

Kapitel 3

Mechanik deformierbarer Körper

In den vorangegangenen Kapiteln wurde die Mechanik des Massenpunktes und des starren Körpers diskutiert. Beim Massenpunkt blieb die räumliche Ausdehnung eines Körpers völlig unberücksichtigt. Dies wurde beim Übergang zum starren Körper geändert. Hier wurde aber die einschränkende Annahme gemacht, daß sich ein starrer Körper aus Massenelementen zusammensetzt, deren gegenseitiger Abstand sich unter dem Einfluß von Kräften oder Drehmomenten nicht ändert. Diese idealisierende Annahme hat zu einer wesentlichen Vereinfachung geführt. Während ein System aus N frei beweglichen Massenpunkten $3N$ Freiheitsgrade besitzt und seine Bewegung unter dem Einfluß äußerer Kräfte deshalb schwierig zu beschreiben ist, reduzierte sich die Zahl der Freiheitsgrade beim starren Körper auf sechs. Die Bewegung des starren Körpers konnte dann mit zwei Vektorgleichungen für die Translations- und Rotationsbewegung beschrieben werden.

Die Mechanik des starren Körpers befaßte sich also nur mit den Bewegungsvorgängen des Gesamtkörpers unter der Einwirkung von äußeren Kräften und Drehmomenten. Die äußeren Kräfte konnten per Definition nicht zu einer Änderung der Relativabstände der einzelnen Massenelemente eines starren Körpers führen. Mit dieser Einschränkung konnten wir sehr gut Drehbewegungen von Körpern beschreiben (siehe z.B. Kreiselprobleme). Die Vorstellung, daß ein Körper unter der Einwirkung äußerer Kräfte und Drehmomente unverändert bleibt, ist aber nur ein idealisierter Grenzfall und widerspricht in vielen Fällen unserer Alltagserfahrung. Man stellt häufig fest, daß sich Körper unter dem Einfluß von äußeren Kräften *deformieren*. Kräfte können also sowohl Bewegungsänderungen als auch eine Deformation von Körpern verursachen. In diesem Kapitel wollen wir deshalb die Vorstellung des starren Körpers (fester Relativabstand der Massenelemente) fallen lassen und zu deformierbaren Körpern übergehen. Unter einem deformierbaren Körper wollen wir einen Körper verstehen, bei dem äußere Kräfte und Drehmomente neben einer Änderung des Bewegungszustandes auch eine Verformung hervorrufen.

Zum Verständnis der Deformation von Körpern sind Grundvorstellungen über den Aufbau der Materie notwendig, die wir im folgenden Abschnitt kurz beschreiben wollen. Eine genaue Diskussion dieser Vorstellungen erfolgt dann später im Rahmen der Vorlesungen zur Festkörperphysik.

3.1 Grundvorstellungen zur Materiestruktur

Wir wissen heute, daß Materie aus Atomen bzw. Molekülen aufgebaut ist, die mehr oder weniger fest miteinander gekoppelt sind. Der typische Durchmesser eines Atoms beträgt etwa 0.1 nm oder 1 Ångström. Idealisieren wir die Atome als Massenpunkte, so sind wir wieder bei der Vorstellung angelangt, daß wir einen makroskopischen Körper als ein System von wechselwirkenden Massenpunkten betrachten können.

Die Wechselwirkung zwischen den einzelnen Atomen und Molekülen wird im Detail in der Festkörperphysik diskutiert. Es sei hier nur darauf hingewiesen, daß die Wechselwirkungskräfte hauptsächlich elektrischer Natur sind, d.h. Gravitations- oder magnetische Kräfte spielen keine Rolle. Die Wechselwirkung zwischen zwei Atomen kann durch die potentielle Energie $V(r)$ der Wechselwirkung ausgedrückt werden. In Abb. 3.1 ist der typische Verlauf dieser potentiellen Energie für die *Van der Waals Wechselwirkung* gezeigt. Die Wechselwirkungskraft ergibt sich als Gradient der potentiellen Energie, $F(r) = -\partial V/\partial r$. Man erkennt, daß die Wechselwirkungskraft für kleine Abstände r repulsiv und für große r attraktiv ist. Die attraktive Wechselwirkung ist elektrostatischer Natur, während die repulsive Wechselwirkung auf dem **Paulischen** Ausschließungsprinzip beruht, das erst im Rahmen der Vorlesung zur Quantenmechanik im Detail diskutiert wird. Man erkennt aus Abb. 3.1 zwei weitere wichtige Dinge. Erstens besitzt die potentielle Energie ein Minimum für $r = d$, d.h. die wechselwirkenden Atome werden versuchen, sich in einem mittleren Abstand $r = d$ anzuordnen, da dieser Zustand energetisch am günstigsten ist. Zweitens kann man eine *Bindungsenergie* der wechselwirkenden Atome als $E_B = E(d) - E(\infty)$ definieren. Diese Energie muß aufgebracht werden, um zwei wechselwirkende Atome zu trennen. Ist die kinetische Energie der Atome (z.B. aufgrund der thermischen Bewegung bei endlicher Temperatur) kleiner als diese Bindungsenergie, so bleiben die Atome in der Potentialmulde gefangen und bilden einen gebundenen Zustand. Es ist evident, daß ein gebundener Zustand bevorzugt dann gebildet wird, wenn die Potentialmulde sehr tief, d.h. die Bindungsenergie sehr groß ist, und die kinetische Energie klein (z.B. niedrige Temperatur) ist. Die Größe der Bindungsenergie hängt von der genauen Art der Wechselwirkung ab. Man unterscheidet z.B. zwischen kovalenter, ionischer, metallischer und Van der Waals Bindung, wobei die Bindungsstärke von der kovalenten zur van der Waals Bindung abnimmt.

Je nach Verhältnis von Bindungsenergie und kinetischer Energie der wechselwirkenden Atome kann Materie verschiedene *Aggregatzustände* einnehmen. Man spricht von Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen. Der Übergang zwischen diesen Aggregatzuständen ist allerdings teilweise fließend. In diesem Kapitel werden die Gesetzmäßigkeiten der Deformation von Festkörpern sowie die Statik und Dynamik von Flüssigkeiten (*Hydrostatik* und *Hydrodynamik*) und Gasen (*Aerostatik* und *Aerodynamik*) behandelt. In dem späteren Kapitel Wärmelehre erfolgt dann eine Vermittlung der Vorstellungen zu inneren Bewegungsvorgängen.

Festkörper

Man kann die obige Diskussion auf eine große Zahl von Atomen ausdehnen und zeigen, daß die Wechselwirkung der Atome zur Ausbildung von festen Körpern führt, wenn die Bindungsenergie groß gegenüber der kinetischen Energie ist. Es ist anschaulich klar, daß die wechselwirkenden Atome versuchen werden, sich so anzuordnen, daß sie alle den energetisch günstigsten Zustand einnehmen können. Dies ist dann gegeben, wenn sie alle einen mittleren Abstand d besitzen. D.h. die Atome werden versuchen, eine regelmäßige Anordnung zu etablieren. Wenn die Atome eine solche regelmäßige Anordnung einnehmen, spricht man von einem *kristallinen Festkörper* oder *Einkristall*. Das wichtige Merkmal eines Einkristalls ist die langreichweitige regelmäßige Anordnung der Atome. Man kennt hier die Position aller Atome des Kristalls, wenn man die Position eines einzigen Atoms des Kristalls kennt.

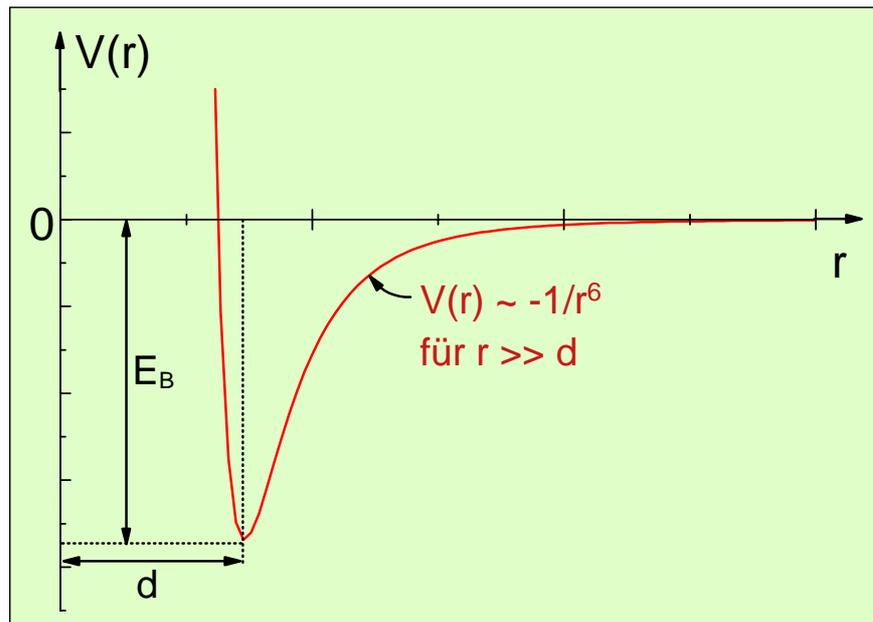


Abbildung 3.1: Potentielle Energie der Wechselwirkung (Van der Waals Wechselwirkung) zwischen zwei Atomen als Funktion des Abstandes zwischen den Atomen.

Festkörper können aber auch einen *polykristallinen* oder *amorphen* Zustand einnehmen. Polykristalline Festkörper bestehen dabei aus einer großen Zahl von kleinen Einkristallen, die eine unregelmäßige Orientierung im Raum einnehmen. Bei amorphen Festkörpern haben die Atome zwar noch einen mittleren Abstand d , sie besitzen aber keine langreichweitige Ordnung mehr. Polykristalline und amorphe Festkörper bekommt man dann, wenn die wechselwirkenden Atome nicht genügend Zeit haben, die optimale Position einzunehmen. Dies passiert z.B. dann, wenn man die kinetische Energie der Atome sehr schnell erniedrigt (z.B. durch schnelles Abkühlen, Abschrecken) und die bei hoher kinetischer Energie vorhandene ungeordnete Struktur dabei eingefroren wird. Zu den amorphen Festkörpern gehören z.B. die Gläser, Wachs, Gummi etc.. Im Gegensatz zu Einkristallen besitzen amorphe Festkörper keinen definierten Schmelzpunkt, sondern Erweichen langsam bei Erwärmung.

Abb. 3.2a zeigt schematisch die potentielle Energie der Atome in einem einkristallinen Festkörper. Die

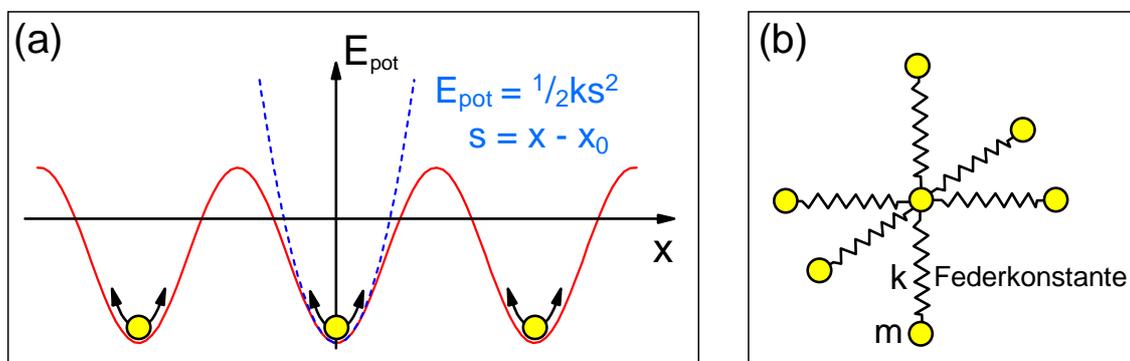


Abbildung 3.2: (a) Schematische Darstellung der potentiellen Energie in einem Festkörper. Die gestrichelte Linie zeigt das harmonische Oszillatorpotential $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}ks^2$ als lokale Näherung. (b) Masse-Feder-Modell eines Festkörpers.

Potentialminima, die die Gleichgewichtsposition der Atome bilden, besitzen regelmäßige Abstände. Aufgrund der Anbindung der Atome an die Gleichgewichtspositionen besitzen Festkörper eine feste Gestalt und damit auch ein definiertes Volumen. Aufgrund der endlichen kinetischen Energie der Atome (aufgrund der endlichen Temperatur) können diese Schwingungen um die Gleichgewichtsposition ausführen. Man kann, wie in Abb. 3.2a gezeigt ist, die potentielle Energie um die Gleichgewichtslage durch eine Parabel $E_{\text{pot}}(s) = \frac{1}{2}ks^2$ annähern, wobei $s = x - x_0$ die Auslenkung aus der Gleichgewichtsposition x_0 ist. Mit dieser Näherung erhält man die elastische Rückstellkraft $F_{\text{el}} = -dE_{\text{pot}}/ds = -ks$, d.h. die Rückstellkraft ist proportional zur Auslenkung aus der Ruhelage. Solche Kräfte haben wir als harmonische Kräfte bezeichnet (vergleiche Abschnitt 1.6.2). Der Ausdruck $F_{\text{el}} = -ks$ entspricht dem **Hooke**schen Gesetz, das wir für das Masse-Feder-Pendel kennengelernt haben, und man kann sich deshalb die Wechselwirkung eines Atoms mit den Nachbaratomen in einem Festkörper auch in Form des in Abb. 3.2b gezeigten Masse-Feder-Modells veranschaulichen. In diesem Modell wird klar, daß die Atome in einem Festkörper nicht starr fixiert sind, sondern “quasi mit Federn” an die Nachbaratome gebunden sind.

Sind die Feder- bzw. Bindungskräfte in einem Festkörper in alle Raumrichtungen gleich groß, so spricht man von einem *isotropen*, im anderen Fall von einem *anisotropen* Festkörper. Es sei ferner darauf hingewiesen, daß bei realen einkristallinen Festkörpern Fehler im Gitteraufbau auftreten. Typische Gitterfehler sind z.B. Fehlstellen, Zwischengitteratome, Fremdatome, Versetzungen, Zwillingsgrenzen etc. (siehe Abb. 3.3). Diese Gitterfehler können die physikalischen Eigenschaften von Festkörpern wesentlich beeinflussen.¹

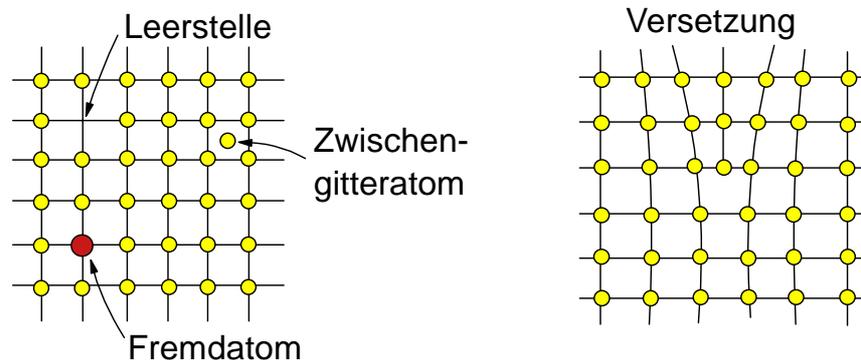


Abbildung 3.3: Gitterfehler in einem Festkörper.

Das Masse-Feder-Modell eines Festkörpers macht klar, daß ein Festkörper nicht als starrer Körper betrachtet werden kann, sondern durch den Einfluß äußerer Kräfte und Drehmomente verformt werden kann (Dehnung, Biegung, Stauchung, Scherung, Torsion). Die äußeren Kräfte und Drehmomente stehen dabei im Gleichgewicht mit den inneren Kräften und Drehmomenten zwischen den Gitterbausteinen. An diesen wirken jetzt elastische Rückstellkräfte, da sie aus ihrer Gleichgewichtslage ausgelenkt sind. Wir werden im folgenden allerdings die mikroskopische Struktur und die Wechselwirkung zwischen den einzelnen Bauelementen eines Festkörpers außer Betracht lassen. Wir werden uns stattdessen nur mit den makroskopischen Eigenschaften von Festkörpern auf einer Längenskala, die groß gegen den mittleren Abstand der Atome im Festkörper ist, beschäftigen. Dabei kann dann der Festkörper als elastisches Kontinuum betrachtet werden. Die Herstellung des Zusammenhangs zwischen den makroskopischen elastischen Eigenschaften eines Festkörpers und den mikroskopischen Bindungseigenschaften bzw. der

¹Zum Beispiel wird die Festigkeit und Elastizität von Metallen sehr stark durch die Mikro- und Defektstruktur dieser Materialien bestimmt. In den Materialwissenschaften versucht man, die Defektstrukturen gezielt zu beeinflussen, um für Anwendungen gewünschte Materialeigenschaften zu erhalten. In Halbleitern bestimmt Fremdatome (Dotieratome) ganz wesentlich die elektronischen Eigenschaften.

mikroskopischen Struktur (auch Fehlordnung) von Festkörpern ist Thema der Festkörperphysik.

Die typischen Massendichten von Festkörpern liegen bei $\rho = 1 - 10 \text{ g/cm}^3$.

Flüssigkeiten

Die Moleküle in Flüssigkeiten haben zwar wie in Festkörpern aufgrund der gegenseitigen Wechselwirkung einen festen mittleren Abstand, sie sind aber nicht an eine feste Position gebunden, sondern können sich in einer *idealen Flüssigkeit* völlig frei relativ zueinander bewegen. Flüssigkeiten weisen deshalb zwar wie Festkörper ein festes Volumen aber keine feste Form auf. Man benötigt deshalb bei Flüssigkeiten nur für Volumenänderungen nicht aber für Formveränderungen eine äußere Kraft oder Drehmoment. Die Gestalt einer Flüssigkeit paßt sich z.B. immer der jeweiligen Form des Aufbewahrungsgefäßes an. Je nach Art der Flüssigkeit dauert dies aber unterschiedlich lange. So nimmt z.B. Wasser die Form eines Gefäßes fast augenblicklich an, während dies für Honig einer längeren Zeitspanne bedarf. Dies hängt mit der unterschiedlichen *Viskosität* (Zähigkeit) von *realen Flüssigkeiten* zusammen, die ein Maß dafür ist, wie frei sich die Flüssigkeitsmoleküle gegeneinander bewegen können. Erhöht man die Zähigkeit einer Flüssigkeit immer mehr, so gelangt man schließlich zu einem amorphen Festkörper. Der Übergang ist dabei kontinuierlich und die Grenze zwischen Flüssigkeiten und amorphen Festkörpern ist nicht scharf festgelegt.

Die typischen Massendichten von Flüssigkeiten sind ähnlich zu denjenigen von Festkörpern und liegen typischerweise zwischen $\rho = 1 - 10 \text{ g/cm}^3$.

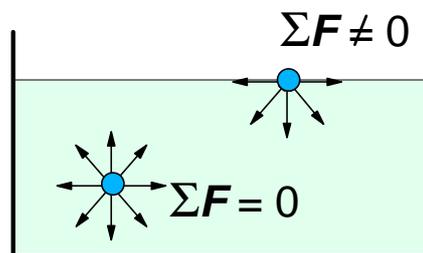


Abbildung 3.4: Zur Modellvorstellung von Flüssigkeiten.

Gießt man zum Vergleich z.B. Wasser und Zucker in ein Gefäß, so bildet sich bei Zucker ein kegelförmiges Gebilde, während man für Wasser eine völlig ebene Oberfläche erhält. Die Reibungskräfte zwischen den Zuckerteilchen verhindern, daß sich beim Zucker eine völlig ebene Oberfläche ausbildet. Die Tatsache, daß man für Wasser eine völlig ebene Oberfläche erhält zeigt, daß sich die Wasserteilchen völlig frei gegeneinander bewegen können müssen. Derselbe Effekt wurde bereits beim **Newton'schen** Eimerversuch (siehe Abschnitt 1.7.3) diskutiert. Bei der Rotation eines Wassereimers um seine Längsachse stellte sich hier aufgrund der gleichzeitig auf die Wasserteilchen wirkenden Schwerkraft \mathbf{F}_G und Zentrifugalkraft \mathbf{F}_{TZ} eine parabelförmige Wasseroberfläche ein, da die wirkende Gesamtkraft auf die frei beweglichen Wasserteilchen senkrecht zur Wasseroberfläche stehen muß.

Diese Experimente mit Wasser zeigen, daß Flüssigkeitsteilchen frei verschiebbar sind. Das Volumen einer Flüssigkeit ändert sich dagegen unter der Wirkung von äußeren Kräften wenig, d.h. die Flüssigkeitsteilchen haben einen festen Abstand. Man kann mit diesen Erkenntnissen die in Abb. 3.4 gezeigte Modellvorstellung für Flüssigkeiten entwickeln. Auf ein Flüssigkeitsteilchen im Innern einer Flüssigkeit wirkt keine resultierende Kraft, es bewegt sich quasi kräftefrei. An der Oberfläche dagegen wird das Teilchen aufgrund der fehlenden Kraftkomponenten nach innen gezogen. Um Flüssigkeitsteilchen an die Oberfläche zu holen, muß die Arbeit $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ geleistet werden.

Flüssigkeitsteilchen an der Oberfläche besitzen somit eine höhere potentielle Energie, die man als *Oberflächenenergie* bezeichnet. Ohne äußere Kräfte besitzt die potentielle Energie im stabilen Gleichgewichtszustand ein Minimum. Das heißt, die Oberfläche der Flüssigkeit stellt sich so ein, um die Oberflächenenergie zu minimieren. D.h. *ohne äußere Kräfte ist die Oberfläche ein Fläche minimaler potentieller Energie.*

Gase

Bei Gasen sind die Kräfte zwischen den Molekülen so schwach oder vernachlässigbar klein, daß zwischen den Teilchen kein Zusammenhalt mehr besteht (die kinetische Energie ist hier größer als die Bindungsenergie). Die einzelnen Moleküle bewegen sich also frei im Raum, so daß das Gas jedes beliebige Volumen einnehmen kann. Die Gasmoleküle besitzen entsprechend der Temperatur des Gases eine bestimmte mittlere kinetischen Energie und bewegen sich ungeordnet. Bei ihrer Bewegung stoßen die Gasmoleküle mit anderen Molekülen und mit den Wänden des Gefäßes zusammen. Das Gas übt dadurch den Impulsübertrag auf die Wand einen Druck aus. Bei Zimmertemperatur und Normaldruck macht ein einzelnes Molekül etwa 10^{10} Stöße pro Sekunde.

Zur Beschreibung vieler Eigenschaften von Gasen kann man die schwache Wechselwirkung der einzelnen Gasmoleküle völlig vernachlässigen. Dies ist insbesondere bei stark verdünnten Gasen (d.h. Gasen bei geringem Druck) der Fall. In dieser Näherung spricht man von einem *idealen Gas*. Berücksichtigt man die zwischenmolekularen Kräfte, so nennt man das Gas ein *reales Gas*. Viele Verhaltensweisen von Gasen sind gerade eine Folge dieser nichtverschwindenden Wechselwirkungskräfte.

Bei Normaldruck und Normaltemperatur sind die Gasdichten etwa drei Größenordnungen kleiner als die von Flüssigkeiten und Festkörpern und betragen typischerweise 1 kg/m^3 oder 1 g/Liter .

Gegenüberstellung der Charakterika von Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen

	Festkörper	Flüssigkeiten	Gase
Wechselwirkung	stark	schwach	sehr schwach
Volumen	fest	fest	variabel
Gestalt	fest	variabel	variabel
Kompressibilität	klein	mittel	groß
$\Delta V/V_0$ für $\Delta p = 1 \text{ bar}$	etwa 10^{-6}	etwa 10^{-5}	etwa 0.5

Tabelle 3.1: Gegenüberstellung der charakteristischen Eigenschaften von Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen.

3.2 Elastomechanik von Festkörpern

3.2.1 Spannung und Dehnung

Spannung

Die äußeren Kräfte, die auf einen Festkörper wirken, können in sogenannte *Massenkäfte*, die proportional zur Masse des Körpers sind (z.B. Gravitationskraft oder Trägheitskraft) und in sogenannte *Oberflächenkräfte* unterteilt werden. Letztere greifen nur an der Oberfläche des Festkörpers an. Im folgenden soll nur die Deformation von Festkörpern aufgrund solcher Oberflächenkräfte diskutiert werden. Die Massenkäfte werden nicht berücksichtigt.

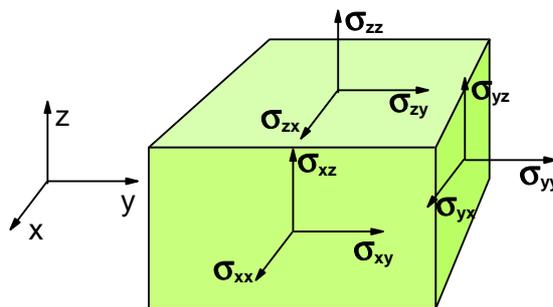


Abbildung 3.5: Zur Veranschaulichung der verschiedenen Komponenten des Spannungstensors. Der erste Index der Spannungskomponente gibt die Fläche an, an der die Kraft angreift, der zweite Index die Richtung der Kraft.

Da die Oberflächenkräfte an Flächen angreifen, führt man den Begriff der Spannung σ ein:

$$\begin{aligned} \text{Spannung} &:= \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} \\ \sigma &:= \frac{F}{A} . \quad (3.2.1) \end{aligned}$$

Wie in Abb. 3.5 gezeigt ist, können die angreifenden Kräfte normal oder tangential zu einer Fläche wirken. Man unterscheidet deshalb zwischen *Normalspannungen* σ_n und *Tangential- oder Schubspannungen* σ_t :

$$\begin{aligned} \text{Normalspannung} \sigma_n &:= \frac{\text{Normalkraft } F_n}{\text{Fläche } A} \\ \text{Tangentialspannung} \sigma_t &:= \frac{\text{Tangentialkraft } F_t}{\text{Fläche } A} . \quad (3.2.2) \end{aligned}$$

Es geht aus Abb. 3.5 hervor, daß es insgesamt 9 Spannungskomponenten gibt, und zwar 3 Normalspannungen (σ_{xx} , σ_{yy} und σ_{zz}) und 6 Schubspannungen (σ_{xy} , σ_{yx} , σ_{yz} , σ_{zy} , σ_{xz} und σ_{zx}). Die 9 Spannungskomponenten bilden den Spannungstensor

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} . \quad (3.2.3)$$

Man kann allerdings zeigen, daß $\sigma_{ik} = -\sigma_{ki}$ gilt, so daß es nur insgesamt 6 unabhängige Komponenten gibt.² Je nach Richtung der angreifenden Normalkraft spricht man von einer *Zug-* oder *Druckspannung*. Die resultierende Verformung des Festkörpers ist eine *Dehnung* oder *Stauchung*. Die angreifenden Schubspannungen führen zur einer *Scherung* oder *Torsion* des Festkörpers. Diese Verformungen sind in Abb. 3.6 veranschaulicht. Bei gleichzeitig an einem Körper angreifender Zug- und Druckspannung kommt es zu einer *Verbiegung*.

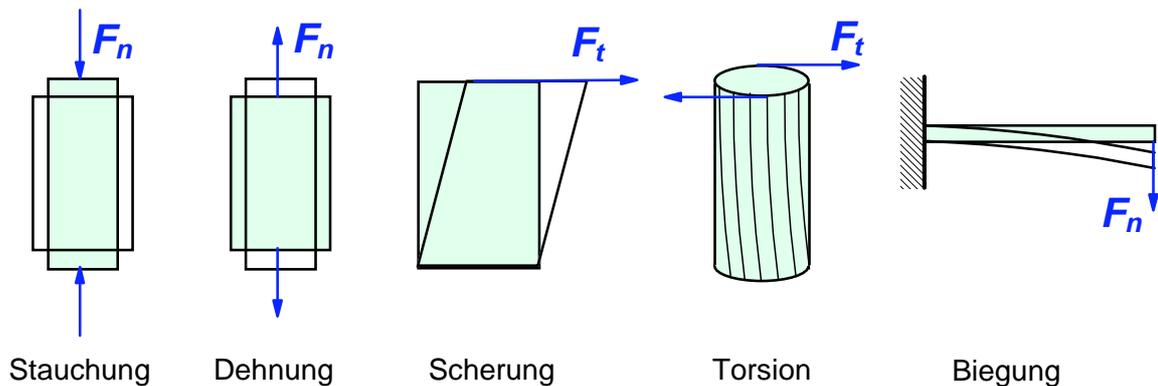


Abbildung 3.6: Zu den bei einem Körper unter der Einwirkung einer Spannung auftretenden Verformungen.

