

Teil III

Anhang

A Kirchhoffsche Beugungstheorie

Wir haben in Abschnitt 5.2 einige Beugungsanordnungen mit Hilfe des einfachen Fresnel-Huygensschen Prinzip beschrieben. Dabei haben wir angenommen, dass jeder Punkt eines beugenden Objekts die Quelle einer Huygensschen Elementarwelle bildet. Diese intuitive Bild haben wir aber nie von fundamentalen Prinzipien abgeleitet. **Gustav Kirchhoff** zeigte, dass sich die in Abschnitt 5.2 abgeleiteten Resultate auch aus der skalaren Wellengleichung herleiten lassen. Er formulierte das Beugungsproblem für eine skalare Welle in einer mathematisch strengeren Weise als Randwertproblem und konnte das in Abschnitt 5.2 benutzten Huygens'schen Prinzip im Nachhinein rechtfertigen.

In Abschnitt 5.2 haben wir die Amplitude an einem Punkt P dadurch ermittelt, indem wir die Amplituden der einzelnen Teilwellen aufsummiert haben. Es gibt aber auch einen völlig anderen Weg, die Gesamtamplitude am Punkt P zu bestimmen, der auf der Potenzialtheorie beruht. Dabei sind wir nicht mehr an den Quellen der Teilwellen selbst interessiert, sondern an dem skalaren Feldern und ihren Ableitungen auf einer beliebigen geschlossenen Fläche, die den Punkt P umschließt. Wir nutzen dabei von der Tatsache aus, dass ein elektromagnetisches Feld an jedem Punkt innerhalb eines abgeschlossenen Bereichs eindeutig durch seine Randbedingungen bestimmt ist.

Wir wollen annehmen, dass sich die einzelnen Frequenzen des Wellenfeldes durch eine Fourier-Analyse auftrennen lassen, so dass wir uns nur mit einer Frequenz beschäftigen müssen. Ohne die genaue räumliche Form des Wellenfeldes zu spezifizieren, können wir den Ansatz $\tilde{\Psi} = \Psi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ verwenden. Durch Einsetzen in die Wellengleichung $\nabla^2\tilde{\Psi} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\tilde{\Psi}}{\partial t^2}$ erhalten wir

$$\nabla^2\Psi = -\frac{\omega^2}{c^2}\Psi = -k_0^2\Psi. \quad (\text{A.1})$$

Diese so genannte *Helmholtz-Gleichung* bezieht sich auf jede Komponente des elektrischen oder magnetischen Feldes. Wir werden sehen, dass das Feld $\Psi(0)$ an einem Ort innerhalb eines geschlossenen Bereichs durch Ψ und seine Ableitungen auf dem Rand dieses Bereichs ausgedrückt werden kann. In einfachen Fällen ist das Ergebnis dem bereits oben intuitiv gefundenen sehr ähnlich.

A.1 Das Beugungsintegral – mathematische Grundlagen

Bei Randwertproblemen ist es oft sinnvoll und bequem, die Eigenschaften der Unterschiede zwischen zwei Lösungen zu untersuchen statt die einer einzelnen Lösung. Dadurch wird die Behandlung der Randbedingungen einfacher. Das *Beugungsintegral* stellt ein Beispiel dafür dar. Wir werden die für (A.1) benötigte Lösung mit einer Versuchswellenfunktion

$$\Psi_t = \frac{a_t}{r} \exp(ik_0 r) \quad (\text{A.2})$$

vergleichen, die eine vom Ursprung ausgehende Kugelwelle darstellt. Diese Welle löst (A.1) bis auf die Stelle $\mathbf{r} = 0$. Diesen Ursprung definieren wir als Beobachtungspunkt P , an dem Ψ den Wert $\Psi(0)$ besitzt. Die beiden Wellenfelder Ψ (das zu berechnende) und Ψ_t (die Versuchswelle) erfüllen die Gleichung

