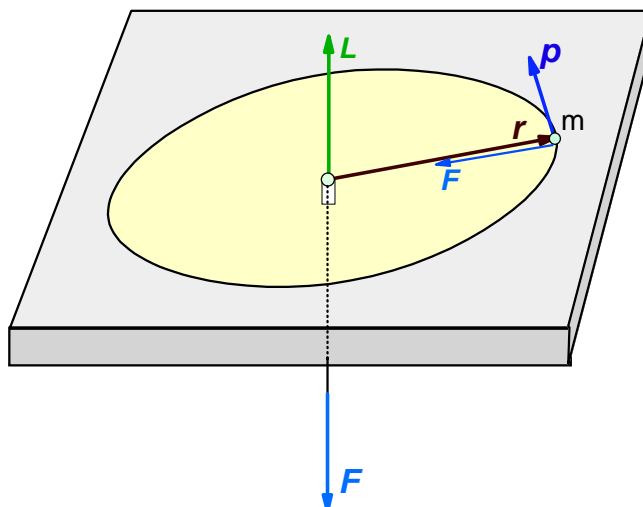


Abbildung 1.109: Laborexperiment zur Drehimpulserhaltung bei Zentralkräften.

$\Delta E_{\text{pot}} = - \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  ausgedrückt werden. Für ein zentrales Kraftfeld verschwindet aber die Differenz  $\Delta E_{\text{pot}}$  für zwei Punkte die auf einer Kugelschale liegen.<sup>81</sup> Das heißt, daß die potentielle Energie auf der gesamten Kugelschale konstant ist. Die Kugelschale stellt somit eine Äquipotentialfläche dar und die potentielle Energie  $E_{\text{pot}} = V$  hängt nur vom Abstand  $r = |\mathbf{r}|$  des Massenpunktes vom Kraftzentrum ab:  $E_{\text{pot}} = V(r)$ . Ein Beispiel hierfür ist das Gravitationspotential  $V(r) = -G\frac{Mm}{r}$ . Im konservativen Kraftfeld gelten nun die zwei Erhaltungssätze für die Gesamtenergie  $E$  (Summe aus kinetischer und potentieller Energie) und für den Drehimpuls  $\mathbf{L}$

$$E = T + V = \text{const} \quad (1.11.34)$$

$$\text{und} \quad \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{const} . \quad (1.11.35)$$

Führt man für die ebene Bahnbewegung des Massenpunktes Polarkoordinaten ein, so wird mit  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\varphi = v_r \hat{\mathbf{e}}_r + v_\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi$  und  $v_r = dr/dt$  sowie  $v_\varphi = r d\varphi/dt$

$$E = T + V = \text{const} = \frac{1}{2} m \left( \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) + V(r) . \quad (1.11.36)$$

Andererseits folgt aus der Drehimpulserhaltung

$$L = m r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{const} . \quad (1.11.37)$$

Substituiert man  $d\varphi/dt$  aus Gl.(1.11.37) in Gl.(1.11.36), so erhält man

$$E = \frac{1}{2} m \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = \text{const} . \quad (1.11.38)$$

<sup>81</sup>Man kann hier immer einen Integrationsweg auf der Kugelschale wählen, für den  $\mathbf{F} \perp d\mathbf{s}$  und damit  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$  gilt.



In diesem Ausdruck tritt nur noch die Radialkomponente  $r$  und ihre zeitliche Ableitung  $dr/dt$  auf, weshalb dieser Ausdruck auch radiale Energiegleichung genannt wird. Wie wir in Gl.(1.11.33) gesehen haben, stellt der Term  $\frac{L^2}{2mr^2}$  die kinetische Energie dar, die mit der Bewegung in der zu  $r$  orthogonalen  $\varphi$ -Richtung verknüpft ist. In Gl.(1.11.38) läßt sich dagegen dieser Term formal als ein Potential interpretieren, das sogenannte *Zentrifugalpotential*  $V_Z(r)$ :

$$V_Z(r) := \frac{L^2}{2mr^2} . \quad (1.11.39)$$

Die effektive potentielle Energie ergibt sich damit zu

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + V_Z(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \quad (1.11.40)$$

und aus Gl.(1.11.36) wird

$$E = \frac{1}{2}m \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + V_{\text{eff}}(r) = \text{const} . \quad (1.11.41)$$

