

Kapitel 4

Schwingungen und Wellen

In den vorangegangenen Kapiteln wurde die Mechanik der Massenpunkte sowie des starren und deformierbaren Körpers diskutiert. Ein wesentlicher Aspekt war dabei die Reaktion dieser Systeme auf äußere Kräfte, die bei einem System von Massenpunkten oder einem starren Körper zu einer Beschleunigung, bei einem deformierbaren Körper zusätzlich zu einer Verformung des Körpers führen. Wir haben bereits gesehen, daß die Wirkung von Kräften zu sich periodisch wiederholenden Vorgängen führen kann. Solche Vorgänge bezeichnen wir als Schwingungsvorgänge. Breitet sich ein Schwingungsvorgang räumlich aus, so sprechen wir von Wellen. Obwohl wir uns hier auf Schwingungen und Wellen in mechanischen Systemen beschränken wollen, spielen Schwingungen und Wellen in verschiedenen Bereichen der Physik eine wichtige Rolle.

Betrachten wir zum Beispiel ein System, das sich im statischen Gleichgewicht befindet, so wissen wir, daß die potentielle Energie des Systems in diesem Zustand minimal ist. Lassen wir nun eine äußere Kraft auf das System wirken, so lenken wir das System aus seinem Gleichgewichtszustand aus, die potentielle Energie wird dabei durch die von der äußeren Kraft geleistete Arbeit erhöht. Schalten wir nun die äußere Kraft wieder ab, so wird das System wieder in seine ursprüngliche Ruhelage zurückgetrieben. Bei konservativen Kräften konnten wir dabei die rücktreibende Kraft als Gradienten der potentiellen Energie ausdrücken. Das System wird aufgrund der rücktreibenden Kraft zum Ausgangspunkt hin beschleunigt. Wenn es die Ausgangslage wieder erreicht, kann es dort aber nicht plötzlich anhalten. Durch seine Trägheit und damit seinen endlichen Impuls bewegt es sich weiter und schwingt wieder aus der Ruhelage heraus. Durch den Anstieg der potentiellen Energie wird es dabei wieder abgebremst bis es schließlich umkehrt und wieder zum Ausgangspunkt zurückschwingt. Wenn keine Reibung vorhanden ist, wiederholt sich dieser Vorgang periodisch ohne in seiner Amplitude abzuklingen. Solche sich periodisch wiederholende Bewegungen bezeichnen wir als Schwingungsvorgänge. Wir bekommen Schwingungsvorgänge z.B. also immer dann, wenn wir ein System durch Wirkung einer äußeren Kraft aus seiner Ruhelage auslenken und dann in die Ruhelage zurückschwingen lassen. Dies haben wir bereits beim Masse-Feder-Pendel (Abschnitt 1.6.2), beim mathematischen (Abschnitt 1.6.3) und beim physikalischen Pendel (Abschnitt 2.3.5), oder bei Drehschwingungen (Abschnitt 2.3.5) kennengelernt. Wir werden auch sehen, daß man eine gleichförmige Kreisbewegung als Überlagerung von aufeinander senkrecht stehenden Schwingungen verstehen kann.

Während Schwingungen die periodische Bewegung eines Systems um eine ortsfeste Ruhelage beschreiben, betrachtet man bei Wellen die räumliche Ausbreitung eines Schwingungszustandes. Dies geschieht zum Beispiel dadurch, daß man mehrere schwingungsfähige Systeme miteinander koppelt, so daß der Schwingungszustand eines Systems auf die benachbarten Systeme übertragen werden kann. Dadurch erhält man eine räumliche Ausbreitung des Schwingungszustandes, man spricht dann von einer Welle.

4.1 Schwingungen

Die harmonische Schwingung

Wir haben bereits in Abschnitt 1.6.2 das Masse-Feder-Pendel, in Abschnitt 1.6.3 das mathematische und in Abschnitt 2.3.5 das physikalische Pendel kennengelernt. Wir haben dort gesehen, daß (beim mathematischen und physikalischen Pendel nur für kleine Auslenkungen) die rücktreibende Kraft F linear zur Auslenkung x war, d.h. $F \propto -x$. Solche Kräfte haben wir als *harmonische Kräfte* bezeichnet. Die resultierende Schwingungsform war die harmonische Schwingung, die bereits eingehend in den oben angegebenen Abschnitten diskutiert wurde und hier nur kurz wiederholt wird.

Der harmonischen Schwingung lag die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (4.1.1)$$

zugrunde. Hierbei ist k die Proportionalitätskonstante zwischen Rückstellkraft und Auslenkung, $F = -kx$. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad , \quad (4.1.2)$$

wobei A die Amplitude, φ_0 die Phasenschiebung und

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \quad (4.1.3)$$

die Kreisfrequenz der Schwingung ist. ν ist die Schwingungsfrequenz, also die Zahl der pro Sekunde ausgeführten Schwingungen und

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad . \quad (4.1.4)$$

die Schwingungsdauer.

4.1.1 Lineare Systeme

Die Differentialgleichung (4.1.1) der harmonischen Schwingung ist eine lineare Differentialgleichung. Die in dieser Gleichung enthaltenen Operationen an der Variablen x besitzen die interessante Eigenschaft, daß bei Substitution von $(x + y)$ für x die gleiche Summe von Operationen für x und für y erhalten wird. Benutzt man für die Operationen auf x die Abkürzung $\mathcal{L}(x)$ so erhält man¹

$$\mathcal{L}(x + y) = \frac{d^2(x + y)}{dt^2} + \frac{k}{m}(x + y) = \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m}x + \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = \mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(y) \quad . \quad (4.1.5)$$

Dies folgt aus der Tatsache, daß $a(x + y) = ax + ay$ und $d(x + y)/dt = dx/dt + dy/dt$ usw.. Weiterhin gilt

¹Wir benutzen für \mathcal{L} einen anderen Schrifttyp, um daran zu erinnern, daß es keine gewöhnliche Funktion ist. Die verwendete Schreibweise wird mitunter Operatorschreibweise genannt.

$$\mathcal{L}(ax) = \frac{d^2(ax)}{dt^2} + \frac{k}{m}(ax) = a \frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{k}{m}x = a \mathcal{L}(x) \quad . \quad (4.1.6)$$

In komplizierteren Systemen können in der Differentialgleichung mehr Ableitungen und mehr Glieder in \mathcal{L} existieren (z.B. durch Reibungskräfte oder periodische äußere Kräfte). Es stellt sich dann die Frage, ob die Gleichungen (4.1.5) und (4.1.6) nach wie vor gültig bleiben. Wenn sie es bleiben, sprechen wir von einem *linearen Problem*. Da die Differentialgleichung des Masse-Feder-Pendels die Gleichungen (4.1.5) und (4.1.6) erfüllt, stellt das Masse-Feder-Pendel ein lineares System dar.

Lineare Systeme sind in der Physik sehr wichtig, da viele Grundgesetze der Physik linear sind.² Aus diesem Grund ist es sinnvoll, sich einige grundlegende Eigenschaften linearer Systeme zu betrachten. Wir werden also im folgenden einige Eigenschaften von schwingungsfähigen Systemen diskutieren, die genau deshalb existieren, weil diese Systeme linear sind.

Wir erweitern zunächst die Differentialgleichung (4.1.1) des harmonischen Oszillators, indem wir eine Reibungskraft $F_\eta = -m\eta v = -m\eta dx/dt$ und eine zeitlich variierende antreibende Kraft $F(t)$ zulassen wollen. Man erhält dann die allgemeinere Differentialgleichung für eine gedämpfte getriebene Schwingung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = F(t) \quad . \quad (4.1.7)$$

In der oben eingeführten Operatorschreibweise lautet diese Gleichung $\mathcal{L}(x) = F(t)$. Man kann leicht zeigen, daß Gl.(4.1.7) die Bedingungen für ein lineares System erfüllt.

Wir betrachten jetzt zuerst die freie Schwingung ohne Erregerkraft ($F = 0$), d.h.

$$\mathcal{L}(x) = 0 \quad . \quad (4.1.8)$$

Angenommen, wir haben, wie auch immer, für die Gleichung $\mathcal{L}(x) = 0$ eine Lösung x_1 gefunden. Das heißt, wir haben ein x_1 , für das $\mathcal{L}(x_1) = 0$ gilt. Wir können dann sofort sagen, daß ax_1 ebenfalls eine Lösung ist. Der Beweis folgt sofort aus Gl.(4.1.6): $\mathcal{L}(ax_1) = a\mathcal{L}(x_1) = a \cdot 0 = 0$.

Als nächstes nehmen wir an, daß wir, wie auch immer, nicht nur eine Lösung x_1 sondern auch eine weitere Lösung x_2 gefunden haben, d.h. es gilt $\mathcal{L}(x_1) = 0$ und $\mathcal{L}(x_2) = 0$. Wir können dann wiederum sofort sagen, daß jede beliebige Linearkombination $x = ax_1 + bx_2$ dieser beiden Lösungen ebenfalls eine Lösung darstellt. Der Beweis folgt wiederum aus den Gln.(4.1.5) und (4.1.6): $\mathcal{L}(ax_1 + bx_2) = \mathcal{L}(ax_1) + \mathcal{L}(bx_2) = a\mathcal{L}(x_1) + b\mathcal{L}(x_2) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$. Wenn wir also eine Anzahl von Lösungen für ein System gefunden haben, so können wir diese mit konstanten Faktoren multiplizieren und addieren.

Es stellt sich die Frage, wieviel unabhängige Lösungen es für ein schwingungsfähiges System gibt. Unabhängig soll dabei bedeuten, daß eine Lösung nicht als Linearkombination anderer Lösungen dargestellt werden kann. Ohne dies im einzelnen zu diskutieren, halten wir hier fest, daß die Zahl der unabhängigen Lösungen von der *Zahl der Freiheitsgrade* abhängt. Angenommen, ein System besitzt zwei Freiheitsgrade. Hat man für dieses System zwei unabhängige Lösungen gefunden, so hat man für dieses System auch die allgemeinste Lösung.

Wir betrachten als nächstes den Fall, daß das System durch eine äußere Kraft $F(t)$ getrieben wird, d.h. es gilt

²Die **Maxwellschen** Gleichungen für die Gesetze der Elektrizität sind lineare Differentialgleichungen; die wichtigen Gesetze der Quantenmechanik erweisen sich, soweit wir dies heute wissen, als lineare Gleichungen.

$$\mathcal{L}(x) = F(t) \quad . \quad (4.1.9)$$

Wir nehmen wiederum an, daß wir für diese Gleichung eine spezielle Lösung x_j gefunden haben, d.h. für x_j gilt $\mathcal{L}(x_j) = F(t)$. Dann können wir sofort sagen, daß auch $(x_j + x_1)$ eine Lösung ist, wobei x_1 eine Lösung der freien Schwingungsgleichung (4.1.8) ist. Der Beweis folgt aus Gl.(4.1.5): $\mathcal{L}(x_j + x_1) = \mathcal{L}(x_j) + \mathcal{L}(x_1) = F(t) + 0 = F(t)$. Wir können also zur “erzwungenen” Lösung (mit äußerer Kraft) immer eine “freie” Lösung (ohne äußere Kraft) addieren und haben immer noch eine Lösung.

4.1.2 Überlagerung und Zerlegung von Schwingungen

Wir kommen nun zu einer weiteren interessanten Eigenschaft linearer Systeme. Angenommen, wir kennen die Lösung x_a der Differentialgleichung (4.1.7) für eine anregende Kraft $F_a(t)$. Nehmen wir nun an, daß am gleichen System die Kraft $F_b(t)$ angreift und wir ebenfalls für diese Kraft die Lösung x_b kennen. Es stellt sich nun die Frage, was passiert, wenn gleichzeitig beide Kräfte F_a und F_b wirken. Für ein lineares System können wir sofort sagen, daß die Lösung für diesen Fall durch die Summe der beiden Lösungen x_a und x_b gegeben ist. Durch Anwendung von (4.1.5) ergibt sich nämlich

$$\mathcal{L}(x_a + x_b) = \mathcal{L}(x_a) + \mathcal{L}(x_b) = F_a(t) + F_b(t) \quad . \quad (4.1.10)$$

Dies ist ein Beispiel des sogenannten *Superpositionsprinzips* für lineare Systeme. Es bedeutet folgendes: Wenn wir eine komplizierte Kraft haben, die auf bequeme Weise in einfache Teilkraften zerlegt werden kann (und zwar einfach in dem Sinn, daß wir für diese Kräfte die Lösung der Differentialgleichung kennen), so kennen wir die Lösung für die gesamte Kraft, weil wir die Lösungen für die Teilkraften nur addieren müssen, genauso wie die gesamte Kraft aus den Einzelkräften zusammengesetzt ist (siehe Abb. 4.1).

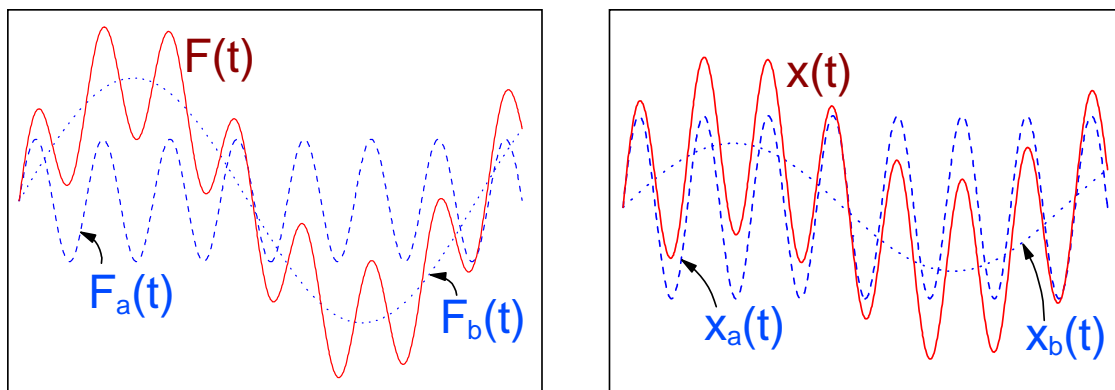


Abbildung 4.1: Beispiel für das Superpositionsprinzip für lineare Systeme.

Diese Eigenschaft linearer Systeme kann man zum Beispiel benutzen, wenn eine periodische, aber nicht harmonische Erregerkraft (z.B. sägezahn- oder rechteckförmig) vorliegt. Man kann diese Kraft dann in eine Reihe von harmonischen Kräften zerlegen:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(n \omega t) \quad . \quad (4.1.11)$$

Diese Zerlegung wird *Fourierzerlegung* genannt.³ Wie von **Fourier** gezeigt wurde, kann diese Reihenentwicklung stets und in eindeutiger Weise gemacht werden. Hierbei ist n eine ganze Zahl und a_n die Amplitude der Kraftkomponente mit der Frequenz $n\omega$. Neben der ‘‘Grundfrequenz’’ ω treten in der **Fourier**-Entwicklung im allgemeinen alle ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz, die sogenannten harmonischen Oberschwingungen auf. Sind die Lösungen x_n für die harmonischen Kraftkomponenten bekannt, so ergibt sich die Lösung für die Gesamtkraft als Überlagerung der Lösungen x_n :

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) \quad . \quad (4.1.12)$$

Man sieht daraus andererseits, daß man einen komplizierten periodischen Schwingungsvorgang immer in eine Reihe von harmonischen Schwingungen verschiedener Frequenz zerlegen kann:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) \quad . \quad (4.1.13)$$

Diesen Vorgang nennt man *Fourieranalyse* einer Schwingung. Im folgenden sollen nun einige Beispiele für die Überlagerung und Zerlegung von Schwingungen vorgestellt werden.

Überlagerung zweier aufeinander senkrecht stehender harmonischer Schwingungen

Wir betrachten das in Abb. 4.2a gezeigte schwingungsfähige System. Für die Schwingung in x - und y -Richtung erhalten wir jeweils die bekannte Lösung für ein Masse-Feder-Pendel

$$x(t) = x_0 \sin(\omega_x t + \varphi_{x0}) \quad (4.1.14)$$

$$y(t) = y_0 \sin(\omega_y t + \varphi_{y0}) \quad . \quad (4.1.15)$$

Hierbei ist $\omega_x = \sqrt{k_x/m}$ und $\omega_y = \sqrt{k_y/m}$. Diese beiden Lösungen stellen unabhängige Lösungen des Systems dar. Die allgemeinen Lösungen für eine beliebige Schwingung sind durch Linearkombinationen $ax(t) + by(t)$ gegeben.

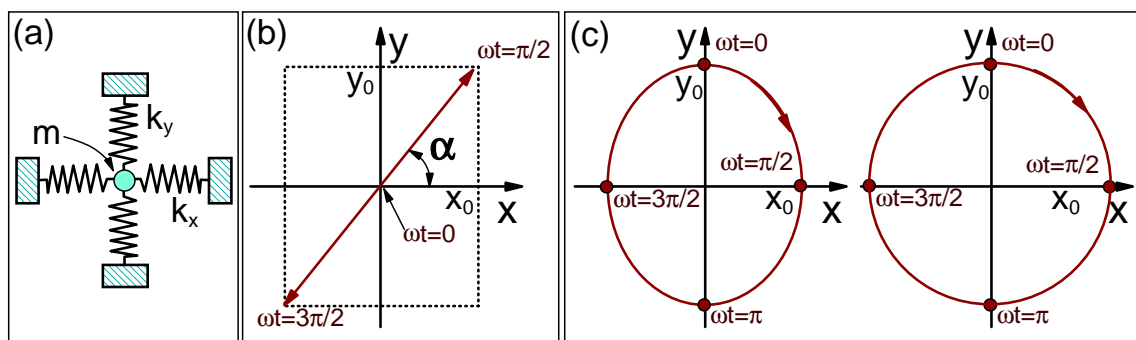


Abbildung 4.2: (a) Masse-Feder-Pendel als Modell für ein zweidimensionales Schwingungssystem. (b) Lineare Schwingung. (c) Elliptische und zirkulare Schwingung.

Wir diskutieren folgende Fälle:

³Für eine periodische Dreieckskurve der Amplitude b ergibt sich z.B. $F(t) = \frac{8b}{\pi^2} (\sin \omega t + \frac{1}{3^2} \sin 3\omega t + \frac{1}{5^2} \sin 5\omega t + \dots)$.

1. $\omega_x = \omega_y = \omega$:

Das Ergebnis hängt von dem Unterschied $\varphi = \varphi_{x0} - \varphi_{y0}$ ab. Für $\varphi = 0$ erhält man

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t) \quad (4.1.16)$$

$$y(t) = y_0 \sin(\omega t) \quad (\varphi_{y0} - \varphi_{x0} = 0) \quad (4.1.17)$$

Das heißt, wir erhalten

$$\frac{x}{x_0} - \frac{y}{y_0} = 0$$

oder

$$y = \frac{y_0}{x_0} x \quad (4.1.18)$$

Es ergibt sich die in Abb. 4.2b gezeigte lineare Schwingung, wobei die Schwingungsrichtung durch das Verhältnis der Amplituden gegeben ist. Es gilt $\tan \alpha = y/x_0$. Eine lineare Schwingung ergibt sich auch für $\varphi = \pi$. Hier erhält man $y = -\frac{y_0}{x_0} x$.

Für $\varphi = \pi/2$ erhält man

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t) \quad (4.1.19)$$

$$y(t) = y_0 \sin(\omega t + \pi/2) = y_0 \cos(\omega t) \quad (\varphi_{y0} - \varphi_{x0} = \pi/2) \quad (4.1.20)$$

Es ergibt sich das in Abb. 4.2c gezeigte Bild einer Ellipse. Durch Quadrieren der obigen Gleichung folgt nämlich sofort:

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{y_0^2} = 1 \quad (4.1.21)$$

d.h. die Bestimmungsgleichung einer Ellipse. Für beliebige Phasendifferenzen ändert sich sowohl die Richtung der Ellipsenachsen als auch das Verhältnis von kleiner zu großer Hauptachse.