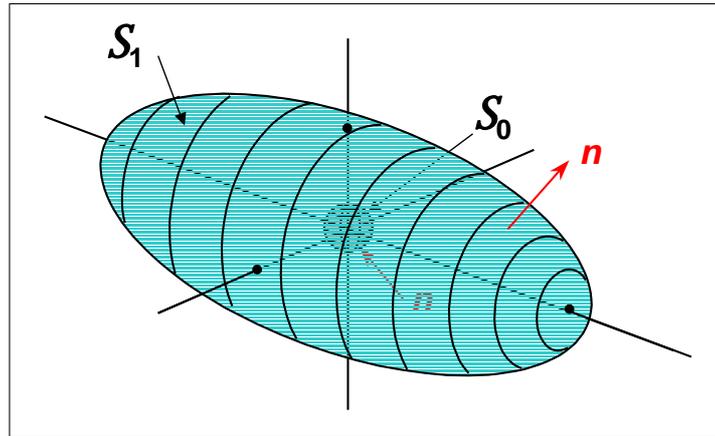


Abbildung A1: Zur Definition der Oberflächen für die Berechnung des Beugungsintegrals. Das Integrationsvolumen \mathcal{V} liegt zwischen den Oberflächen \mathcal{S}_0 und \mathcal{S}_1 .

$$\Psi \nabla^2 \Psi_t - \Psi_t \nabla^2 \Psi = -\Psi k_0^2 \Psi_t + \Psi_t k_0^2 \Psi = 0 \quad (\text{A.3})$$

an allen Punkte außer $\mathbf{r} = 0$, da sowohl Ψ als auch Ψ_t Lösungen von (A.1) sind. Wir integrieren nun (A.3) über ein Volumen \mathcal{V} mit der Oberfläche \mathcal{S} . Aus dem Volumenintegral lässt sich mit Hilfe des *Green'schen Satzes*³⁰ ein Oberflächenintegral machen:

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\Psi \nabla^2 \Psi_t - \Psi_t \nabla^2 \Psi) dV = \iint_{\mathcal{S}} (\Psi \nabla \Psi_t - \Psi_t \nabla \Psi) \cdot \mathbf{n} dS . \quad (\text{A.4})$$

Hierbei ist \mathbf{n} der auf der Oberfläche stehende, nach außen gerichtete Einheitsvektor. Da der Integrand null ist, müssen auch die Integrale null sein, vorausgesetzt das Integrationsvolumen enthält nicht den Ursprung $\mathbf{r} = 0$. Die Oberfläche wird deshalb so gewählt, dass sie aus zwei Teilen besteht, wie in Abb. A1 gezeigt ist: Eine beliebige äußere Oberfläche \mathcal{S}_1 und eine kugelförmige Oberfläche \mathcal{S}_0 mit Radius $\delta r \ll \lambda$, die den Ursprung umgibt. Das Integrationsvolumen liegt zwischen den beiden Flächen und \mathbf{n} zeigt deshalb auf \mathcal{S}_0 zum Ursprung hin und auf \mathcal{S}_1 vom Ursprung weg.

Durch Integration über die zweigeteilte Fläche erhält man

$$\left[\iint_{\mathcal{S}_0} + \iint_{\mathcal{S}_1} \right] (\Psi \nabla \Psi_t - \Psi_t \nabla \Psi) \cdot \mathbf{n} dS = 0 . \quad (\text{A.5})$$

Mit Hilfe der Versuchswellenfunktion (A.2) können wir den Gradienten von Ψ_t zu

³⁰Der Green'sche Satz kann mit Hilfe des Gauß'schen Satzes hergeleitet werden.

$$\begin{aligned}
\nabla\Psi_t &= \frac{a_t\mathbf{r}}{r^2} ik_0 \exp(ik_0r) - \frac{a_t\mathbf{r}}{r^3} \exp(ik_0r) \\
&= \frac{a_t\mathbf{r}}{r^3} (ik_0r - 1) \exp(ik_0r) .
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Setzt man diesen Ausdruck in (A.5) ein, so erhält man

$$\iint_{\mathcal{S}_0+\mathcal{S}_1} \frac{a_t}{r^3} \exp(ik_0r) [\Psi(ik_0r - 1)\mathbf{r} - r^2\nabla\Psi] \cdot \mathbf{n} dS = 0 . \tag{A.7}$$