Die Einheit der Spannung ergibt sich aus der Definitionsgleichung zu³

$$[\sigma] = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} := 1 \text{ Pascal} = 1 \text{ Pa} = 10^{-5} \text{ bar} . \quad (3.2.4)$$

Hohe Spannungen können sehr einfach dadurch realisiert werden, indem man eine Kraft auf eine sehr kleine Fläche wirken läßt. Drückt man z.B. auf eine Reißzwecke mit einer Kraft von nur 10 N, so erzeugt man dadurch wegen der kleinen Fläche der Spitze der Reißzwecke von etwa $A = 10^{-9} \text{ m}^2$ eine Druckspannung von $\sigma = F/A = 10^{10} \text{ N/m}^2$ oder 10^5 bar .

Dehnung

Nach der oben erfolgten Definition der Spannung muß jetzt die resultierende Verformung des Körpers beschrieben werden. Dies kann sehr anschaulich an einem eindimensionalen Körper diskutiert werden. Aufgrund der wirksamen Spannung verändert der Körper seine ursprüngliche Länge l_0 um Δl und der Grad der durch die Spannung hervorgerufenen Verformung kann durch die relative Längenänderung $\Delta l/l_0$ beschrieben werden. Man kann somit die Verzerrung oder Dehnung

$$\epsilon := \frac{\Delta l}{l_0} \quad (3.2.5)$$

²Dies folgt aus der Bedingung, daß die Schubspannungen keine Translationsbewegung und keine Rotation des Festkörpers hervorrufen dürfen.

³Die früher häufig verwendeten Einheiten $1 \text{ at} = 1 \text{ kp/cm}^2 = 9.80665 \times 10^4 \text{ Pa}$ (technische Atmosphäre) und $1 \text{ atm} = 760 \text{ Torr} = \text{Normaldruck} = 101\,325 \text{ Pa}$ (physikalische Atmosphäre) dürfen heute nicht mehr verwendet werden.

einführen, die die Verformung eines Körpers aufgrund einer Verspannung beschreibt.

Für einen dreidimensionalen Festkörper ist die Dehnung kein Skalar, sondern wird durch den Dehnungstensor

$$\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.2.6)$$

beschrieben, der wie der Spannungstensor $\tilde{\sigma}$ auch nur 6 unabhängige Komponenten besitzt.

Nach der erfolgten Definition der Spannung und Dehnung muß jetzt der Zusammenhang zwischen einer wirksamen Spannung und der daraus resultierenden Verformung eines Festkörpers diskutiert werden. Glücklicherweise besteht für kleine Spannungen ein linearer Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung. Die Verformung des Körpers ist zudem bei kleinen Spannungen meistens elastisch, d.h. nach Wegnahme der Spannung geht der Körper wieder in seine Ausgangsform zurück. In diesem Fall läßt sich der Zusammenhang zwischen Spannung σ und Dehnung ϵ durch ein **Hooke**sches Gesetz beschreiben. Für einen eindimensionalen Festkörper ergibt sich

$$\sigma = C \epsilon . \quad (3.2.7)$$

Die Konstante C wird als *Elastizitätsmodul* bezeichnet. Für einen dreidimensionalen Festkörper ergibt sich der allgemeine Zusammenhang zwischen den Komponenten des Spannungs- und Dehnungstensors zu

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l} C_{ijkl} \epsilon_{kl} . \quad (3.2.8)$$

Der Elastizitätsmodul ist hierbei ein Tensor 4. Stufe mit insgesamt 81 unabhängigen Komponenten. Die Zahl der unabhängigen Komponenten erniedrigt sich allerdings drastisch aufgrund der Symmetrieeigenschaften von Festkörpern. Für einen isotropen Festkörper verbleiben z.B. nur noch 3 unabhängige Komponenten. In der Technik benutzt man dagegen auch für isotrope Medien üblicherweise folgende 4 Materialkonstanten zur Beschreibung der elastischen Eigenschaften:

- Elastizitätsmodul E
- Poisson- oder Querszahl μ
- Kompressionsmodul K
- Schub-, Scher- oder Torsionsmodul G

Dabei bestehen für isotrope Medien zwischen den Materialparametern E , μ , K und G Beziehungen, da man nur 3 unabhängige Materialkonstanten benötigt, um die elastischen Eigenschaften zu beschreiben. Die Bedeutung der einzelnen Konstanten soll in den folgenden Abschnitten für einen isotropen Festkörper erläutert werden. Für isotrope Festkörper sind die Materialparameter richtungsunabhängige Skalare, wodurch die Diskussion erheblich vereinfacht wird. Für anisotrope Materialien muß man mit Tensoren hantieren, was hier aus Gründen der Einfachheit und der Übersichtlichkeit nicht getan werden soll.

3.2.2 Elastizitätsmodul

Wirkt, wie in Abb. 3.7 gezeigt ist, eine Normalspannung σ_n auf einen Körper, so ändert der Körper aufgrund dieser Spannung seine Länge in Richtung der wirksamen Spannung (Dehnung oder Stauchung). Der Zusammenhang zwischen der relativen Längenänderung $\epsilon = \Delta l/l_0$ und Normalspannung $\sigma_n = F_n/A$ ist im **Hookeschen** Bereich durch

$$\sigma_n = E \epsilon \quad (3.2.9)$$

gegeben. Die Proportionalitätskonstante E nennt man *Elastizitätsmodul*. Die Einheit von E ist 1 N/m^2 . Da die Längenänderung üblicherweise in Richtung der wirksamen Spannung erfolgt, ist E positiv.

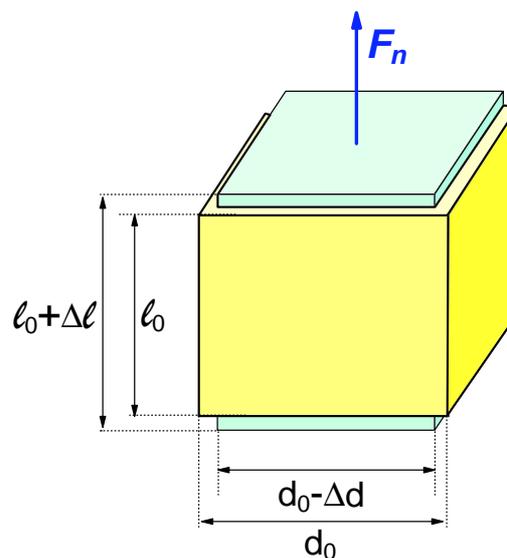


Abbildung 3.7: Zur Verformung eines Festkörpers unter der Einwirkung einer Normalspannung.

3.2.3 Poisson- oder Querszahl

Unter der Wirkung einer Normalspannung ändert sich nicht nur, wie in Abb. 3.7 gezeigt ist, die Ausdehnung des Körpers in Richtung der wirksamen Normalspannung σ_n , sondern auch quer zu dieser. Der Zusammenhang zwischen relativer Längenänderung $\Delta l/l_0$ in Richtung der Spannung und relativer Änderung $\Delta d/d_0$ quer zu dieser gibt die *Poisson-* oder *Querszahl μ an:*

$$\frac{\Delta d}{d_0} = -\mu \frac{\Delta l}{l_0} \quad (3.2.10)$$

Bei den bisher betrachteten Deformationen unter der Wirkung einer Normalspannung ist die auftretende Verformung in den meisten Fällen auch mit einer Volumenänderung verbunden. Das heißt, unter der Wirkung der Normalspannung erhält man weder eine reine Formänderung unter Beibehaltung des Volumens (*Formelastizität*) noch eine reine Volumenänderung unter Beibehaltung der Form (*Volumenelastizität*). Wir werden weiter unten mit der Scherung bzw. der Kompression Deformationsprozesse kennen lernen, bei denen die *Formelastizität* bzw. die *Volumenelastizität* gewährleistet ist (siehe Abschnitt 3.2.4

und 3.2.5). Bei Vorliegen reiner Formelastizität müssen $\Delta d/d_0$ und $\Delta l/l_0$ unterschiedliche Vorzeichen besitzen, da das Volumen erhalten werden muß. Die Poisson- oder Querszahl muß deshalb eine positive Zahl sein. In den meisten Fällen wird bei nicht rein formelastischen Prozessen das Volumen bei Vorliegen einer Druckspannung kleiner und bei Vorliegen einer Zugspannung größer. Nach Gl.(3.2.10 ist deshalb μ auch in diesen Fällen immer eine positive Zahl.

Querkontraktion von Gummi:

Über einen Gummischlauch wird ein zunächst festsitzender Metallring gezogen. Danach wird der Gummischlauch in Längsrichtung gedehnt. Die mit dieser Dehnung verbundene Querkontraktion führt zu einer Verkleinerung des Querschnittes des Gummischlauchs. Dadurch kann sich der zunächst festsitzende Gummiring entlang des Schlauches frei bewegen.

3.2.4 Schub-, Scher- oder Gleitmodul

Wir betrachten jetzt einen Körper, an dessen Oberfläche ein Kraft in tangentialer Richtung angreift. Man erhält dadurch eine *Scherung* oder *Schubdeformation* des Körpers (siehe Abb. 3.8a). Das Volumen des Körpers bleibt bei dieser Verformung erhalten, weshalb man es hier auch mit einer reinen Formelastizität zu tun hat. Den Zusammenhang zwischen der Schubspannung σ_t und dem Scherwinkel α gibt der *Schub-* oder *Torsionsmodul* G an:

$$\sigma_t = G \alpha \quad (3.2.11)$$

Die Einheit des Schub- oder Torsionsmoduls ist 1 N/m^2 .

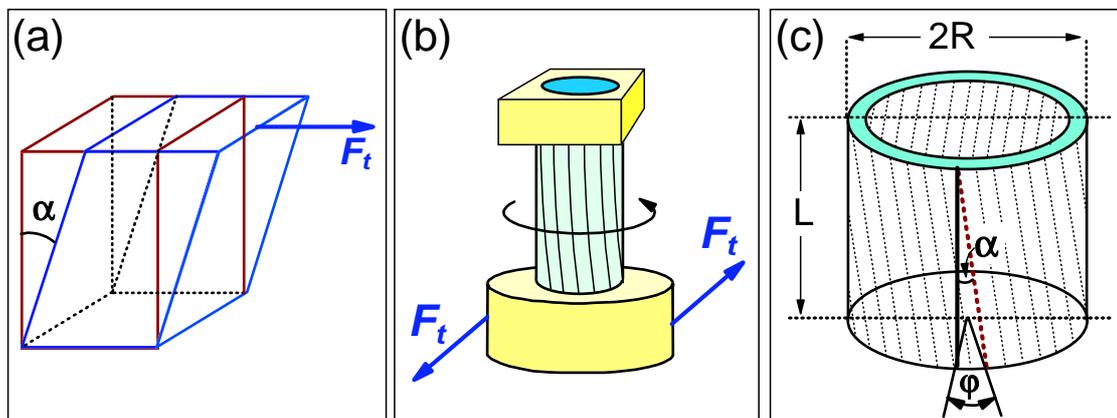


Abbildung 3.8: Zur Verformung eines Festkörpers unter der Einwirkung einer Tangentialspannung: (a) Scherung, (b) Drillung, (c) Darstellung der Torsion als Scherung.

Ein Sonderfall der Scherung ist die *Torsion* oder *Drillung* (siehe Abb. 3.8b). Sie tritt auf, wenn ein Körper (z.B. ein Stab) an einem Ende festgehalten wird und am anderen Ende gedreht wird. Die Ursache für eine Torsion ist ein äußeres Drehmoment T . Den Zusammenhang zwischen Scherung und Torsion kann man sich verdeutlichen, wenn man sich den Körper (z.B. Zylinder in Stab in Abb. 3.8c) in viele kleine Quader zerlegt denkt, die bei einer Torsion alle eine Scherung erleiden.

Anhand von Abb. 3.8c läßt sich der Torsionsmodul eines Zylinders mit Radius R und Länge L berechnen. Dazu betrachtet man zunächst den in Abb. 3.8c gezeigten Hohlzylinder mit Wandstärke dr . Eine am

unteren Ende des Hohlzylinders tangential angreifende Kraft dF verdrillt den Zylinder um den Winkel φ . Ein ursprünglich parallel zur Zylinderachse verlaufender Zylinderteil wird dadurch um den Winkel $\alpha = r\varphi/L$ verkippt. Nach dem **Hookeschen** Gesetz muß nun die am unteren Querschnitt des Zylinders angreifende Schubspannung dem Drillwinkel proportional sein. Da die Querschnittsfläche $dA = 2\pi r dr$ ist, wird die Schubspannung

$$\sigma_t = \frac{dF}{dA} = \frac{dF}{2\pi r dr} \quad (3.2.12)$$

und man erhält mit

$$\sigma_t = G\alpha = Gr\varphi/L \quad (3.2.13)$$

den Ausdruck

$$dF = G2\pi r^2 dr \frac{\varphi}{L} \quad (3.2.14)$$

und durch Multiplikation mit dem Abstand r von der Drehachse das Drehmoment dT

$$dT = dF r = \frac{2\pi\varphi}{L} Gr^3 dr \quad (3.2.15)$$

Geht man nun wieder zu einem Vollzylinder über, den man sich aus einzelnen Hohlzylindern zusammengesetzt denkt, so kann man das gesamte Drehmoment durch Integration zu

$$T = \frac{2\pi\varphi}{L} G \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi\varphi}{2L} GR^4 \quad (3.2.16)$$

darstellen. Daraus ergibt sich für den Torsionsmodul

$$G = \frac{2}{\pi} \frac{L}{\varphi R^4} T \quad (3.2.17)$$

Man kann leicht zeigen, daß bei einem hohlen Stab gleicher Länge und gleicher Massenbelegung bei gleichem äußeren Drehmoment ein kleinerer Torsionswinkel auftritt. Deshalb sind die Knochen von Tieren und Menschen häufig als Röhrenknochen ausgebildet, um bei vorgegebener Masse eine möglichst hohe Stabilität zu erzielen.

Es sei abschließend darauf hingewiesen, daß zwischen Elastizitätsmodul, Poisson-Zahl und Schermodul bei isotropen Festkörpern folgender Zusammenhang besteht, der hier ohne Beweis angegeben wird:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (3.2.18)$$

Dieser Zusammenhang beruht auf der Tatsache, daß der Elastizitätstensor, der die elastischen Eigenschaften eines isotropen Festkörpers beschreibt, nur 3 unabhängige Komponenten besitzt. Deshalb können die in der Technik benutzen 4 elastischen Konstanten nicht vollkommen unabhängig voneinander sein.

Bestimmung des Torsionsmoduls aus Drehschwingungen:

Man kann Gl.(3.2.17) umformen und erhält durch Auflösen nach dem Drehmoment

$$T = G \frac{\pi R^4}{2L} \varphi = T_r^* \varphi . \quad (3.2.19)$$

Diese Gleichung entspricht Gl.(2.3.47) für das elastische Rückstellmoment eines starren Körpers. Man kann deshalb T_r^* als Direktionsmoment auffassen. Verdrillt man einen Körper und läßt ihn dann los, so erhält man eine harmonische Drehschwingung mit der Schwingungsperiode $T = 2\pi \sqrt{I/T_r^*}$. Will man z.B. das Torsionsmoment eines Stabes bestimmen, so kann man an diesen Stab eine große Masse mit bekanntem Massenträgheitsmoment I ankoppeln und die Anordnung in eine Drehschwingung versetzen. Durch Messung von T kann mit den bekannten Größen I , L und R das Torsionsmodul G bestimmt werden.

3.2.5 Kompressionsmodul

Wir betrachten jetzt einen Festkörper von beliebiger Gestalt, auf dessen Oberfläche eine überall konstante Normalspannung wirken möge (siehe Abb. 3.9). Unter der Wirkung dieser Normalspannung wird sich das Volumen des Körpers ändern. Der Zusammenhang zwischen der wirksamen Normalspannung σ_n und der relativen Volumenänderung wird durch den *Kompressionsmodul* K gegeben:

$$\sigma_n = -K \frac{\Delta V}{V_0} . \quad (3.2.20)$$

Eine positive (Druck-) bzw. negative (Zug-) Spannung führt üblicherweise zu einer Verkleinerung bzw. Vergrößerung des Volumens. Der Kompressionsmodul K ist somit positiv und besitzt die Einheit 1 N/m^2 .

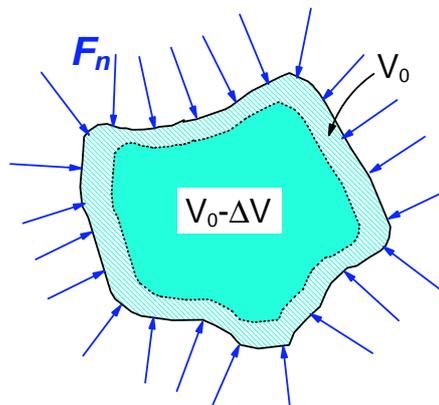


Abbildung 3.9: Zur Verformung eines Festkörpers unter der Einwirkung einer konstanten Normalspannung auf jedem Oberflächenelement.

Die Volumenänderung erfolgt über eine Änderung des Abstandes der Atome des Festkörpers. Hierfür sind große Kräfte notwendig, weshalb K für die meisten Materialien große Zahlenwerte annimmt.

Für isotrope Festkörper ergibt sich wiederum ein Zusammenhang zwischen dem Kompressionsmodul K , dem Elastizitätsmodul E und der Poisson-Zahl μ , der hier wiederum ohne Beweis angegeben wird⁴

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)} . \quad (3.2.21)$$

Da K , E und μ üblicherweise positiv sind, kann der Wert für die Poisson-Zahl nur im Bereich $0 \leq \mu \leq 0.5$ liegen. Man erkennt außerdem, daß für $\mu = 0.5$ der Kompressionsmodul unendlich groß wird. Man spricht dann von einem *inkompressiblen* Festkörper.

3.2.6 Biegung

Bei einer Biegung treten Stauchung und Dehnung an einem Festkörper gleichzeitig auf. Läßt man z.B. auf einen an einem Ende fest eingespannten Balken (rechteckförmiger Querschnitt) der Länge L , Breite b und Höhe d eine Kraft senkrecht zur Balkenrichtung wirken, so wird der Balken gebogen. Die Senkung s des freien Endes des Balkens nennt man dabei *Biegungspfeil*. Durch den Biegeprozeß werden die Ober- und Unterfläche des vorher geradlinigen Balkens zu konzentrischen Kreisbögen deformiert (siehe Abb. 3.10), wobei die Stirnfläche des Balkens eine Neigung um den Winkel φ gegenüber der Ausgangslage erfährt. Das obere Kreisbogenstück ist länger, das untere kürzer als die ursprüngliche Balkenlänge. Das heißt, die Oberseite des Stabes wird gedehnt (es tritt hier eine Zugspannung auf), während die Unterseite gestaucht wird (hier tritt eine Druckspannung auf). Im Zentrum des Balkens hat der Balken seine ursprüngliche Länge beibehalten. Hier tritt keine Spannung auf und man nennt diesen Teil die *neutrale Faser*.

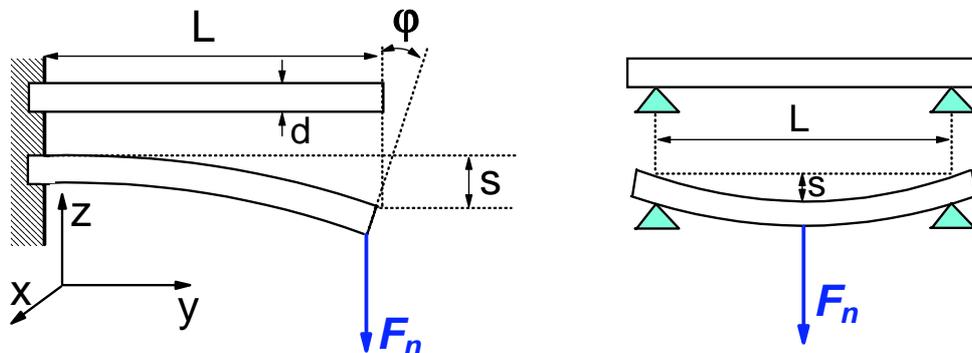


Abbildung 3.10: Zur Durchbiegung eines Balkens.

Aufgrund der auftretenden Druck- und Zugspannungen ist klar, daß der Elastizitätsmodul maßgeblich die Größe des Biegungspfeiles bestimmt. Ferner sollte im **Hookeschen** Bereich der Biegepefil proportional zur angreifenden Kraft F_n sein. Die genaue Analyse ergibt für einen einseitig eingespannten Balken

$$s = \frac{4F_n L^3}{Ebd^3} \quad (3.2.22)$$

⁴Zu einer Ableitung des Zusammenhangs berechne man die Volumenänderung eines Würfels durch die Wirkung einer Normalspannung und berücksichtige, daß die Kanten des Würfels bei Wirken der Normalspannung $(L + \sigma_n/E)$, $(L - \mu\sigma_n/E)$ und $(L - \mu\sigma_n/E)$ betragen.

und für einen an beiden Enden unterstützten Balken

$$s = \frac{F_n L^3}{4Ebd^3} . \quad (3.2.23)$$

Offensichtlich trägt die Höhe d des Balkens wesentlich stärker zur Biegefestigkeit bei als die Balkenbreite b . Dies nutzt man in der Technik aus. Hier werden sogenannte T - oder Doppel- T -Träger verwendet, die bei gleicher Masse eine wesentlich höhere Biegefestigkeit aufweisen als ein massiver Balken mit rechteckförmigem Querschnitt.

Im Zusammenhang mit der Biegefestigkeit führt man den Begriff des geometrischen oder *Flächenträgheitsmoments* ein. Man versteht darunter, in Analogie zum Massenträgheitsmoment $I = \int r^2 dm$ das Integral $J = \int r^2 dA$. Es hat also die Dimension m^4 . Für einen rechteckigen Querschnitt (Dicke d und Breite b) erhält man z.B.

$$J_y = 2 \int_0^{d/2} z^2 b dz = \frac{bd^3}{12} , \quad (3.2.24)$$

womit Gl.(3.2.22) als

$$s = \frac{F_n L^3}{3EJ_y} \quad (3.2.25)$$

ausgedrückt werden kann. Bei Biegebeanspruchungen wird aus Gründen der Materialersparnis der Querschnitt A so gewählt, daß bei gleichem Flächenträgheitsmoment J die Fläche A möglichst klein wird. Vergleicht man z.B. einen Balken mit quadratischem Querschnitt mit einem Rohr oder Doppel- T -Träger, so findet man bei gleichem J für den Doppel- T -Träger eine Materialersparnis von 61% und für das Rohr von sogar 75%.

Biegung von Glasstab:

Die aufgrund der elastischen Deformation erzeugten Spannungen im Inneren eines durchgebogenen Glasstabes lassen sich sichtbar machen. Anisotrope Festkörper zeigen die Erscheinung der Doppelbrechung des Lichtes. Glas ist normalerweise isotrop, wird aber unter dem Einfluß äußerer Kräfte anisotrop.

Bringt man einen ungebogenen Glasstab zwischen zwei gekreuzte Polarisatoren, so läßt die Anordnung zunächst kein Licht durch. Biegt man den Stab, so wird aufgrund der erzeugten inneren Spannungen das Glas anisotrop. Durch die damit verbundene Doppelbrechung gelangt durch das zweite Prisma wieder Licht. Die einzelnen Spannungsschichten des gebogenen Glasstabes werden unterschiedlich hell sichtbar. Dieses Verfahren wird häufig zur Materialprüfung von durchsichtigen Festkörpern eingesetzt.

3.2.7 Plastische Deformation

Beim Einwirken äußerer Kräfte oder Drehmomente treten bei einem Festkörper Form- und Volumenänderungen auf. Wir haben bisher angenommen, daß diese Veränderungen *elastisch* sein sollten, d.h. daß der Körper nach Verschwinden der äußeren Kräfte und Drehmomente wieder seine ursprüngliche

Gestalt annimmt. Wir hatten ferner angenommen, daß der Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung linear sein sollte (**Hookescher Bereich**). Diese Annahmen sind nur für kleine Spannungen richtig. Wird jedoch eine materialspezifische Elastizitätsgrenze überschritten, so lagern sich die Atome in einem Festkörper um und es stellt sich eine neue Gleichgewichtslage in einer neuen Konfiguration ein. Die verursachten Formveränderungen gehen dann nach Verschwinden der äußeren Kraft nicht mehr zurück. Eine solche Verformung nennt man *plastische Deformation*.

Die Vorgänge, die oberhalb der Elastizitätsgrenze in einem Festkörper ablaufen, sind äußerst kompliziert und zudem stark materialabhängig. Man behilft sich deshalb mit einem einfachen *Spannungs-Dehnungs-Diagramm* (siehe Abb. 3.11a), um diese Vorgänge qualitativ zu diskutieren. Für kleine Spannungen nimmt die Dehnung zunächst linear mit der Spannung zu (**Hookescher Bereich**). Nach Überschreiten des **Hookeschen Bereichs** bei H flacht das Spannungs-Dehnungs-Diagramm ab (d.h. mit kleineren Spannungsänderungen werden größerer Verzerrungen erreicht) und man erreicht die Elastizitätsgrenze, die allerdings nicht scharf definiert ist. Bei weiterer Vergrößerung kommt man bei F (*Fließgrenze*) in den sogenannten *Fließbereich*, in dem der Festkörper ähnlich zu einer zähen Flüssigkeit zu fließen anfängt. Das Spannungs-Dehnungs-Diagramm verläuft hier fast horizontal. Ab Punkt C kommt es dann mit steigender Spannung wieder zu einer Verfestigung, wodurch das Spannungs-Dehnungs-Diagramm wieder steiler wird. Nach Überschreiten des Punktes B kommt es zu einer starken Querschnittsverminderung, wodurch das Spannungs-Dehnungs-Diagramm eine negative Steigung erhält. Schließlich erreicht man bei Z die *Zerreiß- oder Bruchspannung*. Die dabei erreichte relative Dehnung nennt man *Bruchdehnung*.

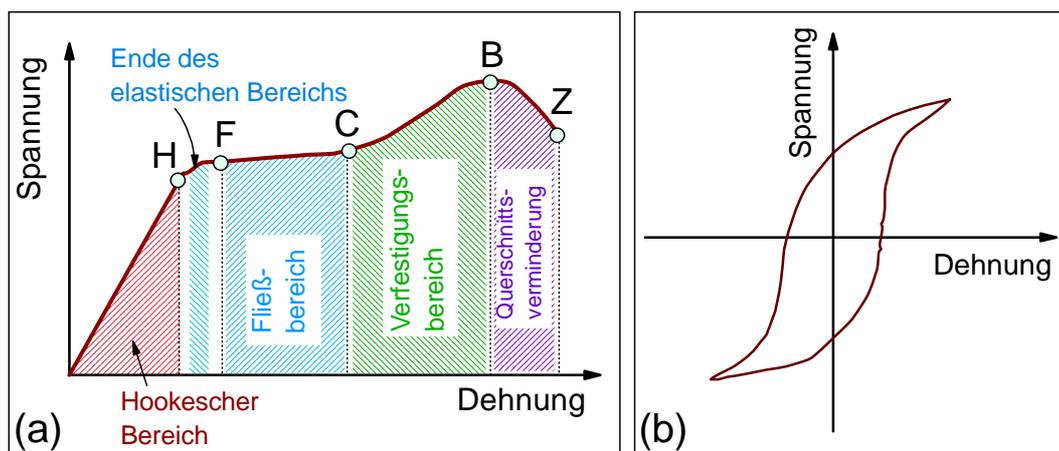


Abbildung 3.11: (a) Spannungs-Dehnungs-Diagramm: H – Ende des **Hookeschen Bereichs**, F – Fließgrenze, C bis B – Verfestigungsbereich, Z – Zerreiß- oder Bruchpunkt. (b) Hysteretisches Spannungs-Dehnungs-Diagramm aufgrund einer elastischen Nachwirkung.