Das effektive Potential ist für das Gravitationspotential ( $V(r) \propto 1/r$ ) in Abb.1.110 dargestellt. Da wegen  $\mathbf{F} = -\text{grad}E_{\text{pot}}$  sich die Zentralkraft  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\hat{\mathbf{r}}$  zu

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{V_{\text{eff}}(r)}{dr}\hat{\mathbf{r}} \quad (1.11.42)$$

ergibt, ist die Kraft attraktiv für  $dV/dr > 0$  (z.B. das Gravitationspotential) und repulsiv für  $dV/dr < 0$  (z.B. das Zentrifugalpotential). Die effektive Gravitationskraft ist demnach nach Abb.1.110 für große  $r$  wie erwartet attraktiv, für kleine  $r$  dagegen überraschenderweise repulsiv. Dies liegt an der wegen  $L = \text{const}$  für kleine  $r$  für die Bewegung in  $\varphi$ -Richtung erforderlichen hohen kinetischen Energie  $L^2/2mr^2$ , die bei vorgegebener Gesamtenergie  $E$  aus der potentiellen Energie der Gravitation zur Verfügung gestellt werden muß und für die Bewegung in radialer Richtung keine kinetische Energie  $\frac{1}{2}m\frac{d^2r}{dt^2}$  mehr übrig läßt. Dieser Sachverhalt wirkt sich wie eine Barriere für die Annäherung an das Kraftzentrum aus und man spricht deshalb von einer *Zentrifugalbarriere*.

Die mit dem Zentrifugalpotential verknüpfte Kraft

$$\mathbf{F}_Z(r) = -\frac{dV_Z(r)}{dr} = \frac{L^2}{mr^3} = \frac{m^2 r^4 (d\varphi/dt)^2}{mr^3} = mr \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{mv_\varphi^2}{r} \quad (1.11.43)$$

ist gerade die Zentrifugalkraft einer Kreisbewegung mit der Bahngeschwindigkeit  $v_\varphi$  und dem Radius  $r$ .

Man kann aus dem Energiediagramm in Abb.1.110 noch mehr Information über die möglichen Bewegungsformen einer Masse im Zentralpotential ablesen. So ist für  $E < 0$  die Bewegung auf den Raumbereich zwischen zwei Kugelschalen mit Radius  $r_1$  und  $r_2$  eingeschränkt (gebundene Zustände). Die Radien genügen dabei der Bedingung  $E = V_{\text{eff}}(r)$ . Für  $r < r_1$  und  $r > r_2$  wäre  $E < V_{\text{eff}}(r)$  und

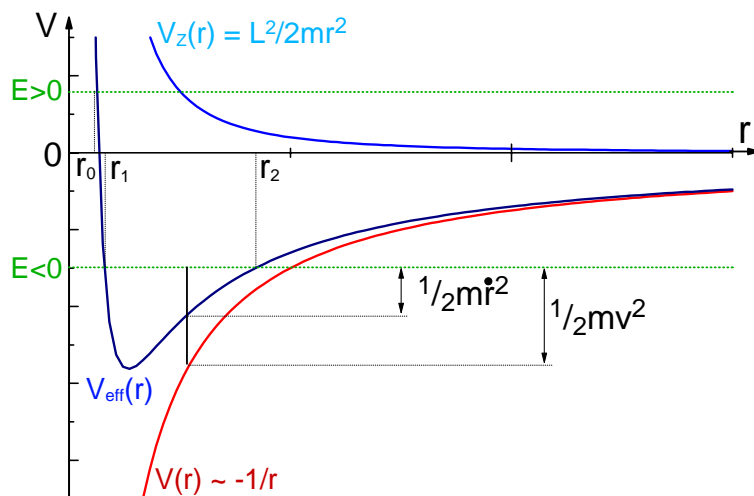


Abbildung 1.110: Gravitationspotential  $V(r)$ , Zentrifugalpotential  $V_z(r)$  und effektives Potential  $V_{\text{eff}}(r)$ .