Für $\varphi = \pi/2$ und $x_0 = y_0$ ergibt sich ein Kreis und man spricht von einer zirkularen Schwingung (siehe Abb. 4.2c). Wir sehen also, daß die in Abschnitt 1.6.2 diskutierte gleichförmige Kreisbewegung als Überlagerung zweier aufeinander senkrecht stehender linearer Schwingungen betrachtet werden kann.

Wir können also zusammenfassend feststellen, daß die Überlagerung zweier senkrecht zueinander stehender Schwingungen gleicher Frequenz im allgemeinen eine elliptische Schwingung ergibt, die unter besonderen Umständen ($\varphi = 0$ oder π) in eine lineare Schwingung und ($\varphi = \pi/2$ oder $3\pi/2$, $x_0 = y_0$) in eine zirkulare Schwingung ausarten kann.

2. $\omega_x \neq \omega_y$:

Sind die Frequenzen verschieden, so hat die resultierende Schwingung eine komplizierte Form. Stehen die Frequenzen in einem rationalen Verhältnis, so entsteht ein "stehendes Bild" des Schwingungszustandes. Die resultierenden Figuren bezeichnet man als *Lissajous*-Figuren. Sie sind für ein rationales Verhältnis der Frequenzen in sich geschlossen (siehe Abb. 4.3).

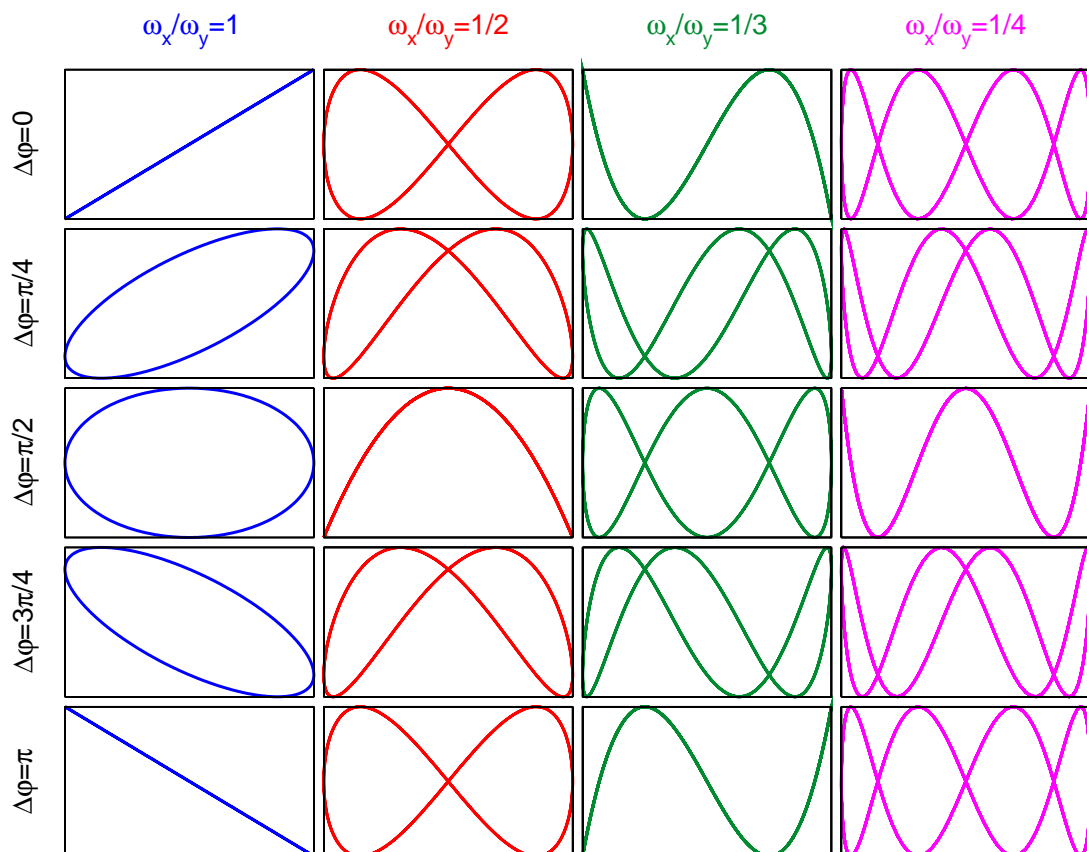


Abbildung 4.3: Lissajous-Figuren: In der linken vertikalen Spalte ist $\omega_x/\omega_y = 1$ in der zweiten $1/2$, in der dritten $1/3$ und in der vierten $1/4$. Die Phasendifferenz ist in der obersten horizontalen Reihe $\varphi = 0$, in der zweiten $\pi/4$, in der dritten $\pi/2$, in der vierten $3\pi/4$ und in der untersten Reihe π .

Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen gleicher Schwingungsrichtung und gleicher Frequenz

Die Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen gleicher Schwingungsrichtung und gleicher Frequenz ergibt wiederum eine harmonische Schwingung derselben Richtung und derselben Frequenz. Nimmt man noch eine gleiche Amplitude der Schwingungen an ($x_{01} = x_{02} = x_0$), so erhält man⁴

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi_1) + x_0 \sin(\omega t + \varphi_2) \\
 &= 2x_0 \sin\left(\frac{\omega t + \varphi_1 + \omega t + \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega t + \varphi_1 - \omega t - \varphi_2}{2}\right) \\
 &= 2x_0 \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}, \quad (4.1.22)
 \end{aligned}$$

Die resultierende Schwingung ist also wieder eine harmonische Schwingung, bei der die Amplitude $2x_0 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)/2$ von der Phasendifferenz $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ abhängt. Für $\varphi = 0$ oder $n 2\pi$, d.h. $\varphi_1 = \varphi_2 + n 2\pi$ (n ist hierbei eine ganze Zahl) erhält man $x(t) = 2x_0 \sin(\omega t + \varphi_2 + n\pi) \cos(n\pi)$. Für gerades n ist $\cos(n\pi) = 1$, für ungerades n ist $\cos(n\pi) = -1$. In letzterem Fall ist aber $\sin(\omega t + n\pi) = -\sin \omega t$. Es gilt also

⁴Hierbei benutzt man die Beziehung $\sin x + \sin y = 2 \sin(x + y)/2 \cos(x - y)/2$.

$$x(t) = 2x_0 \sin(\omega t + \varphi_2) \quad (\varphi = n 2\pi) \quad . \quad (4.1.23)$$

Die Einzelschwingungen addieren sich zur größtmöglichen Gesamtschwingung (siehe Abb. 4.4a), denn sie schwingen in Phase, d.h. sie gehen zur gleichen Zeit durch die Nulllage und erreichen auch gleichzeitig ihren Maximalausschlag.

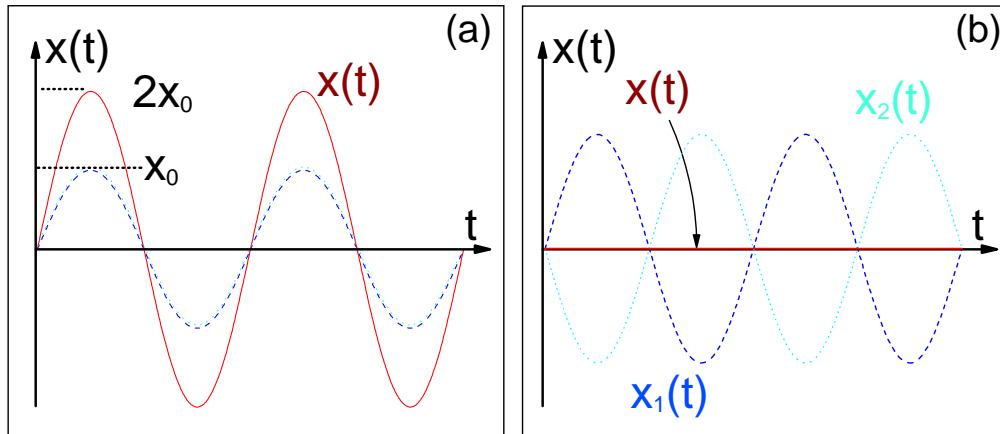


Abbildung 4.4: Zur Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen mit gleicher Schwingungsrichtung, gleicher Frequenz und gleicher Amplitude für $\varphi = n 2\pi$ (a) und $\varphi = (n + 1/2)2\pi$ (b).

Für $\varphi = (n + 1/2)2\pi$ folgt dagegen

$$\cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = \cos \left(\frac{2n + 1}{2} \pi \right) = 0 \quad . \quad (4.1.24)$$

Nulldurchgänge und Maximalausschläge stimmen zwar auch hier zeitlich überein. Die Schwingungen erfolgen aber gegenphasig und heben sich deshalb gegenseitig auf (siehe Abb. 4.4b).

Zwischen den beiden Grenzfällen $\varphi = n 2\pi$ und $\varphi = (n + 1/2) 2\pi$ erhält man je nach Phasenlage andere Überlagerungen mit Amplituden zwischen Null und $2x_0$.

Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen gleicher Schwingungsrichtung und unterschiedlicher Frequenz – Schwebung

Überlagert man zwei harmonische Wellen gleicher Schwingungsrichtung, deren Kreisfrequenzen sich nur wenig voneinander unterscheiden, entsteht eine sogenannte *Schwebung* (siehe Abb. 4.5). Aus Gründen der Einfachheit betrachten wir zwei Einzelschwingungen mit gleicher Amplitude, die keine Phasenverschiebung besitzen, d.h. $x_{01} = x_{02} = x_0$ und $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Man erhält dann

$$x(t) = x_0 \sin \omega_1 t + x_0 \sin \omega_2 t = 2x_0 \sin \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \quad . \quad (4.1.25)$$

Mit $(\omega_1 + \omega_2)/2 \simeq \omega$ und $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ erhält man

$$x(t) = 2x_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \sin\omega t \quad . \quad (4.1.26)$$

Hierbei ist $\Delta\omega$ laut Voraussetzung sehr klein. Damit ändert sich $\cos(\Delta\omega t/2)$ zeitlich nur langsam im Vergleich zu $\sin\omega t$. Die Lösung $x(t)$ läßt sich deshalb als eine Sinusschwingung mit der Frequenz ω auffassen, deren Amplitude $2x_0 \cos(\Delta\omega t/2)$ sich langsam mit der Kreisfrequenz $(\Delta\omega t/2)$ ändert. Mit anderen Worten, die Hauptschwingung der Frequenz ω wird von einer Hüllkurve eingeschlossen, die ihrerseits auch periodisch verläuft. Diese Schwankung der Periode wird als Schwebung bezeichnet.

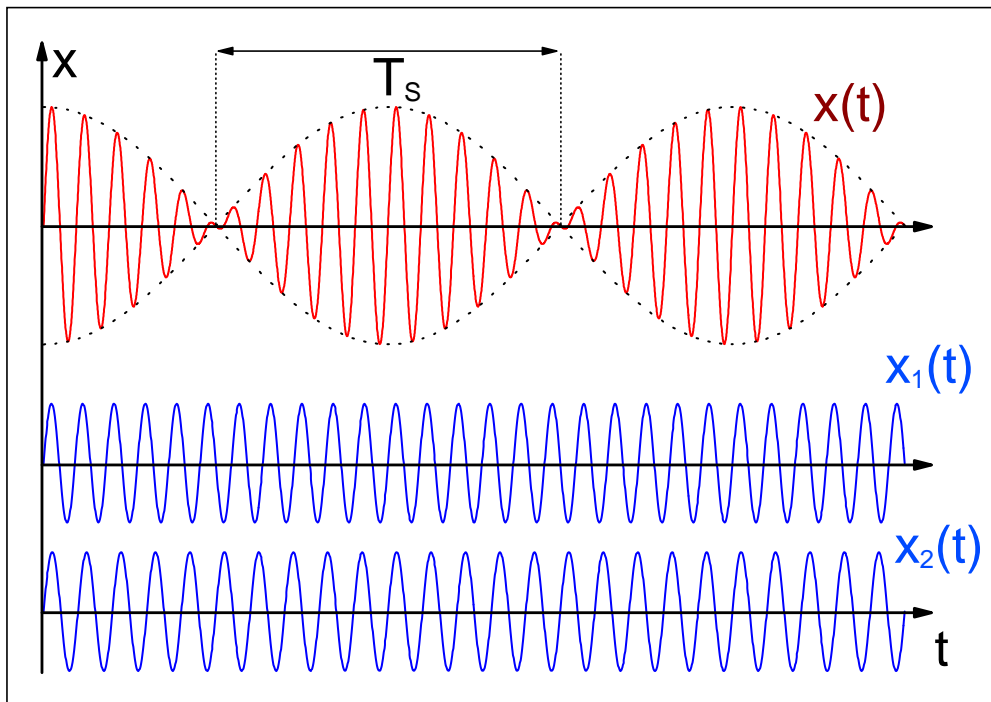


Abbildung 4.5: Zur Entstehung einer Schwebung durch Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen mit Frequenzen, die nur wenig voneinander abweichen.

Unter der Schwebungsdauer T_S versteht man das Zeitintervall zwischen zwei Schwebungsmaxima bzw. Schwebungsminima. Nach der Zeit T_S muß also $|\cos(\Delta\omega t/2)|$ wieder den Ausgangswert annehmen. Damit gilt:

$$\frac{\Delta\omega}{2}T_S = \pi \Rightarrow T_S = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta\nu} \quad . \quad (4.1.27)$$

4.1.3 Gedämpfte Schwingung

Der Idealfall einer harmonischen Schwingung, bei der keine Dämpfung auftritt, ist nur zu verwirklichen, wenn keine Reibungskräfte vorhanden sind, d.h. wenn der Term $\eta \frac{dx}{dt}$ in Gl.(4.1.7) verschwindet. Dies ist aber in den meisten realen Systemen nicht der Fall, da hier meistens aufgrund von Reibungseffekten eine Dämpfung auftritt. Es ist deshalb wichtig, auch den Fall der gedämpften Schwingung zu diskutieren.

Mit der Reibungskraft $F_\eta = -m\eta \frac{dx}{dt}$ ergibt sich für den Fall, daß keine äußere treibende Kraft einwirkt ($F(t) = 0$), folgende Differentialgleichung

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = 0 \quad . \quad (4.1.28)$$

Wir erwarten, daß die Schwingungsamplitude aufgrund der Dämpfung zeitlich abklingt. Es läßt sich zeigen, daß folgender Lösungsansatz die obige Differentialgleichung löst:

$$x(t) = x_0(t) \sin(\omega t + \varphi_0) = x_0 \exp(-\beta t) \sin(\omega t + \varphi_0) \quad . \quad (4.1.29)$$

Hierbei ist

$$\beta = \frac{\eta}{2} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad . \quad (4.1.30)$$

Der Beweis erfolgt durch Einsetzen des Lösungsansatzes in die Differentialgleichung. Die Amplitude $x_0(t)$ der Schwingung nimmt exponentiell ab. Das Quadrat der Kreisfrequenz ω^2 der gedämpften Schwingung ist gegenüber der Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung um $\beta^2 = (\eta/2)^2$ verschoben. Der Parameter β wird als Dämpfungskonstante, $1/\beta = \tau$ als Abklingzeit der gedämpften Schwingung bezeichnet.

Man kann folgende drei Fälle unterscheiden:

1. $\beta^2 < \omega_0^2 \Rightarrow \eta^2 < 4k/m$:

Die Kreisfrequenz ω ist reell, da das Argument der Wurzelfunktion größer Null ist. Es ergibt sich eine langsam abklingende Schwingung (siehe Abb. 4.6a).

Das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Schwingungsamplituden ergibt sich zu

$$\kappa = \frac{x_0 \exp(-\beta t)}{x_0 \exp(-\beta(t+T))} = \exp(-\beta T) \quad . \quad (4.1.31)$$

Man nennt κ das Dämpfungsverhältnis. Mit der Abklingzeit $\tau = 1/\beta$ erhält man

$$\Lambda = \ln \kappa = \beta T = T/\tau \quad . \quad (4.1.32)$$

Das Verhältnis Λ von Schwingungsperiode T und Abklingzeit τ wird als *logarithmisches Dekrement* bezeichnet.

2. $\beta^2 = \omega_0^2 \Rightarrow \omega = 0$ und $\eta^2 = 4k/m$:

Die Reibung ist so groß, daß das System keine Schwingung mehr ausführen kann. Es erfolgt lediglich eine Rückkehr in die Ruhelage und man erhält

$$x(t) = x_0 \exp(-\beta t) \quad , \quad (4.1.33)$$

mit $\varphi = \pi/2$ und $\sin(\omega t + \pi/2) = \cos \omega t \approx 1$.⁵ Dieser Fall wird *aperiodischer Grenzfall* genannt.

⁵Bei einer genaueren Betrachtung kann man den Kosinus für kleine Argumente entwickeln ($\cos x \simeq 1 + x$) und man erhält $x(t) = x_0 \exp(-\beta t)(1 + \beta t)$.

3. $\beta^2 > \omega_0^2 \Rightarrow \omega$ ist imaginär und $\eta^2 > 4k/m$:

Das Argument der Wurzel im Ausdruck für ω wird kleiner Null, wodurch ω imaginär wird. Das periodische Glied in der Lösung fällt dadurch weg. Man spricht hier vom *Kriechfall* (siehe Abb. 4.6b). Wir haben hier ebenfalls eine langsame Rückkehr in die Ruhelage:

$$x(t) = x_0 \exp(-\gamma t) \quad . \quad (4.1.34)$$

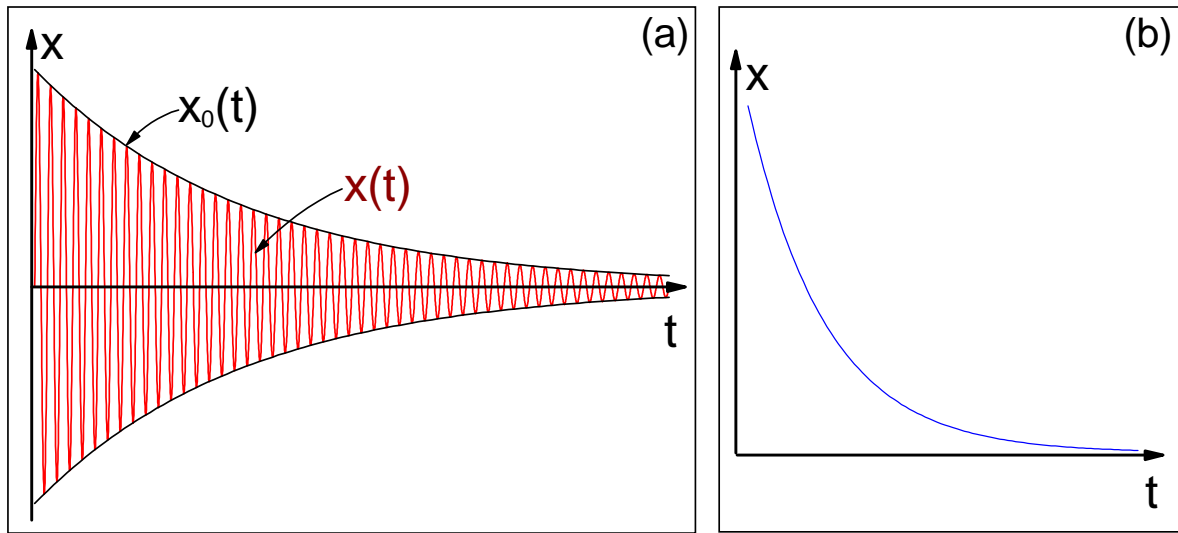


Abbildung 4.6: Gedämpfte Schwingung für $\beta^2 < \omega_0^2$ (a) und $\beta^2 > \omega_0^2$ (b).