In der Technik gibt die *Zugfestigkeit* σ_B eines Materials die im Punkt B erreichte maximale Spannung an. Als Einheit wird immer noch häufig die im SI-System nicht mehr erlaubte Einheit 1 kp/mm^2 verwendet.

Elastische Nachwirkung

Durchläuft man ein Spannungs-Dehnungs-Diagramm in entgegengesetzte Spannungsrichtungen periodisch, so stellt sich die Frage, ob die Dehnung der vorgegebenen Spannung instantan folgen kann. Dies ist je nach Material ab einer bestimmten Änderungsgeschwindigkeit der Spannung nicht mehr der Fall. Das heißt, die Dehnung stellt sich erst nach einer gewissen Zeitverzögerung ein. Diesen Effekt nennt man *elastische Nachwirkung* oder *elastische Hysterese*. Während diese Zeitverzögerung bei Metallen sehr klein ist, kann sie bei Gummi oder Kunststoffen beträchtlich sein. Durchfährt man

das Spannungs-Dehnung-Diagramm im **Hookeschen** Bereich genügend schnell, so erhält man die in Abb. 3.11b gezeigte Hysteresekurve. Beim Durchlaufen der Hysteresekurve muß man die Volumenarbeit $\int \epsilon d\sigma$ (Flächeninhalt der Hysteresekurve) verrichten. Diese Arbeit führt z.B. bei einem Autoreifen (hier wird sie als *Walkarbeit* bezeichnet) zu einer Erwärmung des Reifens.

3.2.8 Materialparameter

Material	E	G	K	μ	σ_B
Al, rein, weich	72	27	75	0.0034	0.013
Duraluminium	77	27	75	0.0034	0.5
α -Eisen	218	84	172	0.0028	0.1
V2A-Stahl (Cr, Ni)	195	80	170	0.0028	0.7
CrV-Federstahl	212	80	170	0.0028	1.55
Cu, weich	120	40	140	0.0035	0.2
Pb	17	60	42.5	0.0044	0.014
Au	81	28	180	0.0042	0.14
Si	100	34	320	0.0045	—
Quarzglas	76	33	38	0.0017	0.090
Beryllium-Bronze	118	—	—	—	3.65
Nylon	etwa 10	—	—	—	0.2 - 0.6
Holz (Buche, längs)	15	—	—	—	bis 0.6

Tabelle 3.2: Elastizitätsmodul E , Torsionsmodul G , Kompressionsmodul K , Poisson-Zahl μ und Zug- bzw. Druckfestigkeit σ_B einiger Materialien in GPa.

3.3 Hydro- und Aerostatik

3.3.1 Kompression von Flüssigkeiten

Im Gegensatz zu einem Festkörper nimmt eine Flüssigkeit jede beliebige Form an (vergleiche Abschnitt 3.1). Da die Flüssigkeitsteilchen keine feste Lage haben und frei gegeneinander beweglich sind, setzen Flüssigkeiten weder einer Zug noch einer Schubspannung einen Widerstand entgegen. Das heißt, *Flüssigkeiten haben keine Formelastizität*, man kann sie weder dehnen noch scheren. Als einzig mögliche Deformation bleibt die *Volumendeformation*. Genauso wie bei Festkörpern gilt

$$\sigma_n = -K \frac{\Delta V}{V_0} . \quad (3.3.1)$$

Bei Flüssigkeiten wird meistens statt der Normalspannung σ_n der *Druck* p

$$p := \sigma_n = \frac{F_n}{A} \quad (3.3.2)$$

verwendet. So kann man z.B. Flüssigkeiten über einen Stempel komprimieren, wobei der Druck p durch den Quotienten aus der Kraft F_n senkrecht zur Stempelfläche und der Stempelfläche A gegeben ist.

Je größer K ist, desto größer ist der Druck, der notwendig ist, um das Volumen um einen bestimmten Prozentsatz zu verändern. Die Kompressionsmodule von Flüssigkeiten sind im allgemeinen kleiner als die von Festkörpern, reichen aber teilweise an diejenigen von Festkörpern heran: Wasser: $K = 2$ GPa; Benzol: $K = 1$ GPa, zum Vergleich Kupfer: $K = 140$ GPa.

Kompression von Wasser mit Gewehrkegel:

Schießt man eine Gewehrkegel auf eine mit Luft gefüllte Kiste, so dringt das Geschos durch beide Seitenwände der Kiste, ohne die Kiste sonst zu beschädigen. Ist die Kiste dagegen mit Wasser gefüllt, so wird sie völlig zerrissen. Die kleine Volumenänderung durch die Gewehrkegel bewirkt im Wasser eine so starke Kompression, daß die Wände der Kiste unter der Wirkung des damit verbundenen Druckes $p = -K \frac{\Delta V}{V_0}$ auseinanderfliegen. Für $V_{\text{Kugel}} = 0.1 \text{ cm}^3$ und $V_{\text{Kiste}} = 1000 \text{ cm}^3$ erhält man

$$p = -K \frac{\Delta V}{V_0} = 2 \times 10^9 \text{ Pa} \cdot 10^4 = 2 \times 10^5 \text{ Pa} = 2 \text{ bar} . \quad (3.3.3)$$

Das entspricht einer Kraft von etwa $F = 4000 \text{ N}$ auf die Innenwände der Kiste.

3.3.2 Stempeldruck

Wir betrachten zunächst eine Flüssigkeit, die nicht der Schwerkraft unterworfen ist. Übt man durch einen Stempel mit der Fläche A eine Kraft F auf eine solche Flüssigkeit in einem abgeschlossenen Behälter aus, so beobachtet man im gesamten Behälter, d.h. an jeder Stelle der Oberfläche und im Inneren der Flüssigkeit den gleichen Druck, den *Stempeldruck* $p = F/A$.

Am einfachsten läßt sich dieser Sachverhalt zeigen, wenn man den in Abb. 3.12 gezeigten speziellen Körper betrachtet. Der in dieser Abbildung gezeigte Keil sei ringsum von einer Flüssigkeit umgeben.

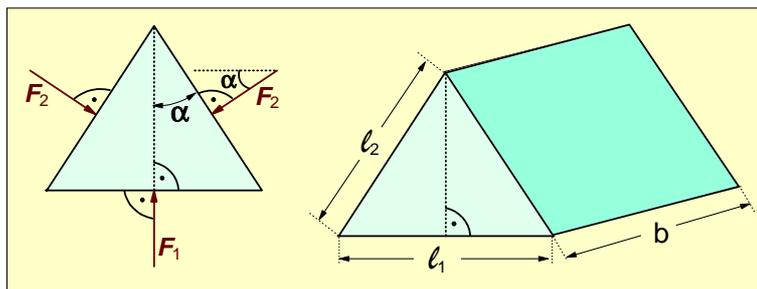


Abbildung 3.12: Zum Stempeldruck auf unterschiedliche Flächen.

Da es sich um ein statisches Problem handelt, muß die Summe aller auf den Körper einwirkenden Kräfte verschwinden. Wäre dies nicht der Fall, so würde sich der Keil in eine bestimmte Richtung bewegen. Das heißt, alle horizontalen und alle vertikalen Kräfte müssen sich gegenseitig kompensieren. Für die vertikalen Kräfte folgt damit

$$F_1 = 2F_2 \sin \alpha . \quad (3.3.4)$$

Für den Winkel α erhält man mit der Breite b des Keils

$$\sin \alpha = \frac{l_1}{2l_2} = \frac{l_1 b}{2l_2 b} = \frac{A_1}{2A_2} . \quad (3.3.5)$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{F_1}{A_1} = p_1 = \frac{F_2}{A_2} = p_2 , \quad (3.3.6)$$

d.h. der Druck auf die verschiedenen Flächen ist gleich. Diese Gesetzmäßigkeit wird in der Technik bei der *hydraulischen Presse* eingesetzt (siehe Abb. 3.13). Dabei sind zwei Zylinder mit unterschiedlichen Querschnittsflächen A_1 und A_2 über ein Rohr miteinander verbunden. Die Zylinder und das Rohr sind mit einer Flüssigkeit gefüllt (Wasser, Öl) und die Zylinder werden mit passenden Kolben ohne Luftschluß verschlossen. Am Kolben des Zylinders mit kleinerer Querschnittsfläche A_1 greife die Kraft F_1 an. Dann gilt

$$F_2 = pA_2 = \frac{F_1 A_2}{A_1} . \quad (3.3.7)$$

Man erkennt, daß sich durch Vergrößerung des Flächenverhältnisses A_2/A_1 sehr große Kräfte am Kolben 2 erzielen lassen.

Der Energiesatz wird hierbei natürlich nicht verletzt. Die an Kolben 1 verrichtete Arbeit beträgt

$$\Delta W_1 = F_1 \Delta s_1 = F_1 \frac{\Delta V_1}{A_1} = p_1 \Delta V_1 , \quad (3.3.8)$$

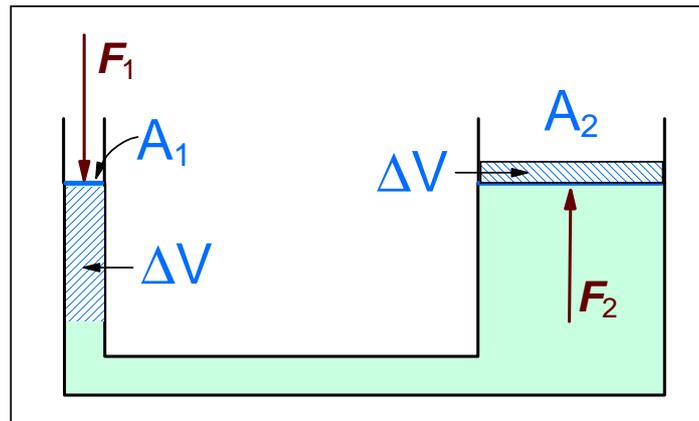


Abbildung 3.13: Hydraulische Presse.

wobei Δs_1 der von Kolben 1 zurückgelegte Weg ist. Von Kolben 2 wird die Arbeit

$$\Delta W_2 = F_2 \Delta s_2 = F_2 \frac{\Delta V_2}{A_2} = p_2 \Delta V_2, \quad (3.3.9)$$

geleistet. Setzt man Inkompressibilität der Flüssigkeit an, so ist $\Delta V_1 = \Delta V_2$ und wegen $p_1 = p_2$ auch $\Delta W_1 = \Delta W_2$.

3.3.3 Schweredruck, hydrostatischer Druck

In diesem Abschnitt soll eine Flüssigkeit im Schwerfeld betrachtet werden, auf die sonst aber keine weiteren Kräfte wirken. Durch ihr Gewicht übt die Flüssigkeit einen Schweredruck auf die tieferen Schichten und den Gefäßboden aus (siehe Abb. 3.14a). Mit der Dichte ρ der Flüssigkeit, dem Querschnitt A des Gefäßbodens und der Erdbeschleunigung g erhält man das Gewicht der Flüssigkeitsäule der Höhe h zu

$$F_G = mg = Ah\rho g. \quad (3.3.10)$$

Mit $p = F_G/A$ ergibt sich der *Schweredruck* der Flüssigkeit oder der *hydrostatische Druck* zu

$$p = h\rho g, \quad (3.3.11)$$

wenn man annimmt, daß der Druck über der Flüssigkeitsoberfläche Null ist. Der durch die Schwere hervorgerufene hydrostatische Druck in einer Flüssigkeit hängt nur von der Höhe und der Dichte der Flüssigkeit ab, nicht aber von der Form des Gefäßes. Das heißt, der Bodendruck in den in Abb. 3.14b gezeigten Gefäßen ist genau gleich, obwohl die Mengen und damit die Gewichte der Flüssigkeiten in den einzelnen Gefäßen verschieden sind (*hydrostatisches Paradoxon*, **Stevin**: 1587, **Pascal**: 1660).

In den in Abb. 3.14b skizzierten Gefäßen herrscht bei gleicher Höhe des Flüssigkeitsspiegels in derselben Tiefe jeweils derselbe Druck, Bringt man z.B. in einem Gefäß eine Zwischenwand ein, so ändert sich

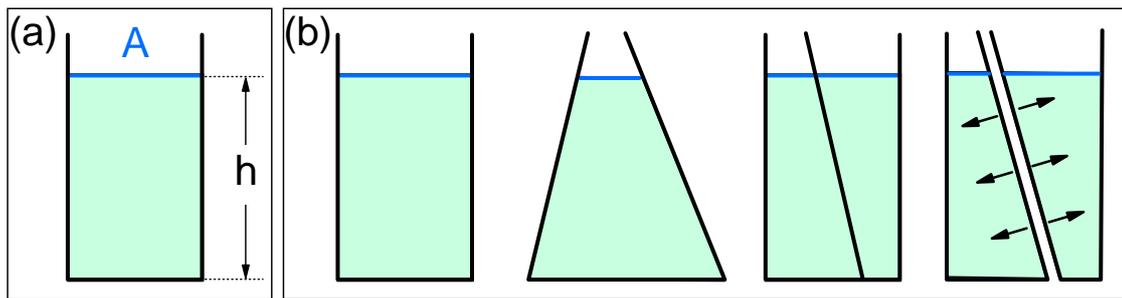


Abbildung 3.14: (a) Zum hydrostatischen Druck. (b) Zur Formunabhängigkeit des hydrostatischen Druckes (hydrostatisches Paradoxon).

am Druck nichts. Da sich dann das Wasser in zwei völlig getrennten Teilräumen befindet, kann man die Teilräume auch einzeln betrachten. Bei den geteilten Gefäßen übernehmen die Wände den Druck, den vorher die entfernte Flüssigkeitsmenge auf die Zwischenwand ausgeübt hat. Durch diese Kräfte erleidet der Bodendruck keine Änderung.

Verbindet man verschiedenen Gefäße mit einem Rohrsystem (kommunizierende Röhren), so verhält sich die Flüssigkeit in diesem System so, daß der Flüssigkeitsspiegel in allen Gefäßen gleich hoch ist (siehe Abb. 3.15a). Dies folgt sofort aus dem Ausdruck für den hydrostatischen Druck. Falls eine unterschiedliche Flüssigkeitshöhe in verschiedenen Teilen des Gefäßsystems vorliegen würde, so würde die aus der Differenz des hydrostatischen Drucks resultierende Kraft zu einer Umverteilung der Flüssigkeit führen, bis der Flüssigkeitsspiegel in allen Teilgefäßen übereinstimmt.

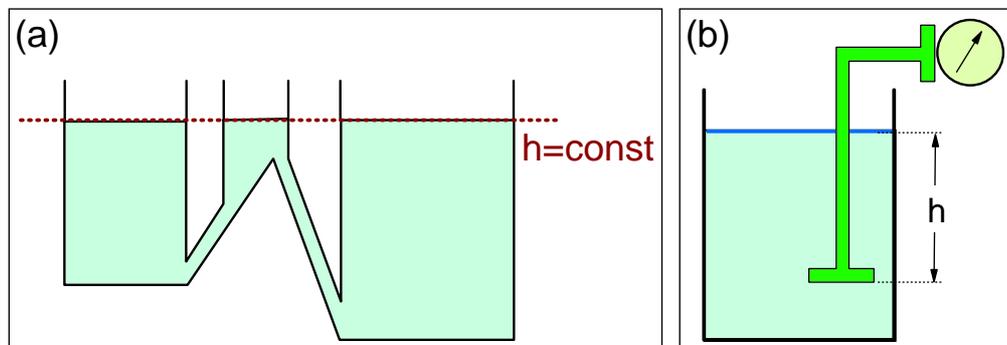


Abbildung 3.15: (a) Zum Flüssigkeitsspiegel in verbundenen Gefäßen. (b) Bestimmung des hydrostatischen Druckes mit einem Manometer.

Die Gültigkeit des Ausdruckes für den hydrostatischen Druck läßt sich experimentell einfach bestätigen. Dazu benutzt man ein Druckmeßgerät, ein *Manometer* (siehe Abb. 3.15b). Mit Hilfe des Manometers läßt sich der lineare Anstieg des Druckes mit zunehmender Tiefe nachweisen.

Wir betrachten als nächstes ein *U-Rohr*, das teilweise mit einer Flüssigkeit gefüllt ist. Über beiden Seiten des *U-Rohres* sollen verschieden Drucke p und $p + \Delta p$ herrschen (siehe Abb. 3.16). Den Druckunterschied Δp kann man mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingung $h_1 g \rho = h_2 g \rho + \Delta p$ aus dem Höhenunterschied $\Delta h = h_1 - h_2$ der Menisken zu

$$\Delta p = (h_1 - h_2) g \rho = \Delta h g \rho \quad (3.3.12)$$

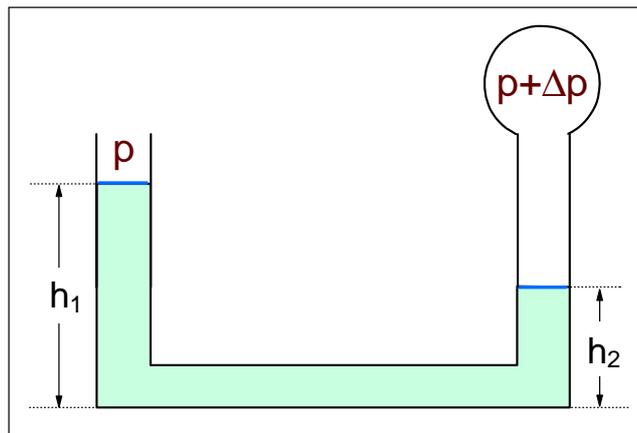


Abbildung 3.16: Flüssigkeitsmanometer auf der Basis eines U -Rohres.

bestimmen. Bringt man an dem freien Schenkel des U -Rohres eine Skala an, die wegen $\Delta p \propto \Delta h$ leicht in Druckeinheiten geeicht werden kann, so erhält man ein Flüssigkeitsmanometer.

Wasserdruck:

Eine Wassersäule von 10 m Höhe erzeugt einen Druck von 1 technischen Atmosphäre (1 at = 1 kp/cm²). Folglich ergeben sich in großer Meerestiefe erhebliche Drucke. In einer Tiefe von 1000 m herrschen bereits 100 at und in der größten auf der Erde vorkommenden Meerestiefe von etwa 11 000 m etwa 1 100 at. Aus diesem Grund können Taucher ohne besonders gebaute Taucheranzüge nur etwa 50 m tief tauchen. Aufgrund des hohen Drucks in dieser Tiefe löst sich Stickstoff im Blut. Beim Wiederauftauchen kommt es an zur Bildung von Stickstoffblasen in den Blutbahnen.

Druck im Inneren der Erde:

Die meisten Himmelskörper sind im Innern flüssig. Aufgrund des hydrostatischen Druckes herrschen im Inneren der Himmelskörper sehr große Drucke. Bei einer Berechnung muß man allerdings beachten, daß die Schwerkraft zum Zentrum des Himmelskörpers hin abnimmt und im Zentrum den Wert Null erreicht. Andererseits nimmt die Dichte zum Zentrum hin zu. Der im Zentrum der Erde herrschende Druck kann insgesamt zu etwa 3×10^6 at abgeschätzt werden. Unter diesem Druck ist die Dichte im Zentrum der Erde etwa 17 g/cm³, während die mittlere Dichte der Erde nur etwa 5.5 g/cm³ beträgt. Für das Zentrum der Sonne ergibt sich sogar ein Druck von etwa 1.4×10^9 at.

Bestimmung von Dichten unbekannter Flüssigkeiten

In einem U -Rohr sei auf der einen Seite Hg und auf der anderen Seite Wasser eingefüllt (siehe Abb. 3.17). Man beobachtet, daß das Wasser höher steht als das Quecksilber. Legt man durch die Berührungsfläche zwischen Quecksilber und Wasser ein horizontale Nulllinie, so herrscht in dieser Ebene der gleiche Druck. Ebenso herrscht über dem Quecksilber und über dem Wasser derselbe Druck (z.B. Atmosphärendruck). Die beiden Säulen müssen somit denselben Schweredruck erzeugen und man erhält

$$h_{\text{H}_2\text{O}} \rho_{\text{H}_2\text{O}} g = h_{\text{Hg}} \rho_{\text{Hg}} g$$

oder
$$\frac{\rho_{\text{Hg}}}{\rho_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{h_{\text{H}_2\text{O}}}{h_{\text{Hg}}} . \quad (3.3.13)$$

Im Experiment mißt man $h_{\text{H}_2\text{O}}/h_{\text{Hg}} = 13.6$. Mit der bekannten Dichte von Wasser ($\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1 \text{ g/cm}^3$) ergibt sich damit die Dichte von Quecksilber zu $\rho_{\text{Hg}} = 13.6 \text{ g/cm}^3$.

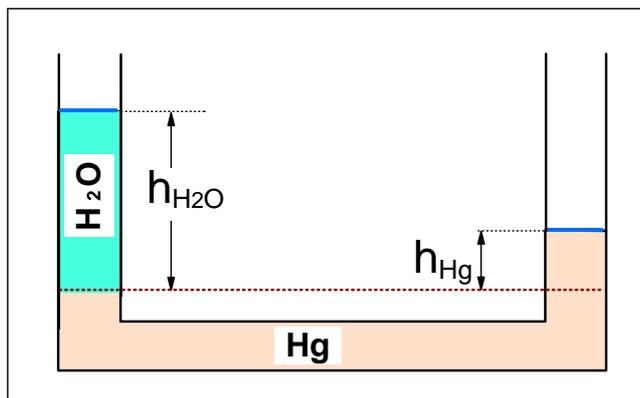


Abbildung 3.17: Zur Bestimmung der unbekanntenen Dichte von Flüssigkeiten.

Auftrieb

Hängt man nacheinander ein Blei- und ein Eisenstück von je 500 g Masse an eine Federwaage, so mißt man im konstanten Schwerfeld der Erde die gleiche Auslenkung. Führt man das gleiche Experiment durch, wobei die beiden Massen in Wasser eintauchen, so kann man dieses Ergebnis nicht reproduzieren. Man beobachtet, daß die Federauslenkung zurückgeht, und zwar beim Eisenstück stärker als beim Bleistück. Das Bleistück scheint also in der Flüssigkeit ein größeres Gewicht zu haben als das Eisenstück. Verantwortlich für die Abnahme der Federauslenkung ist in beiden Fällen der *Auftrieb*, der in diesem Abschnitt diskutiert werden soll.

Wir betrachten zunächst einen quaderförmigen Körper der Dichte ρ , der in eine Flüssigkeit der Dichte ρ_{F1} eingetaucht ist (siehe Abb. 3.18a). Auf alle 6 Seitenflächen des Quaders wirken Kräfte, die vom hydrostatischen Druck verursacht werden. Die Kräfte auf die 4 senkrechten Seitenflächen heben sich dabei gegenseitig auf. Wir müssen uns deshalb nur mit der Kraft auf die Ober- und Unterseite des Quaders befassen. Für die Oberseite erhalten wir mit den Bezeichnungen aus Abb. 3.18a

$$F_1 = \rho_{\text{F1}} g h_1 A = p_1 A . \quad (3.3.14)$$

Genauso erhält man für die Kraft auf die Unterseite des Quaders

$$F_2 = \rho_{\text{F1}} g h_2 A = p_2 A . \quad (3.3.15)$$

Hierbei ist A die Deck- bzw. Bodenfläche des Quaders. Die Differenz der beiden Kräfte führt zum Auftrieb

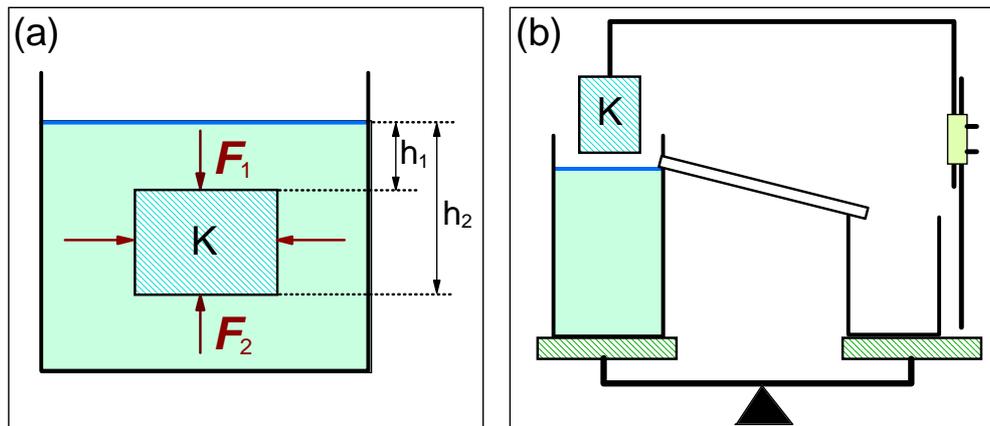


Abbildung 3.18: (a) Auftrieb eines Körpers in einer Flüssigkeit. (b) Veranschaulichung des Archimedischen Prinzips mit einer Balkenwaage.

$$F_A = F_2 - F_1 = \rho_{F1} g (h_2 - h_1) A = \rho_{F1} g V$$

oder $F_A = m_{F1} g$. (3.3.16)

Mit Hilfe dieser Gleichung läßt sich das sogenannte *Archimedische Prinzip* (**Archimedes**: 220 v.Chr.) formulieren:

Das Archimedische Prinzip:
Der Auftrieb eines Körpers ist gleich dem Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeit.

Diese Formulierung ist für beliebig geformte Körper richtig. Die oben diskutierte unterschiedliche Auslenkung einer Federwaage durch ein in Wasser eingetauchtes Blei- und Eisenstück gleicher Masse resultiert nach dem Archimedischen Prinzip aus der unterschiedlichen Dichte von Blei und Eisen. Aufgrund der höheren Dichte von Blei verdrängt der Bleikörper weniger Wasser, der Auftrieb wird dadurch kleiner und die Feder wird stärker gedehnt.

Das Archimedische Prinzip:

Das Archimedische Prinzip kann man gut mit dem in Abb. 3.18b gezeigten Versuchsaufbau veranschaulichen. Auf einer Waage steht auf einer Seite ein Wasserbehälter und auf der anderen ein leeres Becherglas und ein Gewichtskörper K . Die Waage soll sich im Gleichgewicht befinden. Wird nun der Gewichtskörper in den Wasserbehälter abgesenkt, so wird sein Gewicht aufgrund des Auftriebs zunächst geringer und die Waage gerät aus dem Gleichgewicht. Da das verdrängte Wasser aber über den Überlauf des Wasserbehälters in das leere Becherglas auf der anderen Seite der Waage läuft, wird das Gleichgewicht der Waage wieder hergestellt, da das Gewicht des von dem Gewichtskörper verdrängten Wassers nach dem Archimedischen Prinzip gerade dem Auftrieb des Körpers K entspricht.

Man kann, indem man einen Körper K erst in der Luft und dann in einer Flüssigkeit mit bekannter Dichte wiegt, seine Dichte bestimmen. Es gilt

$$F_K = Mg \quad \text{und} \quad F_A = V_K \rho_{F1} g \quad (3.3.17)$$

und damit

$$\frac{F_K}{F_A} = \frac{Mg}{V_K \rho_{F1} g} \quad (3.3.18)$$

Mit $M = \rho_K V_K$ folgt dann

$$\rho_K = \frac{F_K}{F_A} \rho_{F1} \quad (3.3.19)$$

Da man Wägungen mit hoher Genauigkeit durchführen kann, ist dies eine Präzisionsmethode zur Bestimmung der Dichte eines Körpers (Beispiel: **Jollysche** Federwaage).