damit nach Gl.(1.11.41)  $\frac{1}{2}m(dr/dt)^2 < 0$ , was physikalisch nicht zulässig ist. Für  $E > 0$  resultieren ungebundene Bahnkurve, die sich bis  $r = \infty$  erstrecken und für den Minimalabstand  $r_0$ , für den  $E = V_{\text{eff}}(r_0)$  gilt, einen Umkehrpunkt besitzen. Für jedes  $r$  kann man ferner  $E - V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}m(dr/dt)^2$  und  $E - V(r) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\varphi^2)$  ablesen. Hieraus erhält man die Geschwindigkeitskomponenten  $v_r$  und  $v_\varphi$  und damit  $v$ . Es soll hier aber nicht im Detail darauf eingegangen werden, wie man mit Hilfe der Erhaltungsgleichungen (1.11.36) und (1.11.37) die Bahnkurve berechnet. Es sei hier aber darauf hingewiesen, daß für das Gravitationspotential Kurven 2. Ordnung resultieren und zwar für  $E < 0$  Ellipsen (1. **Keplersches Gesetz**), für  $E = 0$  Parabeln und für  $E > 0$  Hyperbeln.

### Abgeschlossene Systeme

Wir betrachten jetzt ein abgeschlossenes System von Massenpunkten. Der Gesamtdrehimpuls und das Gesamtdrehmoment des Systems von Massenpunkten setzt sich aus der Summe der Einzeldrehimpulse bzw. der Einzeldrehmomente zusammen:

$$\mathbf{L}_{\text{tot}} = \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \quad (1.11.44)$$

$$\text{und} \quad \mathbf{T}_{\text{tot}} = \sum_i \mathbf{T}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \quad (1.11.45)$$

Postuliert man für die Wechselwirkungskräfte der einzelnen Massenpunkte im abgeschlossenen System das 3. **Newtonsche Axiom** (actio=reactio), so erhält man für ein System aus zwei Massen mit  $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$

$$\mathbf{T}_{\text{tot}} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = -\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{r}_{21} \times \mathbf{F}_2 \quad (1.11.46)$$

Da die Wechselwirkungskräfte längs der Verbindungslinie der Massen wirken, verschwindet das Vektorprodukt  $\mathbf{r}_{21} \times \mathbf{F}_2$  und damit auch das Gesamtdrehmoment. Zusammen mit Gl.(1.11.24) erhält man somit

$\mathbf{T}_{\text{tot}} = 0 \quad (\text{abgeschlossenes System}) \quad (1.11.47)$
$\text{und } \mathbf{L}_{\text{tot}} = \text{const.} \quad (1.11.48)$

Diese Aussage kann auf ein  $n$ -Teilchensystem erweitert werden, was hier nicht explizit gezeigt wird. Die für das abgeschlossene System zentrale Aussage  $\mathbf{L} = \text{const}$  heißt *Drehimpulserhaltungssatz*:

Der Gesamtdrehimpuls der Teilchen eines abgeschlossenen Systems bleibt erhalten:  $\mathbf{L} = \text{const}$ .

Ähnliche Erhaltungssätze wurden bereits für die Energie (Gl.(1.9.38)) und den Impuls (Gl.(1.10.19)) formuliert.