Der Anteil von \mathcal{S}_0 kann direkt berechnet werden, da wir Ψ und $\nabla\Psi$ über die kleine Kugel als Konstante mit dem Wert $\Psi(0)$ bzw. $\nabla\Psi(0)$ annehmen können. Da außerdem \mathbf{n} der Einheitsvektor parallel zu $-\mathbf{r}$ ist, erhalten wir $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = -r$ und können $r^2 d\Omega$ für dS einsetzen. Damit erhält man

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathcal{S}_0} \frac{a_t}{r^3} \exp(ik_0r) [\Psi(0)(ik_0r - 1)\mathbf{r} - r^2\nabla\Psi(0)] \cdot \mathbf{n} r^2 d\Omega \\
&= - \iint_{\mathcal{S}_0} a_t \exp(ik_0r) [\Psi(0)(ik_0r - 1) + \mathbf{r}\nabla\Psi(0) \cdot \mathbf{n}] d\Omega ,
\end{aligned} \tag{A.8}$$

ausgewertet an der Stelle $r = \delta r$; $d\Omega$ ist das Raumwinkelelement. Beim Grenzübergang $\delta r \rightarrow 0$ bleibt nur ein Term übrig (alle anderen gegen gegen null):

$$\iint_{\mathcal{S}_0} a_t \exp(ik_0\delta r) \Psi(0) d\Omega \rightarrow 4a_t\pi\Psi(0) , \tag{A.9}$$

da $k_0\delta r \ll 1$. Aus (A.7) folgt dann, wenn man a_t kürzt, der *Kirchhoffsche Integralsatz*

$$\iint_{\mathcal{S}_1} \frac{1}{r^3} \exp(ik_0r) [\Psi(ik_0r - 1)\mathbf{r} - r^2\nabla\Psi] \cdot \mathbf{n} dS = -4\pi\Psi(0) . \tag{A.10}$$

Dieser Ausdruck ist das analytische Ergebnis der Wellengleichung (A.1) und gilt für jede Lösung Ψ und jede Oberfläche \mathcal{S}_1 , die den Ursprung nicht einhüllt.

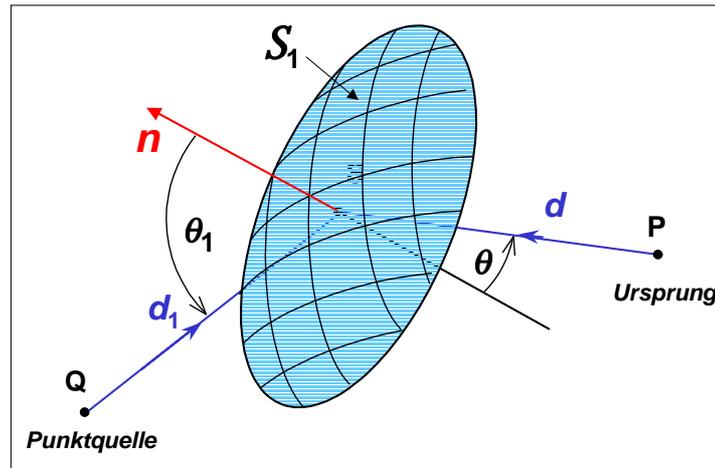


Abbildung A2: Teil der Oberfläche \mathcal{S}_1 zur Definition der im Text verwendeten Größen.

A.2 Beleuchtung mit einer Punktquelle

Wir betrachten nun ein System, für das Ψ und $\nabla\Psi$ für jeden Punkt von \mathcal{S}_1 berechenbar ist. Wir nehmen an, dass die Störung auf der Oberfläche \mathcal{S}_1 von einer Punktquelle am Ort Q stammt. Wir betrachten einen Punkt S auf \mathcal{S}_1 mit $\mathbf{r} = \mathbf{d}$, der eine Entfernung d_1 von Q hat (siehe Abb. A2). Für den Fall, dass die Transmissionsfunktion an diesem Punkt f_S ist, erhalten wir für die reemittierte Welle $\Psi(\mathbf{d})$ und ihren Gradienten