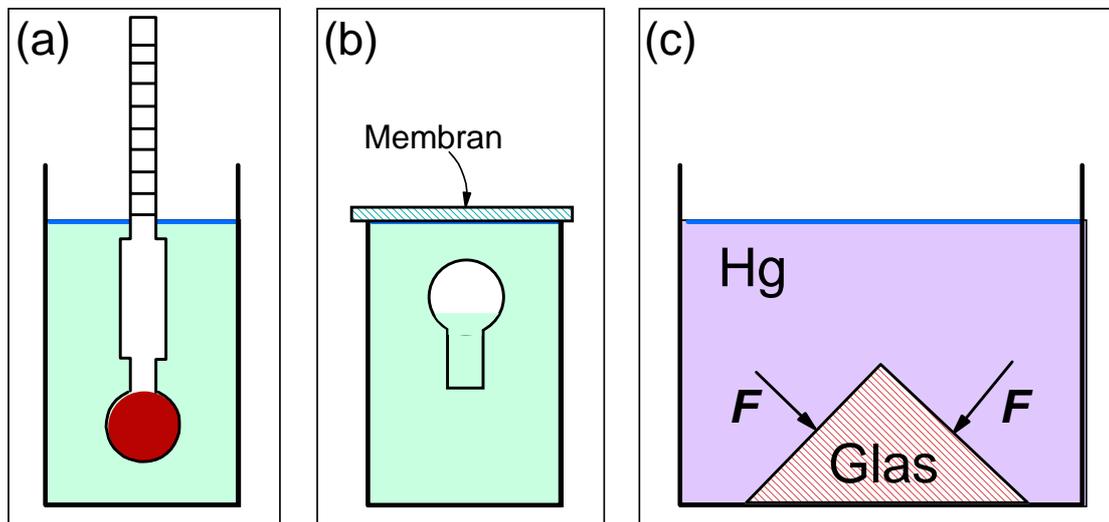


Abbildung 3.19: (a) Aräometer. (b) Cartesianischer Taucher. (c) Ausbleibender Auftrieb eines Körpers am Gefäßboden.

Ist der Auftrieb eines Körpers in einer Flüssigkeit kleiner als sein Gewicht, so ist die Summe aus Gewicht- und Auftriebskraft nach unten gerichtet und der Körper sinkt in der Flüssigkeit nach unten. Ist dagegen die Auftriebskraft größer als die Gewichtskraft, so steigt der Körper an die Oberfläche der Flüssigkeit und taucht in diese nur teilweise ein. Man kann also folgende Bedingung für das Schwimmen eines Körpers an der Oberfläche einer Flüssigkeit festhalten:

$$F_K - F_A = (\rho_K - \rho_{F1})V_K < 0 \quad (3.3.20)$$

Ein Körper schwimmt also auf einer Flüssigkeit, wenn seine Dichte kleiner als diejenige der Flüssigkeit ist. Z.B. schwimmt Holz auf Wasser; Eisen schwimmt nicht auf Wasser, dafür aber auf Quecksilber; Gold wiederum schwimmt nicht auf Quecksilber.

Das Gewicht eines schwimmenden Körpers ist gleich dem Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeit. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 V_K \rho_K g &= V'_K \rho_{\text{Fl}} g \\
 \text{oder} \quad \frac{V_K}{V'_K} &= \frac{\rho_{\text{Fl}}}{\rho_K} .
 \end{aligned}
 \tag{3.3.21}$$

Hierbei ist V_K das Gesamtvolumen des Körpers und V'_K das Volumen des eingetauchten Teils des Körpers. Hat also ein Körper z.B. nur die Hälfte der Dichte einer Flüssigkeit, so taucht er in diese nur zur Hälfte ein. Diese Tatsache macht man sich beim *Ärömeter* zunutze (siehe Abb. 3.19a). Mit ihm bestimmt man die Dichte von Flüssigkeiten über die Eintauchtiefe eines geeichten Testkörpers. Je tiefer der Testkörper sinkt, desto geringer ist die Dichte der Flüssigkeit.

Cartesianische Taucher:

Im Grenzfall $F_K = F_A$ schwebt ein Körper in einer Flüssigkeit. Bringt man in einen mit Wasser gefüllten Kolben einen teilweise mit Luft gefüllten hohlen Glaskörper ein, so kann man die in dem Glaskörper enthaltenen Luftmenge so einstellen, daß der Glaskörper genau schwebt (siehe Abb. 3.19b). Verschließt man nun den Kolben mit einer Membran und drückt auf die Membran, so fängt der Glaskörper an zu sinken. Durch den Druck wird die Luftmenge in dem Glaskörper komprimiert, wodurch sich die verdrängte Wassermenge und dadurch der Auftrieb verringert. Durch Erzeugen eines Unterdrucks kann man den Glaskörper auch nach oben schwimmen lassen.

Es ist wichtig, sich klar zu machen, daß der Auftrieb eines Körpers durch den unterschiedlichen Druck der Flüssigkeit an seiner Ober- und Unterseite zustandekommt. Drückt man z.B. ein Glasprisma (siehe Abb. 3.19c), das normalerweise auf Quecksilber schwimmt, auf den Boden eines mit Quecksilber gefüllten Gefäßes, so bleibt es unten liegen. Befindet sich der Glaskörper am Boden, so kann von unten keine Kraft auf ihn wirken, da sich keine Flüssigkeit mehr zwischen Glaskörper und Boden befindet. Es kommt also kein Auftrieb zustande.

3.3.4 Aerostatik

Gase haben eine endliche, wenn auch kleine Massendichte und damit ein endliches Gewicht. Dies kann man z.B. dadurch demonstrieren, daß man einen Glaskolben evakuiert und anschließend sein Gewicht mit einer Balkenwaage bestimmt. Dann läßt man ein Gas einströmen und bestimmt das Gewicht nochmals. Man stellt fest, daß sich das Gewicht des Glaskolbens erhöht hat. Mit dem Volumen V des Kolben und dem mit der Waage bestimmten Gewicht des Gases läßt sich die Masse des im Kolben eingeschlossenen Gases bestimmen. Ein Liter Luft hat bei Normaldruck die Masse von etwa 1 g.

Gas	Dichte in kg/m ³
Luft	1.293
CO ₂	1.977
H ₂	0.090

Tabelle 3.3: Dichte einiger Gase in kg/m³ bei Normaldruck.

Aufgrund ihres Gewichts üben Gase auch einen Schweredruck aus. Der von der Luft unserer Atmosphäre auf der Erdoberfläche ausgeübte Luftdruck läßt sich mit dem in Abb. 3.19a gezeigten Aufbau bestimmen. Man bringt in ein an einem Ende verschlossenen U -Rohr Quecksilber, so daß mindestens der verschlossene Schenkel des U -Rohres ganz mit Quecksilber gefüllt ist. Stellt man dann das Rohr wie in Abb. 3.19a gezeigt auf, so sinkt der Quecksilberspiegel nach unten und es entsteht über der Quecksilbersäule in dem verschlossenen Teil des U -Rohres ein Vakuum (*Torricelli-Vakuum*). Es ist nur noch der zur entsprechenden Temperatur gehörige Quecksilberdampfdruck vorhanden. Mißt man die Höhendifferenz zwischen den beiden Quecksilberspiegeln, so erhält man einen Wert von etwa 760 mm. Da nach Gl.(3.3.12) $\Delta p = \Delta h \rho g$ gilt, ist Δh direkt proportional zur Druckdifferenz zwischen Torricelli-Vakuum und dem äußeren Luftdruck. Man hat damit ein sogenanntes Quecksilber-Manometer realisiert.

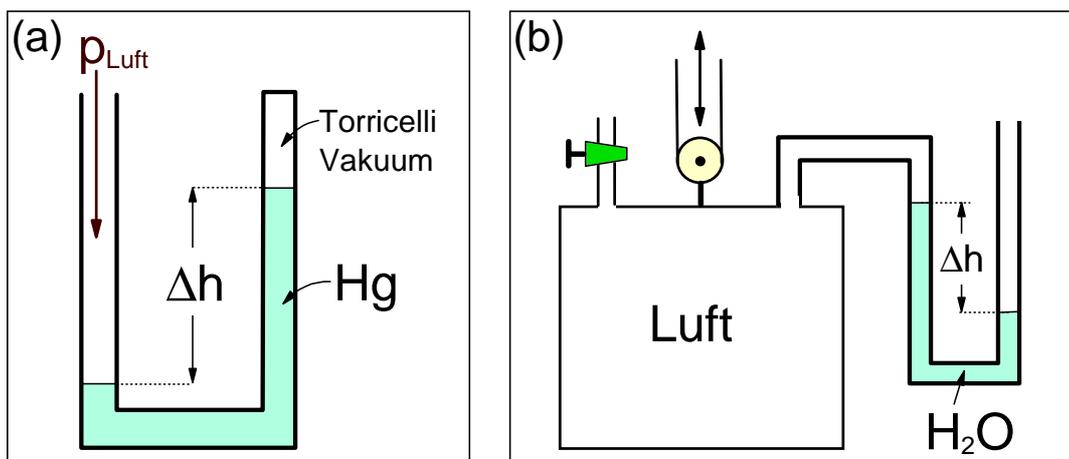


Abbildung 3.20: (a) Zur Realisierung eines Quecksilber-Manometers. (b) Zur Bestimmung der Abhängigkeit des Luftdrucks von der Höhe.

Für den mittleren Luftdruck auf Meereshöhe findet man

$$p_{\text{NN}} = 760 \text{ mmHg} = 760 \text{ Torr} = 1013 \text{ mbar} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} . \quad (3.3.22)$$

Dieser Druck entspricht dem Druck einer etwa 10 m hohen Wassersäule.

Ein historisch wichtiges Experiment zur Bestimmung des Luftdrucks wurde von **Otto v. Guericke** im Jahr 1654 durchgeführt. Er zeigte, daß zwei dicht aufeinandergesetzte und luftleer gepumpte Halbkugeln (*Magdeburger Halbkugeln*, Durchmesser ca. 40 cm) durch den Druck der äußeren Luft so stark zusammengepreßt werden, daß 16 Pferde notwendig waren, um die Kugeln auseinander zu ziehen. Die Kraft, die zum Trennen der Halbkugeln notwendig ist, ergibt sich aus $F = \Delta p A$ mit $\Delta p \simeq 1 \text{ bar}$ und $A \simeq 0.1 \text{ m}^2$ zu $F \simeq 10^4 \text{ N}$.

Der Luftdruck hängt von der Höhe über dem Meeresspiegel ab. Dies kann man durch das in Abb. 3.19b gezeigte Experiment demonstrieren. Man zieht ein mit Luft gefülltes Gefäß in geöffnetem Zustand in eine Höhe von 5 m. Dann verschließt man das Gefäß und bringt es wieder auf die ursprüngliche Höhe. An dem an das Gefäß angeschlossenen, mit Wasser gefülltem U -Rohr stellt man eine Verschiebung des Wasserspiegels um etwa 6 mm fest. Das heißt, der Luftdruck bei $h = 0 \text{ m}$ ist um 6 mm Wassersäule oder etwa 0.6 mbar höher als der Luftdruck bei $h = 5 \text{ m}$. Aufgrund diesen Effekts ist der mittlere Luftdruck an einem Ort auf der Höhe h über dem Meeresspiegel um einen entsprechenden Wert niedriger⁵

⁵Dem mittleren Luftdruckwert überlagern sich natürlich immer die wetterbedingten Schwankungen aufgrund von Hoch- und Tiefdruckgebieten.

Genauso wie in Flüssigkeiten erhält man auch in Gasen einen Auftrieb. Aufgrund der geringeren Dichte von Helium oder Wasserstoff im Vergleich zu Luft steigt deshalb ein mit Wasserstoff oder Helium gefüllter Ballon in der Luft nach oben. Man kann auch zwei verschieden große, aber bei Normaldruck gleich schwere Körper auf eine Balkenwaage bringen. Die Balkenwaage ist, wie erwartet, im Gleichgewicht. Bringt man die Anordnung unter eine Glasglocke und evakuiert, so senkt sich die Balkenwaage auf der Seite mit dem größeren Körper. Dieser hatte bei Normaldruck eine größere Luftmenge verdrängt und deshalb größeren Auftrieb erfahren als der kleine Körper. Nach Wegfallen des Auftriebs ist der große Körper schwerer. Der Auftrieb verfälscht also das Meßergebnis von Balken- oder Federwaagen.

Die barometrische Höhenformel

Berechnet man mit dem Ausdruck $\Delta p = \rho g \Delta h$ die Dicke unserer Atmosphäre, so erhält man mit $h = 8000$ m ein offensichtlich falsches Ergebnis. Der Grund dafür ist die Annahme einer konstanten Dichte der Luft. Betrachtet man die Luft als *ideales Gas*, dann gilt das *Gesetz von Boyle-Mariotte*⁶

$$pV = \text{const} . \quad (3.3.23)$$

Damit gilt für ein Luftvolumen V unter dem Druck p , gemessen in einer beliebigen Höhe über dem Meeresspiegel, daß das Produkt pV für die gleiche eingeschlossene Luftmasse m gleich sein muß dem Produkt $p_0 V_0$ der entsprechenden Größen auf Meereshöhe:

$$pV = p_0 V_0 \Rightarrow \frac{pV}{m} = \frac{p_0 V_0}{m} . \quad (3.3.24)$$

Man erhält somit für die Dichte

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0} . \quad (3.3.25)$$

Demnach ist die Dichte der Luft proportional dem Luftdruck. Für kleine Druckänderungen dp gilt

$$\begin{aligned} dp &= -\rho g dh = -\rho_0 \frac{p}{p_0} g dh \\ \text{oder} \quad \frac{dp}{p} &= -\frac{\rho_0}{p_0} g dh . \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

Durch Integration der Differentialgleichung erhält man

$$\ln p = -\frac{\rho_0}{p_0} g h + \text{const} . \quad (3.3.27)$$

Die Integrationskonstante ergibt sich aus der Randbedingung $p(h = 0) = p_0$ zu $\ln p_0$ und man erhält somit

⁶Eine Herleitung dieses Gesetzes folgt erst in Kapitel 5.

$$\ln p - \ln p_0 = \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0} g h \quad \text{bzw.} \quad \frac{p}{p_0} = \exp\left(-\frac{\rho_0}{p_0} g h\right) . \quad (3.3.28)$$

Man erhält damit schließlich die *barometrische Höhenformel*

$$p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0}{p_0} g h\right) . \quad (3.3.29)$$

Der Ausdruck beschreibt die Abhängigkeit des Luftdrucks p von der Höhe h über dem Meeresspiegel (siehe Abb. 3.21). Nennt man die Höhe h , auf der der Luftdruck auf die Hälfte abgesunken ist, $h_{1/2}$, so ergibt sich aus der Bedingung $p(h_{1/2}) = p_0/2$

$$h_{1/2} = \frac{p_0 \ln 2}{\rho_0 g} \simeq 5.5 \text{ km} . \quad (3.3.30)$$

Das heißt, auf einer Höhe von 5.5 km über Meereshöhe hat sich der Luftdruck halbiert.

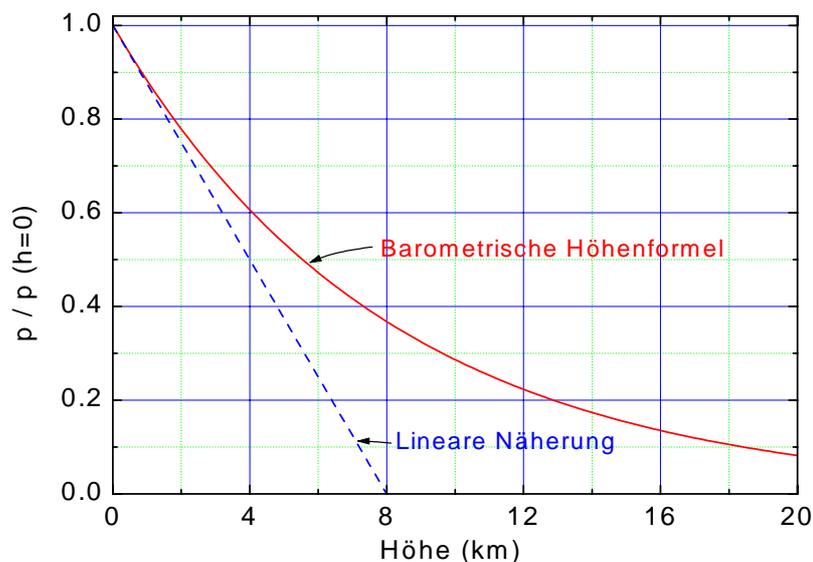


Abbildung 3.21: Abnahme des Luftdrucks p mit der Höhe h über dem Meeresspiegel.

Durch Ableiten der barometrischen Höhenformel nach der Höhe erhält man die Steigung der $p(h)$ Kurve bei $h = 0$ zu

$$\left. \frac{dp(h)}{dh} \right|_{h=0} = -\frac{\rho_0}{p_0} g p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0}{p_0} g h\right) = -\rho_0 g . \quad (3.3.31)$$

Damit lautet die Gleichung für die Tangente an die $p(h)$ -Kurve bei $h = 0$: $p = p_0 - \rho_0 g h$ (siehe Abb. 3.21). Man erkennt, daß der oben verwendete lineare Ausdruck $-\Delta p = \rho_0 g \Delta h$ gerade dieser Tangente, also der Näherung für kleine h entspricht.

Behnsches Rohr:

Auch die Zugwirkung von Kaminen ist eine Folge des Auftriebs, da im Innern eines Schornsteins erwärmte Luft eine geringere Dichte hat als die Luft im Außenraum. Da der Schornstein oben und unten offen ist, findet ein Ausströmen der warmen Luft aus der oberen Öffnung statt. Öffnet man in einem Treppenhaus unten und oben ein Fenster, so strömt die Luft aus dem oberen Fenster schneller aus, da dort der Außendruck geringer ist. Es entsteht dadurch eine Sogwirkung von unten nach oben.

Schließlich herrscht auch in einer Gasleitung eine Druckverteilung. Dies kann anhand des **Behnschen Rohres** demonstriert werden, das aus einem waagrechten Rohr besteht, dem in der Mitte brennbares Gas bei konstantem Druck zugeführt wird und das an den Enden zwei kleine Öffnungen hat, an denen das Gas austritt. Zündet man das austretende Gas an, so sind die Flammen für das waagrechte Rohr gleich groß. Kippt man jedoch das Rohr aus der Waagrechten heraus, so wird die Flamme an der höher gelegenen Austrittsstelle größer. Das Gas strömt hier schneller aus, da der Umgebungsdruck etwas niedriger ist.

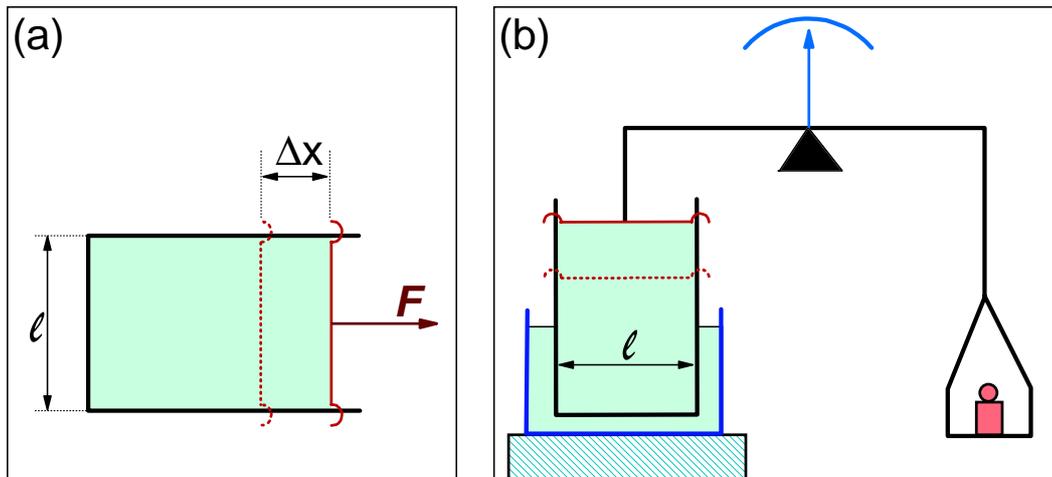


Abbildung 3.22: (a) Zur Definition der Oberflächenspannung. (b) Apparatur zur Bestimmung der Oberflächenspannung.

3.4 Oberflächenphänomene

3.4.1 Oberflächenenergie, Oberflächenspannung

In Abschnitt 3.1 wurde bereits darauf hingewiesen, daß Flüssigkeiten ein definiertes Volumen und deshalb auch eine definierte Oberfläche haben. Im Innern einer Flüssigkeit erfahren die Flüssigkeitsteilchen Wechselwirkungskräfte, die nach allen Seiten betragsmäßig gleich groß sind, so daß die Gesamtkraft auf ein Flüssigkeitsteilchen insgesamt verschwindet (siehe Abb. 3.4). Damit ein Flüssigkeitsteilchen an die Oberfläche gelangt, muß es aufgrund der an der Oberfläche fehlenden Kraftkomponenten gegen die ins Innere der Flüssigkeit gerichteten Wechselwirkungskräfte Arbeit leisten. Diese Arbeit führt zu einer Erhöhung der potentiellen Energie an der Oberfläche, die als *Oberflächenenergie* bezeichnet wird. Damit die potentielle Energie minimal wird, muß die Oberfläche einer Flüssigkeit einen Minimalwert einnehmen. Ist eine Flüssigkeit keinen weiteren Kräften ausgesetzt, so nimmt sie eine Gestalt an, bei der die Oberfläche am kleinsten wird, d.h. sie nimmt Kugelgestalt an. Man beobachtet diesen Effekt z.B. für Öltröpfchen in einer Wasser-Alkohol-Lösung oder für Quecksilbertröpfchen, die man in eine mit Wasser gefüllte Schale bringt. Man kann dabei auch beobachten, daß zwei sich berührende Quecksilbertröpfchen zu einem Tropfen verschmelzen, da sie dadurch ihre Gesamtoberfläche und damit die potentielle Energie verkleinern können.

Da die Flüssigkeitsteilchen an der Oberfläche einer Flüssigkeit eine höhere potentielle Energie besitzen, muß zur Vergrößerung der Oberfläche Arbeit verrichtet werden. Das heißt, man muß zur Vergrößerung einer Oberfläche eine Kraft aufwenden. Diese Tatsache kann mit folgendem einfachen Experiment demonstriert werden. Man bringt auf einem U-förmigen Drahtbügel einen verschiebbaren Bügel an. Legt man diese Anordnung in eine Seifenlösung, so wird beim Herausziehen mit etwas Glück zwischen Draht und Bügel eine Seifenlamelle aufgespannt (siehe Abb. 3.22a). Um durch eine Verschiebung des Bügels eine Vergrößerung der Oberfläche der Seifenwasserlamelle zu erreichen, muß eine äußere Kraft F aufgewendet werden. Nimmt man diese Kraft weg, so zieht sich die Seifenlamelle wieder auf ihre ursprüngliche Größe zusammen. Die zur Vergrößerung der Oberfläche aufgewendete Arbeit ist proportional zur zusätzlich gebildeten Oberfläche und man kann somit eine *spezifische Oberflächenenergie* σ_0 definieren:⁷

⁷Man kann eigentlich von Oberflächenenergie streng genommen nur dann sprechen, wenn die Flüssigkeit an Vakuum an-

$$\sigma_0 := \frac{\text{Arbeit zur Bildung der zusätzlichen Oberfläche}}{\text{zusätzliche Oberfläche}} = \frac{\Delta W}{\Delta A} . \quad (3.4.1)$$

Die spezifische Oberflächenenergie entspricht der Arbeit, die pro Flächeneinheit neuer Oberfläche geleistet werden muß. Für die Drahtbügelanordnung ist $\Delta A = 2l\Delta x$,⁸ d.h. es gilt

$$\Delta W = \sigma_0 \Delta A = \sigma_0 2l \Delta x . \quad (3.4.2)$$

Für die Einheit der spezifischen Oberflächenenergie erhält man aus der Definitionsgleichung

$$[\sigma_0] = \left[\frac{W}{A} \right] = \left[\frac{F}{l} \right] = 1 \text{ J/m}^2 = 1 \text{ N/m} . \quad (3.4.3)$$

Meist wird die spezifische Oberflächenenergie in der Einheit N/m angegeben und man spricht deshalb üblicherweise von einer *Oberflächenspannung*. Die Oberflächenspannung kann als Quotient der zum Vergrößern der Oberfläche erforderlichen Kraft F und dem Doppelten der Länge l der verschiebaren Oberflächengrenze aufgefaßt werden.

Oberflächenspannung von Wasser:

Die Oberflächenspannung von Wasser läßt sich mit der in Abb. 3.22b gezeigten Anordnung bestimmen. Ein U -förmiger Bügel befindet sich in einem Wasserbehälter. An ihm ist ein am Waagebalken hängender Bügel der Länge l frei beweglich aufgehängt. Durch Austarieren der Waage stellt man zunächst den Nullpunkt ein. Dann taucht man den Bügel ins Wasser und zieht in wieder heraus. Die Waage neigt sich dabei auf die Seite der sich bei diesem Vorgang bildenden Lamelle. Auf der Gegenseite legt man jetzt so lange Massenstücke auf, bis deren Gewichtskraft F den Ausschlag wieder kompensiert. Da das Gewicht der Lamelle vernachlässigt werden kann, läßt sich die Oberflächenspannung von Wasser aus der Gewichtskraft F leicht zu

$$\sigma_{H_2O} = \frac{F}{2l} = 7.1 \times 10^{-2} \text{ N/m} \quad (3.4.4)$$

bestimmen. Der Versuch bestätigt, daß die Kraft nicht von der Fläche der Lamelle abhängt. Im Unterschied zur Federkraft $F = -kx$ (Hookesches Gesetz) ist hier die rücktreibende Kraft unabhängig von der Auslenkung.

Geringe Verunreinigungen vermindern die Oberflächenspannung oft dramatisch. Gibt man z.B. in den Wasserbehälter einen Tropfen Öl oder Geschirrspülmittel, so reißt die Lamelle sofort ab. Auch durch erneutes Eintauchen und Herausziehen des Bügels läßt sich keine neue Lamelle erzeugen. Im Gegensatz dazu erhöht ein Zusatz von 25 Gewichtsprozent Kochsalz die Oberflächenspannung von Wasser auf 8.3×10^{-2} N/m.

Es sei hier noch darauf hingewiesen, daß flüssige Metalle (z.B. Rhenium, Wolfram) eine sehr große spezifische Oberflächenspannung von mehr als 2 N/m haben.

grenzt. Man tut dies üblicherweise aber auch, wenn die Flüssigkeit an Luft angrenzt. Dagegen benutzt man für zwei einandergrenzende Flüssigkeiten den Ausdruck *Grenzflächenenergie* oder Grenzflächenspannung. Die Grenzflächenspannung hängt stark von der Flüssigkeitenkombination ab. Z.B. erhält man für eine Grenzfläche zwischen Wasser und Petroleum eine Grenzflächenspannung von etwa 0.0480 N/m, zwischen Wasser und Olivenöl nur 0.0182 N/m.

⁸Der Faktor 2 resultiert aus der Tatsache, daß man die Oberfläche der Lamelle an der Vorder- und Rückseite um $l\Delta x$ vergrößert.

Kohäsionsdruck

Bisher wurden nur ebene Oberflächen betrachtet. Bei diesen wirkt die Oberflächenkraft (parallel zur Oberfläche) auf ein sich in der Oberfläche befindliches Flüssigkeitsteilchen von allen Seiten gleich stark ein, so daß die Gesamtkraft auf das Flüssigkeitsteilchen verschwindet. Ist die Oberfläche dagegen konvex gewölbt, so liefern die an einem Flüssigkeitsteilchen in der Oberfläche wirkenden Kräfte eine in die Flüssigkeit hinein gerichtete resultierende Kraft, die den Kohäsionsdruck vergrößert. Bei einer konkaven Oberfläche ist die resultierende Kraft aus der Flüssigkeit heraus gerichtet und führt zu einer Verringerung des Kohäsionsdrucks.