Ist das System nicht abgeschlossen und wirken äußere Kräfte  $\mathbf{F}_i^*$  auf die einzelnen Massen, deren Drehmomentsumme über die Einzeldrehmomente nicht verschwindet, so ist der Gesamtdrehimpuls des Systems nicht mehr zeitlich konstant und es gilt

$$\mathbf{T}_{\text{tot}}^* = \frac{d\mathbf{L}_{\text{tot}}}{dt} \quad (1.11.49)$$

Dieser Ausdruck ist die Übertragung der Beziehung  $\mathbf{F}_{\text{tot}}^* = d\mathbf{p}_{\text{tot}}/dt$  für die Translationsbewegung auf die Rotationsbewegung.

**Experiment zur Drehimpulserhaltung:**

Eine Versuchsperson sitzt auf einem ruhenden Drehschemel. Man gibt ihr ein sich schnell drehendes Rad so in die Hand, daß dessen Achse parallel zur Drehachse des Schemels verläuft (siehe Abb. 1.111). Der Drehimpuls des Rades und damit des Gesamtsystems aus Rad, Schemel und Versuchsperson sei  $\mathbf{L}$ . Dreht die Versuchsperson das Rad um, so ändert sich der Drehsinn und damit das Vorzeichen von  $\mathbf{L}$ , d.h. der Drehimpuls des Rades ist jetzt  $-\mathbf{L}$ . Da die Änderung durch ein inneres Drehmoment ausgelöst wurde, muß der Gesamtdrehimpuls des Systems konstant, d.h.  $+\mathbf{L}$  bleiben. Die Versuchsperson erhält dadurch den Drehimpuls  $+2\mathbf{L}$ , so daß  $2\mathbf{L} - \mathbf{L} = \mathbf{L} = \text{const}$ . Der Schemel mit der Versuchsperson beginnt sich also gegen die Drehrichtung des Rades zu drehen. Durch Zurückstellen des Rades in die Ausgangslage kommt der Schemel wieder zur Ruhe.

Die Drehimpulserhaltung kann auch dadurch demonstriert werden, daß die Versuchsperson auf dem ruhenden Drehschemel sitzt ( $\mathbf{L}_{\text{tot}} = 0$ ) und dann beginnt, ein an einem Seil befestigte Masse über dem Kopf kreisförmig zu schwingen. Das mit der Kreisbewegung der Masse verbundene Drehmoment  $\mathbf{L}$  muß, um das Gesamtdrehmoment ( $\mathbf{L}_{\text{tot}} = 0$ ) zu erhalten, durch ein Drehmoment  $-\mathbf{L}$  durch eine Rotation des Drehschemels in die entgegengesetzte Richtung kompensiert werden.

### 1.11.3 Der Drehimpuls bezüglich des Massenmittelpunktes

Wir greifen nun auf Gl.(1.11.21) und (1.11.25) zurück und berücksichtigen, daß für ein System von  $n$  Massenpunkten die inneren Kräfte  $\mathbf{F}_i$  gemäß Abschnitt 1.11.2 keinen Beitrag zum Gesamtdrehmoment  $\mathbf{T}_{\text{tot,P}}$  erbringen, sondern allenfalls äußere Kräfte  $\mathbf{F}_i^*$ . Deren Drehmoment ist gegeben durch

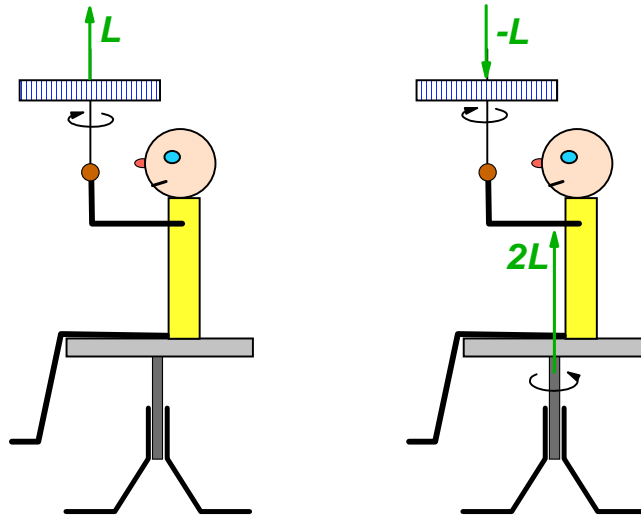


Abbildung 1.111: Experiment zur Drehimpulserhaltung.