Um in der Realität ungedämpfte Schwingungen zu erhalten, muß man dem schwingenden System – wie es etwa bei der Pendeluhr oder bei einer einfachen Kinderschaukel realisiert wird – periodisch Energie zuführen, um den Energieverlust durch die Reibung und damit die Dämpfung zu kompensieren. Durch die Reibung wird ständig Schwingungsenergie in Wärme umgewandelt. Die Schwingungsenergie nimmt dadurch ohne Energiezufuhr von außen exponentiell ab. Man erhält

$$E_{\text{ges}}(t) = E_{\text{pot,max}}(t) = \frac{1}{2} k x_{\text{max}}^2(t) = \frac{1}{2} k x_0^2 \exp(-2\beta t) \quad (\beta \ll \omega_0) \quad . \quad (4.1.35)$$

Die zeitliche Änderung der Gesamtenergie ist damit proportional zu E_{ges} :

$$\frac{dE_{\text{ges}}(t)}{dt} = -E_{\text{ges}}(t) \quad . \quad (4.1.36)$$

4.1.4 Erzwungene Schwingung

Wir betrachten nun einen Schwingungsvorgang, der durch eine äußere Kraft $F(t)$ getrieben wird. Der Schwingungsvorgang wird durch die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = F(t) \quad (4.1.37)$$

beschrieben.

Wir nehmen eine periodische Kraft $F(t) = F_a \sin \omega t$ an, deren Frequenz ω im allgemeinen nicht mit der Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ des Systems bei verschwindender Reibung übereinstimmt. Wir unterscheiden ferner die Fälle mit und ohne Reibung:

1. Ohne Dämpfung:

Man erhält in diesem Fall die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + m\omega_0^2 x = F_a \sin \omega t \quad . \quad (4.1.38)$$

Der Lösungsansatz lautet

$$x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + A \sin \omega t \quad . \quad (4.1.39)$$

Die Anfangsamplitude x_0 und die Phase φ_0 werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt. Man bezeichnet $x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ den Anteil der freien Schwingung und $A \sin \omega t$ den Anteil der erzwungenen Schwingung.

Wir betrachten zunächst den erzwungenen Anteil, d.h. wir setzen $x_0 = 0$. Man erhält dann

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) \quad . \quad (4.1.40)$$

Nach Einsetzen in die Differentialgleichung erhält man

$$-mA\omega^2 + m\omega_0^2 A = F_a \quad . \quad (4.1.41)$$

Hieraus ergibt sich

$$A = \frac{F_a}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad . \quad (4.1.42)$$

Man erkennt, daß bei $\omega = \omega_0$ die Amplitude unendlich groß wird (siehe Abb. 4.7). Es liegt *Amplitudenresonanz* vor.

Für $x_0 \neq 0$ kommt es zur Überlagerung der ungedämpften freien Schwingung mit Frequenz ω_0 mit der erzwungenen Schwingung mit Frequenz ω . Die resultierende Schwingung hat Schwebungscharakter.

2. Mit Dämpfung:

Außer der periodischen Kraft $F(t) = F_a \sin \omega t$ und der elastischen Rückstellkraft der Feder $F_K = -kx$ muß jetzt noch die Reibungskraft $F_\eta = -\eta dx/dt$ berücksichtigt werden. Man erhält also die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + m\omega_0^2 x + \eta \frac{dx}{dt} = F_a \sin \omega t \quad . \quad (4.1.43)$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung wird eine Überlagerung einer gedämpften freien und einer erzwungenen Schwingung sein. Aufgrund der Dämpfung klingt die freie Schwingung ab. Nach Abschluß eines Einschwingvorganges ist nur noch der erzwungene Anteil vorhanden. Das System hat dann seinen stationären Zustand erreicht. Der Lösungsansatz für diesen stationären Zustand lautet

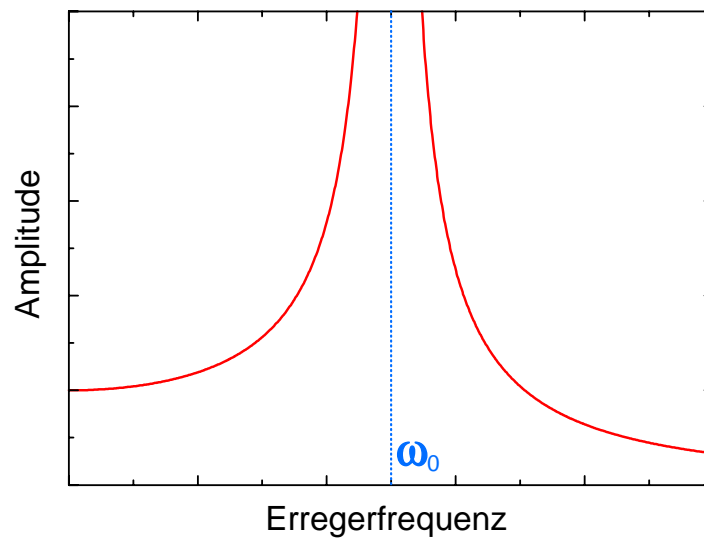


Abbildung 4.7: Resonanzkurve einer ungedämpften erzwungenen Schwingung.

$$\begin{aligned}
 x(t) &= A \sin(\omega t + \varphi_0) \\
 \frac{dx}{dt} &= \omega A \cos(\omega t + \varphi_0) \\
 \frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad .
 \end{aligned}
 \tag{4.1.44}$$

Einsetzen in die obige Differentialgleichung ergibt

$$\begin{aligned}
 -m\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) + m\omega_0^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) + \\
 \eta\omega A \cos(\omega t + \varphi_0) = F_a \sin \omega t \quad .
 \end{aligned}
 \tag{4.1.45}$$

Die Winkelfunktionen lassen sich mit Hilfe folgender Beziehungen umwandeln:

$$\begin{aligned}
 \cos(\omega t + \varphi_0) &= \cos \omega t \cos \varphi_0 - \sin \omega t \sin \varphi_0 \\
 \sin(\omega t + \varphi_0) &= \sin \omega t \cos \varphi_0 + \cos \omega t \sin \varphi_0 \quad .
 \end{aligned}
 \tag{4.1.46}$$

Durch Einsetzen dieser Beziehungen in Gl.(4.1.45) erhält man eine Gleichung der Form

$$C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t = 0
 \tag{4.1.47}$$

mit

$$\begin{aligned}
 C_1 &= m\omega^2 A \cos \varphi_0 - m\omega_0^2 A \cos \varphi_0 - \omega\eta A \sin \varphi_0 + F_a \\
 C_2 &= m\omega^2 A \sin \varphi_0 - m\omega_0^2 A \sin \varphi_0 + \omega\eta A \cos \varphi_0 \quad .
 \end{aligned}
 \tag{4.1.48}$$

Damit eine solche Gleichung für jede beliebige Zeit t gilt, müssen die Koeffizienten C_1 und C_2 gleich Null sein. Diese Forderung führt auf zwei Bestimmungsgleichungen. Die erste ($C_1 = 0$) lautet

$$A \left((\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{\eta\omega}{m} \tan \varphi_0 \right) = \frac{F_a}{m \cos \varphi_0} . \quad (4.1.49)$$

Die zweite Gleichung ($C_2 = 0$) führt zu

$$-m\omega^2 A \sin \varphi_0 + m\omega_0^2 A \sin \varphi_0 = \eta\omega A \cos \varphi_0 \quad (4.1.50)$$

oder

$$\tan \varphi_0 = \frac{\eta\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{\omega 2\beta}{\omega_0^2 - \omega^2} . \quad (4.1.51)$$

Hierbei ist $\omega_0 = k/m$ die Eigenfrequenz des ungedämpften Systems und φ_0 die Phasenschiebung zwischen Zwangskraft und erzwungener Schwingung. Durch Einsetzen von (4.1.50) in (4.1.49) erhält man mit der Beziehung $1/\cos \varphi_0 = \sqrt{1 + \tan^2 \varphi_0}$ die Amplitude der Schwingung zu

$$A(\omega) = \frac{F_a/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\eta\omega/m)^2}} = \frac{F_a/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} , \quad (4.1.52)$$

wobei der bereits oben eingeführte *Dämpfungsfaktor* $\beta = \eta/2$ verwendet wurde.

Amplitudenverhalten

Wir wollen nun kurz das durch Gleichung (4.1.52) gegebene Amplitudenverhalten der erzwungenen Schwingung mit Dämpfung diskutieren. Durch Differentiation von Gl.(4.1.52) erhält man

$$\frac{dA(\omega)}{d\omega} = -\frac{2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 8\beta^2\omega}{2 \left(\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} \right)^3} . \quad (4.1.53)$$

Setzt man diesen Ausdruck gleich Null ergeben sich Extremwerte für folgende Frequenzen:

- $\omega = 0$:

Die Funktion $A(\omega)$ beginnt bei $\omega = 0$ mit einer waagrechten Tangente.

- $-(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\beta^2 = 0$:

Aus dieser Bedingung ergibt sich ein Maximum der Funktion $A(\omega)$ für die Frequenz

$$\omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} . \quad (4.1.54)$$

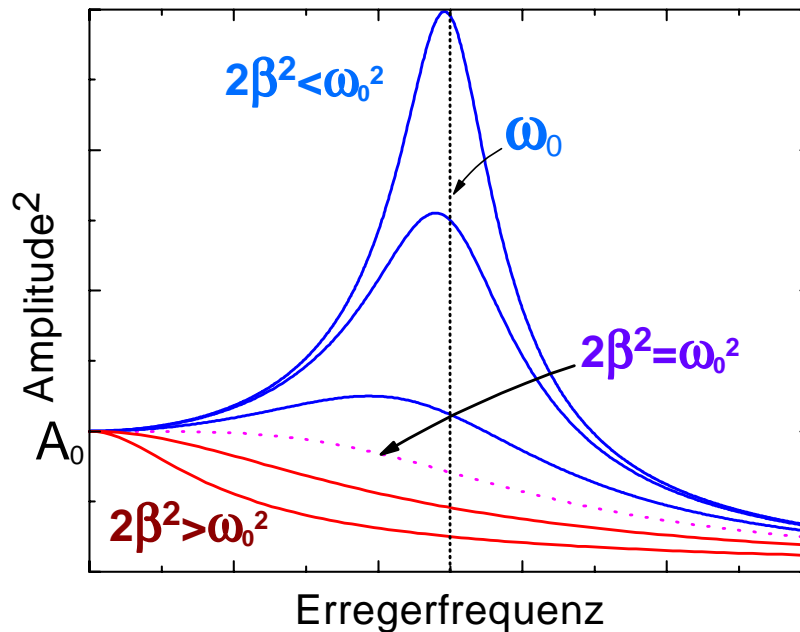


Abbildung 4.8: Resonanzkurven einer gedämpften erzwungenen Schwingung für verschiedene Werte der Dämpfung.

Im folgenden soll kurz der Einfluß der Dämpfung auf das Amplitudenverhalten diskutiert werden. Wir können dabei folgende Fälle unterscheiden:

1. $2\beta^2 < \omega_0^2$:

Trägt man in einem Diagramm die Amplitude gegen die Erreherfrequenz ω auf, so erhält man für verschiedene Dämpfungsfaktoren die in Abb. 4.8 gezeigten Kurven. Bei schwacher Dämpfung liegt das Resonanzmaximum bei der Eigenfrequenz ω_0 . Die Resonanzamplitude bleibt aber im Gegensatz zum ungedämpften Fall (siehe Abb. 4.7) endlich. Je stärker die Dämpfung, desto flacher wird die Resonanzkurve und umso weiter verschiebt sich das Maximum gegen kleinere Frequenzen.

2. $2\beta^2 = \omega_0^2 \Rightarrow \omega_{\max} = 0$:

Bei der Erregerfrequenz $\omega = 0$ ist die Amplitude $A(0)$ am größten. An der Stelle $\omega = \omega_0$ ergibt sich die Amplitude

$$A(\omega_0) = \frac{F_a}{\sqrt{2} m \omega_0^2} = \frac{A(0)}{\sqrt{2}}. \quad (4.1.55)$$

3. $2\beta^2 > \omega_0^2$:

Die Dämpfung ist so stark, daß kein Resonanzmaximum mehr vorliegt. Die maximale Amplitude liegt bei der Frequenz $\omega = 0$ und nimmt mit wachsendem ω stark ab.

4. Schwache Dämpfung: $2\beta^2 \ll \omega_0^2 \Rightarrow \omega_{\max} \simeq \omega_0$:

Wir diskutieren für den Fall der schwachen Dämpfung nun insbesondere den Frequenzbereich in der Umgebung der Resonanzstelle $\omega = \omega_0$. Mit $\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)$ und $\omega_0 + \omega \simeq 2\omega_0$ erhält man für die Amplitude

$$A(\omega) = \frac{F_a/m}{\sqrt{((\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega))^2 + 4\beta^2\omega^2}} \approx \frac{F_a/2m\omega_0}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2}} \quad (4.1.56)$$

Für das Quadrat der Amplitude erhält man somit

$$\begin{aligned} A^2(\omega) &= A_{\max}^2 \frac{\beta^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2} \\ \text{mit } A_{\max}^2 &= \frac{F_a^2}{4m^2\omega_0^2\beta^2} \end{aligned} \quad (4.1.57)$$

Die Abhängigkeit $A^2(\omega)$ stellt eine *Lorentzkurve* dar (siehe Abb. 4.9). Sie beschreibt den Energieinhalt des schwingenden Systems, der proportional zum Amplitudenquadrat ist.

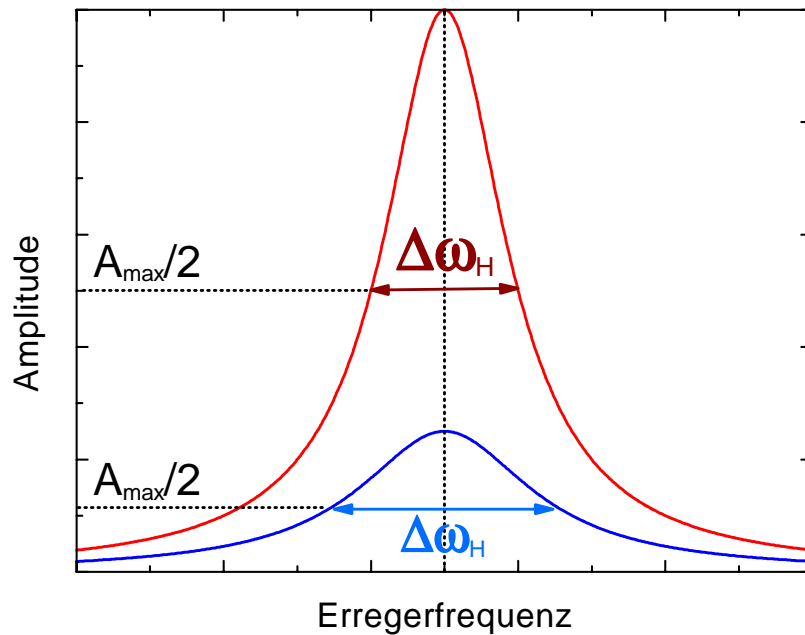


Abbildung 4.9: Lorentzkurven für verschiedene Werte der Dämpfung. Die Dämpfungswerte β der beiden Lorentzkurven unterscheiden sich um den Faktor $\sqrt{2}$.

Unter der Halbwertsbreite $\Delta\omega_H$ einer **Lorentzkurve** versteht man den Frequenzabstand zwischen den beiden Punkten, für die $A^2(\omega) = A_{\max}^2/2$ gilt (vergleiche Abb. 4.9). Die Bedingung $A^2(\omega) = A_{\max}^2/2$ ist für $(\omega_0 - \omega)^2 = \beta^2$ erfüllt. Daraus ergibt sich für die Halbwertsbreite

$$\begin{aligned} \left(\omega_0 - \left(\omega_0 \pm \frac{\Delta\omega_H}{2} \right) \right)^2 &= \beta^2 \\ \text{oder } \Delta\omega_H &= 2\beta \end{aligned} \quad (4.1.58)$$

Je geringer also die Dämpfung, desto schärfer wird die Resonanzkurve. Mit der Halbwertsbreite ergibt sich folgender Ausdruck für die Resonanzkurve

$$A^2(\omega) = A_{\max}^2 \frac{(\Delta\omega_H/2)^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\Delta\omega_H/2)^2} \quad (4.1.59)$$

Dieser Ausdruck ist sehr wichtig und tritt in der Physik im Zusammenhang mit verschiedenen Fragestellungen auf (z.B. elektrische Schwingkreise oder Resonanzvorgänge in der Kern- und Atomphysik: *Breit-Wigner-Formel*).

Das Verhältnis von A_{\max} und $A_0 = A(0)$ bezeichnet man als *Resonanzüberhöhung*. Hierbei ist zu beachten, daß die Amplitude A_0 nicht mit der Näherungsformel für $\omega \simeq \omega_0$ abgeleitet werden darf. Es gilt

$$\frac{A_{\max}}{A_0} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_H} \quad (4.1.60)$$

Phasenverhalten zwischen Schwingung und erregender Kraft

Wir wollen nun anhand von Gl.(4.1.50) das Phasenverhalten zwischen Schwingung und erregender Kraft diskutieren. In Abb. 4.10 ist der Verlauf der Phasenschiebung als Funktion der Erregerfrequenz für verschiedene Werte des Dämpfungsparameters β gezeigt. Aus Abb. 4.10 und Gl.(4.1.50) folgt:

$$\begin{aligned} \omega < \omega_0: \quad \tan \varphi_0 > 0 &\Rightarrow 0^\circ \leq \varphi_0 < 90^\circ \\ \omega > \omega_0: \quad \tan \varphi_0 < 0 &\Rightarrow 90^\circ < \varphi_0 \leq 180^\circ \\ \omega = \omega_0: \quad \tan \varphi_0 = \infty &\Rightarrow \varphi_0 = 90^\circ \\ \omega \rightarrow 0: \quad \tan \varphi_0 \rightarrow +0 &\Rightarrow \varphi_0 \rightarrow 0^\circ \\ \omega \rightarrow \infty: \quad \tan \varphi_0 \rightarrow -0 &\Rightarrow \varphi_0 \rightarrow 180^\circ \end{aligned}$$

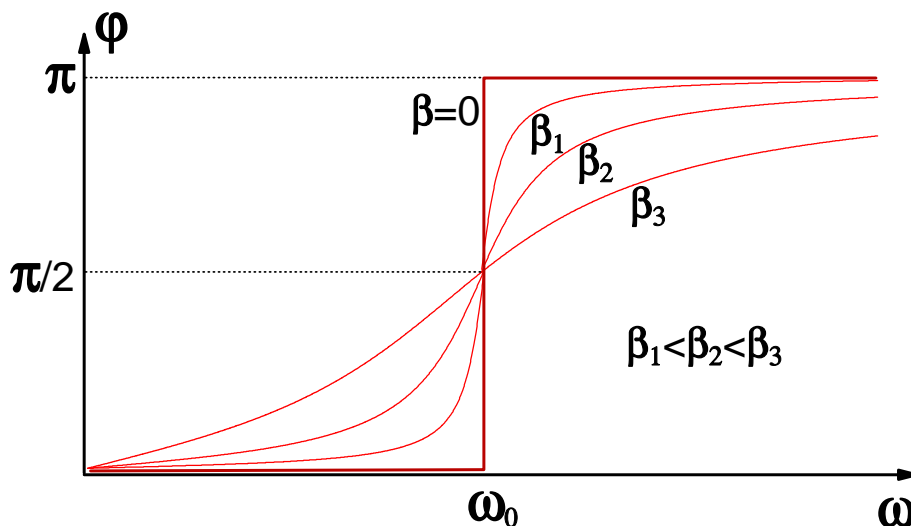


Abbildung 4.10: Phasenschiebung zwischen Schwingung und erregender Kraft in Abhängigkeit von der Frequenz für verschiedene Werte der Dämpfung.