Wir wollen im folgenden den durch die Krümmung der Flüssigkeitsoberfläche bewirkten Normaldruck nur für eine kugelförmig gekrümmte Oberfläche berechnen. Bei einem kugelförmigen Flüssigkeitsvolumen ist die resultierende Kraft F an jedem Oberflächenelement auf den Mittelpunkt gerichtet. Die Kraft pro Flächeneinheit ergibt den *Kohäsionsdruck*

$$p = \frac{F}{A} = \frac{F}{4\pi r^2} . \quad (3.4.5)$$

Um den Zusammenhang zwischen Kohäsionsdruck und Oberflächenspannung zu finden, nimmt man eine Vergrößerung des Kugelradius r um dr (siehe Abb. 3.23) und damit eine Vergrößerung der Kugeloberfläche um

$$dA = 4\pi(r + dr)^2 - 4\pi r^2 \simeq 8\pi r dr \quad (3.4.6)$$

an, wobei der Term in $(dr)^2$ vernachlässigt werden kann, da dr klein sein soll. Aus der Definition der Oberflächenspannung folgt dann

$$dW = \sigma_0 dA = 8\pi\sigma_0 r dr . \quad (3.4.7)$$

Die Arbeit läßt sich aber auch über die Kraft bzw. den Kohäsionsdruck ausdrücken

$$dW = F ds = pA ds = 4\pi p r^2 dr . \quad (3.4.8)$$

Aus Gl.(3.4.7) und (3.4.8) erhält man dann die gewünschte Beziehung zwischen Kohäsionsdruck p und Oberflächenspannung σ_0 zu

$$p = 2 \frac{\sigma_0}{r} . \quad (3.4.9)$$

Man sieht, daß der Kohäsionsdruck umso geringer wird, je größer der Kugelradius wird und umgekehrt.

Eine beliebig gekrümmte Oberfläche kann lokal immer mit zwei Krümmungskreisen in orthogonale Richtungen angenähert werden. Mit den Radien r_1 und r_2 dieser Hauptkrümmungskreise erhält man für den Kohäsionsdruck den allgemeinen Ausdruck

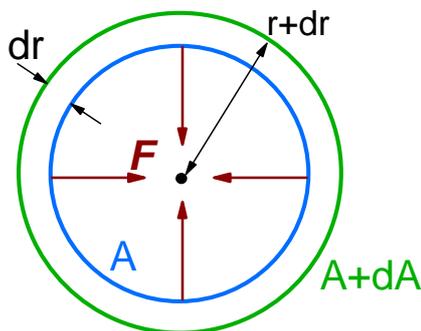


Abbildung 3.23: Zum Kohäsionsdruck einer kugelförmigen Oberfläche.

$$p = \sigma_0 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) . \quad (3.4.10)$$

Man bezeichnet die Summe der reziproken Hauptkrümmungsradien auch als mittlere Krümmung der Fläche. Der Kohäsionsdruck ist dann gleich dem Produkt aus der Oberflächenspannung und der mittleren Krümmung der Oberfläche.

Öltröpfchen in Wasser-Alkohol-Mischung:

Bringt man z.B. Öltröpfchen in eine Wasser-Alkohol-Mischung, so schweben die Öltröpfchen in dieser Flüssigkeit, da die Dichten gleich sind. Die Öltröpfchen nehmen dabei eine kugelförmige Gestalt an, da für diese Form die Oberfläche am kleinsten und damit die Oberflächenenergie minimal ist (eine Kugel besitzt das kleinste Verhältnis von Oberfläche zu Volumen). Man kann beobachten, daß sich berührende Tröpfchen zu einem größeren Tropfen vereinigen, da der größere Tropfen ein günstigeres Verhältnis von Oberfläche zu Volumen besitzt (die Oberfläche des größeren Tropfens ist kleiner als die Summe der Oberflächen der zwei kleineren, durch die Vereinigung der Tröpfchen kann also die Oberflächenenergie reduziert werden).

Kleine Tropfen von Wasser oder Quecksilber haben auf einer Unterlage, die nicht benetzt wird, fast kugelförmige Gestalt. Bei sehr kleinen Tropfen kann man nämlich die Schwerkraft gegenüber der Oberflächenspannung vernachlässigen, weil die Schwerkraft mit dem Volumen (also proportional zu r^3) abnimmt, der Krümmungsdruck jedoch proportional zu $1/r$ anwächst.

Innendruck einer Seifenblase:

Zur Vergrößerung der Oberfläche einer Seifenblase ist die Arbeit $dW = \sigma_0 dA$ notwendig. Andererseits gewinnt man durch die Vergrößerung des Volumens die Kompressionsarbeit $dW = F dr = (F/A) dV = p dV$. Im Gleichgewicht muß also $\sigma_0 dA = p dV$ oder $\sigma_0 16\pi r dr = p 4\pi r^2 dr$ gelten. Hierbei ist zu beachten, daß die Oberfläche sowohl der Innen- als auch der Außenseite der Seifenblasenlamelle vergrößert wird und deshalb $dA = 2(8\pi r dr)$ gilt (Haut der Seifenblase besitzt zwei Oberflächen). Für den Druck in der Seifenblase erhält man somit $p = 4\sigma_0/r$. Ein ähnlicher Zusammenhang gilt für Luftballons. Bringt man zwei Seifenblasen oder Luftballons zusammen, so bläst der kleinere Ballon den größeren auf, da in ihm wegen $p \propto 1/r$ der größere Druck herrscht.

Tropfenbildung:

Tritt Wasser oder eine andere Flüssigkeit aus einem Rohr mit Durchmesser d aus, so bilden sich Tropfen. Der Grund dafür liegt in der endlichen Oberflächenspannung des Wassers. Diese ermöglicht, daß ein gewisses Gewicht des Tropfens getragen werden kann. Nähert man den Druck aufgrund des Gewichts F_G des Tropfen mit $p \simeq F_G/\pi r^2$ an, wobei πr^2 die Fläche der Rohröffnung ist, so erhält man mit Gl.(3.4.9) das maximale Gewicht des Tropfens zu $F_G = 2\pi r\sigma_0$. Man kann damit aus der Tropfengröße sofort Rückschlüsse auf die Oberflächenspannung erhalten. So ist die Tropfengröße für Alkohol wesentlich kleiner als diejenige für Wasser. Da die Dichte von Alkohol geringer ist als die von Wasser, kann das nur an der geringeren Oberflächenspannung von Alkohol liegen.

3.4.2 Kapillarität, Kohäsion, Adhäsion

Wir wollen nun nach der oben bereits diskutierten Grenzfläche zwischen einer Flüssigkeit und Vakuum (bzw. einem Gas) die Grenzfläche zwischen einem Festkörper und einer Flüssigkeit betrachten. Bei dieser Grenzfläche ist wichtig, daß die Atome bzw. Moleküle des Festkörpers nicht frei verschiebbar sind. Die Flüssigkeitsteilchen an der Grenzfläche erfahren eine Wechselwirkung sowohl von den umgebenden Molekülen der Flüssigkeit als auch durch diejenigen des Festkörpers. Man kann nun je nach relativer Größe dieser Wechselwirkungskräfte zwei Fälle unterscheiden:

1. Die Kräfte zwischen den Molekülen des Festkörpers und denen der Flüssigkeit (*Adhäsionskräfte* F_A) sind größer als diejenigen zwischen den Flüssigkeitsmolekülen (*Kohäsionskräfte* F_K). In diesem Fall erfolgt eine Benetzung der Grenzfläche (siehe Abb. 3.24a). Beispiel: Wasser-Glas.
2. Die Adhäsionskräfte F_A sind kleiner als die Kohäsionskräfte F_K . In diesem Fall erfolgt keine Benetzung der Gefäßwand (siehe Abb. 3.24b). Beispiel: Quecksilber-Glas.

Wir haben bereits diskutiert, daß eine Flüssigkeitsoberfläche immer senkrecht zur Gesamtkraft auf die Flüssigkeitsmoleküle steht (dies folgt aus der freien Beweglichkeit der Flüssigkeitmoleküle). Aus dieser Bedingung ergibt sich der in Abb. 3.24 gezeigte Randwinkel der Flüssigkeit an einer Festkörper-Flüssigkeit-Grenzfläche. An einem Linienelement dl der Flüssigkeit stoßen die Berührungsflächen Festkörper-Flüssigkeit (1-2), Flüssigkeit-Luft (2-3) und Festkörper-Luft (1-3) zusammen. Die Flüssigkeitsgrenze, in der dieses Linienelement liegt, verläuft in Abb. 3.24 senkrecht zur Zeichenebene. Im Gleichgewichtsfall müssen sich die auftretenden Kräfte durch die Oberflächenspannungen gegenseitig kompensieren, d.h. es muß gelten:

$$\sigma_{12} + \sigma_{23} \cos \varphi = \sigma_{13} \quad . \quad (3.4.11)$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich der Randwinkel φ zu

$$\cos \varphi = \frac{\sigma_{13} - \sigma_{12}}{\sigma_{23}} \quad . \quad (3.4.12)$$

Wir nehmen zunächst an, daß $|\sigma_{13} - \sigma_{12}| < \sigma_{23}$ ist. Ist dabei $\sigma_{13} > \sigma_{12}$, so ist der Randwinkel spitz, ist dagegen $\sigma_{13} < \sigma_{12}$ so ist φ stumpf. Im Grenzfall $|\sigma_{13} - \sigma_{12}| = \sigma_{23}$ wird der Randwinkel gleich Null. Ist schließlich $|\sigma_{13} - \sigma_{12}| > \sigma_{23}$, so ist offensichtlich obiger Gleichung die Grundlage entzogen, also

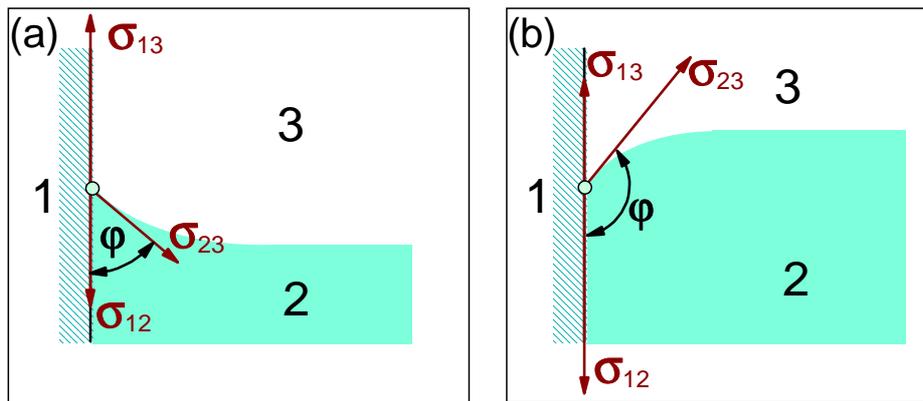


Abbildung 3.24: Benetzende (a) und nichtbenetzende (b) Flüssigkeit an einer Gefäßwand (1=Festkörper; 2=Flüssigkeit; 3=Vakuum oder Luft).

kein Gleichgewicht mehr möglich. Man nimmt in diesem Fall an, daß der Randwinkel gleich Null bleibt und wegen des nicht vorhandenen Gleichgewichts eine dünne Schicht der Flüssigkeit den Festkörper vollständig überzieht. Man spricht dann von einer *vollständigen Benetzung* eines Festkörpers.

Besonders auffällig treten die Wirkungen von Oberflächenspannungen an der Grenzfläche Festkörper-Flüssigkeit in engen Kapillaren zu Tage. Taucht man ein Kapillarrohr in eine Flüssigkeit ein, so steigt in ihm die Flüssigkeit in manchen Fällen über den Flüssigkeitsspiegel hoch, man spricht hier von *Kapillarkompression*, in anderen Fällen bleibt der Flüssigkeitsstand in der Kapillare allerdings unter dem Niveau der die Kapillare umgebenden Flüssigkeit. Man spricht in diesem Fall von *Kapillardepression*. Kapillardepression wird z.B. für die Grenzfläche Glas-Quecksilber, Kapillarkompression für die Grenzfläche Glas-Wasser beobachtet. In beiden Fällen ist die Flüssigkeit in der Kapillare durch einen Meniskus begrenzt, der beim Wasser (benetzende Flüssigkeit) ein nach oben konkaves, bei Quecksilber (nichtbenetzende Flüssigkeit) ein nach oben konvexes Stück einer Kugelfläche bildet.

Die kapillare Kompression bzw. Depression kann wie folgt erklärt werden: Bei einer sphärisch gekrümmten Flüssigkeitsoberfläche herrscht eine zum Krümmungsmittelpunkt hin gerichtete Kraft, die an der Oberfläche den Druck

$$p = \frac{2\sigma_0}{r} \quad (3.4.13)$$

ergibt. Hierbei ist r der Krümmungsradius (Kugelradius des Meniskus) und σ_0 die Oberflächenspannung der Flüssigkeit gegen Luft (oben mit σ_{23} bezeichnet). Dieser Druck ist im Falle einer benetzenden Flüssigkeit nach oben und im Falle einer nichtbenetzenden Flüssigkeit nach unten gerichtet. Die Flüssigkeitssäule im Rohr wirkt wie ein Manometer, das die Druckdifferenz zwischen konkaver und konvexer Seite mißt. Der Druck addiert sich zu dem gewöhnlichen hydrostatischen Druck, der nur für sich alleine wirkend ein gleiches Flüssigkeitsniveau innerhalb und außerhalb der Kapillare erzeugen würde (Gesetz der kommunizierenden Röhren). Nach Abb. 3.25 ist der Krümmungsradius $r = R/\cos\varphi$, wobei R der Radius der Kapillare ist. Damit ergibt sich nach Gl.(3.4.13) für den Druck

$$p = \frac{2\sigma_0}{R} \cos\varphi \quad (3.4.14)$$

Dieser Druck wirkt auf das Flächenelement dA . Die Kraft auf das Flächenelement ist somit $p dA$ und ihre Komponente parallel zur Kapillare $p dA \cos\alpha$, wenn α der Winkel zwischen der Richtung von p und der

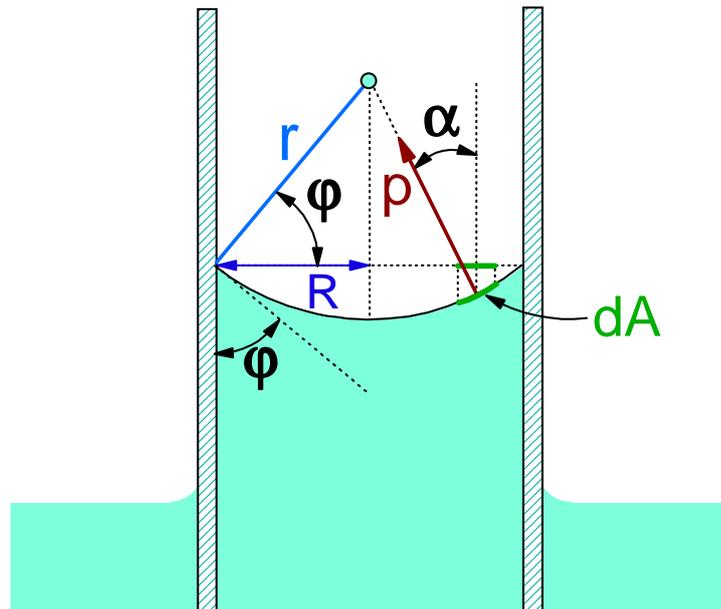


Abbildung 3.25: Zur Bestimmung der Steighöhe in einer Kapillare.

Kapillarenrichtung ist. Ferner ist $dA \cos \alpha$ die Projektion des Flächenelements auf die Horizontalebene. Die Summe aller Vertikalkomponenten der Kraft ergibt sich damit zu

$$\sum \frac{2\sigma_0}{R} \cos \varphi dA \cos \alpha = \frac{2\sigma_0}{R} \cos \varphi \sum dA \cos \alpha . \quad (3.4.15)$$

Hierbei ist $\sum dA \cos \alpha$ gleich dem gesamten Kapillarquerschnitt πR^2 und man erhält für die Gesamtkraft

$$\frac{2\sigma_0}{R} \cos \varphi \pi R^2 = 2\pi \sigma_0 R \cos \varphi . \quad (3.4.16)$$

Diese Kraft hebt die Flüssigkeit soweit nach oben, bis die Gewichtskraft der gehobenen Flüssigkeit erreicht wird. Man erhält somit folgenden Ausdruck für die Steighöhe h

$$\begin{aligned} 2\pi \sigma R \cos \varphi &= \pi R^2 h \rho_{F1} g \\ \text{oder} \quad h &= \frac{2\sigma_0 \cos \varphi}{R \rho_{F1} g} . \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

Für den speziellen Fall, daß die Flüssigkeit die Oberfläche der Kapillare benetzt, ist $\varphi = 0$ und man erhält

$$h = \frac{2\sigma_0}{R \rho_{F1} g} . \quad (3.4.18)$$

Die Gln.(3.4.17) und (3.4.18) können zur Bestimmung der Oberflächenspannung benutzt werden.

Es soll abschließend darauf hingewiesen werden, daß die Kapillarität natürlich eine Einschränkung des Gesetzes der kommunizierenden Röhren bedeutet. Dieses Gesetz gilt bei der Verwendung von kleinen Rohrquerschnitten nur dann, wenn alle Rohre denselben Querschnitt haben und aus dem gleichen Material gefertigt sind.

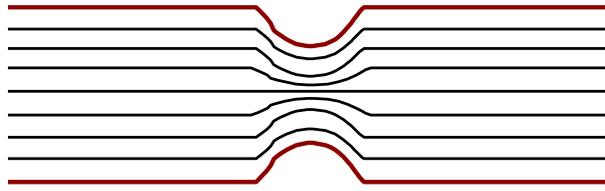


Abbildung 3.26: Schematische Darstellung eines Geschwindigkeitsfeldes mit Hilfe von Stromlinien.

3.5 Hydro- und Aerodynamik

Bisher haben wir nur ruhende Flüssigkeiten und Gase betrachtet. Dabei soll *ruhend* nicht bedeuten, daß sich die einzelnen Gas- oder Flüssigkeitsmoleküle in Ruhe befinden, sondern daß ihre mittlere Geschwindigkeit verschwindet. Das heißt, die einzelnen Moleküle können sich z.B. aufgrund der endlichen Temperatur bewegen, sie besitzen aber keine mittlere Driftgeschwindigkeit in eine Vorzugsrichtung. Zur Diskussion der Bewegung von Flüssigkeiten und Gasen betrachten wir jetzt den Einfluß äußerer Kräfte, unter deren Wirkung eine *Strömung* erfolgt. Die wirkende Kraft kann z.B. die Schwerkraft oder eine Kraft aufgrund eines Druckgradienten sein. Diese Kräfte bewirken eine Beschleunigung der Flüssigkeits- oder Gasmoleküle. Bei realen Gasen und Flüssigkeiten müssen außerdem innere Kräfte, die die Moleküle aufeinander ausüben, in Betracht gezogen werden. Diese Kräfte bewirken eine *Zähigkeit* der Flüssigkeit und resultieren in einer endlichen *Reibung*.

Um die Strömung von Flüssigkeiten beobachten zu können, muß man sie kennzeichnen und sichtbar machen. Bei Flüssigkeiten kann man dies z.B. durch Bestäuben der Oberflächen mit einem Pulver (Talkum, Korkpulver) erreichen. Jedes Staubpartikel bleibt an der gleichen Stelle der Flüssigkeit und wird von der strömenden Flüssigkeit mitgenommen. Für die Bewegung im Innern einer Flüssigkeit kann man kleine Schwebepartikel (z.B. Kunststoff- oder Aluminiumpartikel) verwenden. Gasströmungen kann man z.B. durch Tabakrauch sichtbar machen.

Strömungen von Flüssigkeiten und Gasen kann man im allgemeinen durch ein *Strömungsfeld* beschreiben. Dabei wird analog zum Kraftfeld (Zuordnung eines Kraftvektors zu jedem Raumpunkt) jedem Raumpunkt ein Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ zugeordnet. Zur Veranschaulichung des Geschwindigkeitsfeldes einer Strömung gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Bahnlinien:

Man kann der Bahn eines Flüssigkeits- oder Gasteilchens mit fortschreitender Zeit folgen. Dadurch ergibt sich eine *Bahnlinie*. Die Bahnlinie bezieht sich also auf die Geschichte, d.h. auf das zeitliche Nacheinander eines Teilchens.

2. Stromlinien:

Man kann aber auch die momentane Geschwindigkeit aller Massenpunkte betrachten und sie in einem Geschwindigkeitsfeld darstellen. Die Hintereinanderreihung aller momentanen Geschwindigkeitsvektoren ergibt die sogenannten Stromlinien. Die Tangenten an die Stromlinien geben die augenblickliche Strömungsrichtung an. In dem Fall, daß eine Strömung stationär ist, d.h. daß bei einer Strömung an die Stelle eines Flüssigkeits- oder Gasteilchens im nächsten Moment ein genau gleiches mit gleicher Geschwindigkeit tritt, gibt eine Stromlinie auch die Bahn jedes Einzelteilchens wieder. Stromlinien und Bahnlinien sind also für eine stationäre Strömung identisch.

Eigentlich geht durch jeden Punkt einer Flüssigkeit eine Stromlinie und die Gesamtheit aller Stromlinien gibt uns ein qualitatives Bild der Strömung. Man kann die Stromlinien aber auch zu einer quantitativen

Darstellung des Geschwindigkeitsfeldes benutzen. Dazu wird ihre Anzahl geeignet beschränkt. Man zieht dazu durch jede senkrecht zur Strömungsrichtung stehende Einheitsfläche nur so viele Stromlinien, wie der Betrag der Geschwindigkeit Einheiten hat. Aus der Zahl der Stromlinien pro Einheitsfläche folgt dann der Geschwindigkeitsbetrag an der betreffenden Stelle. Wo die Stromlinien dicht liegen, ist die Geschwindigkeit hoch und umgekehrt (siehe Abb. 3.26).

Die Flüssigkeits- oder Gasströmungen fallen insofern verschieden aus, als daß bei Flüssigkeiten das Volumen in guter Näherung erhalten bleibt, während es sich bei Gasen meist stark verändert. Dies liegt an der kleinen Kompressibilität von Flüssigkeiten, die es in den meisten Fällen erlaubt, Volumenänderungen bei Strömungsprozessen ganz zu vernachlässigen. Bei den Gasen ist aber nach dem **Boyle-Mariotteschen** Gesetz das Volumen sehr stark vom Druck abhängig, so daß man erwarten kann, daß sich dies bei der Strömung von Gasen stark auswirkt. Es wird sich allerdings zeigen, daß die bei Strömungsprozessen auftretenden Druckdifferenzen meistens klein sind, so daß auch für Gasströmungen die Volumenänderungen oft vernachlässigbar sind. Dies gilt solange, wie die Strömungsgeschwindigkeit nicht in die Nähe der Schallgeschwindigkeit kommt (in Luft bei Normaldruck etwa 340 m/s). Wir werden deshalb im folgenden die vereinfachende Annahme machen, daß das Volumen bei der Strömung von Gasen und Flüssigkeiten erhalten bleibt.

3.5.1 Hydrodynamische Bewegungsgleichungen

Nach dem 2. **Newton**schen Axiom ist die Resultierende aller auf ein Flüssigkeits- oder Gasteilchen wirkenden Kräfte gleich dem Produkt aus dessen Masse und der ihm erteilten Beschleunigung. Aus der konsequenten Anwendung der von **Newton** für Massenpunkte entwickelten dynamischen Bewegungsgleichung gelangt man zu den zuerst von **L. Euler** aufgestellten *hydrodynamischen Gleichungen*. Faßt man nach dem **d'Alembertschen** Prinzip das Produkt $-ma$ als Trägheitskraft \mathbf{F}_T auf, so lautet der Inhalt der hydrodynamischen Gleichungen wie folgt:

Für jedes Flüssigkeitsteilchen muß die Summe aus äußeren Kräften, Druckkräften, Reibungskräften und Trägheitskräften verschwinden.

Es soll nun kurz die Aufstellung der Bewegungsgleichung eines Flüssigkeitsteilchens unter Vernachlässigung der Reibungskraft (ideale Flüssigkeit) diskutiert werden. Neben den äußeren Kräften (z.B. Schwerkraft) und der Trägheitskraft $\mathbf{F}_T = -m\mathbf{a}$ muß vor allem die aus Druckdifferenzen resultierende Kraft berücksichtigt werden. Für ein Flüssigkeitsteilchen mit Volumen $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z = \Delta A \Delta x$, das sich in x -Richtung bewegen soll, erhält man, wenn man zwei gegenüberliegende Flächenelemente ΔA betrachtet, für die Resultierende der beiden Druckkräfte in x -Richtung

$$p\Delta A - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \right) \Delta A = -\frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \Delta A . \quad (3.5.1)$$

Mit der auf die Masse bezogenen äußeren Kraft $\mathbf{f} = d\mathbf{F}/dm$ erhält man damit die Bewegungsgleichung für die Bewegung einer Komponente (x -Richtung)

$$f_x \Delta m - \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \Delta A - \Delta m \frac{dv_x}{dt} = 0 . \quad (3.5.2)$$

Faßt man die Komponenten-Gleichungen zu einer Vektorgleichung zusammen und benutzt $\rho = \Delta m / \Delta V$, so erhält man

$$\rho \mathbf{f} - \text{grad } p - \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \quad (3.5.3)$$

Diese Gleichung nennt man die **Eulersche Bewegungsgleichung** der Hydrodynamik. Hierbei ist

$$\text{grad } p = \frac{\partial p}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \quad (3.5.4)$$

und den Ausdruck $d\mathbf{v}/dt$ nennt man die substantielle Beschleunigung. Darunter versteht man die Beschleunigung des Teilchens, wenn sich sowohl der Ort als auch die Zeit ändern. Es gilt

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (3.5.5)$$

Beachtet man, daß $dx/dt = v_x$, $dy/dt = v_y$ und $dz/dt = v_z$, so lautet die Gleichung

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (v_x)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (v_y)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (v_z)^2 \quad (3.5.6)$$

Führt man nun als Abkürzung den Vektor $\text{rot } \mathbf{v}$ ein,

$$\text{rot } \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} \quad (3.5.7)$$

so läßt sich die **Eulersche Gleichung** als

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad } \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} - \mathbf{f} + \frac{1}{\rho} \text{grad } p = 0 \quad (3.5.8)$$

schreiben. Diese Differentialgleichung ist nichtlinear und sie läßt sich deshalb im allgemeinen nur schwierig lösen. Eine spezielle Lösung ist die weiter unten behandelte **Bernoullische Gleichung**.

Die Kontinuitätsgleichung

Wir betrachten zunächst ein Rohr mit konstantem Querschnitt A (siehe Abb. 3.27a). Das Flüssigkeitsvolumen, das pro Zeiteinheit durch die Querschnittsfläche in x -Richtung strömt, ist

$$I = \frac{dV}{dt} = A \frac{dx}{dt} = Av_x \quad (3.5.9)$$

Wir betrachten jetzt ein Rohr, daß an verschiedenen Stellen unterschiedliche Querschnitte A_1 und A_2 besitzt (siehe Abb. 3.27b). Die Flüssigkeitsmenge, die an einem Ende in das Rohr eintritt, muß dieses am

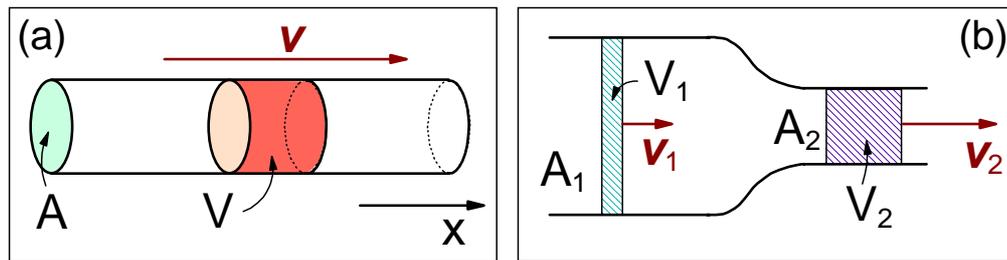


Abbildung 3.27: Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit durch ein Rohr mit konstantem (a) und variierendem (b) Querschnitt.

anderen Ende wieder verlassen. Bei einer Verengung der Röhre muß durch jeden Querschnitt pro Zeiteinheit das gleiche Flüssigkeitsvolumen bewegt werden. Da Flüssigkeiten als inkompressibel betrachtet werden können, gilt⁹

$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{V_1}{t} = \frac{V_2}{t} \Rightarrow I_1 = I_2 . \quad (3.5.10)$$

Dies ist nur dann möglich, wenn die Flüssigkeit durch den engeren Rohrbereich mit einer höheren Geschwindigkeit fließt. Hieraus folgt die *Kontinuitätsgleichung*¹⁰

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 . \quad (3.5.11)$$

3.5.2 Die Bernoullische Gleichung

Durch die Verengung eines Rohres wird die Geschwindigkeit der durch das Rohr strömenden Flüssigkeit an der Verengung größer. Es muß also an der Engstelle eine Beschleunigung erfolgen. Da Reibungskräfte in erster Näherung vernachlässigbar sind und hier nicht betrachtet werden sollen, kann bei Abwesenheit von äußeren Kräften (z.B. horizontales Rohr, keine Schwerkraft) für diese Beschleunigung nur eine Druckdifferenz verantwortlich sein. Daraus läßt sich sofort folgende Schlußfolgerung ziehen: *In einer strömenden Flüssigkeit muß der Druck mit zunehmender Strömungsgeschwindigkeit abnehmen.* Die Richtigkeit dieser qualitativen Aussage läßt sich anhand der in Abb. 3.28 gezeigten Anordnung nachprüfen. Man läßt durch zwei horizontale Rohre Wasser strömen. Während das eine Rohr einen konstanten Querschnitt hat, ist das zweite Rohr an einer Stelle verengt und an einer anderen erweitert. Zur Messung des Drucks sind an die Rohre vertikal angesetzte Rohre angebracht, die als Druckmanometer dienen. Man kann im Experiment erkennen, daß der Druck entlang des Rohres mit konstantem Querschnitt kontinuierlich abnimmt. Dies ist eine Folge der nicht zu vermeidenden Reibung. Beim Rohr mit variierendem Querschnitt erkennt man dagegen, daß an der Stelle mit höherer Geschwindigkeit (kleiner Querschnitt) der Druck erniedrigt und an der Stelle mit langsamer Geschwindigkeit (großer Querschnitt) erhöht ist.¹¹

⁹Wie oben bereits diskutiert wurde, können auch Gase näherungsweise als inkompressibel betrachtet werden, falls die Strömungsgeschwindigkeit klein gegenüber der Schallgeschwindigkeit ist.