$$\mathbf{T}_{\text{tot},P}^* = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i^P \times \mathbf{F}_i^* , \quad (1.11.50)$$

wobei  $\mathbf{r}_i^P$  der Vektor vom Bezugspunkt  $P$  zum  $i$ -ten Massenpunkt ist. Dann wird

$$\mathbf{T}_{\text{tot},P}^* = \frac{d\mathbf{L}_{\text{tot},P}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_P}{dt} \times \mathbf{p}_{\text{tot}} \quad (1.11.51)$$

mit dem Ortsvektor  $\mathbf{r}_P$  des Bezugspunktes  $P$ . Man ist jetzt bestrebt, den lästigen zweiten Term in dieser Gleichung durch geeignete Wahl des Bezugspunktes zu eliminieren. Für einen in einem Inertialsystem ruhenden Bezugspunkt  $P$  wird  $d\mathbf{r}_P/dt = 0$  und man hat sein Ziel erreicht:

$$\mathbf{T}_{\text{tot},P}^* = \frac{d\mathbf{L}_{\text{tot},P}}{dt} \quad (P \text{ ruhend}) . \quad (1.11.52)$$

Für eine Vereinfachung ist es am zweckmäßigsten, den Koordinatenursprung in diesen ruhenden Punkt zu legen.<sup>82</sup>

Interessanterweise verschwindet der zweite Term in Gl.(1.11.51) aber auch dann, wenn als Bezugspunkt der Massenmittelpunkt gewählt wird, und zwar gleichgültig, ob dieser ruht oder sich beliebig bewegt. In diesem Fall ist der Ortsvektor  $\mathbf{r}_P$  des Bezugspunktes identisch mit dem Ortsvektor  $\mathbf{r}_{\text{cm}}$  des Massenmittelpunktes aus Gl.(1.10.45). Dann ist  $d\mathbf{r}_P/dt = d\mathbf{r}_{\text{cm}}/dt = \mathbf{v}_{\text{cm}}$  die Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes, die aufgrund von Gl.(1.10.49) ( $\mathbf{v}_{\text{cm}} = \mathbf{p}_{\text{cm}}/M$ ) und Gl.(1.10.50) ( $\mathbf{p}_{\text{cm}} = \mathbf{p}_{\text{tot}}$ ) parallel zu  $\mathbf{p}_{\text{tot}}$  steht. Daher folgt  $(d\mathbf{r}_P/dt) \times \mathbf{p}_{\text{tot}} = 0$  und

$$\mathbf{T}_{\text{tot},\text{cm}}^* = \frac{d\mathbf{L}_{\text{tot},\text{cm}}}{dt} . \quad (1.11.53)$$

<sup>82</sup>Beispiele hierfür werden in Kapitel 2 gegeben.

Hierbei ist

$$\mathbf{L}_{\text{tot,cm}} = \sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{p}_i \quad (1.11.54)$$

der Gesamtdrehimpuls aller Massenpunkte im inertialen Laborsystem, wobei der Massenmittelpunkt nur als Bezugspunkt zur Berechnung des Drehimpulses verwendet wurde. Dagegen ist der Gesamtdrehimpuls im Schwerpunktsystem  $\tilde{\mathbf{L}}_{\text{tot}}$  mit dem Koordinatenursprung (=Massenmittelpunkt) als Bezugspunkt gegeben durch<sup>83</sup>

$$\tilde{\mathbf{L}}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{r}}_i \times \tilde{\mathbf{p}}_i \quad (1.11.55)$$