$$\Psi(\mathbf{d}) = \frac{f_S a_Q}{d_1} \exp(ik_0 d_1) \quad (\text{A.11})$$

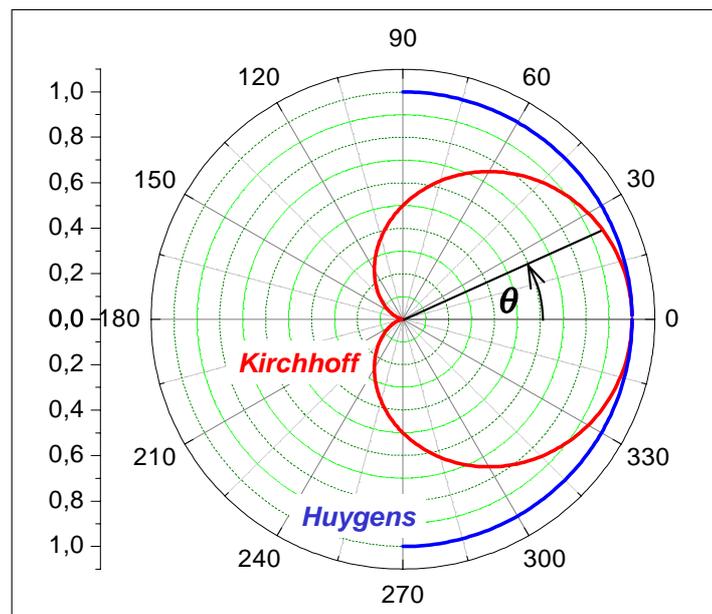
$$\nabla\Psi = \frac{f_S a_Q d_1}{d_1^3} (ik_0 d_1 - 1) \exp(ik_0 d_1) \quad (\text{A.12})$$

wie in (A.6). Setzt man diese Ausdrücke in (A.10) ein, so erhält man

$$a_Q \iint_{\mathcal{S}_1} f_S \exp[ik_0(d + d_1)] \times \left[\frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}}{d_1 d^3} (ik_0 d - 1) - \frac{\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{n}}{d d_1^3} (ik_0 d_1 - 1) \right] dS = -4\pi\Psi(0) . \quad (\text{A.13})$$

Aus Abb. A2 erhält man für die Skalarprodukte die Werte $\mathbf{d} \cdot \mathbf{n} = d \cos \theta$ und $\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{n} = -d_1 \cos \theta_1$. Sind sowohl d als auch d_1 sehr viel größer als die Wellenlänge, können wir die 1 im Vergleich zu $k_0 d$ vernachlässigen und mit der Definition von θ und θ_1 aus Abb. A2 erhält man

$$\Psi(0) = -\frac{ik_0 a_Q}{2\pi} \iint_{\mathcal{S}_1} \frac{f_S}{d d_1} \exp[ik_0(d + d_1)] \times \left(\frac{\cos \theta + \cos \theta_1}{2} \right) dS . \quad (\text{A.14})$$

Abbildung A3: Inklinationsfaktor für $\theta_1 = 0$ in Polarkoordinaten.

Diesen Ausdruck bezeichnet man als das *Fresnel-Kirchhoffsche Beugungsintegral*. Sie stellt die Rechtfertigung für den Ausdruck (5.2.4) dar, den wir bei der Analyse der Beugung auf der Basis des Huygens'schen Prinzips in Abschnitt 5.2 erhalten haben. Gleichung (A.14) enthält aber noch drei zusätzliche Informationen. Die erste ist die explizite Form $\frac{1}{2}(\cos \theta + \cos \theta_1)$ für den *Neigungsfaktor*, der in Abb. A3 dargestellt ist. Bei paraxialen Bedingungen ($\cos \theta \simeq \cos \theta_1 \simeq 1$) wird der Neigungsfaktor 1, wie es in (5.2.4) angenommen wurde. Der zweite interessante Punkt ist der Phasenfaktor $-i$, der dritte der Faktor $k_0/2\pi$, die beide eine physikalische Bedeutung haben, wie wir im Folgenden zeigen werden.