Für den Fall $\omega = \omega_0$ ist die Phasenschiebung unabhängig von der Dämpfung. Ist jedoch ω größer oder kleiner als ω_0 , besteht eine Abhängigkeit von β . Abb. 4.10 zeigt, daß alle $\varphi_0(\omega)$ Kurven für unterschiedliche Dämpfungen durch den Punkt $(\omega_0, \pi/2)$ laufen.

Es soll nun kurz diskutiert werden, welche Phasenschiebung für geringe Dämpfung an den Halbwertsstellen der Resonanzkurve $A^2(\omega)$ vorliegt. Für $\beta^2 \ll \omega_0^2$ und $\omega \simeq \omega_0$ gilt:

$$\tan \varphi_0 \simeq \frac{\beta}{\omega_0 - \omega} . \quad (4.1.61)$$

Da an den Halbwertsstellen zudem $(\omega_0 - \omega)^2 = \beta^2$ ist, folgt $\tan \varphi_0 = \pm 1$. Das heißt, es liegt ein Phasenwinkel von 45° bzw. 135° vor.

Energieübertragung durch die Zwangskraft

Die durch die Zwangskraft auf das schwingungsfähige System übertragene Energie errechnet sich aus dem Produkt aus Zwangskraft und zurückgelegten Weg

$$dW = F dx = F \frac{dx}{dt} dt . \quad (4.1.62)$$

Mit $F(t) = F_a \sin \omega t$ und $dx/dt = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0)$ ergibt sich

$$dW = F_a \sin \omega t \omega A \cos(\omega t + \varphi_0) . \quad (4.1.63)$$

Wir interessieren uns hier nur für die auf das schwingende System übertragene mittlere Leistung. Der Querstrich über den folgenden Formelzeichen soll eine zeitliche Mittelung bedeuten. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \overline{P} = \frac{d\overline{W}}{dt} &= F_a \omega A \overline{\sin \omega t \cos(\omega t + \varphi_0)} \\ &= F_a \omega A \overline{\sin \omega t (\cos \omega t \cos \varphi_0 - \sin \omega t \sin \varphi_0)} \\ &= F_a \omega A \left(\frac{1}{2} \sin 2\omega t \cos \varphi_0 + \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega t) \sin \varphi_0 \right) \\ &= F_a \omega A \left(0 + \frac{1}{2} \sin \varphi_0 \right) . \end{aligned} \quad (4.1.64)$$

Hierbei wurde verwendet, daß das zeitliche Mittel von $\sin 2\omega t$ und $\cos 2\omega t$ verschwindet. Für die mittlere Leistung gilt also

$$\boxed{\overline{P} = \frac{1}{2} F_a \omega A \sin \varphi_0 .} \quad (4.1.65)$$

Man erkennt, daß der maximale Leistungsübertrag bei einer Phasenschiebung von 90° zwischen Schwingung und erregender Kraft erfolgt. Bei einer Anregung, die in Phase, d.h. mit $\varphi_0 = 0^\circ$ erfolgt, wird gar keine Energie übertragen.⁶

⁶Als typisches Beispiel hierfür kann das Anschieben einer schaukelnden Person betrachtet werden. Um den größten Effekt zu erzielen, darf man die Anschiebbewegung nicht genau phasensynchron mit der Schaukelbewegung ausführen, sondern um 90° phasenverschoben. Dies macht natürlich jeder intuitiv richtig.

Man kann nun mit der oben abgeleiteten Amplitudenfunktion $A(\omega)$ überlegen, bei welcher Frequenz die übertragene Leistung am größten wird. Ersetzt man A in Gl.(4.1.65) durch Gl.(4.1.52) und benutzt die Beziehung $\sin \varphi_0 = \tan \varphi_0 / \sqrt{1 + \tan^2 \varphi_0}$, so erhält man durch Extremalwertbestimmung ($d\bar{P}/d\omega = 0$) die Bedingung für maximalen Leistungsübertrag zu

$$\omega = \omega_0 \quad (4.1.66)$$

An der Stelle $\omega = \omega_0$ wird also unabhängig von der Dämpfung am meisten Energie auf das System übertragen. Man spricht hier von *Energieresonanz*.

Durch die starke Übertragung von Energie auf ein schwingendes System und den starken Anstieg der Schwingungsamplitude im Resonanzfall kann es zur Zerstörung eines schwingenden Systems kommen. Ein typisches Beispiel ist die Zerstörung eines Weinglases durch Resonanzabsorption von Schall⁷. Durch periodische Anregung von Gebäuden bei der Resonanzfrequenz kann es zum Einsturz von Gebäuden kommen. Ein berühmtes Beispiel ist der Einsturz der **Tacoma-Bridge** in Washington, USA, am 1. Juli 1940 durch Windanregung. Dieses Ereignis wurde auf einem Film festgehalten und demonstriert eindrücklich das Aufschaukeln einer Schwingung durch Resonanzabsorption. Aus diesem Grunde ist es z.B. Marschkolonnen untersagt, Brücken im Gleichschritt zu überqueren, da hierdurch auch eine Resonanzschwingung angeregt werden könnte.

4.1.5 Parametrische Verstärkung

Bei der erzwungenen Schwingung wurde die Amplitude einer Schwingung dadurch vergrößert, daß man dem schwingungsfähigen System mehr Energie zugeführt hat, als zur Aufrechterhaltung der Schwingung notwendig ist. Die Schwingung schaukelt sich in diesem Fall von kleinen zu großen Amplituden auf. Wir wollen nun eine andere Art von Verstärkung, das Prinzip der *parametrischen Verstärkung*, betrachten, die heute in der Elektrotechnik eine große Bedeutung besitzt. Das Prinzip der parametrischen Verstärkung gilt für jedes schwingungsfähige System. Es wurde bereits früh für mechanische Systeme erkannt⁸. Man spricht von parametrischer Verstärkung, weil die Verstärkung der Amplitude durch Variation eines Parameters des schwingungsfähigen Systems erzielt wird.

Das Prinzip der parametrischen Verstärkung versteht man leicht am Beispiel der Kinderschaukel. Ein Kind vergrößert die Amplitude der Schaukelschwingung ganz alleine (ohne äußeren Antrieb), indem es die Pendellänge der Schaukel verändert. Das kann z.B. durch Wechsel von geradem Sitzen und Liegen oder durch Wechsel von Stand und tiefer Kniebeuge geschehen. Im tiefsten Punkt der Pendelbewegung hat das Pendel stets die größte kinetische Energie und die potentielle Energie ist hier Null. In den oberen Wendepunkten ist dagegen die potentielle Energie maximal und die kinetische Energie Null. Bei Beginn der Abwärtsbewegung legt sich das Kind flach (oder geht in die Kniebeuge) und macht dadurch die Pendellänge groß. Damit wird potentielle Energie des Kindes an die Schaukel abgegeben. Die Schaukel erhält ein größeres Trägheitsmoment und hat beim Durchgang durch den tiefsten Punkt eine höhere kinetische Energie. In diesem Punkt hebt sich das Kind (aus der Hocke in den Stand) und erhöht dabei seine potentielle Energie durch Muskelkraft, ohne daß der Schaukel dadurch kinetische Energie entzogen wird. Dadurch wird die Winkelgeschwindigkeit größer und die Schaukel erreicht eine größere Höhe. Dieser Vorgang wiederholt sich periodisch, wobei während einer Schwingungsperiode zweimal Energie zugeführt wird.

In der Elektrotechnik wurde die parametrische Verstärkung bereits 1890 von **Lord Rayleigh** vorgeschlagen und zwar für einen Schwingkreis aus Kondensator und Spule. Die Energie pendelt bei einer

⁷Zum Beispiel soll der Opernsänger Caruso die Fähigkeit besessen haben, Weingläser zu "zersingen".

⁸Die ersten Hinweise findet man bei **M. Faraday** (1830).

Schwingung zwischen Kondensator und Spule hin und her, wobei die Spannung am Kondensator der potentiellen und der Strom durch die Spule der kinetischen Energie der Schaukel entspricht. Eine parametrische Verstärkung kann man durch Änderung des Plattenabstandes eines Plattenkondensators erhalten. Liegt Spannung am Kondensator an, so verrichtet man Arbeit gegen das elektrische Feld und erhöht dadurch die potentielle Energie. Ist die Spannung am Kondensator Null, so kann man die Platten ohne Energieaustausch wieder zusammenbringen, da in diesem Augenblick keine Kräfte wirken. Durch Verändern der Parameter des Schwingkreises kann man also eine parametrische Verstärkung erzielen.⁹

4.1.6 Gekoppelte Systeme

Bisher wurden nur Systeme mit *einem Schwingungsfreiheitsgrad* betrachtet. Solche Systeme besaßen *eine* Eigenfrequenz ω_0 , d.h. *eine* Resonanzstelle. Im folgenden sollen Systeme mit mehreren Schwingungsfreiheitsgraden betrachtet werden.

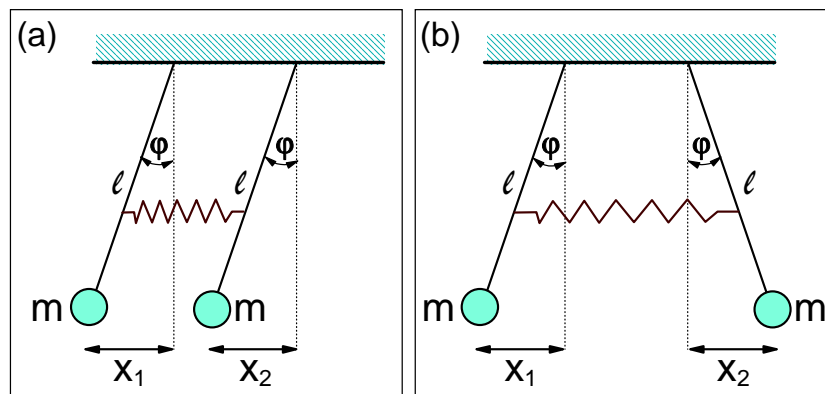


Abbildung 4.11: Gekoppelte Pendel: (a) gleichphasige und (b) gegenphasige Schwingung.

Wir betrachten zunächst die in Abb. 4.11 gezeigten gekoppelten Pendel. Setzt man Pendel 1 in Bewegung, so wird durch die Kopplung der beiden Pendel über die Feder die Schwingung von Pendel 1 auch diejenige von Pendel 2 beeinflussen, da die Kopplungsfeder durch die periodische Dehnung und Stauchung eine periodische Kraft auf Pendel 2 ausübt. Die Schwingungsenergie wird dadurch allmählich von Pendel 1 auf Pendel 2 übertragen und Pendel 1 kommt zur Ruhe. Dann kehrt sich der ganze Vorgang um. Betrachtet man die Bewegung jedes Pendels für sich, so erhält man eine Schwebung. Das bedeutet aber, daß das gesamte System der gekoppelten Pendel wenigstens zwei Eigenfrequenzen besitzen muß, die durch Überlagerung zu der Schwebung führen.

Man kann allerdings auch Schwingungsformen anregen, bei denen keine Schwebung auftritt. Dies ist der Fall, wenn beide Massen im Gleichtakt mit der Frequenz ω_1 oder genau im Gegenteil mit der Frequenz ω_2 schwingen. Man nennt diese Schwingungsformen, bei denen beide Pendel mit gleicher Frequenz, gleicher Amplitude und mit einer Phasenschiebung von 0 oder π schwingen, die *Eigenschwingungen* des System. Die Frequenzen ω_1 und ω_2 nennt man die *Eigenfrequenzen*. Die Eigenfrequenzen sollen nun für zwei gekoppelte mathematische Pendel (vergleiche Abschnitt 1.6.3) im Grenzfall kleiner Auslenkungen x abgeleitet werden. Für kleine Auslenkungen sind die Rückstellkräfte gegeben durch

⁹Bei hohen Frequenzen ist die Änderung des Abstandes der Elektroden eines Plattenkondensators nicht praktikabel. Man wählt hier Kondensatoren, deren Kapazität spannungsabhängig ist. Solche Kapazitäten können mit Halbleiterdioden realisiert werden.

$$\begin{aligned}
 F_1 &= -mg \sin \varphi_1 \simeq -mg \frac{x_1}{l} \\
 \text{und} \quad F_2 &= -mg \sin \varphi_2 \simeq -mg \frac{x_2}{l} .
 \end{aligned} \tag{4.1.67}$$

Zwischen den Pendelmassen m wirkt aufgrund der um $x_2 - x_1$ ausgelenkten Kopplungsfeder die Kraft $-k(x_2 - x_1)$. Dadurch ergeben sich für die beiden Pendel folgende Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
 m \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -mg \frac{x_1}{l} + k(x_2 - x_1) \\
 \text{und} \quad m \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -mg \frac{x_2}{l} - k(x_2 - x_1) .
 \end{aligned} \tag{4.1.68}$$

Die beiden Differentialgleichungen sind durch den 2. Term auf der rechten Seite miteinander gekoppelt. Sie stellen ein System gekoppelter Differentialgleichungen dar. Für den Fall gleichphasiger und gegenphasiger Schwingung ergeben sich folgende Eigenfrequenzen:

1. Gleichphasige Schwingung:

Beide Pendel schwingen in Phase mit gleicher Amplitude. Die Kopplungsfeder ist dadurch immer entspannt ($x_1 = x_2$) und der Kopplungsterm in (4.1.68) verschwindet. Die Eigenfrequenz ist diejenige eines mathematischen Pendels bei kleinen Auslenkungen und ist gegeben durch (vergleiche Gl.(1.6.50))

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} .} \tag{4.1.69}$$

Dies ist die erste Eigenfrequenz des gekoppelten Systems. Sie ist identisch mit der Eigenfrequenz der Einzelschwingung.

2. Gegenphasige Schwingung:

Beide Pendel schwingen nun gegenphasig mit gleicher Amplitude, d.h. es gilt $x_1 = -x_2$. Man erhält somit die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
 m \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -mg \frac{x_1}{l} - 2kx_1 = -\left(\frac{mg}{l} + 2k\right)x_1 \\
 \text{und} \quad m \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -mg \frac{x_2}{l} - 2kx_2 = -\left(\frac{mg}{l} + 2k\right)x_2 .
 \end{aligned} \tag{4.1.70}$$

Die Eigenfrequenz ist diejenige eines mathematischen Pendels mit einer vergrößerten Rückstellkraft, da jetzt zusätzlich zur Schwerkraft die Kopplungsfeder eine Rückstellkraft ausübt. Die Eigenfrequenz lautet

$$\boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}} .} \tag{4.1.71}$$

Dies ist die zweite Eigenschwingung des gekoppelten Systems. Aufgrund der zusätzlichen Rückstellkraft ist $\omega_2 > \omega_1$.

Das eben betrachtete System aus zwei gekoppelten Pendeln besitzt zwei Schwingungsfreiheitsgrade und somit zwei Eigenfrequenzen. Ein System mit n Schwingungsfreiheitsgraden besitzt n Eigenfrequenzen. Man unterscheidet bei gekoppelten Systemen ferner zwischen *Longitudinalschwingungen* und *Transversalschwingungen*. Bei der Longitudinalschwingung ist die Kopplungskraft parallel zur Schwingungsrichtung, während sie bei der Transversalschwingung senkrecht zur Schwingungsrichtung steht. Als weitere Erscheinungsform kann durch eine Verdrehung eine *Torsionsschwingung* auftreten.

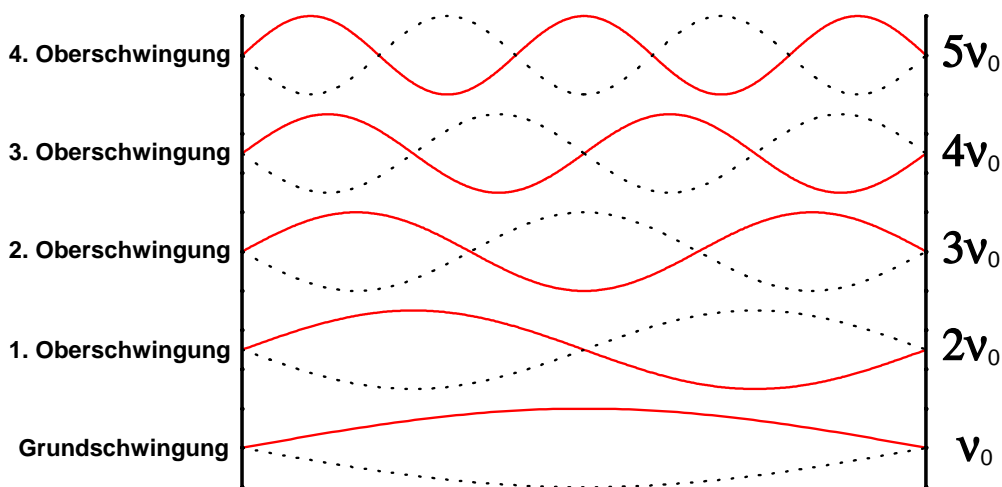


Abbildung 4.12: Eigenschwingungen einer Saite.

Eine Saite kann man sich als eine Anordnung von vielen über Federn gekoppelter Massen vorstellen. Eine Saite besitzt deshalb eine sehr hohe Zahl von Schwingungsfreiheitsgraden und somit eine große Zahl von Eigenschwingungen. Spannt man z.B. eine Saite zwischen einer Wand und einem Erregerzentrum mit variabler Frequenz ein, so wird die Saite immer dann zu einer Eigenschwingung angeregt, wenn die Erregerfrequenz mit einer Eigenfrequenz der Saite übereinstimmt. Die niedrigste Eigenfrequenz der Saite bezeichnet man als *Grundfrequenz* ν_0 . Die Grundschwingung hat an den Enden der Saite je einen Schwingungsknoten und in der Mitte einen Schwingungsbauch, d.h. eine Stelle maximaler Auslenkung (siehe Abb. 4.12). Verdoppelt man die Erregerfrequenz auf $2\nu_0$, so beobachtet man wieder eine Eigenschwingung. Diese zweite Eigenschwingung bezeichnet man auch als *erste Oberschwingung*. Bei $3\nu_0$ erhält man die zweite Oberschwingung usw. Allgemein gilt

$$\nu_n = n \cdot \nu_0 \quad \text{mit } n = 2, 3, 4, \dots \quad (4.1.72)$$

Hierbei ist ν_n die Frequenz der $(n - 1)$ ten Oberschwingung. Unter *harmonischen Oberschwingungen* versteht man alle Schwingungsformen, deren Frequenz ein ganzzahliges Vielfaches der Grundfrequenz ist. Bei Musikinstrumenten wird nicht nur ein einzige Schwingung angeregt, sondern es sind neben der Grundfrequenz verschiedene Oberschwingungen vorhanden. Diese bestimmen das Klangbild oder die Klangfarbe des Instruments.

Gekoppelte Longitudinal- und Torsionsschwingung

An einer Feder sei ein U-förmiges Eisenstück angebracht (siehe Abb. 4.13). Lenkt man die Feder in ihrer Längsrichtung aus, vollführt sie zunächst eine Longitudinalschwingung. Allmählich bildet sich eine Torsionsschwingung um die Längsachse der Feder aus, während die Longitudinalschwingung zur Ruhe kommt. Nachdem sich die gesamte Energie der Longitudinalschwingung in Energie der Torsionsschwingung umgewandelt hat, kehrt sich der Vorgang wieder um. Es handelt sich wie beim oben diskutierten Doppelpendel um zwei überlagerte Eigenschwingungszustände.

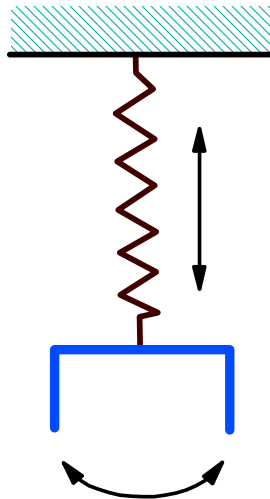


Abbildung 4.13: Gekoppelte Longitudinal- und Torsionsschwingung.