Mit  $\mathbf{v}_i = \tilde{\mathbf{v}}_i + \mathbf{v}_{\text{cm}}$  folgt  $\mathbf{p}_i = \tilde{\mathbf{p}}_i + m_i \mathbf{v}_{\text{cm}}$  und im allgemeinen wird  $\mathbf{L}_{i,\text{cm}} = \tilde{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{p}_i \neq \tilde{\mathbf{L}}_i = \tilde{\mathbf{r}}_i \times \tilde{\mathbf{p}}_i$  gelten. Überraschenderweise kann man aber für das Gesamtsystem zeigen, daß<sup>84</sup>

$$\mathbf{L}_{\text{tot,cm}} = \tilde{\mathbf{L}}_{\text{tot}} \quad (1.11.56)$$

Durch Kombination mit Gl.(1.11.53) ergibt sich dann

$$\mathbf{T}_{\text{tot,cm}}^* = \frac{d\tilde{\mathbf{L}}_{\text{tot}}}{dt} \quad (1.11.57)$$

Interessant ist hierbei, daß zur Ableitung dieser Gleichung nirgends vorausgesetzt werden muß, daß das Schwerpunktsystem ein Inertialsystem ist. Das heißt, Gl.(1.11.57) geht demnach auch bei einer beschleunigten Bewegung des Massenmittelpunktes im "momentanen" Schwerpunktsystem die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpulses aufgrund äußerer Kräfte an.

Für ein abgeschlossenes System mit  $\mathbf{F}_i^* = 0$  wird

$$\tilde{\mathbf{L}}_{\text{tot}} = \text{const} \quad (\text{abgeschlossenes System}) \quad (1.11.58)$$

Die Bewegung des Schwerpunktes wird durch Gl.(1.10.53)

$$\mathbf{F}_{\text{tot}}^* = \frac{d\mathbf{p}_{\text{tot}}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}_{\text{cm}}}{dt} \quad (1.11.59)$$

beschrieben. Zusammen mit den Gln.(1.11.53) und (1.11.57) hat man damit eine Beschreibung für die Bewegung eines Systems von Massenpunkten als ganzes gefunden. Man berechnet zunächst anhand von Gl.(1.11.59) die Translationsbewegung des Massenmittelpunktes, um dann mit Gl.(1.11.53) und (1.11.57) die durch den Gesamtdrehimpuls  $\mathbf{L}_{\text{tot,cm}}$  bzw.  $\tilde{\mathbf{L}}_{\text{tot}}$  global erfaßte Drehung des Systems um

<sup>83</sup>Hierbei werden die Größen im Schwerpunktsystem wiederum mit einer Schlange versehen.

<sup>84</sup>Dies soll an dieser Stelle nicht explizit bewiesen werden.

den Massenmittelpunkt im inertialen Laborsystem bzw. im momentanen Schwerpunktsystem zu finden. Anwendungsbeispiele hierfür werden in Kapitel 2 bei der Behandlung der Mechanik des Starren Körpers diskutiert.

Abschließend wollen wir noch den Zusammenhang zwischen dem Drehimpuls  $\mathbf{L}_{\text{tot}}$  im Laborsystem und  $\tilde{\mathbf{L}}_{\text{tot}}$  im Schwerpunktsystem herstellen, wobei wir jeweils den Koordinatenursprung als Bezugspunkt wählen wollen. Aus Gl.(1.11.16) folgt mit dem Bezugspunkt  $P = CM$  für den Ortsvektor  $\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_{\text{cm}}$  und nach Summation über alle Massenpunkte zunächst  $\mathbf{L}_{\text{tot}} = \mathbf{L}_{\text{tot,cm}} + \mathbf{r}_{\text{cm}} \times \mathbf{p}_{\text{tot}}$ . Ferner ist der Gesamtimpuls  $\mathbf{p}_{\text{tot}}$  identisch mit dem Impuls des Massenmittelpunkts  $\mathbf{p}_{\text{cm}}$  und man erhält wegen  $\mathbf{L}_{\text{tot,cm}} = \tilde{\mathbf{L}}_{\text{tot}}$

$$\boxed{\mathbf{L}_{\text{tot}} = \tilde{\mathbf{L}}_{\text{tot}} + \mathbf{r}_{\text{cm}} \times \mathbf{p}_{\text{cm}} \quad . \quad (1.11.60)}$$