A.3 Der Neigungsfaktor

Die Form des Neigungsfaktors

$$\left(\frac{\cos \theta + \cos \theta_1}{2} \right) \quad (\text{A.15})$$

ist von beträchtlicher Bedeutung. Sie stimmt mit der *Huygens'schen Konstruktion* überein, auch bei der Unterdrückung rücklaufender Wellen. Merkwürdigerweise scheint aber der Neigungsfaktor von θ und θ_1 unabhängig voneinander abhängig zu sein, so dass er von der lokalen Ausrichtung der Oberfläche \mathcal{S}_1 abzuhängen scheint. Es wäre sinnvoller, er würde nur von der Differenz $\theta - \theta_1$ abhängen, so dass die Orientierung der Oberfläche keine Rolle spielt. Hierzu ist zu sagen, dass das komplette Bild der Reemission nur eine Modellvorstellung ist. Es ist eben gerade nicht so, dass wir eine Schicht aus einem bestimmten Material an einer Oberfläche \mathcal{S} haben, die das Licht gleichmäßig in alle Richtungen streut. Die wichtige Eigenschaft des Beugungsintegrals ist nicht, dass jeder der Beiträge unabhängig von \mathcal{S} ist, sondern dass das gesamte Integral unabhängig von der Wahl der Oberfläche ist, denn \mathcal{S} wurde ja willkürlich festgelegt. Genau diese Eigenschaft wird durch die obige Form des Neigungsfaktors sichergestellt. Nehmen wir z.B. an, wir tauschen \mathcal{S}_1 gegen eine andere Oberfläche \mathcal{S}_2 aus, die ebenfalls der Bedingung genügt, den Ursprung einzuschließen, so ergibt sich für $\Psi(0)$ der Wert

$$-4\pi\Psi(0) = \iint_{\mathcal{S}_1} = \iint_{\mathcal{S}_2} + \left(\iint_{\mathcal{S}_1} - \iint_{\mathcal{S}_2} \right), \quad (\text{A.16})$$

wobei jedes Integral die Form (A.10) hat. Der letzte Term in (A.16) ist das Oberflächenintegral über eine Oberfläche, die den Ursprung nicht einschließt. Seine Oberflächennormalen sind nach außen gerichtet auf den Teil, der zu \mathcal{S}_2 gehört, und nach innen gerichtet für die Beiträge von \mathcal{S}_1 , weswegen das Integrationsvolumen \mathcal{V} zwischen den beiden Flächen liegt. Das Integral über eine solche Oberfläche ist aber null, wie in Abschnitt A.1 gezeigt wurde. Daher ist der Wert von $\Psi(0)$, der über eine beliebige Oberfläche berechnet wird, von dieser Oberfläche unabhängig. Die spezielle Form des Neigungsfaktors ist notwendig, um das gesamte Integral invariant zu lassen, obwohl sich der Integrand selbst ändert.

In der Praxis wird die Oberfläche so gewählt, dass sie eine gegebene Blendenöffnung abdeckt. Wenn diese in einer einzelnen Wellenfront liegt, wird θ_1 angenehmerweise null. Nur die Blendenöffnung selbst trägt zum Integral bei, da f_S an allen anderen Stellen der Oberfläche null ist. Deshalb ist die Auswertung von (A.14) nicht schwierig.

B Fourier-Transformation

Ein in der Physik sehr wichtiges mathematisches Hilfsmittel bei der Analyse orts- und zeitabhängiger Probleme ist die *Fourier-Theorie*.³¹ Die Fourier-Theorie ermöglicht die Analyse periodischer und nicht-periodischer Funktionen. Das Herzstück dieser Theorie ist das *Fourier-Theorem*:

Eine Funktion $f(x)$ mit einer räumlichen Periode λ lässt sich aus harmonischen Funktionen zusammensetzen, deren Wellenlängen ganzzahlige Bruchteile von λ sind.