¹⁰Einen allgemeineren Ausdruck für die Kontinuitätsgleichung erhält man, indem man betrachtet, wie sich die in einem bestimmten Volumen eingeschlossene Flüssigkeitsmenge nach der Zeit dt durch zu- oder abfließende Flüssigkeit ändert. Man erhält $\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$. Dies ist die allgemeine Form der für ein quellenfreies Gebiet geltenden Kontinuitätsgleichung. Für konstantes ρ (inkompressible Flüssigkeit) folgt $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$.

¹¹Diese Beobachtung wird in Analogie zum hydrostatischen Paradoxon auch als hydrodynamisches Paradoxon bezeichnet.

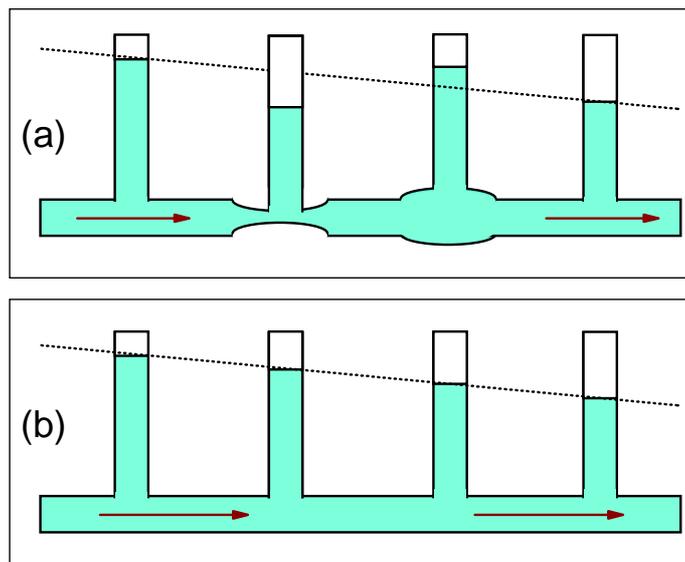


Abbildung 3.28: Druckverteilung in einer durch ein Rohr strömenden Flüssigkeit: (a) Rohr mit variablem Querschnitt, (b) Rohr mit konstantem Querschnitt.

Um einen quantitativen Zusammenhang zwischen Druck und Geschwindigkeit bei einer idealen (= reibungsfreien) Flüssigkeit herzustellen, wendet man den Energiesatz auf ein Rohrstück an. Eine Flüssigkeitsmenge mit der Masse m , dem Volumen V und der Dichte ρ muß bei einem sich verengenden Rohr von der Geschwindigkeit v_1 auf v_2 beschleunigt werden (siehe Abb. 3.29). Der statische Druck sinkt dabei von p_1 vor der Verengung auf p_2 in der Verengung ab. Das Produkt aus Druckdifferenz und Querschnittfläche, $(p_1 - p_2)A_2$ liefert die beschleunigende Kraft. Die von dieser Kraft geleistete Arbeit $F\Delta x$ beim Übergang vom Querschnitt A_1 auf Querschnitt A_2 ist die Verschiebungsarbeit $\Delta W = W_1 - W_2 = A_1 p_1 \Delta x_1 - A_2 p_2 \Delta x_2 = (p_1 - p_2)V$. Die Arbeit ist also proportional zur Druckdifferenz und dem hinausgeschobenen Volumen. Wenn $(p_1 - p_2)$ größer Null ist, muß man also Arbeit leisten. Die geleistete Arbeit führt zu einer Erhöhung der Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen, also zu einer Erhöhung der kinetischen oder Strömungsenergie.¹² Aus dem Energiesatz folgt damit

$$V(p_1 - p_2) = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_2^2)$$

oder

$$p_1 V + \frac{1}{2}mv_1^2 = p_2 V + \frac{1}{2}mv_2^2 . \quad (3.5.12)$$

Bei einem schrägen Rohr kommt noch der jeweilige Anteil der potentiellen Energie mgh_1 bzw. mgh_2 hinzu, wenn $h_2 - h_1$ die Höhendifferenz zwischen den benachbarten Rohrquerschnitten ist. Die Summe der drei Energien, Strömungsenergie $\frac{1}{2}mv^2$, Verschiebungsarbeit pV und potentieller Energie mgh muß konstant sein, da die obige Gleichung ja für jede beliebige Stelle des Rohres gilt. Das heißt, es muß gelten

$$pV + \frac{1}{2}mv^2 + mgh = \text{const} . \quad (3.5.13)$$

¹²Wir werden später auch reale Flüssigkeiten und Gase diskutieren, bei denen Reibungseffekte berücksichtigt werden müssen. Hier führt dann ein Druckerhöhung nicht nur zu einer Erhöhung der kinetischen Energie, d.h. der Strömungsgeschwindigkeit. Ein Teil der Arbeit muß dann zur Überwindung von Reibungskräften aufgewendet werden.

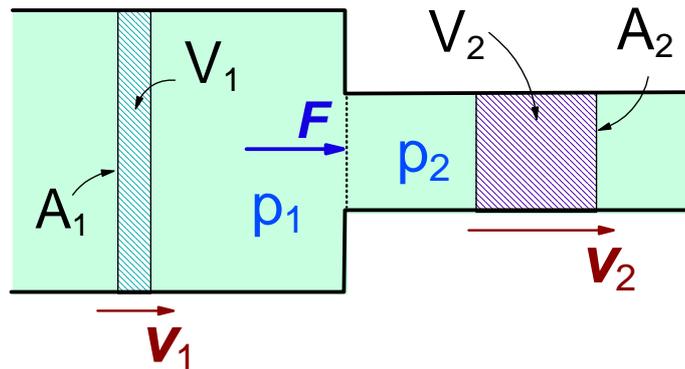


Abbildung 3.29: Zur Verschiebungsarbeit bei einer Verengung des Rohrquerschnitts.

Mit $\rho V = m$ erhält man daraus die **Bernoullische Gleichung**¹³ für die Strömung in einer Röhre¹⁴

$$\rho gh + \frac{\rho}{2}v^2 + p = \text{const} . \quad (3.5.14)$$

In dem Spezialfall, daß keine äußeren Kräfte wirken (z.B. horizontales Rohr) erhält man

$$\frac{\rho}{2}v^2 + p = \text{const} . \quad (3.5.15)$$

In dieser Gleichung tritt die oben bereits qualitativ gemachte Aussage, daß der Druck in einer strömenden Flüssigkeit umso kleiner ist, je größer die Strömungsgeschwindigkeit ist, klar zu Tage.

Bezeichnet man den Gesamtdruck in einer ruhenden Flüssigkeit bei $h = 0$ mit p_0 , so ergibt sich die **Bernoullische Gleichung** in folgender Form:

$$p_0 = p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{const}$$

oder (3.5.16)

$$\text{Gesamtdruck} = \text{statischer Druck} + \text{dynamischer Druck} + \text{Schweredruck} = \text{const} .$$

Hierbei wird der dynamische Druck auch als *Staudruck* bezeichnet.

Die **Bernoullische Gleichung** rechtfertigt zunächst unsere Annahme, daß wir auch Gase als inkompressibel betrachten können, solange die Strömungsgeschwindigkeit klein gegenüber der Schallgeschwindigkeit (in Luft etwa 340 m/s) ist. Nimmt man z.B. Luft mit einer Strömungsgeschwindigkeit von $v = 10\text{m/s}$ und einer Dichte von $\rho = 1.293\text{ kg/m}^3$, so erhält man aus Gl.(3.5.17) für den statischen Druck der strömenden Luft $p = 0.999p_0$. Für $v = 100\text{ m/s}$ würde sich $p = 0.935p_0$ ergeben, d.h. eine Druckänderung um nur etwa 6.5%. Ebenso groß sind auch die Dichteänderungen nach dem **Boyle-Mariott'schen Gesetz**. Man kann deshalb bei niedrigen Strömungsgeschwindigkeiten in der Tat von der Kompressibilität von Gasen absehen.

¹³**Daniel Bernoulli**: 1700 - 1782.

¹⁴Allgemeiner läßt sich der quantitative Zusammenhang zwischen Druck und Geschwindigkeit für ideale (= reibungsfreie) Flüssigkeiten durch Integration der **Eulerschen Gleichung** (3.5.8) gewinnen. Eine solche Integration wird möglich, wenn sich die äußeren Kräfte als Gradient einer Potentials (konservative Kräfte, $\mathbf{f} = -\text{grad}\Phi$ darstellen lassen und die Dichte der Flüssigkeit nur vom Druck abhängt.

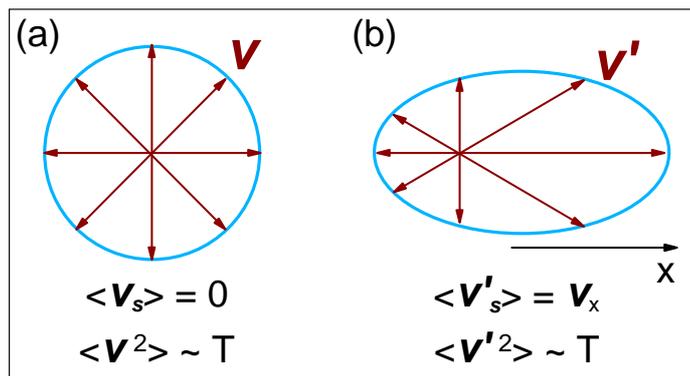


Abbildung 3.30: Geschwindigkeitsverteilung der Flüssigkeitsteilchen bei einer Strömungsgeschwindigkeit $v_s = 0$ (a) und $v_s > 0$ (b).

Es soll zum Abschluß ein mikroskopisches Bild der **Bernoulli**-Gleichung diskutiert werden. Nimmt man eine konstante Dichte ρ und konstante Temperatur T eines Gases oder einer Flüssigkeit an, so folgt aus der in Kapitel 5 diskutierten kinetischen Gastheorie, daß $p = \frac{1}{3}\rho\langle v^2 \rangle = const$, da das mittlere Geschwindigkeitsquadrat $\langle v^2 \rangle = const$ ist. Aus der **Bernoulli**schen Gleichung folgt dann

$$p + \frac{1}{2}\rho v_s^2 + \rho gh = const . \quad (3.5.17)$$

Hierbei ist v_s die Strömungsgeschwindigkeit (zur Unterscheidung von der Geschwindigkeit der Flüssigkeits- oder Gasteilchen aufgrund der endlichen Temperatur). Wie in Abb. 3.30 veranschaulicht ist, ist bei $v_s = 0$ die mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle = 0$, während $\langle v^2 \rangle \propto T = const$ gilt. Dagegen ist für $v_s = v_x \neq 0$ auch $\langle v' \rangle = v_x \neq 0$, während nach wie vor $\langle v'^2 \rangle \propto T = const$ gilt. Das heißt, daß die ungerichtete thermische Bewegung in eine Driftgeschwindigkeit in eine Vorzugsrichtung umgewandelt wird, oder gleichbedeutend, daß thermische Energie in Strömungsenergie umgewandelt wird. Läßt man den Schweredruck außer Betracht, so erhält man mit $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ (Luft) für eine Strömungsgeschwindigkeit $v_s = 10 \text{ m/s}$ einen Druck von $p = p_0 - 50 \text{ Pa}$. Für $v_s = 450 \text{ m/s}$ (dies entspricht etwa der thermischen Geschwindigkeit für 300 K) erhält man $p = p_0 - 10^5 \text{ Pa}$. Für ein Gas mit $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ (Atmosphärendruck) würde dies bedeuten, daß die gesamte ungerichtete Temperaturbewegung in eine gerichtete Strömungsbewegung (oder die gesamte thermische Energie in Strömungsenergie) umgewandelt würde. Es muß hier allerdings weiter berücksichtigt werden, daß auch eine Änderung der inneren Energie der Flüssigkeit oder des Gases (z.B. Temperaturänderung) erfolgt. Die Änderung der inneren Energie muß dann im Energiesatz (vergleiche Abschnitt 1.9) berücksichtigt werden und die **Bernoulli**-Gleichung erhält die Form

$$p + \frac{1}{2}\rho v_s^2 + \rho gh + U = const . \quad (3.5.18)$$

Falls die Strömungsgeschwindigkeit v_s zu hoch wird ($v_s^2 > \langle v'^2 \rangle$), wird die innere Energie U verkleinert. Es kommt dadurch zu einer Abkühlung (Abkühlung durch Expansion).

3.5.3 Anwendungsbeispiele der Bernoulli-Gleichung

Drucksonden

Wir wollen einige Drucksonden vorstellen, mit denen der Gesamtdruck p_0 , der statische Druck p und der Staudruck $\frac{1}{2}\rho v^2$ gemessen werden können. Die speziellen Drucksonden werden zur Messung dieser Drücke an eine geeignete Stelle in der Flüssigkeitsströmung eingebracht. In Abb. 3.31a ist eine Drucksonde gezeigt, mit der der statische Druck p gemessen werden kann. Die Öffnungen O der Sonde befinden sich im Mantel der Sonde und liegen parallel zu den Stromlinien. Die Sonde steht durch das Rohr R in Verbindung mit einem Manometer, z.B. mit einem Flüssigkeitsmanometer M .

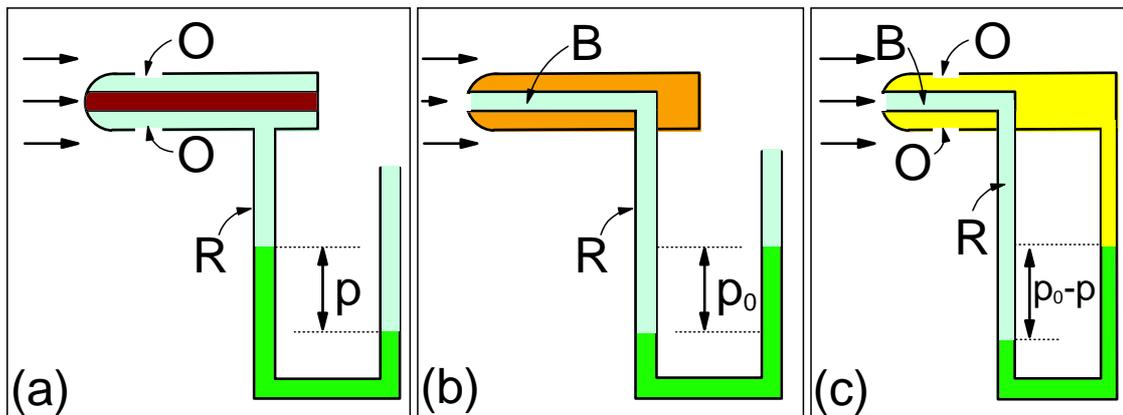


Abbildung 3.31: (a) Drucksonde mit Manometer zur Messung des statischen Druckes. (b) **Pitot-Rohr** zur Messung des Gesamtdruckes. (c) **Prandtl'sches Staurohr** zur Messung des Staudruckes.

Zur Messung des Gesamtdrucks p_0 benutzt man die in Abb. 3.31b gezeigte Sonde, die nach ihrem Erfinder **Pitot-Rohr** genannt wird. Sie besitzt eine axiale Bohrung B , die wiederum über ein Rohr R mit einem Manometer verbunden ist. Für die gegen das vordere Ende der Sonde anströmenden Strömungslinien bildet sich vor der Sonde ein Staugebiet, in dem die Flüssigkeit zur Ruhe kommt ($v = 0$), so daß der hier herrschende, vom Manometer gemessene statische Druck p gleich dem Gesamtdruck p_0 ist. Zu dem statischen Druck p tritt $\frac{1}{2}\rho v^2$ hinzu, um in der Summe p_0 zu liefern. Somit erklärt sich auch die Bezeichnung *Staudruck* für $\frac{1}{2}\rho v^2$.

Die Differenz zwischen Gesamtdruck p_0 und statischem Druck p liefert nach Gl.(3.5.17) den Staudruck $\frac{1}{2}\rho v^2$. Er läßt sich mit dem von **Prandtl** vorgeschlagenen *Staurohr* messen (siehe Abb. 3.31c), das eine Vereinigung der Drucksonde mit dem **Pitot'schen Rohr** darstellt. Das mit zwei Rohrleitungen an das Staurohr angeschlossene Manometer mißt direkt den Staudruck als Differenz von Gesamtdruck p_0 und statischem Druck p . Aus der so gemessenen Druckdifferenz läßt sich die Strömungsgeschwindigkeit zu

$$v = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}} \quad (3.5.19)$$

bestimmen. Das Staurohr stellt deshalb ein einfaches Gerät zur Messung von Strömungsgeschwindigkeiten dar und wird beim Flugzeug zur Messung der Fluggeschwindigkeit relativ zur umgebenden Luft verwendet.

Pumpen, Zerstäuber

In Abb. 3.32a ist eine Rohrleitung gezeigt, deren Querschnitt sich an einer Stelle erweitert. Dicht vor dieser Erweiterungsstelle ist ein Steigrohr angebracht, das mit seinem unteren Ende in einen Flüssigkeitsbehälter ragt. Läßt man nun Wasser vom der engen in den weiteren Rohrbereich fließen, so kann bei genügend großer Strömungsgeschwindigkeit der statische Druck in dem engen Rohr so klein werden, daß der von außen wirkende Luftdruck das in dem Gefäß befindliche Wasser durch die Steigleitung hochdrückt. Man kann deshalb mit einer solchen Vorrichtung Flüssigkeiten aus einem Behälter saugen. Nach dem gleichen Prinzip arbeitet der in Abb. 3.32b gezeigte Zerstäuber. Der aus der Düse austretende Luftstrom saugt die Flüssigkeit aus dem Steigrohr nach oben und zerstäubt es.

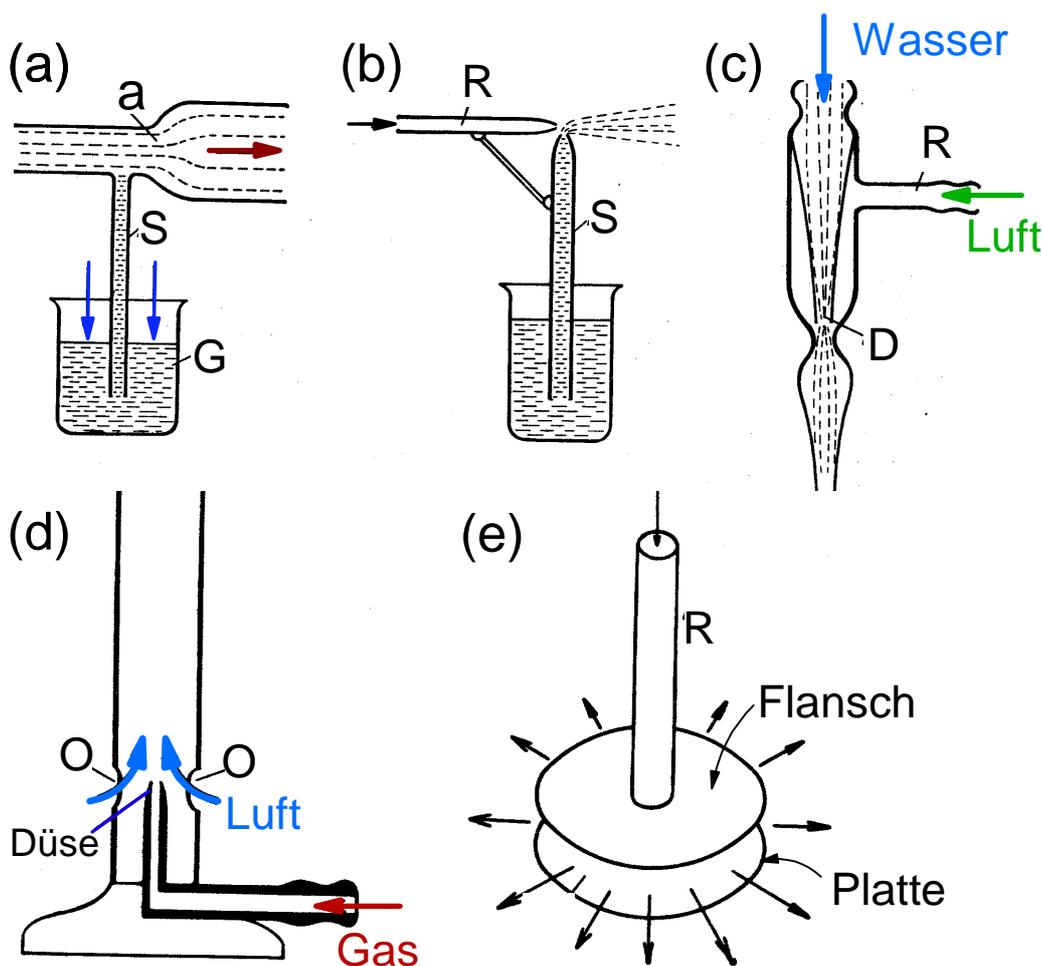


Abbildung 3.32: (a) Saugwirkung durch Flüssigkeitsströmung. (b) Zerstäuber. (c) Wasserstrahlpumpe. (d) Bunsenbrenner. (e) Anordnung nach **Clément** und **Desormes** zur Demonstration des hydrodynamischen Paradoxons.

Abb. 3.32c zeigt die erstmals von **Bunsen** vorgeschlagene *Wasserstrahlpumpe*. In ihr strömt Wasser mit hoher Geschwindigkeit durch die Düse *D* und saugt die in der Umgebung befindliche Luft an. Auf diese Weise kann ein über das Rohr *R* angeschlossenes Gefäß bis auf Drucke im Bereich von einigen 10 mbar evakuiert werden.

In dem ebenfalls von **Bunsen** vorgeschlagenen *Bunsenbrenner* (siehe Abb. 3.32d) saugt das aus der Düse *D* mit großer Geschwindigkeit austretende brennbare Gas durch die in dem Brennröhr angebrachten seitlichen Öffnungen *O* Luft in den Gasstrahl, so daß das Gas den zur vollständigen Verbrennung

notwendigen Sauerstoff erhält.

Besonders anschaulich läßt sich die Druckreduzierung in einem Luftstrom hoher Geschwindigkeit mit einem von **Clément** und **Desormes** vorgeschlagenen Apparat (siehe Abb. 3.32e) demonstrieren. Aus einem Rohr, das an einem Ende einen kreisförmigen Flansch trägt, strömt eine Flüssigkeit oder ein Gas mit hoher Geschwindigkeit aus. Durch die davorgehaltenen Platte wird das ausströmende Medium seitlich abgelenkt. Überraschenderweise wird die Platte i.a. nicht abgestoßen, sondern angezogen. Da sich die Strömung nach allen Seiten erweitert, ist seine Geschwindigkeit an der Austrittsstelle viel größer als am Rand der Platte. Infolgedessen ist der statische Druck in der Mitte zwischen Platte und Flansch kleiner als der im Außenraum herrschende Atmosphärendruck. Letzterer drückt die Platte von unten gegen den Flansch (dieses Phänomen wird häufig auch als *hydrodynamisches Paradoxon* bezeichnet).

Bei starkem Wind können Dächer von Gebäuden abgehoben werden. Wenn die Luft über das Dach strömt, so erhöht sich seine Geschwindigkeit über dem Haus, so daß hier ein kleinerer statischer Druck herrscht als im Inneren des Hauses. Durch den von unten gegen das Dach wirkenden Überdruck kann dieses abgehoben werden. Nimmt man an, daß durch den Windstrom über dem Dach ein Unterdruck von 1% erzeugt wird, so liefert dies bei einer Dachfläche von 100 m² eine Gesamtkraft von 10⁵ N, die von der Dachverankerung aufgenommen werden muß.

Dynamischer Auftrieb

Läßt man aus einem Rohr Luft ausströmen und bringt, wie in Abb. 3.33a gezeigt, von der Seite einen leichten Tischtennisball in den Luftstrom ein, so wird dieser vom Strahl getragen. Die Kompensation der Schwerkraft erfolgt hierbei über die weiter unten diskutierte Reibungskraft zwischen der Luftströmung und dem Ball (siehe Abschnitt 3.5.5, Gleichung (3.5.38) und (3.5.39)). Die seitliche Führung, der Ball klebt gewissermaßen am Luftstrom, kann aber mit Hilfe der **Bernoullischen** Gleichung verstanden werden. Die Erklärung des Phänomens ergibt sich aus der Betrachtung der Stromlinien in Abb. 3.33a. Oberhalb des Balls tritt eine starke Zusammenschnürung der Stromlinien und demnach eine Verminderung des statischen Drucks auf, während unterhalb des Balls ein größerer Druck herrscht. Dadurch wird der Ball nach oben gedrückt. Nähert man einen anderen Gegenstand von unten dem Ball, so daß die Luft zwischen diesem Gegenstand und dem Ball hindurchströmen muß, so tritt auch unterhalb des Balls eine Zusammenschnürung der Stromlinien auf. Der Druckunterschied zwischen oben und unten verschwindet und der Ball fällt aufgrund seines Gewichts herunter.

Abb. 3.33b zeigt den *dynamischen Auftrieb* bei einer Flugzeugtragfläche. Ein Tragflächenprofil hat näherungsweise die Form eines langzogenen Tropfens. Wird eine horizontal liegende Tragfläche horizontal angeströmt, so ist die Strömungsgeschwindigkeit an der Oberseite der Tragfläche etwas größer als an der Unterseite (Zusammenschnürung der Stromlinien). Es entsteht dadurch an der Oberseite ein statischer Unterdruck gegenüber der Unterseite. Dies führt zu einem dynamischen Auftrieb.