Chladnische Klangfiguren

Auch Platten und Membrane können zu Eigenschwingungen angeregt werden, die stark von der Form des Körpers abhängen. Streicht man z.B. eine in der Mitte durch einen Stab befestigte Metallplatte mit einem Geigenbogen, so wird sie dadurch zu Eigenschwingungen angeregt. Auf die Platte aufgestreuter Sand wird an den Schwingungsbäuchen weggewirbelt und lagert sich an den Schwingungsknoten an. Man erhält dadurch die so genannten *Chladnischen Klangfiguren*. Zu den Eigenschwingungen der Platte gehören wiederum die Grundschwingung und verschiedene Oberschwingungen. Das Spektrum ist allerdings nicht harmonisch.

4.2 Wellen

Im Gegensatz zu den im letzten Abschnitt diskutierten Schwingungen, die eine periodische Bewegung eines Systems um eine ortsfeste Ruhelage beschreiben, betrachtet man bei Wellen die räumliche Ausbreitung eines Schwingungszustandes. Dies geschieht zum Beispiel dadurch, daß man mehrere schwingungsfähige Systeme miteinander koppelt, so daß der Schwingungszustand eines Systems auf die benachbarten Systeme übertragen werden kann. Man erhält dadurch eine räumliche Ausbreitung eines Schwingungszustandes und man spricht dann von einer Welle. Erfolgt zum Beispiel im Innern eines deformierbaren Mediums eine Verschiebung aus der Ruhelage (Deformation), so bleibt diese nicht auf das Erregerzentrum beschränkt, sondern wird durch die elastische Kopplung mit den Nachbargebieten auf diese übertragen. Die Nachbargebiete werden ebenfalls, aber mit einer gewissen Zeitverzögerung deformiert. Es kommt dadurch zu einer räumlichen Ausbreitung der Deformation.

Man kann also folgendes festhalten:

- Bei einer Schwingung handelt es sich um eine periodische Bewegung um eine Gleichgewichtslage.
- Bei einer Welle breitet sich eine zeitabhängige Erregung (z.B. Schwingung) mit einer endlichen Geschwindigkeit aus. Eine mechanische Welle kann sich nur dann ausbreiten, wenn eine elastische Kopplung zwischen den schwingenden Massenelementen besteht. Es findet kein Massentransport statt, es wird nur Energie transportiert (siehe unten).

Man kann Wellen hinsichtlich ihrer Natur, der Schwingungsrichtung, der Form und der Dimension ihrer Ausbreitung klassifizieren:

1. Wellennatur:

- In der Mechanik und Akustik beschäftigen wir uns mit *elastischen Wellen*, die in Festkörpern auftreten, mit *Dichtewellen* in Flüssigkeiten und Gasen (Schallwellen) oder mit *Oberflächenwellen* von Flüssigkeiten.
- In der Elektrotechnik und Optik spielen *elektromagnetische Wellen* eine zentrale Rolle.

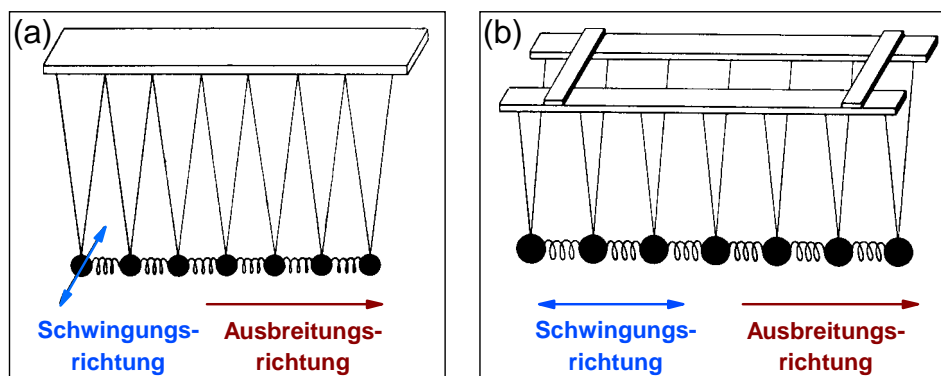


Abbildung 4.14: Gekoppelte Pendel zur Erzeugung einer transversalen (a) und longitudinalen Welle.

2. Schwingungsrichtung:

Im allgemeinen unterscheidet man zwischen (siehe z.B. Abb. 4.14)

- *Transversalwellen*

Die Schwingungsrichtung (Deformation) ist hier senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle¹⁰

- *Longitudinalwellen*

Die Schwingungsrichtung (Deformation) ist hier parallel zur Ausbreitungsrichtung der Welle

3. Wellenform:

Man unterscheidet zwischen (siehe Abb. 4.15)

- harmonischen Wellen
- pulsförmigen Wellen

4. Dimension der Ausbreitung:

Man unterscheidet

- eindimensionale Wellen; hier erfolgt die Ausbreitung nur in eine Richtung (z.B. Seilwelle)
- zweidimensionale Wellen; hier erfolgt die Ausbreitung in einer Ebene. Eine zweidimensionale Wellenausbreitung kann man z.B. beobachten, wenn man einen Stein ins Wasser wirft. Um die Auftreffstelle des Steins breiten sich ringförmige Wellen aus. Im allgemeinen erhält man bei einer punktförmigen Erregerquelle für ein isotropes Medium im zweidimensionalen Fall eine *Kreiswelle*.
- dreidimensionale Welle; hier erfolgt eine Ausbreitung in alle drei Raumdimensionen. Dreidimensionale Wellen sind z.B. Schallwellen. Bei einer punktförmigen Erregerquelle in einem isotropen Medium erhält man eine *Kugelwelle*.

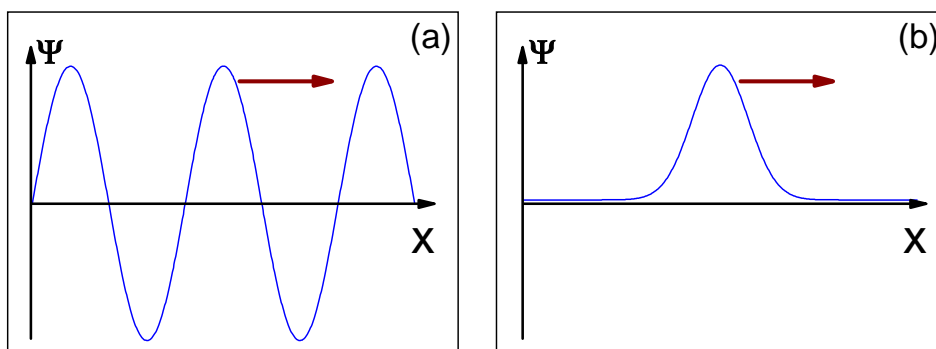


Abbildung 4.15: Schematische Darstellung einer harmonischen (a) und einer pulsförmigen Welle (b).

4.2.1 Transversalwellen

Als deformierbares Medium betrachten wir ein System aus Massenpunkten, die elastisch (z.B. mit Federn) miteinander gekoppelt sind. Lenkt man einen Massenpunkt aus seiner Ruhelage aus, so wird auch

¹⁰Eine besondere Art von Transversalwellen bilden die Torsionswellen. Hier wird ein Segment eines schwingungsfähigen Systems zu einer Torsionsschwingung angeregt, die sich durch elastische Kopplung der Einzelsegmente auf die benachbarten Segmente überträgt und dadurch zur Fortpflanzung einer Torsionswelle auf dem System führt. Die Torsionsschwingung erfolgt dabei senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.

der benachbarte Massenpunkt aufgrund der elastischen Kopplung mitgezogen. Nacheinander spüren dadurch alle Massenpunkte mit unterschiedlicher Zeitverzögerung die Deformation. Bei periodischer Wiederholung der Auslenkung des ersten Massenpunktes (z.B. harmonische Schwingung des Massenpunktes) pflanzt sich auf diese Weise die diesem Massenpunkt aufgezwungene Schwingung durch die ganze Massenkette fort. Jeder einzelne Massenpunkt führt, wenn auch zeitlich verschoben, eine harmonische Schwingung aus. Als Beispiel ist in Abb. 4.14a die Erzeugung einer transversalen Welle mit Hilfe gekoppelter Pendel gezeigt.

Wir werden nun das Verhalten einer solchen Welle bei festgehaltenem Ort und fester Zeit betrachten, um empirisch einen Ausdruck für die Orts- und Zeitabhängigkeit der Auslenkung in einer Welle abzuleiten.

Verhalten an konstantem Ort

Wir betrachten zunächst das Bewegungsverhalten eines Massenpunktes an einem festen Ort in Abhängigkeit von der Zeit. Nehmen wir an, daß die Rückstellkraft proportional zur Auslenkung des Massenpunktes aus seiner Ruhelage ist (harmonische Kraft), so führt der Massenpunkt eine harmonische Schwingung aus. Der an den n -ten Massenpunkt gekoppelte $(n + 1)$ -te Massenpunkt wird erst mit einer Zeitverzögerung Δt ausgelenkt. Deshalb ist, wie in Abb. 4.16 gezeigt ist, die Schwingungskurve des $(n + 1)$ -ten Massenpunktes auch um Δt gegen diejenige des n -ten Massenpunktes verschoben.

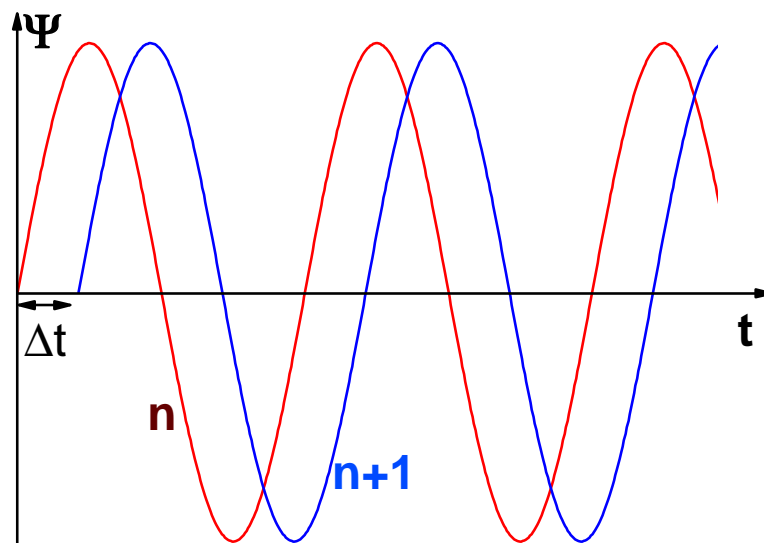


Abbildung 4.16: Schwingungskurven von zwei benachbarten, miteinander gekoppelten Massenpunkten.

Die zeitliche Verzögerung der Schwingung benachbarter Massenpunkte kann auch in eine Phasenschiebung $\Delta\varphi$ umgerechnet werden. Mit der Schwingungsdauer T einer Schwingung ist $\Delta\varphi = \Delta t(2\pi/T)$. Der Schwingungszustand der benachbarten Massenpunkte kann deshalb durch

$$\begin{aligned} \Psi_n(t) &= \Psi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \Psi_0 \sin(\omega t) \\ \text{und} \quad \Psi_{n+1}(t) &= \Psi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{T}\Delta t\right) = \Psi_0 \sin(\omega t + \Delta\varphi) \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

ausgedrückt werden. Hierbei ist Ψ_0 die Schwingungsamplitude (Elongation) eines einzelnen Massenpunktes.

Beträgt die Phasenschiebung der Schwingungen zweier entfernter Massenpunkte gerade $j \cdot 2\pi$, wobei j eine ganze Zahl ist, so liegt bei beiden Massenpunkten der gleiche Schwingungszustand vor. Die momentane Amplitude $\Psi(t)$ ist dann nur noch eine Funktion der Zeit und ist gegeben durch

$$\Psi(t) = \Psi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \Psi_0 \sin(\omega t) . \quad (4.2.2)$$

Verhalten bei fester Zeit

Bei konstant gehaltener Zeit (Momentaufnahme) ergibt sich das Bild eines räumlich periodischen Vorgangs. In Abb. 4.17 sind mit einem bestimmten zeitlichen Abstand aufgenommene Momentaufnahmen gezeigt. Nach der Zeit t_5 ist die erste Masse wieder im gleichen Schwingungszustand wie zu Beginn (Zeit t_1). Der Ausschlag der einzelnen Massenpunkte ist nur eine Funktion des Abstandes der Massenpunkte von Masse 1 und kann durch

$$\Psi(x) = \Psi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \quad (4.2.3)$$

ausgedrückt werden. Hierbei ist λ die Wellenlänge. Die Wellenlänge gibt an, nach welchem Abstand die Auslenkung identisch zu derjenigen des Massenpunktes 1 ist. Alle Massenpunkte im Abstand $j \cdot \lambda$ zum Massenpunkt 1 besitzen die gleiche Auslenkung, wobei j wiederum eine ganze Zahl ist.

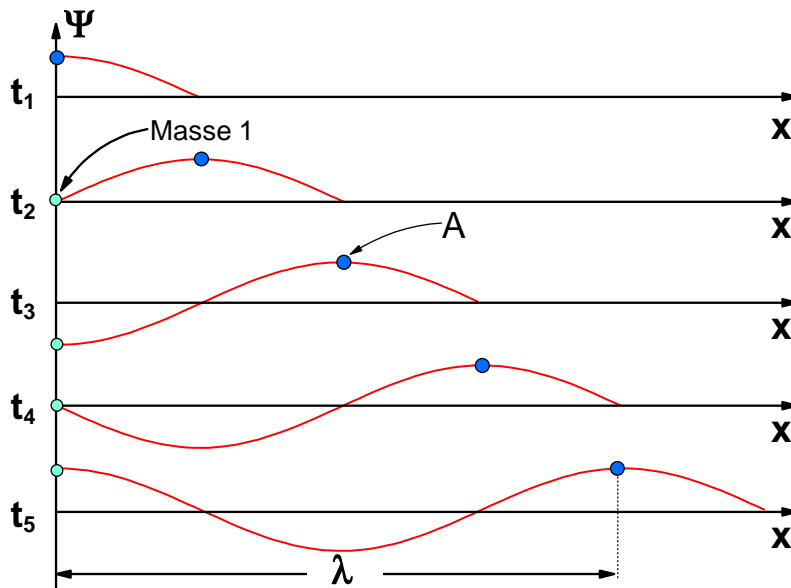


Abbildung 4.17: Momentaufnahmen des Schwingungszustandes der Massenpunkte nach bestimmten Zeitintervallen.

Wellenausbreitung

Die obigen Betrachtungen bei konstantem Ort und konstanter Zeit zeigen, daß es sich bei der Wellenausbreitung um einen *räumlich* und *zeitlich periodischen Vorgang* handelt. Die zusammenfassende Gleichung für die Auslenkung lautet

$$\Psi(x, t) = \Psi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x \pm \frac{2\pi}{T} t\right) = \Psi_0 \sin(kx \pm \omega t) . \quad (4.2.4)$$

Hierbei ist $k = 2\pi/\lambda$ die *Wellenzahl*. Sie gibt die Zahl der Wellenlängen pro Meter an, multipliziert mit 2π .

Bei Gl.(4.2.4) handelt es sich um eine *harmonische Wellenfunktion*. Ein negatives (positives) Vorzeichen in der Sinusfunktion bedeutet dabei, daß sich die Welle nach rechts (links), also zu größeren (kleineren) x -Werten bewegt. Obwohl man von der Ausbreitung einer Welle spricht, findet kein Materialtransport statt. Jeder Massenelement schwingt nur um seine Ruhelage, die zeitlich konstant ist. Lediglich die Auslenkung bzw. die Phase breitet sich aus. Um die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle zu berechnen, betrachtet man einen Zustand gleicher Phase, z.B. ein Maximum der Auslenkung (Punkt A in Abb. 4.17). Eine Fläche konstanter Phase wird allgemein als *Wellenfläche* bezeichnet. Ist die Wellenfläche eine Ebene, eine Kugel, ein Kreis oder ein Zylinder, so spricht man von einer ebenen, einer Kugel-, Kreis- oder Zylinderwelle.

Das Maximum der Auslenkung soll zur Zeit t_1 an der Stelle x_1 liegen. Es wird nach Gl.(4.2.4) für

$$\frac{2\pi}{\lambda} x_1 - \frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{\pi}{2} \quad (4.2.5)$$

erreicht. Nach der Zeit Δt hat sich der Wellenberg um die Strecke Δx verschoben. An der Stelle $x_1 + \Delta x$ gilt wiederum

$$\frac{2\pi}{\lambda} (x_1 + \Delta x) - \frac{2\pi}{T} (t_1 + \Delta t) = \frac{\pi}{2} . \quad (4.2.6)$$

Aus der Differenz von Gl.(4.2.5) und (4.2.6)

$$\frac{2\pi}{\lambda} \Delta x - \frac{2\pi}{T} \Delta t = 0 \quad (4.2.7)$$

erhält man die *Ausbreitungsgeschwindigkeit* oder *Phasengeschwindigkeit* der Welle

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} = \nu \cdot \lambda = \frac{2\pi\nu}{k} = \frac{\omega}{k} . \quad (4.2.8)$$

Diese Beziehung gilt ganz allgemein für alle Wellen, egal auf welchem Mechanismus deren Entstehung oder Ausbreitung beruht.

Beispiel: Die von Rundfunksendern im UKW-Bereich ausgestrahlten Radiowellen haben eine Frequenz von etwa 100 MHz. Bei einer Ausbreitungsgeschwindigkeit von $v = c \simeq 3 \times 10^8$ m/s ergibt sich eine Wellenlänge $\lambda \simeq 3$ m. Für eine Schallwelle im hörbaren Bereich (1 kHz) ergibt sich bei einer Schallgeschwindigkeit in Luft von etwa 340 m/s eine Wellenlänge von etwa 30 cm.

4.2.2 Longitudinalwellen

Bei einer Longitudinalwelle ist die Schwingungsrichtung der einzelnen Massenpunkte parallel zur Ausbreitungsrichtung der Welle. Dort, wo die Teilchen in Richtung der Fortpflanzung der Welle schwingen, bildet sich eine Verdichtung der Massenpunkte. Dort wo die Teilchen im entgegengesetzten Sinn schwingen, tritt eine Verdünnung auf. Longitudinalwellen, bei denen nur eine Verdichtung und Verdünnung, d.h. eine Volumenänderung auftritt, können in allen Stoffen existieren, die Volumenelastizität besitzen, die also auf Volumenänderungen mit elastischen Gegenkräften reagieren. Volumenelastizität besitzen aber nach Kapitel 3 sowohl feste, als auch flüssige und gasförmige Körper. Zum Beispiel sind Schallwellen in Luft Longitudinalwellen.

Im Gegensatz zu Longitudinalwellen findet bei Transversalwellen eine Verschiebung der Masseteilchen quer zur Ausbreitungsrichtung statt. Diese kann nur durch Schubkräfte erzeugt werden. Daher treten elastische Transversalwellen nur in Festkörpern auf, da in idealen Flüssigkeiten und Gasen solche Schubkräfte nicht auftreten können.¹¹

Die oben für Transversalwellen gemachten Betrachtungen zum Verhalten bei festgehaltenem Ort oder Zeit sowie zur Wellenausbreitung gelten für die Longitudinalwellen ganz analog.

4.2.3 Die Wellengleichung

Wir wollen in folgendem für ein System aus elastisch gekoppelten Massenpunkten mit Masse m und Abstand a die Differentialgleichung ableiten, die die Ausbreitung der Welle beschreibt. Wir betrachten dazu eine Kette aus Massenelementen, die über Federn miteinander verbunden sind (siehe Abb. 4.18). Die Massenelemente sollen nur Longitudinalschwingungen in x -Richtung ausführen können. Für die Federkonstante wird im folgenden das Symbol D verwendet, um Verwechslungen mit der Wellenzahl k zu vermeiden.