Danach ist der Gesamtdrehimpuls im Laborsystem die Summe aus dem Gesamtdrehimpuls  $\tilde{\mathbf{L}}_{\text{tot}}$  im (nicht notwendigerweise inertialen) Schwerpunktsystem und dem Drehimpuls  $\mathbf{r}_{\text{cm}} \times \mathbf{p}_{\text{cm}}$  der Schwerpunktsbewegung. Da  $\tilde{\mathbf{L}}_{\text{tot}}$  im wohldefinierten Schwerpunktsystem der Massenpunkte angegeben wird und insoweit eindeutig ist, nennt man  $\tilde{\mathbf{L}}_{\text{tot}}$  auch den *Eigendrehimpuls* des Systems oder – insbesondere bei Elementarteilchen – den *Spin*. Dagegen heißt  $\mathbf{r}_{\text{cm}} \times \mathbf{p}_{\text{cm}}$  der *Bahndrehimpuls* des Systems, dessen Größe von der speziellen Wahl des Bezugssystems abhängt.

## 1.12 Zusammenfassung der Erhaltungssätze der Mechanik

Erhaltungsgröße	Energie	Impuls	Drehimpuls
Erhaltungssatz	$E_{\text{tot}} = T + V = \text{const}$ (konservative Kräfte) bzw. $E_{\text{tot}} = V + T + Q = \text{const}$ (nichtkonservative Kräfte)	$\mathbf{p}_{\text{tot}} = \text{const}$	$\mathbf{L}_{\text{tot}} = \text{const}$
oder	$dE_{\text{tot}}/dt = 0$	$d\mathbf{p}_{\text{tot}}/dt = 0 = \mathbf{F}_{\text{tot}}$	$d\mathbf{L}_{\text{tot}}/dt = 0 = \mathbf{T}_{\text{tot}}$
folgt aus	Homogenität der Zeit	Homogenität des Raumes	Isotropie des Raumes
Voraussetzung	abgeschlossenes System	freies System: kein Einwirken äußerer Kräfte: $\sum \mathbf{F}_i^* = 0$	freies System: kein Einwirken äußerer Drehmomente: $\sum \mathbf{T}_i^* = 0$
für abgeschlossenes System:	$dE_{\text{tot}} = d(T + V) = 0$	$\mathbf{F}_{\text{tot}} = \sum \mathbf{F}_i = 0$	$\mathbf{T}_{\text{tot}} = \sum \mathbf{T}_i = 0$
bei Einwirken von äußeren Kräften:	$dE_{\text{pot}} = \mathbf{F}^* \cdot ds$  $\Delta E_{\text{pot}} = \int \mathbf{F}^* \cdot ds = W_{21}^*$ (Energieänderung durch Arbeit äußerer Kräfte)	$d\mathbf{p}_{\text{tot}}/dt = \mathbf{F}_{\text{tot}}^* = \sum \mathbf{F}_i^*$  $\Delta \mathbf{p}_{\text{tot}} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{\text{tot}}^* dt$ (Kraftstoß)	$d\mathbf{L}_{\text{tot,P}}/dt = \mathbf{T}_{\text{tot,P}}^* = \sum \mathbf{r}_i^P \times \mathbf{F}_i^*$ (für $P$ ruhend)  $d\mathbf{L}_{\text{tot,cm}}/dt = d\tilde{\mathbf{L}}_{\text{tot}}/dt = \mathbf{T}_{\text{tot,cm}}^* = \sum \tilde{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{p}_i$ (für Massenmittelpunkt)  $\Delta \mathbf{L}_{\text{tot}} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{T}_{\text{tot}}^* dt$ (Drehimpulsstoß bei ruhendem Bezugspunkt)

Tabelle 1.1: Zusammenfassende Darstellung der Erhaltungssätze der Mechanik.