Messung von Strömungsgeschwindigkeiten

Zur Messung von Strömungsgeschwindigkeiten von Flüssigkeiten und Gasen in Rohrleitungen benutzt man die sogenannte **Venturi-Düse** (siehe Abb. 3.34). Sie besteht im wesentlichen nur aus einer in das Rohr eingebrachten Querschnittsverengung. Mittels zweier Manometer M und M_r mißt man den statischen Druck p in der Rohrleitung mit normalem und verengtem Querschnitt A bzw. A_r . Wenn v und v_r die Geschwindigkeiten an den beiden Stellen sind, so liefert die **Bernoullische** Gleichung die Beziehung

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_r + \frac{1}{2}\rho v_r^2 . \quad (3.5.20)$$

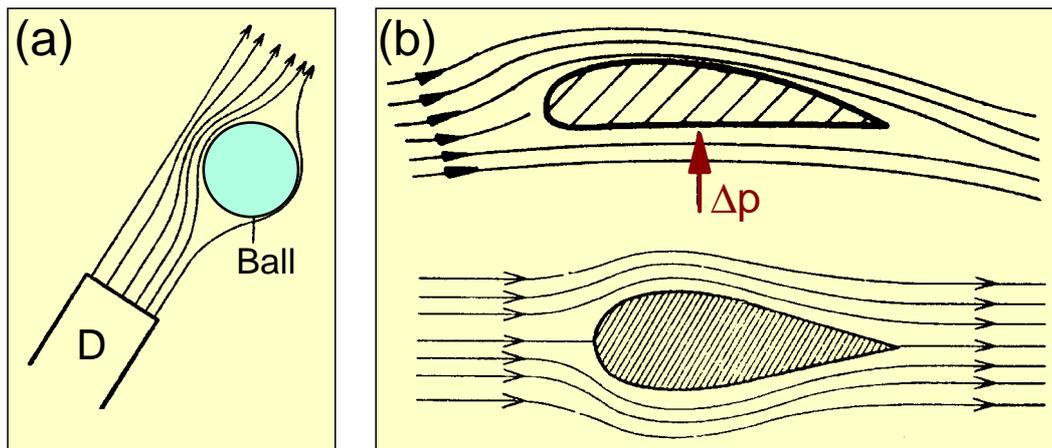


Abbildung 3.33: (a) Schweben eines Balles im Luftstrom. (b) Stromlinienverlauf um eine Tragfläche (oben) und einen symmetrischen Stromlinienkörper (unten). Ein dynamischer Auftrieb wird nur für die Tragfläche erhalten.

Unter Benutzung der Kontinuitätsgleichung $Av = A_r v_r$ erhält man für die gesuchte Geschwindigkeit v

$$v = \sqrt{\frac{2(p - p_r)}{\rho \left(\frac{A^2}{A_r^2} - 1 \right)}} \quad (3.5.21)$$

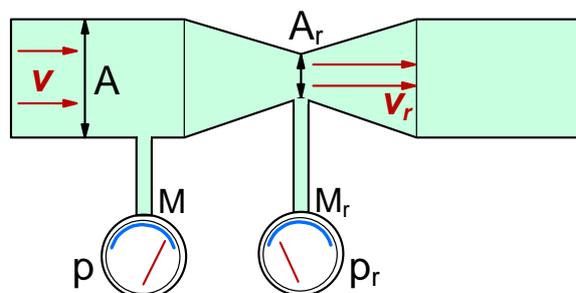


Abbildung 3.34: Zur Bestimmung von Strömungsgeschwindigkeiten mit der **Venturidüse**.

Ausflußgeschwindigkeit reibungsfreier Flüssigkeiten

Man kann die **Bernoullische** Gleichung auch benutzen, um die Geschwindigkeit v zu berechnen, mit der eine Flüssigkeit aus der Öffnung eines Behälters ausfließt, die sich in der Höhe h unterhalb des Flüssigkeitsspiegels befinden (z.B. Seitenwand oder Boden) soll. Der an der Austrittsöffnung herrschende statische Druck sei gleich dem Atmosphärendruck p_b . Unter der Annahme, daß der Durchmesser des Behälters groß gegen den der Ausflußöffnung ist, kann die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen in im Behälter in guter Näherung gleich Null gesetzt werden und man erhält dann aus der **Bernoullischen** Gleichung (3.5.17)

$$p_a + \rho gh = p_a + \frac{1}{2} \rho v^2$$

oder $v = \sqrt{2gh}$. (3.5.22)

Diese zuerst von **Toricelli** aufgestellte Gesetzmäßigkeit sagt aus, daß *die Ausflußgeschwindigkeit einer reibungslosen Flüssigkeit gleich der Geschwindigkeit ist, die ein Körper erlangen würde, wenn er vom Flüssigkeitsspiegel zur Ausflußöffnung frei fallen würde.*

3.5.4 Umströmung fester Körper durch ideale Flüssigkeiten

Bis jetzt wurde die Strömung *idealer* Flüssigkeiten und Gase betrachtet, wobei die Wechselwirkung der Flüssigkeiten oder Gase mit den sie einschließenden Rohren oder Gefäßen und Reibungseffekte in der Flüssigkeit oder dem Gas selbst nicht berücksichtigt wurde. Falls Reibungseffekte vernachlässigbar klein sind, ist eine Beschreibung der Strömung mit der **Bernoullischen** Gleichung möglich. Wir werden jetzt in diesem Abschnitt zuerst die Reibungseffekte von Flüssigkeiten und Gasen mit den Gefäßwandungen und in Abschnitt 3.5.5 dann Reibungseffekte in der Flüssigkeit oder dem Gas selbst betrachten.

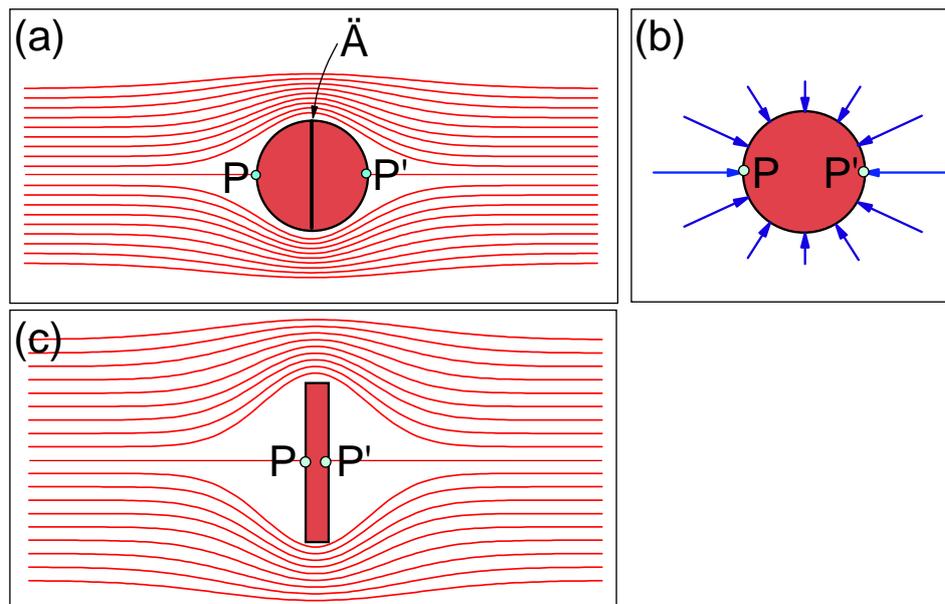


Abbildung 3.35: (a) Strömung einer idealen, reibungslosen Flüssigkeit um eine Kugel. (b) Kraftverteilung auf eine von einer idealen Flüssigkeit umströmten Kugel. (c) Strömung einer idealen, reibungslosen Flüssigkeit um eine Platte.

Die Tatsache, daß Reibungseffekte bei der Umströmung fester Körper durch eine ideale, d.h. reibungsfreie Flüssigkeit oder Gas eine große Rolle spielen, kann man aus folgendem Experiment erkennen. Bringt man in eine Parallelströmung einer reibungslosen Flüssigkeit eine Kugel ein, so trifft eine Strömungslinie den Pol P der Kugel an der Vorderseite (siehe Abb. 3.35). In diesem Punkt wird die Geschwindigkeit der Flüssigkeit gleich Null. Man nennt diesen Punkt deshalb *Staupunkt*. Von P aus teilt sich die Stromlinie dann und vereinigt sich wieder im hinteren Staupunkt P' , dem entgegengesetzten Pol der Kugel. Hier ist die Geschwindigkeit ebenfalls gleich Null. Dagegen erreicht die Geschwindigkeit ihre Maximalwerte am Äquator \ddot{A} der Kugel. Die weiter außen liegenden Stromlinien weichen vor der Kugel aus und nähern sich hinter der Kugel wieder an. Man sieht aus diesem Stromlinienverlauf, daß

der Wert der Strömungsgeschwindigkeit zwischen dem Pol P und Äquator auf den Maximalwert v_m anwächst und dann zwischen Äquator und dem entgegengesetzten Pol P' wieder auf Null absinkt.

Das Strömungsbild stimmt prinzipiell gut mit den Verhältnissen in realen Flüssigkeiten überein. Es besteht jedoch ein wesentlicher Unterschied. In realen Flüssigkeiten haftet die Flüssigkeit an der Oberfläche der Kugel, während in unserer idealisierten Betrachtung die Flüssigkeit einfach an der Kugel vorbeiströmt. Bei nichthaftender Flüssigkeit ist die Anordnung der Stromlinien (siehe Abb. 3.35a) völlig symmetrisch bezüglich der Achse PP' und des Äquators. Daraus ergibt sich aus der **Bernoullischen** Gleichung, daß an den Punkten P und P' wegen $v = 0$ der statische Druck $p = p_0$ ist, d.h. den größten Wert hat, den er annehmen kann. Am Äquator ist dagegen $v = v_m$ und der Druck nimmt den kleinsten Wert $p = p_0 - \frac{1}{2}\rho v_m^2$ an. Die resultierende Druckverteilung ist in Abb. 3.35b gezeigt. Man erkennt, daß der Druck auf der rechten und linken Seite der Kugel völlig gleich ist. Daraus kann man folgende Schlußfolgerung ziehen: *Auf eine in eine Parallelströmung eingetauchte Kugel wirkt bei idealer Flüssigkeit keinerlei Kraft.* Oder umgekehrt: *Eine mit konstanter Geschwindigkeit durch eine ruhende, ideale Flüssigkeit bewegte Kugel erfährt keinen Widerstand.* Dieses Ergebnis gilt nicht nur für eine Kugel, sondern für jeden beliebigen eingetauchten Körper (siehe z.B. Abb. 3.35c).

Diese Tatsache widerspricht allerdings der experimentellen Erfahrung. Im Experiment stellt man fest, daß alle eingetauchten Körper einen Widerstand erfahren. Daraus kann man dann schließen, daß die Strömung vor und nach dem Körper unterschiedlich sein muß, daß also in Wirklichkeit *die Symmetrie der Strömung und der resultierenden Druckverteilung bezüglich des Äquators gebrochen ist.* Wie die Flüssigkeit im Detail strömt wird erst später diskutiert, da für die Symmetriebrechung die bis jetzt noch nicht behandelten Reibungseffekte eine wichtige Rolle spielen. Es soll hier die Tatsache genügen, daß infolge der Reibung in der Grenzschicht die Verhältnisse vor und nach dem Körper nicht die Symmetrie besitzen, die nach der Behauptung der reibungslosen Hydrodynamik vorhanden sein sollte. Der tatsächlich in realen Flüssigkeiten auftretende Strömungswiderstand hat seine Ursache in der Asymmetrie der Druckverteilung vor und hinter dem Körper. Er wird deshalb im Gegensatz zu dem später diskutierten *Reibungswiderstand* innerhalb einer Flüssigkeit als *Druckwiderstand* bezeichnet. Die Strömungs- und Druckasymmetrien stellen sich insbesondere bei solchen Körpern ein, die beim Übergang von der Vorder- zur Rückseite eine starke Krümmung der Stromlinien aufweisen (wie z.B. eine Platte). Strömungs- und Druckasymmetrien werden umso kleiner, je langgestreckter ein Körper ist. Bei solchen Körpern tritt bei der Bewegung durch eine Flüssigkeit nahezu kein Druckwiderstand auf!¹⁵ Man nennt diese Körper dann auch *stromlinienförmig*. Eine nähere Diskussion des Druckwiderstands erfolgt in Abschnitt 3.5.5.

Wir haben gesehen, daß in einer reibungslosen Flüssigkeit (bzw. Gas) auf einen in eine Parallelströmung eingebrachten Körper Druckkräfte auftreten müssen, *sobald die Symmetrie der Stromlinien zerstört ist.* Anschaulich kann man das dadurch erreichen, daß man der symmetrischen Strömung (z.B. um einen unendlich langen Zylinder, dessen Achse senkrecht zur Zeichenebene steht) noch eine *Zirkulationsströmung* überlagert. Man kann sich also die asymmetrische Strömung als Überlagerung einer symmetrischen Strömung und einer Zirkulationsströmung denken (siehe Abb. 3.36). Eine solche Zirkulationsströmung ergibt sich z.B. dadurch, daß der Zylinder rotiert und infolge der Rauigkeit seiner Oberfläche Gas- oder Flüssigkeitsteilchen mitnimmt. Die Geschwindigkeitsverteilung der Strömung wird durch die Zirkulationsströmung verändert, und zwar wird die Geschwindigkeit auf einer Seite (z.B. unten) erhöht und auf der anderen Seite (z.B. oben) erniedrigt (siehe Abb. 3.36). Entsprechend sind die Stromlinien oben dichter und unten weiter auseinander gezogen. Nach der **Bernoullischen** Gleichung ist also der Druck oben kleiner und unten größer. Es resultiert daraus eine Querkraft F_q auf jede Längeneinheit des Zylinders senkrecht zur Strömungsrichtung. Diese Kraft F_q ist umso größer, je größer die Geschwindigkeit v der Parallelströmung. Sie ist ferner proportional zu der Größe Γ der Zirkulation und der Dichte ρ der Flüssigkeit oder des Gases. Die genaue Rechnung liefert für die Kraft pro Längeneinheit die

¹⁵In der Natur kann dies sehr anschaulich anhand der Form von Fischen beobachtet werden.

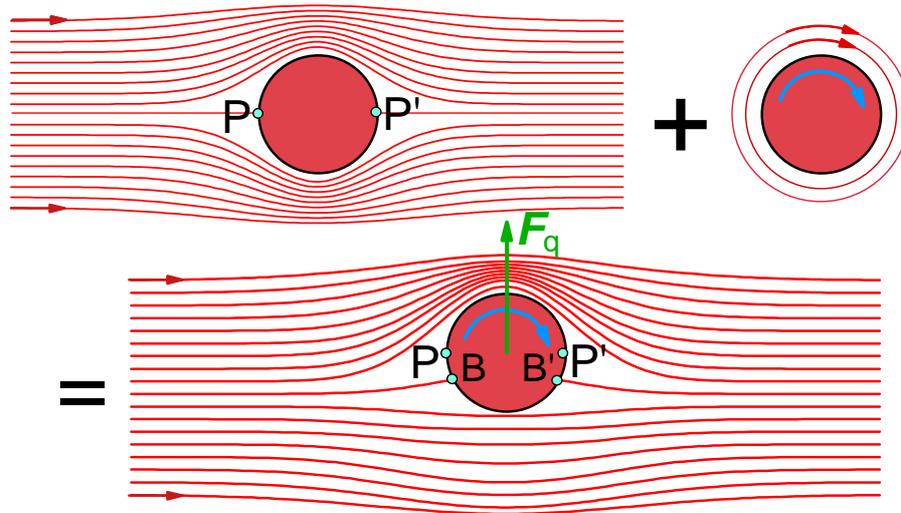


Abbildung 3.36: Asymmetrische Strömung als Überlagerung einer symmetrischen Strömung und einer Zirkulationsströmung.

Beziehung

$$\frac{F_q}{l} = \rho v \Gamma, \quad (3.5.23)$$

die nach ihren Begründern die **Kutta-Shukowski** Beziehung genannt wird. Hierbei ist l die Länge des Zylinders. Die Größe der Zirkulation Γ hängt bei einem rotierenden Zylinder von dessen Rotationsgeschwindigkeit und Rauigkeit ab. Ferner muß die Reibung in der Grenzschicht berücksichtigt werden, wie weiter unten noch genauer diskutiert wird. Es muß also von der idealen, reibungslosen Flüssigkeit abgewichen werden. Je größer die Zirkulation ist, um so mehr rücken die ursprünglichen Staupunkte P und P' nach unten in ihre neue Positionen B und B' . Die Stärke der Zirkulation kann über das Ringintegral

$$\Gamma = \oint \mathbf{v}_r \cdot d\mathbf{s} \quad (3.5.24)$$

ausgedrückt werden. Hat die Zirkulationsströmung um den Zylinder mit Radius r die Tangentialgeschwindigkeit v_r , so erhält man

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = v_r \oint ds = v_r 2\pi r. \quad (3.5.25)$$

Berücksichtigt man ferner, daß die Querschnittsfläche des Zylinders senkrecht zur Strömungsrichtung $A = 2rl$ ist, so erhält man für die Querkraft

$$F_q = \pi \rho v v_r A. \quad (3.5.26)$$

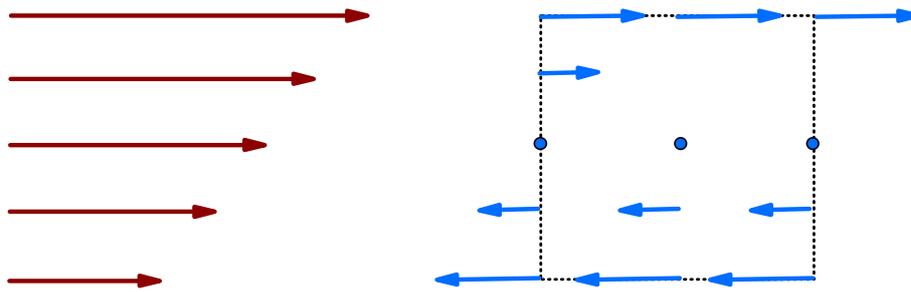


Abbildung 3.37: Eine inhomogene Strömung enthält Wirbel. Im mitbewegten Bezugssystem (rechts) sieht man die Wirbel deutlicher. Der eingezeichnete Umlauf ergibt eine von Null verschiedene Zirkulation.

Eine endliche Zirkulationsströmung auch dann auftreten kann, wenn keine Rotation eines Körpers vorliegt. Dies ist aus Abb. 3.37 ersichtlich. Im allgemeinen sind Wirbelströmungen überall dort anzusetzen, wo sich die Strömungsgeschwindigkeit quer zu ihrer eigenen Richtung ändert. Die Zirkulationsströmung ist auch bei Flugzeugen von großer Bedeutung. Die sich um den Tragflügel eines Flugzeugs ausbildende Strömung (siehe Abb. 3.36b, oben) kann als eine Überlagerung einer symmetrischen Strömung und einer Zirkulationsströmung aufgefaßt werden.¹⁶

Der Magnus-Effekt

Bewegt sich ein rotierender Ball durch eine Flüssigkeit oder ein Gas, so wird er quer zu seiner Bewegungsrichtung abgelenkt. Der Ball erfährt aufgrund seiner Rotation einer Querkraft. Dieser Effekt hat bei der Ballistik von Geschossen eine große Rolle gespielt. Wurden diese aus glatten Rohren abgefeuert, so wiesen sie aufgrund einer Rotation durch eine zufällig exzentrische Lage des Schwerpunkts unerklärliche Abweichungen von ihrer ursprünglichen Flugbahn auf. Dieser Tatbestand war die Ursache dafür, daß sich 1853 **G. Magnus** mit der experimentellen Untersuchung diesen Effekts befaßte, der nach ihm heute **Magnus-Effekt** genannt wird.

3.5.5 Dynamische Viskosität – Laminare und turbulente Strömung

Wir haben bisher Strömungen idealer Flüssigkeiten oder Gase betrachtet und dabei Reibungseffekte vernachlässigt. Im letzten Abschnitt haben wir bereits gesehen, daß die Mitnahme von an der Oberfläche von Festkörpern haftenden Flüssigkeits- oder Gasteilchen zu Asymmetrien des Strömungsprofils und damit zu Kräften auf umströmte Körper führt. Wir haben aber Reibungseffekte in der Flüssigkeit oder dem Gas selbst vernachlässigt. Wir wollen deshalb in diesem Abschnitt die Natur von Reibungskräften in Flüssigkeiten und Gasen diskutieren und ihren Einfluß auf das Strömungsverhalten betrachten. Wir werden sehen, daß reale Flüssigkeiten und Gase eine sogenannte *Zähigkeit* oder *Viskosität* besitzen. Wir werden in diesem Zusammenhang auch von innerer Reibung sprechen.

Wir haben bereits bei der Herleitung der **Bernoullischen** Gleichung darauf hingewiesen, daß aufgrund von Reibungseffekten der Druck entlang eines Rohres kontinuierlich abnimmt (vergleiche

¹⁶Für ideale Flüssigkeiten fand **Helmholtz**, daß Wirbel in ihnen weder erzeugt noch vernichtet werden können. Außerdem ist die Intensität eines Wirbel ist konstant. Nimmt z.B. der Querschnitt eines Wirbels ab, so muß die Rotationsgeschwindigkeit größer werden und umgekehrt. Erst der Einfluß der Reibung führt zur Verletzung dieser Sätze. Bei geringer Reibung, z.B. in der Atmosphäre, halten sich Wirbel wie die Hoch- und Tiefdruckgebiete sehr lange. Eine Einschnürung eines Tiefs führt in den Tropen zu enormen Windstärken (Taifun, Tornado).

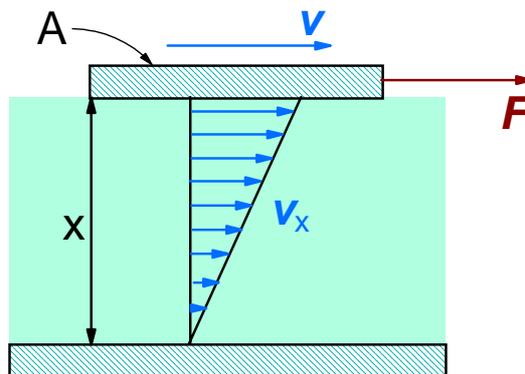


Abbildung 3.38: Zur Flüssigkeitsreibung.

Abb. 3.28). Die Bedeutung von Reibungseffekten wird auch klar, wenn man ein mit Wasser gefülltes Glas um seine vertikale Achse rotieren läßt. Man sieht, daß nach einer gewissen Zeit die gesamte Flüssigkeit im Glas mitrotiert. Das ist nur dann möglich, wenn zwischen den einzelnen coaxialen Flüssigkeitsschichten Kraftwirkungen bestehen, die die Rotation von der Gefäßwand allmählich auf die inneren Flüssigkeitsschichten übertragen. Zur Diskussion dieser Kraftwirkungen betrachten wir den in Abb. 3.38 gezeigten sehr einfachen Versuchsaufbau. Zwischen einem festen Boden und einer beweglichen Platte der Fläche A befindet sich eine Flüssigkeitsschicht der Dicke x . Da die an den Boden und an die Platte angrenzenden Flüssigkeitsschichten an diesen haften, bildet sich beim Bewegen der Platte ein Geschwindigkeitsgefälle dv/dx aus. Die Flüssigkeit kann man sich dabei aus einzelnen Schichten mit unterschiedlicher Geschwindigkeit aufgebaut denken. Die Geschwindigkeit nimmt vom Boden zur Deckplatte zu, und zwar für kleine Abstände linear. Diesen Vorgang kann man sich so erklären, daß die einzelnen Flüssigkeitsschichten auf die angrenzenden Schichten Tangentialkräfte (parallel zu den Schichten) ausüben, die diese in Bewegung versetzen. Jede Schicht übt auf die nach unten folgende eine beschleunigende Kraft aus und erfährt nach dem Reaktionsprinzip eine gleich große, aber verzögernde Kraft. Diese Kraft ist nach der Erfahrung proportional zur Fläche der angrenzenden Schichten, ihrem Geschwindigkeitsunterschied Δv , einem von der Natur der Flüssigkeit abhängenden Faktor η und schließlich umgekehrt proportional dem Abstand Δx der betrachteten Schichten. Demnach erhält man für die Tangentialkraft

$$F = A \eta \frac{\Delta v}{\Delta x} . \quad (3.5.27)$$

Dieser Ausdruck geht im Grenzfall verschwindend dünner Schichten über in

$$F = A \eta \frac{dv}{dx} . \quad (3.5.28)$$

Da die Kraft F parallel zu den Flüssigkeitsschichten (d.h. tangential) wirkt, ist $F/A = \sigma_t$ eine *Tangential- oder Schubspannung* (vergleiche Abschnitt 3.2.1), die durch

$$\sigma_t = \eta \frac{dv}{dx} \quad (3.5.29)$$

gegeben ist. In einer realen Flüssigkeit existiert also außer der für ideale Flüssigkeiten alleine betrachteten *Normalspannung*, d.h. dem Druck $p = F_n/A$, auch eine *Tangentialspannung*, die durch Gl.(3.5.29) gegeben ist.

Während die Normalspannung eine elastische Spannung ist (sie ist proportional zur Deformation), ist die Tangentialspannung einer Flüssigkeit proportional zur Geschwindigkeitsdifferenz zweier benachbarter Flüssigkeitsschichten. Sie ist also keine elastische Kraft, die ja bestrebt wäre, die Deformation rückgängig zu machen. Sie hat vielmehr die Tendenz, den Geschwindigkeitsunterschied auszugleichen. Die Tangentialspannung wirkt also so, wie wir es von Reibungskräften kennen. Man nennt deshalb η auch den *Koeffizienten der inneren Reibung*. Allgemein üblich ist aber die Bezeichnung *dynamische Viskosität* oder *Zähigkeit*. Der reziproke Wert $1/\eta$ wird *Fluidität* genannt, der Quotient $\nu = \eta/\rho$ wird als *kinematische Zähigkeit* bezeichnet.

Man sieht aus Gl.(3.5.29), daß die Tangentialspannung sowohl proportional zur dynamischen Viskosität als auch zum Geschwindigkeitsgradienten dv/dx ist. Das heißt, selbst bei einer sehr kleinen Viskosität der Flüssigkeit kann die Tangentialspannung aufgrund von starken Geschwindigkeitsgradienten groß und deshalb bedeutend werden.

Laminare Strömung – das Hagen-Poiseuillesche Gesetz

Wir werden in diesem Abschnitt diskutieren, wie groß die Zähigkeit von Flüssigkeiten und Gasen ist und wie man sie mißt. Dazu betrachten wir zunächst den Fall, daß die Reibungskräfte die Trägheitskräfte bei weitem überwiegen sollen. Dieser Fall eignet sich besonders gut zur Bestimmung von Reibungskoeffizienten.

Wir betrachten ein Rohr mit Radius R , durch das eine Flüssigkeit strömt. Das Rohr soll horizontal verlaufen, damit Effekte der Schwerkraft vermieden werden. Das Rohr soll mit einer Flüssigkeit mit konstantem Druck gespeist werden. Die Flüssigkeit im Rohr kann man sich aus dünnen koaxialen "Stromröhren" mit einer Dicke Δr aufgebaut denken (siehe Abb. 3.39a). Die äußerste Stromröhre soll dabei fest mit der Rohrwandung verbunden sein ($v = 0$). Der Flüssigkeitsfaden in der Mitte des Rohres hat die höchste Geschwindigkeit. Die einzelnen Flüssigkeitsschichten gleiten aneinander vorbei, ohne sich zu stören. Deshalb nennt man eine solche Strömung auch *Schicht-* oder *Laminarströmung*. Die Stromlinien, die mit den Bahnlinien identisch sind, sind Geraden parallel zum Rohr. Wir werden weiter unten noch sehen, daß sich eine laminare Strömung nur dann ausbilden kann, wenn die Trägheitskräfte klein genug sind. Andernfalls kommt es zu einer *turbulenten Strömung*.

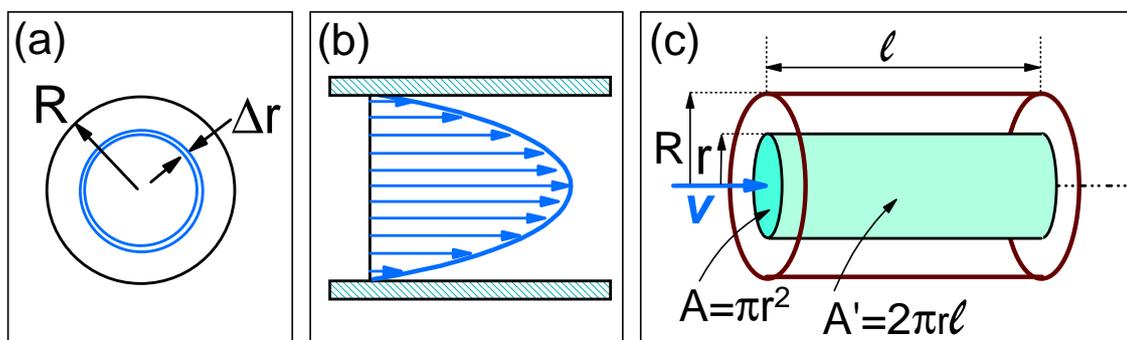


Abbildung 3.39: Zur laminaren Strömung einer Flüssigkeit in einem Rohr: (a) Aufteilung in Stromröhren der Dicke Δr , (b) Strömungsprofil, (c) zur Ableitung des Strömungsprofils.