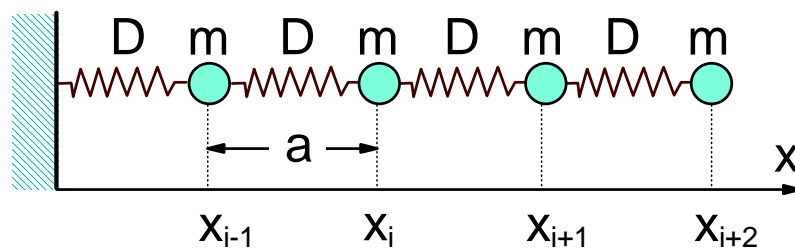


Abbildung 4.18: Lineare Kette von elastisch gekoppelten Massenelementen als Modell zur Ableitung der Wellengleichung.

Wird das Massenelement an der Stelle x_i um Ψ_i in x -Richtung ausgelenkt, so gilt für die auftretenden Kräfte

$$m \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial t^2} = D (\Psi_{i+1} - \Psi_i) - D (\Psi_i - \Psi_{i-1}) . \quad (4.2.9)$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (siehe Abb. 4.19) darf man für kleine Werte von a

¹¹ Aufgrund der freien Beweglichkeit der Flüssigkeits- oder Gasteilchen in idealen Flüssigkeiten und Gasen treten bei einer Verschiebung keine elastischen Rückstellkräfte auf.

$$\frac{\Psi_{i+1} - \Psi_i}{a} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x \simeq x_i + a/2} \quad \frac{\Psi_i - \Psi_{i-1}}{a} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x \simeq x_i - a/2} \quad (4.2.10)$$

schreiben, woraus sich

$$(\Psi_{i+1} - \Psi_i) - (\Psi_i - \Psi_{i-1}) = a \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x \simeq x_i + a/2} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x \simeq x_i - a/2} \right) \quad (4.2.11)$$

ergibt. Nochmalige Anwendung des Mittelwertsatzes auf den Klammerausdruck in Gl.(4.2.11) ergibt

$$(\Psi_{i+1} - \Psi_i) - (\Psi_i - \Psi_{i-1}) = a^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_{x_i} . \quad (4.2.12)$$

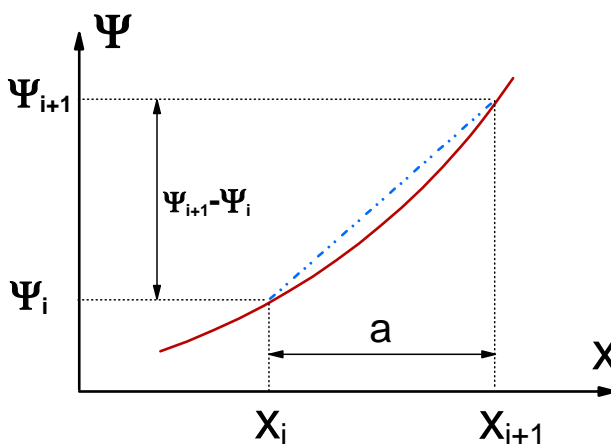


Abbildung 4.19: Zum Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Damit erhält man

$$m \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = D a^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_{x_i} . \quad (4.2.13)$$

Dies ist die Bewegungsgleichung des Massenelements an der Stelle x_i , die aber auch für jedes andere Massenelement der Kette gilt. Durch Umstellen der Glieder erhält man die allgemeingültige *Wellengleichung*

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{D a^2}{m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} .} \quad (4.2.14)$$

Die einzelnen Massenelemente der Federkette führen harmonische Schwingungen aus. Zusammen mit den obigen Überlegungen ist evident, daß $\Psi = \Psi_0 \sin(kx - \omega t)$ ein Lösungsansatz der Wellengleichung ist. Einsetzen dieses Lösungsansatzes in die Wellengleichung (4.2.14) ergibt

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \Psi$$

und

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -k^2 \Psi . \quad (4.2.15)$$

Auflösen nach Ψ und Gleichsetzen ergibt

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \nu^2 \lambda^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} . \quad (4.2.16)$$

Durch Vergleich von Gl.(4.2.14) und (4.2.16) erhält man die Wellengeschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{D a^2}{m}} . \quad (4.2.17)$$

Die Wellengeschwindigkeit ist also umso größer, je größer die Federkonstante der Kopplung und je kleiner die Masse der einzelnen Massenelemente ist. Die Differentialgleichung (4.2.16) ist für alle Wellen gültig. Es ergeben sich jedoch verschiedene Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Welle je nach Art der elastischen Kopplung der einzelnen Massenelemente. In Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen ist die elastische Kopplung, d.h. die Federkonstante D durch die elastischen Eigenschaften gegeben.¹² Das Verhältnis m/a^2 kann durch die Massendichte ρ ausgedrückt werden. Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit in Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen erhält man damit¹³

Longitudinalwellen im Festkörper $E = \text{Elastizitätsmodul}$	$v^2 = E/\rho$
Transversalwellen im Festkörper $G = \text{Schерmodul}$	$v^2 = G/\rho$
Transversale Seilwellen $\sigma = \text{Zugspannung}$	$v^2 = \sigma/\rho$
Longitudinalwellen in Flüssigkeiten $K = \text{Kompressionsmodul}$	$v^2 = K/\rho$
Longitudinalwellen in Gasen $p = \text{Druck}, \kappa = C_p/C_V$	$v^2 = \kappa p/\rho$

Da in Festkörpern $G < E$ gilt, ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Transversalwellen kleiner als diejenige von Longitudinalwellen.

¹²Eine ausführliche Diskussion der elastischen Eigenschaften und eine Definition der elastischen Konstanten ist in Kapitel 3 gegeben.

¹³Auf eine detaillierte Ableitung der Ausdrücke für die Wellengeschwindigkeit wird hier verzichtet. Sie kann in den einschlägigen Lehrbüchern gefunden werden.

Für Gase würde man eigentlich erwarten, daß die Schallgeschwindigkeit durch $v = \sqrt{p/\rho}$ gegeben ist, wie ursprünglich bereits von **Newton** (1686) postuliert wurde. Mit $\rho = 0.001293 \text{ g/cm}^3$ bei Normaldruck erhält man für Luft mit diesem Ausdruck allerdings $v = 280 \text{ m/s}$, was von dem gemessenen Wert von $v = 331 \text{ m/s}$ erheblich abweicht. Der Grund für die Abweichung liegt darin begründet, daß sich die Luft bei den Verdichtungen und Verdünnungen in einer Longitudinalwelle erwärmt bzw. abkühlt. Da die Druckänderungen allerdings sehr schnell erfolgen, kann kein Temperatúrausgleich mit der Umgebung stattfinden. Man darf deshalb für den Kompressionsmodul nicht den isothermen Wert p , sondern muß den "adiabatischen" Wert κp annehmen (die Bedeutung des Faktors κ wird erst in Kapitel 5 erklärt). Für Luft ist $\kappa = 1.4$, so daß man mit der **Laplaceschen** Gleichung $v = \sqrt{\kappa p/\rho}$ den Wert $v = 331 \text{ m/s}$ erhält.

Für ideale Gase gilt $p/\rho = pV/m = RT/M_{\text{mol}}$. Mit $R/M_{\text{mol}} = k_B/m_{\text{atom}}$ ergibt sich $v = \sqrt{\kappa k_B T/m_{\text{atom}}} \propto \sqrt{T}$.¹⁴ Das heißt, die Schallgeschwindigkeit steigt mit der Temperatur an.

4.2.4 Reflexion, Brechung und Interferenz von Wellen

Treffen Wellen auf die Grenze zweier Medien mit verschiedener Dichte oder unterschiedlichen elastischen Eigenschaften, so wirken diese Änderungen wie ein Hindernis für die Wellenausbreitung. Die Wellen werden zum Teil durchgelassen (Brechung) und zum Teil zurückgeworfen (Reflexion).

Reflexion

Ein Gummischlauch wird mit dem einen Ende an einer Wand befestigt und am anderen Ende durch Zug mit der Hand gespannt. Versetzt man dem in der Hand gehaltenen Ende einen kurzen Ruck nach aufwärts, so pflanzt sich die dadurch entstandene Auslenkung wie ein Wellenberg längs des Schlauches fort und wird an der Wand als Abwärtsbewegung, d.h. als Wellental zurückgeworfen. Diesen Vorgang nennt man Reflexion. Bei der Reflexion tritt offenbar ein *Phasensprung* von $\Delta\varphi = \pi$ statt (siehe Abb. 4.20a). Dieser Phasensprung entspricht einem Gangunterschied von einer halben Wellenlänge $\lambda/2$. Dieser Phasensprung wird durch das befestigte Schlauchende verursacht. Dadurch kann das letzte Segment des Schlauches keine Schwingung senkrecht zur Schlauchrichtung ausführen. Kommt also ein Wellenberg an, so führen bereits die vorletzten Segmente die ihnen nach oben erteilte Schwingung nicht voll aus, denn das feste Ende übt einen Zug nach unten auf sie aus, durch den sie einen Bewegungsantrieb ebenfalls nach unten erfahren. So kommt es zu Ausbildung eines Wellentales, das sich in der Gegenrichtung fortpflanzt.

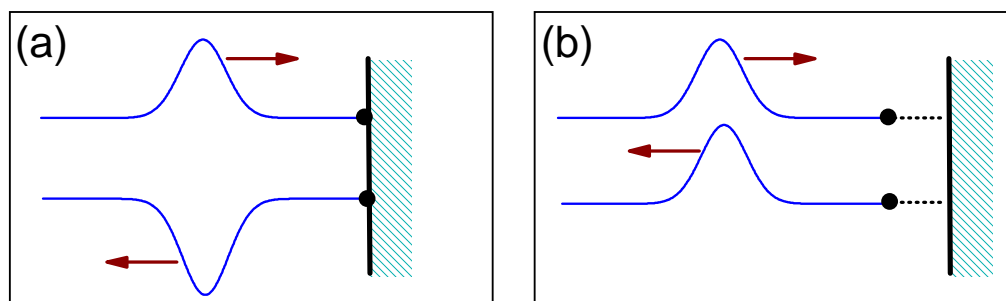


Abbildung 4.20: Zur Reflexion einer Transversalwellen an einer festen Wand (a) und an einem freien Ende (b).

Die Reflexion an der Wand stellt nur den Sonderfall einer Reflexion einer Welle an einem dichteren oder steiferen Medium dar. Führt man das Experiment mit dem Schlauch nochmals durch, befestigt aber

¹⁴Eine Erläuterung der verwendeten Zusammenhänge für ideale Gase erfolgt in Kapitel 5, Abschnitt 5.2.3.

das Schlauchende über einen dünnen Faden an der Wand – entsprechend einem dünneren oder weniger steifen Medium – findet kein Phasensprung statt (siehe Abb. 4.20b). Der ankommende Wellenberg ändert sein “Vorzeichen” bei der Reflexion nicht, er wird als Wellenberg reflektiert. Da das Schlauchende jetzt frei beweglich ist, kann das letzte Schlauchsegment die vom ankommenden Wellenberg hervorgerufene Schwingung nach oben voll ausführen. Es ist, als ob man diesem Ende eine ruckartige Bewegung nach oben erteilt hätte, die jetzt als Wellenberg nach links läuft.

Die Reflexion einer Seilwelle an einer Wand mit festem und losem Ende ist nur ein Spezialfall einer Reflexion einer Welle an einem dichteren und dünneren Medium. Allgemein kann man festhalten, daß eine Welle an der Grenze zwischen zwei Medien teilweise oder ganz reflektiert wird und zwar mit einem Phasensprung von $\Delta\varphi = \pi$ bei Reflexion am dichteren Medium und ohne Phasensprung bei Reflexion am dünneren Medium.

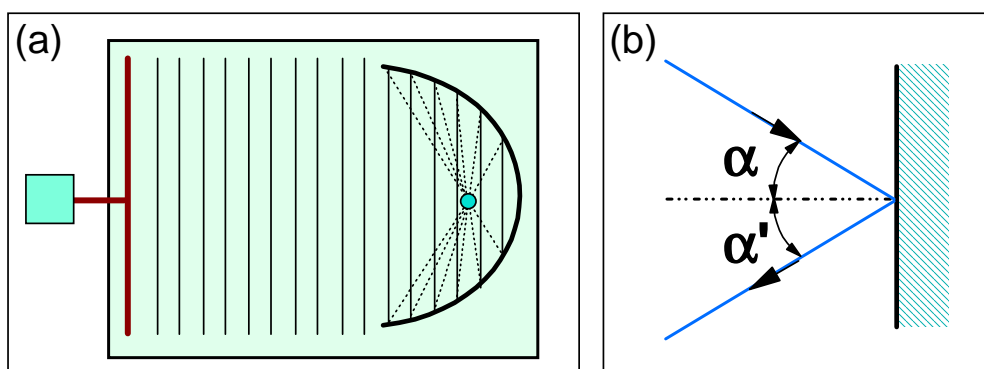


Abbildung 4.21: (a) Zur Reflexion einer ebenen Wasserwelle an einer parabolischen Metallfläche. (b) Zur Definition von Einfallswinkel und Ausfallswinkel.

Wir betrachten jetzt die Reflexion einer ebenen Wasserwelle an einer parabolisch gekrümmten Metallplatte (siehe Abb. 4.21). Die ebene Wasserwelle wird durch periodisches Eintauchen einer Metallplatte in eine flache, mit Wasser gefüllte Wanne erzeugt. An dem Parabolspiegel werden die Wasserwellen reflektiert. Die reflektierten Wellen laufen alle zum Brennpunkt des Parabolspiegels. Man erkennt daraus, daß der Reflexionswinkel α' der Wasserwellen gleich ihrem Einfallswinkel α ist. Unter dem Einfallswinkel bzw. Ausfallswinkel versteht man den Winkel zwischen dem Lot auf die Spiegeloberfläche und der Ausbreitungsrichtung der Welle vor bzw. nach der Reflexion. Man kann also festhalten: *Bei der Reflexion von Wellen ist der Einfallswinkel gleich dem Ausfallswinkel.*

Brechung

Legt man in Abb. 4.21 statt eines Parabolspiegels eine flache Plexiglasscheibe schräg in die Wasserwellenwanne (siehe Abb. 4.22), so beobachtet man eine Änderung der Ausbreitungsrichtung der Wasserwellen. Die Wellen werden zum Lot auf die Grenzfläche hin gebrochen ($\alpha > \beta$). Die Ursache hierfür ist die geringere Wassertiefe über der Plexiglasscheibe. Dort besitzen die Wasserwellen eine geringere Ausbreitungsgeschwindigkeit als im tiefen Wasser.

Allgemein kann man festhalten, daß an der Grenzfläche zweier Medien Wellen gebrochen werden. Beim Übergang vom dünneren zum dichteren Medium (größere \Rightarrow kleinere Ausbreitungsgeschwindigkeit) beobachtet man immer eine Brechung zum Lot hin.¹⁵

¹⁵Eine genaue Diskussion der Brechung von Wellen erfolgt im Zusammenhang mit der Diskussion der Eigenschaften elektromagnetischer Wellen.

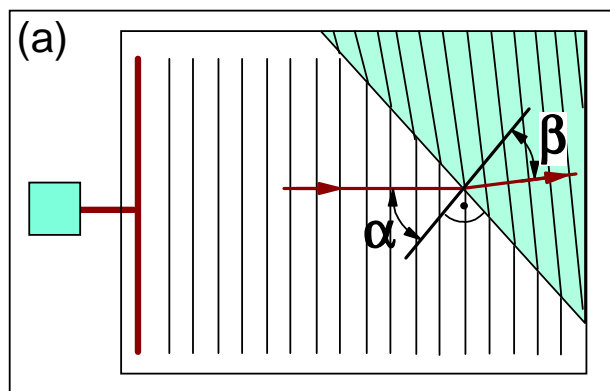


Abbildung 4.22: Zur Brechung von Wellen. Die getönte Fläche markiert den Bereich mit reduzierte Wassertiefe.

Interferenz

Wenn man in demselben Medium mehrere Wellen gleichzeitig erzeugt, so durchkreuzen sich die einzelnen Wellensysteme an gewissen Stellen. Es stellt sich dann die Frage, welche Auslenkung der Massenpunkt erfährt, der unter der gemeinsamen Wirkung mehrerer Wellen steht. Die Antwort auf diese Frage wurde bereits in Abschnitt 4.1 im Hinblick auf die Superposition von Schwingungen gegeben. Dort erhielt man das einfache Ergebnis, daß die resultierende Auslenkung im allgemeinen gleich der algebraischen Summe der Einzelauslenkungen ist. Wir nannten diesen Satz das Prinzip der ungestörten Überlagerung. Wendet man diesen Satz auf die Wellenausbreitung an, so erhält man das Ergebnis, daß sich jedes Wellensystem so ausbreitet, als ob die anderen Wellensysteme nicht vorhanden wären. Dies gilt für elastische Wellen allerdings nur so lange, wie die resultierende Auslenkung nicht zu groß wird. Verläßt man den **Hookeschen** Bereich, so liegt kein lineares System mehr vor und das Superpositionsprinzip verliert seine Gültigkeit.

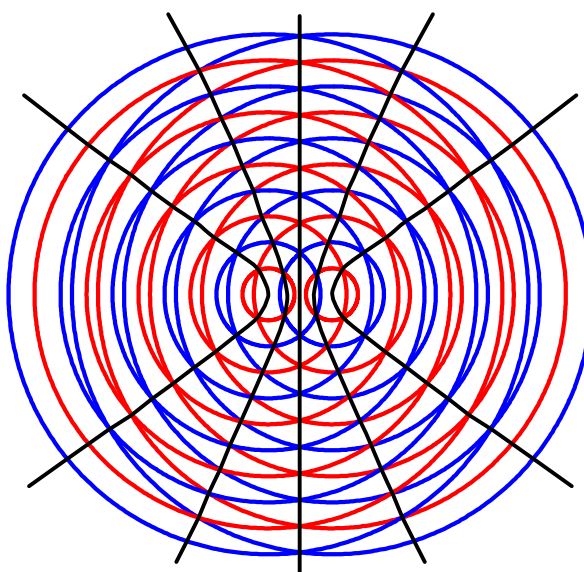


Abbildung 4.23: Zur Interferenz von Wasserwellen. Die Kreise sollen abwechselnd Wellenberge und -täler darstellen.

Ungestörte Überlagerung kann man besonders schön bei Wasserwellen beobachten. Die durch Regentropfen erzeugten kleinen Kreiswellen bilden sich auf einer von großen Wasserwellen durchsetzten Oberfläche genauso aus wie auf einer ruhenden Wasseroberfläche. Erzeugt man in einer Wasserwanne zwei Kreiswellen mit gleicher Frequenz und Phase, sind vom Entstehungsort ausgehende hyperbelförmige Zonen von Wasserwellenbergen und Wellentälern zu beobachten. Dazwischen gibt es Gebiete, die frei von Wellen sind (siehe Abb. 4.23). Auslöschung erfolgt, wenn Wellental und Wellenberg zusammentreffen, die Wasseroberfläche bleibt dann in Ruhe. Trifft Berg und Berg oder Tal und Tal zusammen, so verstärkt sich die Wellenbewegung. Man bezeichnet diese Erscheinung als *Interferenz*.

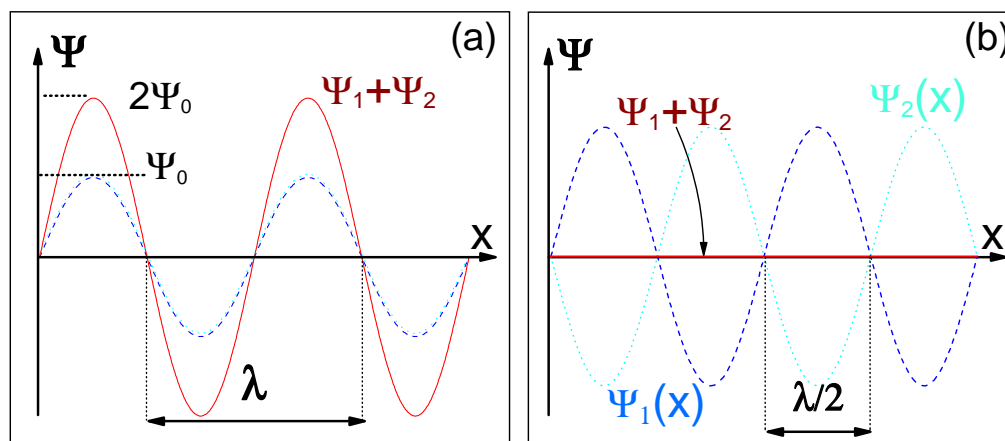


Abbildung 4.24: Zur Interferenz zweier eindimensionaler Wellen gleicher Frequenz und Ausbreitungsrichtung. Der Gangunterschied beträgt in (a) $j \cdot \lambda$ und in (b) $(j + 1/2) \cdot \lambda$.

Zwei Wellen gleicher Frequenz und Phase verstärken sich (*konstruktive Interferenz*), wenn ihr Gangunterschied Δ gerade ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge λ ist, d.h. $\Delta = j \cdot \lambda$ mit $j =$ ganze Zahl. Dieser Gangunterschied entspricht einer Phasenschiebung von $\Delta\varphi = j \cdot 2\pi$. Entsprechend bekommt man Auslöschung (*destruktive Interferenz*), wenn für den Gangunterschied $\Delta = (j + 1/2) \cdot \lambda$ oder die Phasenschiebung $\Delta\varphi = (2j + 1) \cdot \pi$ gilt (siehe Abb. 4.24).

Das Interferenzbild bleibt stationär (zeitlich unverändert), wenn die beiden Wellenerreger mit zeitlich konstanter Phasenbeziehung schwingen. Das Zustandekommen von Interferenzen zwischen zwei Wellenzügen ist im allgemeinen nur dann möglich, wenn zwischen ihnen eine *konstante Phasenbeziehung* besteht, d.h. wenn die Phasenschiebung zwischen den Schwingungsvorgängen in den beiden Erregerzentren jedenfalls für die Dauer von mehreren Schwingungen konstant bleibt. In diesem Fall nennt man die interferierenden Wellenzüge *kohärent*. Bei nicht kohärenten Wellen, bei denen sich die Phasendifferenz ständig schnell und unregelmäßig ändert, verwaschen die auftretenden Interferenzen, so daß ihre Beobachtung nicht mehr möglich wird.¹⁶

4.2.5 Stehende Wellen

Wird eine Welle an einem Medium reflektiert, interferiert sie mit sich selbst. Einlaufende und rücklaufende Wellen überlagern sich, und man sieht an jeder Stelle nur die Resultierende. Da einlaufende und reflektierte Welle kohärent sind, bildet sich ein stationäres Interferenzmuster aus. Es entsteht eine *stehende Welle* mit stationären Knoten (Stellen der Ruhe oder verschwindender Auslenkung) und Bäuchen (Stellen maximaler Bewegung oder maximaler Auslenkung).

¹⁶Die Erfahrung zeigt, daß die von zwei verschiedenen Lichtquellen ausgehenden Wellen inkohärent sind und keine beobachtbaren Interferenzen liefern. Kohärentes Licht kann man heute allerdings mit Lasern erzeugen, die extrem kohärentes Licht aussenden. Dieses extrem kohärente Licht wird z.B. für die *Holographie* benötigt.

Betrachtet man eine Seilwelle, die an einer Wand reflektiert wird, so sind die einlaufende und die reflektierte Welle durch

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \Psi_0 \sin(kx - \omega t) \\ \text{und} \quad \Psi_2 &= \Psi_0 \sin(kx + \omega t + \Delta\varphi) \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

gegeben, wobei $\Delta\varphi$ ein eventuell bei der Reflexion auftretender Phasensprung ist. Die resultierende Schwingung ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_1 + \Psi_2 = 2\Psi_0 \cos(kx + \Delta\varphi/2) \sin(\omega t + \Delta\varphi/2) \\ \text{oder} \quad \Psi &= \Psi_0(x) \sin(\omega t + \Delta\varphi/2) . \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

Man erhält also eine Schwingung, deren Amplitude vom Ort abhängt, jedoch nicht deren Phase, da im Argument der Sinusfunktion die Ortskoordinate nicht mehr auftritt. Die Phasengeschwindigkeit ist also $v = 0$, man spricht deshalb von einer stehenden Welle.

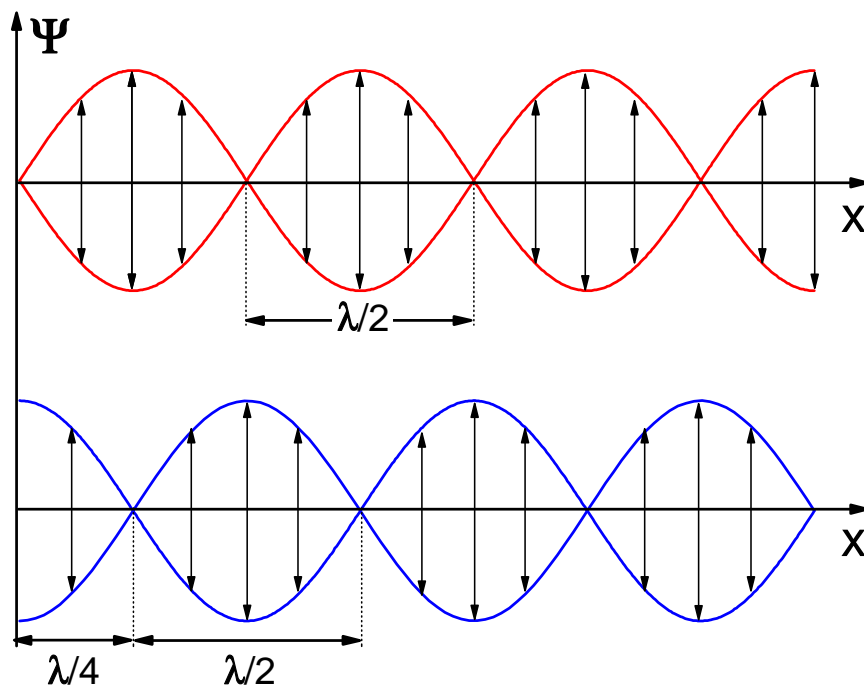


Abbildung 4.25: Zur Ausbildung einer stehenden Welle durch Reflexion am festen (oben) und losen Ende (unten).

Für die Reflexion am festen Ende tritt ein Phasensprung von $\Delta\varphi = \pi$ auf. Man erhält damit

$$\Psi_0(x) = 2\Psi_0 \cos(kx + \pi/2) = 2\Psi_0 \sin(kx) = 2\Psi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) . \quad (4.2.20)$$

Am festen Ende ($x = 0$) hat die stehende Welle einen Schwingungsknoten (siehe Abb. 4.25a).

Für die Reflexion am losen Ende tritt kein Phasensprung auf. Man erhält damit

$$\Psi_0(x) = 2\Psi_0 \cos(kx) = 2\Psi_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right). \quad (4.2.21)$$

Am losen Ende ($x = 0$) hat die stehende Welle also einen Schwingungsbauch (siehe Abb. 4.25b).

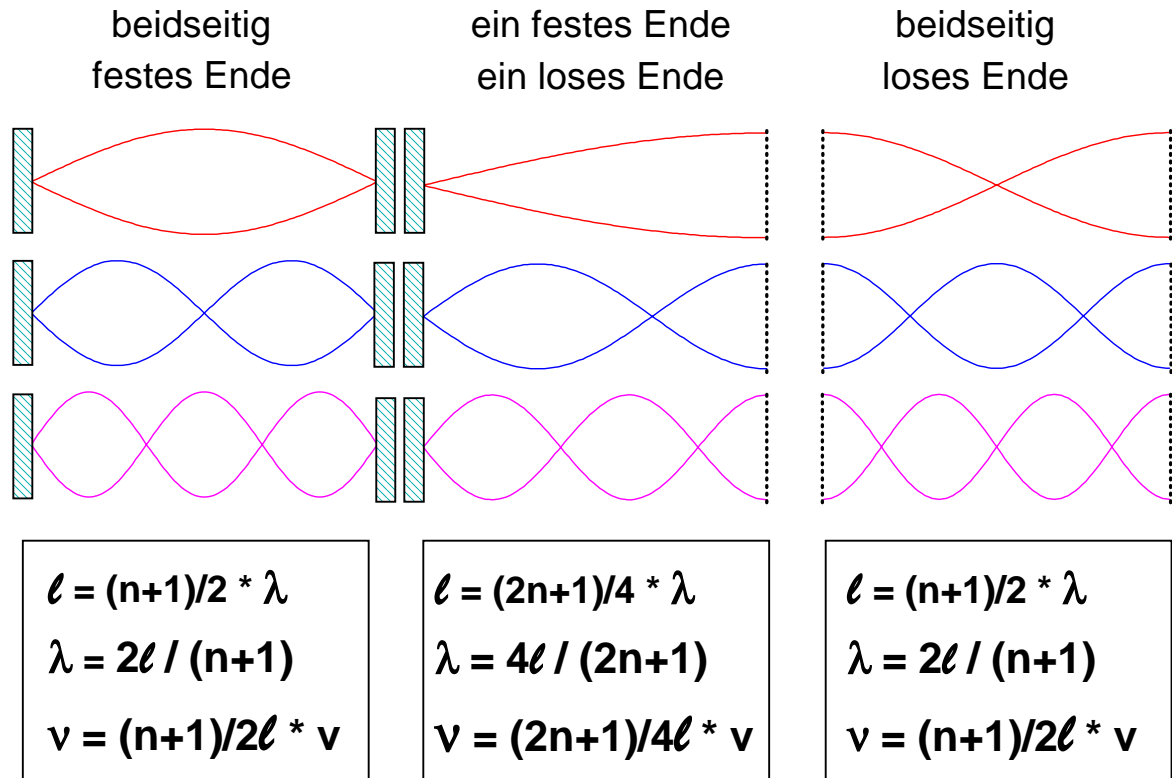


Abbildung 4.26: Bedingung für die Ausbildung von stehenden Wellen bei beidseitigem festen Ende, je einem festen und losen Ende und beidseitigem offenen Ende. Grundton (oben), erster Oberton (Mitte) und zweiter Oberton (unten).

Bisher wurde nur eine Reflexionsstelle berücksichtigt. Die zurückkehrende Welle wird aber nach einiger Zeit ebenfalls an die Grenze des Mediums gelangen und wird dort nochmals reflektiert. Sie überlagert sich mit der schon vorhandenen stehenden Welle. Soll es nicht zur Auslöschung kommen, müssen bestimmte Bedingungen erfüllt sein, die in Abb. 4.26 zusammengefaßt sind.

Ein Beispiel für eine stehende Welle bei zwei festen Enden ist die Saitenschwingung. Mit $v = \sqrt{\sigma/\rho}$ und $\sigma = F/A$, wobei A der Saitenquerschnitt und F die Kraft ist, mit der die Saite gespannt wird, erhält man die Frequenz des Grundtons zu $\nu_0 = \frac{1}{2\ell} \sqrt{F/A\rho}$.

4.2.6 Schallwellen

Mechanische Wellen sind an deformierbare Körper als Ausbreitungsmedium gebunden. Das Ausbreitungsmedium Luft ist für den Menschen von besonderer Bedeutung. Der Mensch kann mechanische Wellen im Frequenzbereich zwischen etwa 20 Hz und 20 kHz akustisch wahrnehmen. Man bezeichnet diese Wellen als *Schallwellen*. In gasförmigen Medien sind Schallwellen Longitudinalwellen, die Gasmoleküle werden in Fortpflanzungsrichtung der Welle periodisch aus ihrer Ruhelage ausgelenkt. Die

Maxima und Minima der Auslenkung bei einer Transversalwelle entsprechen hier Verdünnungen und Verdichtungen des Mediums. Es resultiert eine sich fortplanzende Druckschwankung.

Schallwellen unterhalb von 20 Hz bezeichnet man als *Infraschall*. Man kann diese niederfrequenten Druckschwankungen spüren (z.B. beim Fahren im Auto bei offenem Fenster). Schallwellen oberhalb von 20 kHz bezeichnet man als *Ultraschall*, oberhalb von etwa 1 GHz als *Hyperschall*. Ultraschallwellen haben eine breite Anwendung in der Medizintechnik und der zerstörungsfreien Werkstoffprüfung.

Überlagert man kohärente Schallwellen, so erhält man stehende Schallwellen. Dies kann einfach nachgewiesen werden, indem man zwei parallel ausgerichtete Lautsprecher im Abstand d voneinander aufstellt. Sie werden synchron von einem gemeinsamen Frequenzgenerator angeregt, wodurch die von beiden Lautsprechern abgestrahlten Wellen eine konstante Phasenbeziehung besitzen. Mit einem Mikrofon wird das Gebiet vor den Lautsprechern abgetastet und die örtliche Intensität mit einem Meßgerät angezeigt. Wie bei den Wasserwellen beobachtet man Zonen der Auslöschung und Verstärkung. Auch Schallwellen können interferieren !

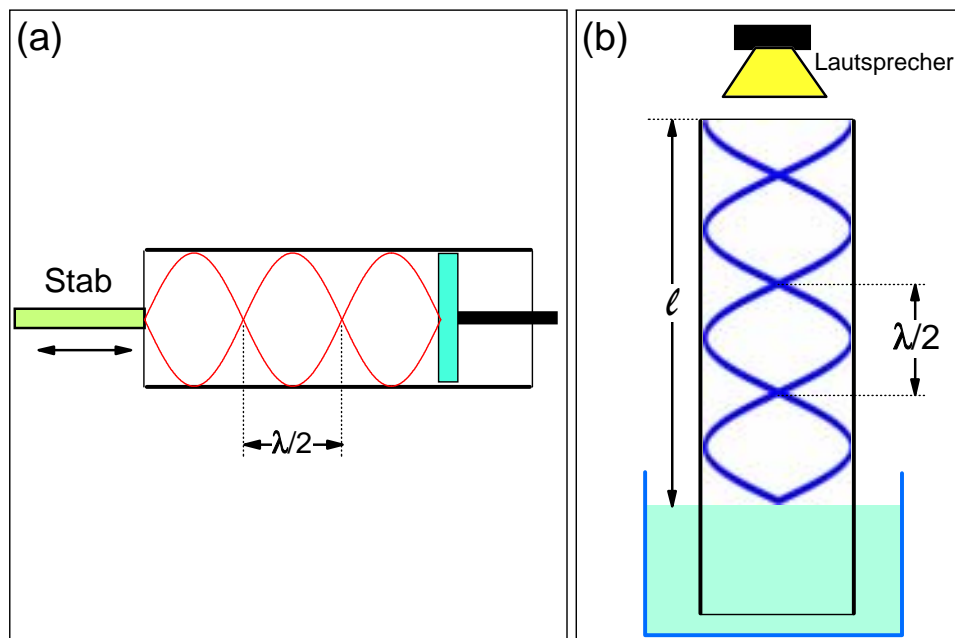


Abbildung 4.27: Stehende Schallwellen im **Kundtschen** (a) und **Quinckesche** Rohr (b).

Stehende Schallwellen kann man sehr schön mit Hilfe des **Kundtschen** Rohres nachweisen (siehe Abb. 4.27a). Dazu bringt man in ein Glasrohr, das auf einer Seite mit einem verschiebbaren Stempel abgeschlossen ist, etwas Korkmehl. Auf der anderen Seite wird ein Metallstab, der in das Glasrohr hineinragt, zu Longitudinalschwingungen angeregt. Die Schwingung des Stabes überträgt sich auf die Luftsäule im Rohr. Durch Reflexion der Schallwellen am mit dem Stempel abgeschlossenen Rohrende treten stehende Schallwellen auf. Es treten genau dann stehende Wellen auf, wenn sich am Rohrende ein Schwingungsknoten ausbilden kann. Das feine Korkmehl wird an den Stellen der Schwingungsbäuche aufgewirbelt und lagert sich an den Stellen der Schwingungsknoten ab. Der Abstand benachbarter Schwingungsknoten beträgt $\lambda/2$. Bestimmt man diese Abstände durch Ausmessen, so läßt sich bei bekannter Frequenz die Schallgeschwindigkeit $v = \nu \lambda$ in Luft bestimmen. Setzt man andererseits die Schallgeschwindigkeit in Luft als bekannt voraus, so kann man mit dem Experiment die Schallgeschwindigkeit im Metallstab bestimmen. Die Wellenlänge der Grundschwingung des Metallstabes ist gleich der doppelten Stablänge, die leicht bestimmt werden kann. Mit $\nu = v_{\text{Luft}}/\lambda_{\text{Luft}} = v_{\text{Metall}}/\lambda_{\text{Metall}}$ erhält man $v_{\text{Metall}} = v_{\text{Luft}} (\lambda_{\text{Metall}}/\lambda_{\text{Luft}}) = v_{\text{Luft}} (2l/\lambda_{\text{Luft}})$.

Ein weiteres Experiment zum Nachweis stehender Schallwellen kann mit dem **Quinckeschen** Resonanzrohr durchgeführt werden (siehe Abb. 4.27b). Hierzu wird ein senkrecht angebrachtes, an beiden Seiten offenes Glasrohr ein Stück weit in ein Wasserbad eingetaucht. Durch Heben und Senken des Wassergefäßes kann man den Wasserspiegel im Glasrohr verändern. Oben am Rohr befindet sich ein Lautsprecher, der einen Ton konstanter Frequenz erzeugt. Läßt man den Wasserspiegel ansteigen, so kommt es bei einer bestimmten Wasserhöhe zu einer Resonanzerscheinung (der Ton wird lauter). Dies ist der Fall, wenn sich eine stehende Welle mit einem Knoten an der Wasseroberfläche und einem Schwingungsbauch am offenen Ende ausbilden kann. Die Luftsäule im Rohr muß also eine Länge von (vergleiche Abb. 4.26)

$$l = \frac{2n+1}{4} \lambda \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2.22)$$

haben. Füllt man Kohlendioxid in das **Quinckesche** Resonanzrohr ein, liegen die Resonanzstellen und damit die Knoten und Bäuche der stehenden Welle enger zusammen. Der Grund dafür ist, daß die Schallgeschwindigkeit und damit die Wellenlänge in Kohlendioxid kleiner als in Luft ist.

Elongation, Schallschnelle, Druck

Bei stehenden Schallwellen schwingen die Moleküle zu beiden Seiten eines Schwingungsknotens mit einer Phasendifferenz von π (siehe Abb. 4.28). Die Knoten der Bewegung sind deshalb Orte größter Druckschwankungen. Schwingen die Teilchen aufeinander zu, so wächst der Druck im Schwingungsknoten auf einen Wert über den Druck des ungestörten Mediums. Entfernen sie sich, wird der Druck kleiner. Im Bereich der Schwingungsbäuche bleibt der Druck dagegen immer konstant. *Druckbäuche und Schwingungsknoten bzw. Druckknoten und Schwingungsbäuche fallen also örtlich zusammen.*

Für die Teilchenelongation in einer stehenden Welle gilt (für $\Delta\varphi = 0$)

$$\Psi(x, t) = 2\Psi_0 \cos(kx) \sin(\omega t) . \quad (4.2.23)$$

Daraus ergibt sich die Geschwindigkeit der Teilchenbewegung zu

$$u = \frac{d\Psi(x, t)}{dt} = 2\Psi_0 \omega \cos(kx) \cos(\omega t) . \quad (4.2.24)$$

Hierbei ist Ψ_0 die Schwingungsamplitude und $u_0 = \Psi_0\omega$ die Geschwindigkeitsamplitude, die auch als *Schallschnelle* bezeichnet wird.