Die Bewegungsgleichung für die Flüssigkeit entlang des Rohres ergibt sich nach dem **d'Alembertschen** Prinzip aus dem Verschwinden der Summe aus äußeren Kräften (Druckkraft $F_p = (p_1 - p_2)A$), der

Reibungskraft F_η , die der Druckkraft entgegengesetzt ist, und der Trägheitskraft $F_T = -ma = -\rho V(dv/dt)$, d.h. es muß gelten

$$(p_1 - p_2)A - F_\eta - \rho V \frac{dv}{dt} = 0 . \quad (3.5.30)$$

Wir betrachten jetzt Strömungen, für die $v = const$ ist, so daß die Trägheitskraft verschwindet und man

$$(p_1 - p_2)A - F_\eta = 0 \quad (3.5.31)$$

erhält. Mit der Querschnittsfläche $A = \pi r^2$ der in Abb. 3.39c gezeigten Stromröhre, der Druckdifferenz $\Delta p = p_1 - p_2$ entlang eines Rohrstückes der Länge l und der Oberfläche $A' = 2\pi r l$ einer coaxialen Stromröhre, an der die Tangentialkraft σ_t angreift (siehe Abb. 3.39c), erhält man unter Benutzung von Gl.(3.5.28)

$$\Delta p \pi r^2 - \eta 2\pi r l \frac{dv}{dr} = 0 . \quad (3.5.32)$$

Durch Auflösen nach dv/dr und Integration erhält man

$$v(r) = (R^2 - r^2) \frac{(p_1 - p_2)}{4 l \eta} . \quad (3.5.33)$$

Dabei ergibt sich die Integrationskonstante aus der Bedingung $v(R) = 0$. Man erhält also das in Abb. 3.39b skizzierte parabelförmige Geschwindigkeitsprofil einer in einem Rohr fließenden Flüssigkeit. Für das durch das gesamte Rohr pro Zeiteinheit strömende Flüssigkeitsvolumen, d.h. die Stromstärke $I = V/t$, erhält man dann

$$I = \int_A v(r) dA = \int_0^R v(r) 2\pi r dr = \frac{\pi R^4}{8 \eta l} (p_1 - p_2) . \quad (3.5.34)$$

Diese Gesetzmäßigkeit wird nach ihren Entdeckern das **Hagen-Poiseuillesche** Gesetz genannt.¹⁷ Man erkennt, daß die durch ein Rohr strömende Flüssigkeitsmenge mit der 4. Potenz des Rohrradius, linear mit dem Druckgefälle $\Delta p/l$ entlang des Rohres und umgekehrt proportional zur dynamischen Viskosität η ansteigt. Da I , Δp , l und R leicht zu messen sind, kann man mit Hilfe von Gl.(3.5.34) sehr einfach die dynamische Viskosität von Flüssigkeiten bestimmen.¹⁸

Die Dimension der dynamischen Viskosität ergibt sich aus dem **Hagen-Poiseuilleschen** Gesetz zu

¹⁷Diese Gesetzmäßigkeit wurde fast gleichzeitig vom deutschen Ingenieur Hagen (1839) und vom französischen Arzt Poiseuille (1840) untersucht. Poiseuille versuchte dabei vor allem die Blutbewegung in den Arterien und Venen zu verstehen.

¹⁸Die dynamische Viskosität (siehe Tabelle 3.4) ist stark temperaturabhängig. Sie nimmt bei Flüssigkeiten mit steigender Temperatur stark ab, bei Gasen allerdings zu. Dies liegt daran, daß der Mechanismus der Reibung bei Gasen anders ist. Er beruht hier auf Diffusionsprozessen. Strömen zwei Gasschichten nebeneinander her, so werden infolge der Brownschen Molekularbewegung Moleküle mit höherer mittlerer Geschwindigkeit in den langsameren Gasstrom und umgekehrt übertreten und zu einer Angleichung der mittleren Geschwindigkeiten führen. Es ist einsichtig, daß dieser Prozeß bei höheren Temperaturen effektiver ist und deshalb die Zähigkeit von Gasen mit steigender Temperatur zunimmt.

$$[\eta] = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m s}} = 1 \text{ Pa s} = 10 \frac{\text{g}}{\text{cm s}} = 10 \text{ Poise} . \quad (3.5.35)$$

Man kann das **Hagen-Poiseuillesche** Gesetz auch noch in eine andere Form bringen, wenn man statt der verschiedenen Geschwindigkeiten der einzelnen Schichten eine mittlere Geschwindigkeit der Strömung einführt. Definiert man die mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ über die Stromstärke $I = V/t = \pi R^2 \langle v \rangle$, so erhält man durch Einsetzen dieses Ausdrucks für V/t in Gl.(3.5.34)

$$\frac{(p_1 - p_2)}{l} = \frac{8\eta \langle v \rangle}{R^2} . \quad (3.5.36)$$

Multipliziert man diesen Ausdruck noch mit dem Rohrquerschnitt πR^2 und der Länge l , so ergibt sich die Kraft, die in dem Rohrstück der Länge l und des Radius R die Durchflußgeschwindigkeit $\langle v \rangle$ erzeugt, zu

$$F = 8\pi \eta l \langle v \rangle . \quad (3.5.37)$$

Dieser Kraft ist gleich (und entgegengesetzt) der Reibungskraft, d.h. dem sogenannten *Reibungswiderstand* F_η , den das Rohr der Strömung entgegengesetzt. Der Betrag des Reibungswiderstandes ist also

$$F_\eta = 8\pi \eta l \langle v \rangle . \quad (3.5.38)$$

Der Reibungswiderstand verschwindet wie erwartet für $\eta = 0$, d.h. für eine ideale, reibungslose Flüssigkeit.

Eine weitere, sehr wichtige Formel für den Reibungswiderstand stammt von **Stokes**. Er betrachtete den Reibungswiderstand einer Kugel mit Radius R , die sich mit einer mittleren Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit der Zähigkeit η bewegt. Für den Reibungswiderstand ergibt sich hier

$$F_\eta = 6\pi \eta R \langle v \rangle . \quad (3.5.39)$$

Dieser Ausdruck wird als das **Stokessche Gesetz** bezeichnet. Eine Kugel bewegt sich nach diesem Gesetz in einer zähen Flüssigkeit unter Wirkung einer konstanten Kraft F (z.B. Schwerkraft) mit konstanter Geschwindigkeit. Eine Kugel sinkt deshalb im Schwerfeld (konstante Gewichtskraft) in einer Flüssigkeit mit konstanter Geschwindigkeit nach unten. Auch die Fallgeschwindigkeit von Regentropfen gehorcht dem **Stokesschen** Gesetz.

Zur Berechnung der Sinkgeschwindigkeit v_s von Kugeln unterschiedliche Materialdichte ρ in einer Flüssigkeit muß man neben der Gewichtskraft $\mathbf{F}_G = V_K \rho_K \mathbf{g}$ und der Reibungskraft $\mathbf{F}_\eta = -6\pi\eta R \mathbf{v}_s$ die Auftriebskraft $\mathbf{F}_A = \rho_{F1} V_K \mathbf{g}$ berücksichtigen. Hierbei ist ρ_K die Dichte und $V_K = \frac{4}{3}\pi R^3$ das Volumen der Kugel. Aus dem Kräftegleichgewicht $\mathbf{F}_G + \mathbf{F}_\eta + \mathbf{F}_A = 0$ folgt

$$\begin{aligned} \rho_K V_K g - 6\pi\eta R v_s - \rho_{F1} V_K g &= 0 \\ \text{oder} \quad v_s &= \frac{2}{9} \frac{(\rho_K - \rho_{F1})}{\eta} g R^2 . \end{aligned} \quad (3.5.40)$$

Die Sinkgeschwindigkeit ist also proportional zu $1/\eta$, $(\rho_K - \rho_{F1})$ und R^2 . Das heißt, die Sinkgeschwindigkeit ist für eine zähes Öl (z.B. Glyzerin) wie erwartet kleiner als für Wasser, sie ist für eine Stahlkugel größer als für eine gleichgroße Kunststoffkugel und sie ist für eine große Kugel größer als für eine kleine Kugel.

Stoff	η [Pa s]	Stoff	η [Pa s]
Quecksilber	0.1554	Argon	2.211×10^{-3}
Diäthyläther	0.0240	Helium	1.961×10^{-3}
Benzol	0.0648	Luft	1.819×10^{-3}
Glyzerin (wasserfrei)	148	Wasserstoff	0.884×10^{-3}
Motoröl	~ 5		
Rizinusöl	99		

Tabelle 3.4: Dynamische Viskosität einiger Stoffe bei 20°C in Pascalsekunden.

Turbulente Strömung – Reynoldssche-Zahl

Bei idealen Flüssigkeiten wurde die gesamte von außen zugeführte Arbeit in eine Beschleunigung der Flüssigkeit übergeführt, da hier keine Reibungskräfte wirken. Eine Druckdifferenz in einem Rohr führt also ausschließlich zu einer Veränderung der kinetischen Energie der Flüssigkeit. Im vorangegangenen Abschnitt wurde dann die Reibung berücksichtigt, wobei wir angenommen hatten, daß die Reibungskräfte sogar groß gegenüber den Trägheitskräften sein sollten. In diesem Fall erhielt man eine *laminare Strömung*, die dadurch ausgezeichnet ist, daß die äußere Arbeit (z.B. Druckdifferenz im Rohr) lediglich zur Überwindung der inneren Reibung notwendig ist. Trägheitskräfte wurde völlig vernachlässigt. Bei laminaren Strömungen gleiten selbst sehr dünne Flüssigkeitsschichten glatt übereinander hin.

Experimentell beobachtet man laminare Strömungen allerdings nur, wenn das Verhältnis v/η aus Strömungsgeschwindigkeit und dynamischer Viskosität klein ist. Mit zunehmender Strömungsgeschwindigkeit geht die laminare Strömung in eine sogenannte *turbulente Strömung* über, bei der Wirbel in der strömenden Flüssigkeit entstehen und dadurch aneinander angrenzende Flüssigkeitsschichten nicht mehr übereinander hingleiten, sondern durcheinander gewirbelt werden. Man nennt diese Strömungsformen auch *Strömungen realer Flüssigkeiten*. Eine rechnerische Behandlung turbulenter Strömungsprozesse ist außerordentlich schwierig. In den folgenden Betrachtungen soll deshalb lediglich eine Klassifikation der auftretenden Strömungsformen gemacht werden. Diese Betrachtungen führen zu dem Begriff der endlichen Grenzschichtdicke D^9 und machen plausibel, wie es zu einer turbulenten Strömung kommen kann.

Wir machen zunächst folgendes Gedankenexperiment: Mit Hilfe einer Kraft F , die zur Überwindung der Reibung notwendig ist, wird ein dünnes Brett in eine reale Flüssigkeit so eingetaucht, daß sich eine konstante Sinkgeschwindigkeit v_s und ein im Idealfall lineares Geschwindigkeitsgefälle dv/dx zu beiden Seiten des Brettes ergibt (siehe Abb. 3.40).²⁰ Mit der Reibungskraft $F_\eta = 2A\eta dv/dx = 2A\eta v_s/D$ (vergleiche Gl.(3.5.28)), wobei der Faktor 2 durch die zwei Oberflächen des Brettes verursacht wird, erhält man die *Reibungsarbeit*

$$W_\eta = F_\eta l = 2A \eta \frac{v_s}{D} l . \quad (3.5.41)$$

Hierbei ist A die eingetauchte Seitenfläche des Brettes, l die Eintauchtiefe und D der senkrechte Abstand zum Brett, über den die Geschwindigkeit der Flüssigkeit auf Null abgesunken ist.

¹⁹Der Begriff der endlichen Grenzschichtdicke wurde zuerst von **Prandtl** eingeführt.

²⁰Diese Konstellation ist natürlich äquivalent zum Einbringen eines fixierten Brettes in eine Strömung konstanter Geschwindigkeit.

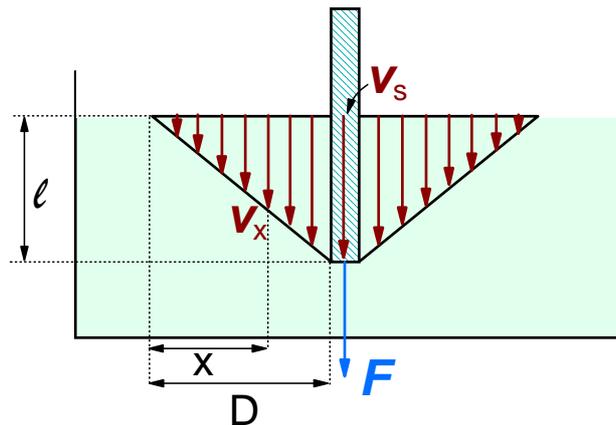


Abbildung 3.40: Zur Strömung realer Flüssigkeiten. Der eingetauchte Körper bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit gegen die Flüssigkeit oder umgekehrt.

Andererseits wird die Flüssigkeit durch das Eintauchen des Brettes in Bewegung gesetzt, wofür die *Beschleunigungsarbeit*

$$W_B = 2 \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV \quad (3.5.42)$$

aufgewendet werden muß. Mit $v/v_s = x/D$ und $dV = A dx$ ergibt sich

$$W_B = 2 \int_0^D \frac{1}{2} \rho \frac{v_s^2}{D^2} A x^2 dx \quad (3.5.43)$$

bzw.

$$W_B = \frac{1}{3} \rho v_s^2 A D \quad (3.5.44)$$

Für die Grenzfälle $D \rightarrow 0$ und $D \rightarrow \infty$ ergeben sich Probleme, da entweder W_η oder W_B unendlich wird. Da die an einen Körper (in unserem Fall das Brett) angrenzende Flüssigkeitsschicht immer am Körper haftet, ist die Strömungsgeschwindigkeit dieser Schicht immer gleich der Sinkgeschwindigkeit v_s des Brettes. In zunehmender Entfernung vom Körper sinkt v mehr oder weniger schnell auf Null ab. Wichtig ist, daß auch bei sehr kleinem η in einer an den Körper angrenzenden Schicht der Gradient dv/dx groß ist, und zwar umso größer je kleiner η ist. Die Tangentialspannung $\sigma_t = \eta dv/dx$ wird daher nicht klein und es muß in dieser Grenzschicht die Reibung immer berücksichtigt werden, egal wie klein η ist. Das heißt, der Fall $D = 0$ kann physikalisch nicht auftreten. Für den anderen Grenzfall $D \rightarrow \infty$ verschwindet die Reibungsarbeit, da benachbarte Flüssigkeitsschichten quasi keinen Geschwindigkeitsunterschied mehr aufweisen, die Beschleunigungsarbeit würde aber unendlich groß. Für eine vorwiegend durch die Reibung kontrollierte Strömung ist dies aber ebenfalls unphysikalisch, d.h. dieser Grenzfall kann ebenfalls nicht auftreten. Da in die Beschleunigung der Flüssigkeit quasi nicht mehr Energie hineinsteckt werden kann, als durch die Reibungskräfte auf die einzelnen Flüssigkeitsschichten übertragen werden kann, muß

$$W_B \lesssim W_\eta \quad (3.5.45)$$

gelten und es stellt sich immer eine endliche Grenzschichtdicke D ein. Aus Gl.(3.5.45) folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \rho v_s^2 AD &\lesssim 2A\eta \frac{v_s}{D} l \\ \text{oder} \quad \frac{\rho v_s}{\eta} \frac{D^2}{l} &\lesssim 6 . \end{aligned} \quad (3.5.46)$$

Durch Erweiterung mit l und Vernachlässigung des Faktors 6 ergibt sich eine Verknüpfung von Konstanten, die für alle Strömungsvorgänge größenordnungsmäßig erfüllt sein muß:

$$\begin{aligned} \frac{\rho v_s l}{\eta} \left(\frac{D}{l} \right)^2 &\lesssim 1 \\ \text{oder} \quad D &\lesssim \sqrt{\frac{\eta l}{\rho v_s}} . \end{aligned} \quad (3.5.47)$$

Hierbei ist die $(D/l)^2$ eine dimensionslose Größe mit rein geometrischer Bedeutung und die Größe

$$Re = \frac{\rho v_s l}{\eta} \quad (3.5.48)$$

ist die **Reynolds-Zahl**.²¹ Die **Reynolds-Zahl** ist ebenfalls dimensionslos und verbindet die Eigenschaften, die die Flüssigkeit (ρ , η), die Strömung (v_s) und den eingetauchten Körper (l) beschreiben.

Die Bedingung (3.5.47) gestattet nun eine Klassifikation verschiedener Strömungsformen. Die einzelnen Strömungsformen lassen sich nach der Größe der **Reynolds-Zahl** klassifizieren:

1. $Re \ll 1 \Rightarrow D/l \gg 1$:

Die Grenzschichtdicke ist groß gegenüber der Linearausdehnung des eingetauchten Körpers. Dadurch herrscht ein geringes Geschwindigkeitsgefälle in der Grenzschicht. Dies ist der Grenzfall der laminaren Strömung, den wir oben bereits diskutiert haben. Es wurde dabei vorausgesetzt, daß die Reibungskräfte die Trägheitskräfte überwiegen sollen. Man nun kann zeigen, daß der Quotient aus Reibungskräften und Trägheitskräften proportional zu $1/Re$ ist. Eine kleine **Reynolds-Zahl** bedeutet also, daß die Reibungskräfte dominieren.

2. $Re \sim 1 \Rightarrow D/l \sim 1$:

Die **Reynolds-Zahl** und damit D/l sind in der Größenordnung von eins. Das heißt, man erhält Grenzschichtdicken in der Größenordnung der Linearausdehnung des eingetauchten Körpers.

3. $Re \gg 1 \Rightarrow D/l \ll 1$:

Das Geschwindigkeitsgefälle wird sehr groß. Ab einer kritischen **Reynolds-Zahl** $Re_{\text{krit}} \approx 1200$ kommt es zur Entstehung von Wirbeln und damit zu einer turbulenten Strömung.

²¹ Osborne Reynolds: 1842 - 1912.

4. $Re \rightarrow \infty \Rightarrow D/l \rightarrow 0$:

Die Grenzschicht wird verschwindend klein. Der Bereich mit innerer Reibung wird also extrem dünn und es gelten die Strömungsgesetze einer idealen Flüssigkeit. Die reibungslose Hydrodynamik ist also durch $\eta = 0$ oder $Re = \infty$ charakterisiert.

Es ist wichtig darauf hinzuweisen, daß man gleiche Strömungsarten für gleiche **Reynolds**-Zahlen bekommt. Diese Tatsache ist als *hydrodynamisches Ähnlichkeitsgesetz* bekannt. Man kann also eine Änderung von η durch eine entsprechende Veränderung von ρ , r und v_s kompensieren und behält damit die Strömungsform bei. In der Strömungstechnik ist hierbei insbesondere die Möglichkeit wichtig, Versuche mit kleinen Modellkörpern zu machen, um daraus Rückschlüsse auf große Körper zu gewinnen (z.B. Flugzeuge, Autos, etc.). Verkleinert man r , so muß bei gleichem ρ und η (z.B. Luft) nur die Strömungsgeschwindigkeit entsprechend heraufgesetzt werden.

Es soll nun weiter diskutiert werden, wie es für den Fall $Re \gg 1$ zur Wirbelbildung kommt. Dazu betrachten wir die Umströmung eines kugelförmigen Körpers. Weit vor und hinter dem Körper ist die Strömungsgeschwindigkeit und deshalb nach **Bernoulli** der statische Druck etwa gleich. Seitlich der Kugel sind Strömungsgeschwindigkeit und Staudruck größer, was zu einer Erniedrigung des statischen Drucks führt. Ein Flüssigkeitsteilchen wird deshalb erst vor dem Körper im Druckgefälle beschleunigt und erreicht an der Äquatorlinie der Kugel seine maximale Geschwindigkeit. Hinter der Äquatorlinie kann es aufgrund seiner erhöhten kinetischen Energie wieder gegen das Druckgefälle anlaufen und verliert infolgedessen wieder an Geschwindigkeit, bis es (bei fehlender Reibung) weit hinter dem Körper die gleiche Geschwindigkeit besitzt wie davor. Ist aber Reibung zu überwinden, wird Geschwindigkeit eingebüßt und die verbleibende Geschwindigkeit reicht dann unter Umständen nach dem Körper nicht mehr aus, um das Druckgefälle zu überwinden. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Reibungsarbeit größer ist als die vor dem Körper vorhandene kinetische Energie. Es kommt dann zu einer Umkehr des Flüssigkeitsteilchen, d.h. das Flüssigkeitsteilchen strömt in den Bereich niedrigeren Drucks zurück. Dadurch wird eine Drehung eingeleitet und es bildet sich hinter der Kugel ein Wirbelpaar (siehe Abb. 3.41) mit entgegengesetztem Drehsinn. Die an den Wirbeln vorbeiströmende Flüssigkeit nimmt abwechselnd einen dieser Wirbel mit. Nach der Ablösung bilden sich neue Wirbel und es entsteht eine *Wirbelstraße* hinter der Kugel.

In der Wirbelstraße steckt eine höhere Energie als in der laminaren Strömung. Dies läßt sich durch folgendes Experiment demonstrieren: Man bringt in das Trommelfell einer großen Pauke ein kreisrundes Loch ein. Vor diese Öffnung wird in mehreren Metern Entfernung eine brennende Kerze aufgestellt. Schlägt man mit dem Filzhammer gegen die Rückwand der Pauke, so wird die Kerze durch die aus der Öffnung in der Vorderwand austretenden Wirbel gelöscht. Mit Hilfe von Rauch und einer Lampe lassen sich die Wirbel sichtbar machen.

Der Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung hat ferner eine große Auswirkung auf den Strömungswiderstand eines Körpers. Gleitet eine Flüssigkeit laminar um einen Körper, so ist nach dem **Hagen-Poiseuilleschen** oder **Stokes**schen Gesetz die Reibungskraft proportional zur Strömungsgeschwindigkeit. In einer turbulenten Strömung ist die Diskussion schwieriger. Qualitativ kann man sagen, daß es zu einer asymmetrischen Druckverteilung vor und nach dem umströmten Körper und damit zu einem Druckwiderstand kommt. Ein Teil der vom Druckgefälle an der Vorderseite eines Körpers geleisteten Beschleunigungsarbeit geht aufgrund von Reibungseffekten bzw. Wirbelbildung verloren. Es gilt dann nicht mehr die aus der Energieerhaltung abgeleitete **Bernoullische** Gleichung, d.h. die Summe aus statischem Druck und Staudruck ist nicht mehr konstant, da die Geschwindigkeitsverteilung vor und nach dem Körper nicht mehr symmetrisch ist. Mit der resultierenden Druckdifferenz kann man eine Druckkraft $F_D = \Delta p A$ definieren. Die Druckdifferenz Δp zwischen Vorder- und Rückseite des Körpers hängt stark von der Form des Körpers ab und wird üblicherweise als $\Delta p = c_w \frac{1}{2} \rho v^2$ ausgedrückt, d.h. als Anteil c_w des Staudrucks. Man erhält damit

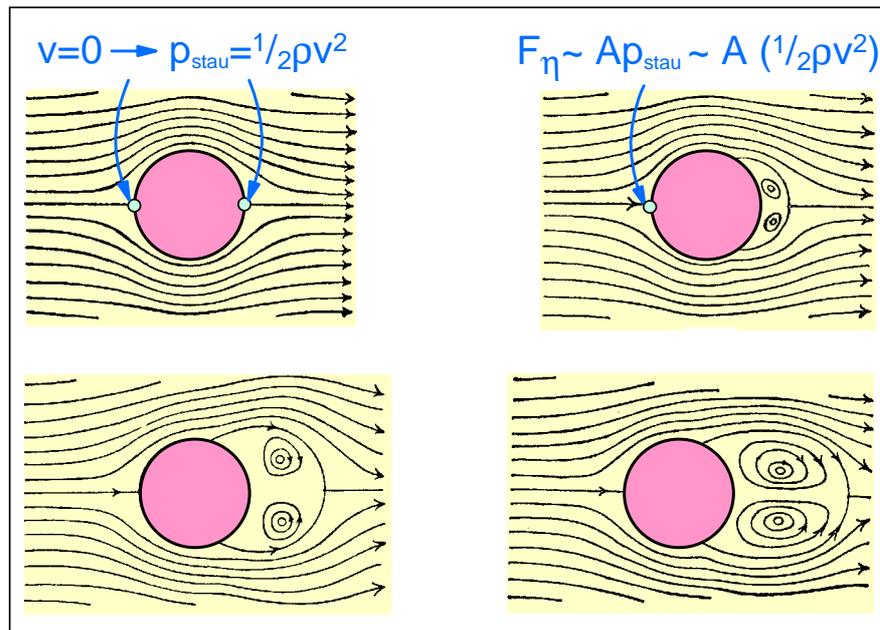


Abbildung 3.41: Zur allmählichen Ausbildung und Ablösung eines Wirbelpaares hinter einem Zylinder.

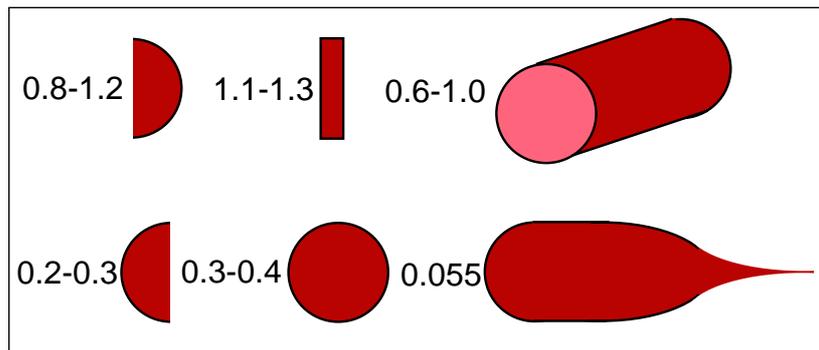


Abbildung 3.42: Widerstandsbeiwert (c_w -Wert) einiger Körperformen: Halbkugel, Platte, Zylinder, Halbkugel (180° gedreht), Kugel, Stromlinienkörper).

$$F_D = \frac{1}{2} c_w A \rho v^2 . \quad (3.5.49)$$

Wichtig ist hierbei, daß der Strömungswiderstand bei einer turbulenten Strömung proportional zum Geschwindigkeitsquadrat und nicht wie bei der laminaren Strömung proportional zu v ist. Die Konstante c_w ist der von der Körperform abhängige *Widerstandsbeiwert*, A die Querschnittsfläche senkrecht zur Strömung und ρ die Flüssigkeitsdichte. Da nicht vor sondern hinter dem Körper Wirbel entstehen, muß zu ihrer Vermeidung, und damit zur Herabsetzung des Strömungswiderstands, die Körperform auf der Rückseite optimiert werden. Die Auswirkungen der Körperform lassen sich im Windkanal zeigen.

In Abb. 3.42 sind die c_w -Werte für einige Körperformen gezeigt. Man sieht z.B., daß eine konvexe und konkave Fläche einen um den Faktor 4 unterschiedlichen Druckwiderstand besitzen. Diese Tatsache wird bei der Konstruktion eines Windmessers, des sogenannten *Anemometers* benutzt. Bei diesem ist ein mit vier Halbkugelschalen versehenes Kreuz um die vertikale Achse drehbar angebracht. Im Windstrom

dreht sich das Kreuz so, daß sich die Kugelschalen mit ihrer konvexen Seite voran bewegen. Die Drehung erfolgt umso schneller, je schneller die Windgeschwindigkeit ist.