Der Druck ist proportional der örtlichen Veränderung der Elongation, d.h.

$$p \propto \frac{d\Psi(x, t)}{dx} = -2\Psi_0 k \sin(kx) \sin(\omega t) . \quad (4.2.25)$$

Man erkennt, daß auch der Druck Bäuche und Knoten besitzt, daß aber Knotenstellen des Druckes mit Bäuchen der Bewegung zusammenfallen und umgekehrt. Das heißt, auch die Druckschwankungen stellen einen harmonischen Vorgang dar.

Die *Druckamplitude* ist gegeben durch

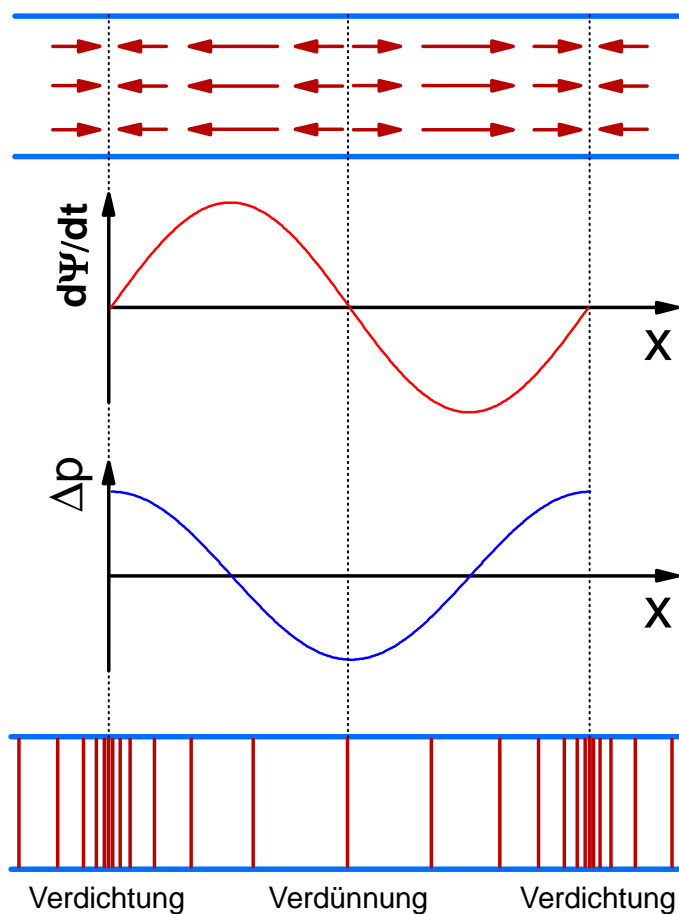


Abbildung 4.28: Geschwindigkeits- und Druckverteilung bei einer stehenden Schallwelle. Die Pfeile deuten die Richtung der Schwingungsbewegung an, die Länge der Pfeile die Geschwindigkeit der Teilchenbewegung.

$$p_0 = u_0 \rho v , \tag{4.2.26}$$

wobei ρ ist die Dichte des Mediums und v die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalls im entsprechenden Medium ist. Die Größe ρv wird als *Schallwiderstand* bezeichnet. Er ist ein Maß dafür, wie gut ein Medium den Schall leitet. Dort wo sich der Schallwiderstand unstetig ändert, wird eine Schallwelle reflektiert.

4.2.7 Energie im Schallfeld

Die schwingenden Teilchen im Schallfeld besitzen kinetische Energie. Mit der Teilchenelongation $\Psi(x, t) = \Psi_0 \sin(kx - \omega t)$ erhält man die Geschwindigkeit der Teilchenbewegung zu $u = -\Psi_0 \omega \cos(kx - \omega t) = -u_0 \cos(kx - \omega t)$. Damit ergibt sich die kinetische Energie zu

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m u^2 = \frac{1}{2} m u_0^2 \cos^2(kx - \omega t) = \frac{1}{2} m \Psi_0^2 \omega^2 \cos^2(kx - \omega t) . \tag{4.2.27}$$

Als Energiedichte einer Welle bezeichnet man die kinetische Energie pro Volumeneinheit

$$\frac{E_{\text{kin}}}{V} = \frac{1}{2} \rho \Psi_0^2 \omega^2 \cos^2(kx - \omega t) . \quad (4.2.28)$$

Im zeitlichen Mittel beträgt die Energiedichte

$$\overline{\frac{E_{\text{kin}}}{V}} = \frac{1}{4} \rho \Psi_0^2 \omega^2 , \quad (4.2.29)$$

da das zeitliche Mittel $\overline{\cos^2(kx - \omega t)} = 1/2$ ist.

Außer der kinetischen Energie besitzen die Moleküle im ausgelenkten Zustand noch potentielle Energie E_{pot} . Sie ist jedoch im zeitlichen Mittel genau gleich groß wie $\overline{E_{\text{kin}}}$. Damit beträgt die gesamte Energiedichte

$$\boxed{\overline{\frac{E}{V}} = \frac{\overline{E_{\text{kin}}} + \overline{E_{\text{pot}}}}{V} = \frac{1}{2} \rho \Psi_0^2 \omega^2 .} \quad (4.2.30)$$

Die Intensität oder *Schallstärke* I wird definiert als

$$I = \overline{\frac{E_{\text{kin}}}{V}} v = \frac{1}{2} \rho \Psi_0^2 \omega^2 v = \frac{1}{2} \rho u_0^2 v . \quad (4.2.31)$$

Die Dimension der Schallstärke ist

$$[I] = 1 \frac{\text{J}}{\text{s m}^2} = 1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} . \quad (4.2.32)$$

Die Schallstärke ist die Energie, die pro Zeiteinheit auf eine senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Schallwelle gestellte Flächeneinheit trifft. Man spricht deshalb von einer *Energieflußdichte*.

Hörempfinden

Das menschliche Ohr besitzt nicht für alle Frequenzen die gleiche Empfindlichkeit. Seine höchste Empfindlichkeit hat es etwa bei 3 kHz. Die Hörschwelle, d.h. die Schallstärke, die gerade noch wahrgenommen wird, liegt für diese Frequenz bei etwa 10^{-13} W/m^2 . Für eine Frequenz von 1 kHz beträgt sie nur noch 10^{-12} W/m^2 . Diese Schallstärke entspricht einer Schwingungsamplitude von nur $\Psi_0 \simeq 10^{-10} \text{ m}$. Wäre das Ohr nur ein wenig empfindlicher, so könnte es die thermische Molekülschwingung als Rauschen wahrnehmen. Die Schmerzgrenze des menschlichen Ohres liegt bei etwa 10^{-6} W/m^2 . D.h. der Empfindlichkeitsbereich des Ohres erstreckt sich über 6 Größenordnungen.¹⁷

Es besteht kein linearer Zusammenhang zwischen Hörempfinden (*Lautstärke*) und Schallstärke. Näherungsweise wird dieser Zusammenhang durch das **Weber-Fechnersche** Gesetz beschrieben. Danach verhalten sich die Empfindung des Ohres und der Logarithmus der physikalischen Intensität proportional zueinander. D.h.

¹⁷Es sei hier angemerkt, daß kein künstliches Meßgerät ohne Umschaltvorrichtung einen derart großen Bereich erfassen kann.

$$\text{Empfindung des Ohres} = \text{const.} \cdot \log_{10} I . \quad (4.2.33)$$

Auf den Hörschwellenwert von $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ bei 1 kHz ist der *Schallpegel* L bezogen. Man definiert den Schallpegel L zu

$$\text{Schallpegel } L = 10 \cdot \log_{10} \frac{I}{I_0} \quad \text{mit } I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2 . \quad (4.2.34)$$

Der Schallpegel wird in der dimensionslosen Zahl dB (= dezibel = 1/10 Bel) angegeben und stellt eine Umrechnung der Schallstärke in ein logarithmisches Maß dar. Ein Schallpegel von 20 dB bedeutet $L = 10 \cdot 2$, also $I/I_0 = 100$ bzw. $I = 100 \times 10^{-12} = 10^{-10} \text{ W/m}^2$. Ein Schallpegel von 120 dB entspricht also einer Schallstärke von 1 W/m^2 .

Leider gibt die dB-Skala nicht unser Hörempfinden wieder, da dieses von der Frequenz abhängt. Um die Lautstärke L_s eines Geräusches zu definieren, bezieht man sich auch auf den Hörschwellenwert I_0 von 1 kHz. Man bestimmt die Lautstärke durch eine Vergleichsmessung in folgender Weise: Man läßt einen 1 kHz Ton so laut tönen, daß man ihn ebenso laut wie das zu bestimmende Geräusch empfindet. Die Intensität I des 1 kHz Tons wird gemessen und man definiert die Lautstärke dann zu

$$\text{Lautstärke des Geräusches } L_s = 10 \cdot \log_{10} \frac{I}{I_0} . \quad (4.2.35)$$

Die so definierte Lautstärke ist zwar eine reine Zahl, trägt aber die Einheit *Phon*. Für die Frequenz von 1 kHz entspricht also der Schallpegel in dB exakt der Lautstärke in Phon. Für die meisten anderen Frequenzen ist wegen der geringeren Empfindlichkeit des menschlichen Ohres die Lautstärke in Phon kleiner als der Schallpegel in dB (siehe Abb. 4.29). Wichtig ist, daß die Lautstärke immer durch eine Vergleichsmessung ermittelt werden muß. Führt man solche Vergleichsmessungen im gesamten hörbaren Frequenzbereich durch, so erhält man die Kurven gleicher Lautstärke, die in Abb. 4.29 gezeigt sind.

Typische Werte für die Lautstärke sind: Flüstern: 20 Phon; Sprache: 50 Phon; Preßlufthammer: 90 Phon; Motorrad: 100 Phon; Flugzeug: 110 Phon.

Für die Addition von Schallintensitäten gilt

$$L_{s,\text{ges}} = 10 \log_{10} \frac{(I_1 + I_2)}{I_0} . \quad (4.2.36)$$

Addiert man z.B. zwei Schallquellen mit einer Lautstärke von 80 Phon, so erhält man $L_{s,\text{ges}} = 10 \log_{10} 2 \times 10^8 = 83 \text{ Phon}$.

4.2.8 Der Doppler-Effekt

Werden Wellen der Frequenz ν von einer ruhenden Quelle Q ausgesandt, registriert ein ebenfalls ruhender Beobachter B genau ν Schwingungen pro Sekunde. Bewegen sich aber Sender und Empfänger relativ zueinander, nimmt der Beobachter B eine andere Frequenz ν' wahr.

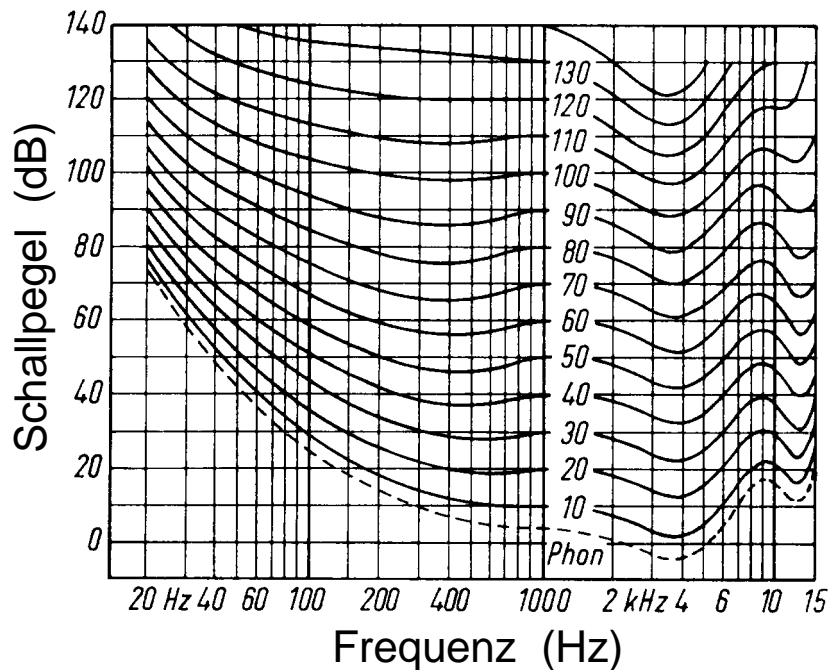


Abbildung 4.29: Kurven gleicher Lautstärke im hörbaren Frequenzbereich ermittelt durch Vergleichsmessungen. Die gestrichelte Kurve gibt die Hörschwelle an.

Bewegter Beobachter

Bewegt sich der Beobachter B mit der Geschwindigkeit w auf die im Medium (z.B. Luft) ruhende Quelle Q zu oder entfernt sich von dieser, so beträgt die Geschwindigkeit der Wellenberge relativ zum Beobachter $v' = v \pm w$ (siehe Abb. 4.30). Die Zeit T' zwischen 2 Wellenbergen wird dadurch $T' = \lambda/(v \pm w)$. Mit $\nu' = 1/T' = (v \pm w)/\lambda$ ergibt sich die vom Beobachter wahrgenommene Frequenz zu

$$\nu' = \nu \left(1 \pm \frac{w}{v} \right) \quad (4.2.37)$$

Die vom Beobachter wahrgenommene Frequenz ν' ist also größer, wenn sich der Beobachter auf die Quelle zubewegt und kleiner, wenn er sich von ihr wegbewegt.

Bewegte Quelle

Bewegt sich die Quelle Q auf den Beobachter B mit der Geschwindigkeit w zu oder von diesem weg, so ändert sich der Abstand zwischen zwei Wellenbergen von λ auf $\lambda' = \lambda \mp wT$ (– für Bewegung auf Beobachter zu, + für Bewegung vom Beobachter weg). Mit $\lambda = v/\nu$ erhält man $v/\nu' = v/\nu \mp w/\nu$ und damit

$$\nu' = \frac{\nu}{1 \pm \frac{w}{v}} \quad (4.2.38)$$

Das heißt, die wahrgenommene Frequenz ν' ist größer als ν , wenn sich die Quelle auf den Beobachter zubewegt und kleiner, wenn sie sich von ihm wegbewegt.

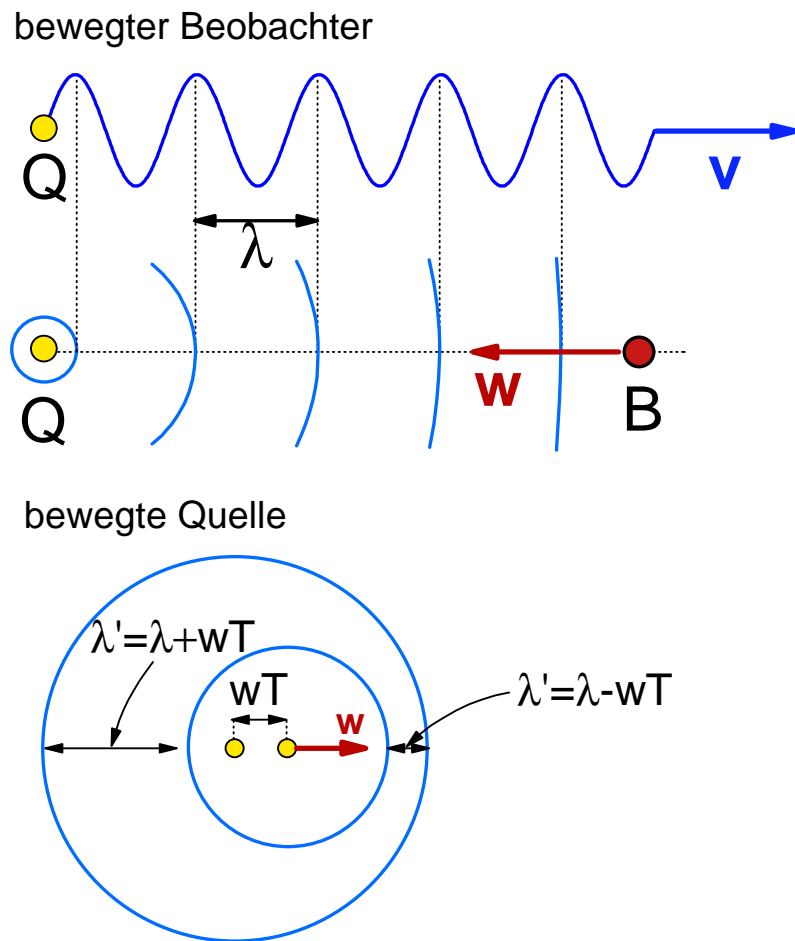


Abbildung 4.30: Zum Doppler-Effekt bei bewegtem Beobachter B (oben) und bewegter Quelle Q (unten).

Wichtig ist, daß ein Unterschied besteht, ob sich die Quelle oder der Beobachter bewegt. Die Frequenzänderung hängt also nicht nur von der Relativgeschwindigkeit ab!¹⁸

Schallmauer, Überschallgeschwindigkeit, Machscher Kegel

Wird $w = v$, d.h. bewegt sich der Sender mit Schallgeschwindigkeit, spricht man vom Erreichen der *Schallmauer*. Die Kreise, die die entstandenen Wellenberge darstellen (siehe Abb. 4.31), berühren sich am Ort der bewegten Schallquelle. Dort verstärken sich die Amplituden zu sehr großen Werten.

Für $w > v$ liegt *Überschallgeschwindigkeit* vor. Der Schall bleibt hinter der Schallquelle zurück und verdichtet sich zu Bugwellen, wie sie in ähnlicher Weise auch bei fahrenden Schiffen auftreten. Als Umhüllende der Bugwellen ergibt sich der so genannte **Machsch Kegel** mit dem Öffnungswinkel α , der durch

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{v}{w} = \frac{1}{M} \quad (4.2.39)$$

¹⁸Dies widerspricht aber nicht dem Relativitätsprinzip, da Schallwellen an einen Träger (Medium) gebunden sind. Im Gegensatz dazu sind elektromagnetische Wellen nicht an einen Träger gebunden. Hier ist nur die Relativgeschwindigkeit zwischen Quelle und Beobachter maßgebend.

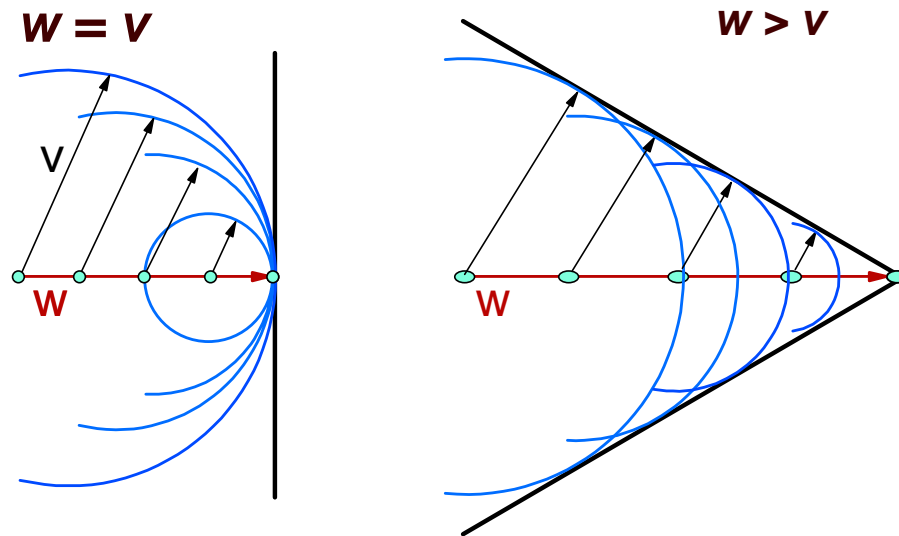


Abbildung 4.31: Zur Schallmauer und Machschem Kegel.

gegeben ist. Hierbei ist M die *Machsche Zahl*.