Mit Hilfe des Fourier-Theorem können wir eine periodische Funktion $f(x)$ schreiben als

$$f(x) = \frac{1}{2}C_0 + C_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda/1} + \alpha_1\right) + C_2 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda/2} + \alpha_2\right) + C_3 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda/3} + \alpha_3\right) + \dots \quad (\text{B.1})$$

mit den Konstanten C_n . Natürlich könnte $f(x)$ auch einer wandernden Welle $f(x - vt)$ entsprechen. Die Indizes n beschreiben die Ordnung der einzelnen Beiträge, der so genannten *Harmonischen*.

B.1 Fourier-Reihen periodischer Funktionen

Wir wollen nun (B.1) näher analysieren. Jeder Term in (B.1) besitzt eine Amplitude C_n und eine Phase α_n , wobei letztere für eine Verschiebung der Beiträge entlang der x -Achse notwendig ist. Unter einer *Fourier-Analyse* verstehen wir nun die Bestimmung der Koeffizienten C_n und α_n . Hierzu ist es zweckmäßig, (B.1) unter Benutzung der trigonometrischen Gleichung

$$C_n \cos(nk_0x + \alpha_n) = A_n \cos(nk_0x) + B_n \sin(nk_0x) \quad (\text{B.2})$$

umzuformulieren, wobei $A_n = C_n \cos \alpha_n$, $B_n = -C_n \sin \alpha_n$ und $k_0 = 2\pi/\lambda$. Es ergibt sich damit

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nk_0x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nk_0x) . \quad (\text{B.3})$$

Die Fourier-Analyse besteht nun also in der Aufgabe, die Koeffizienten (A_n, B_n) zu berechnen, die man als *Fourier-Koeffizienten* bezeichnet.

³¹**Jean Baptist Joseph Baron de Fourier** (1768-1830) ist ein französischer Wissenschaftler, der zur Zeit Napoleons der französischen Wissenschaft zu einer enormen Blüte verholfen hat. Sein Arbeitsgebiet war die angewandte Mathematik.

Literatur:

J. S. Walker, *Fourier-Analysis*, Oxford University Press, New York (1988).

E. O. Brigham, *The Fast Fourier Transform and Applications*, Prentice Hall, New Yourk (1988).

W. Stöbel, *Fourieroptik*, Springer Berlin, Heidelberg, New York (1993).

R. C. Jennison, *Fourier Transforms and Convolutions for the Experimentalist*, Pergamon, Oxford (1961).

Komplexe Schreibweise

Die reellen Kosinus- und Sinus-Funktionen können als Real- und Imaginärteil einer komplexen Exponentialfunktion aufgefasst werden. Da die Exponentialschreibweise zahlreiche Vorteile bietet, wollen wir im Folgenden fast ausschließlich diese Schreibweise verwenden. Aus (B.3) wird

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum F_n \exp(ink_0x) , \quad (\text{B.4})$$

wobei wir noch überlegen müssen, über welchen Bereich die Summation ausgeführt werden muss. Setzen wir (B.3) und (B.4) für ein reelles $f(x)$ gleich, so erhalten wir

$$\sum F_n [\cos(nk_0x) + i \sin(nk_0x)] = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(nk_0x) + B_n \sin(nk_0x)] . \quad (\text{B.5})$$

Unter der Annahme, dass die Summationsbereiche in beiden Termen gleich ist, setzen wir äquivalente Kosinus- und Sinusterme gleich und erhalten

$$F_n = A_n \quad iF_n = B_n . \quad (\text{B.6})$$

Daraus folgt $iA_n = B_n$, was allerdings nicht stimmen kann, da A_n und B_n beide reell sind. Wir müssen deshalb die Summation in (B.4) von $-\infty$ bis ∞ laufen lassen. Tun wir das und vergleichen wiederum die äquivalenten Kosinus- und Sinusterme, so ergibt sich

$$F_n + F_{-n} = A_n \quad i(F_n - F_{-n}) = B_n . \quad (\text{B.7})$$

Hieraus können wir folgern, dass

$$F_n = \frac{1}{2}(A_n - iB_n) = \frac{1}{2}(C_n \exp(i\alpha_n)) \quad (\text{B.8})$$

$$F_{-n} = \frac{1}{2}(A_n + iB_n) = \frac{1}{2}(C_n \exp(-i\alpha_n)) . \quad (\text{B.9})$$

Mit diesem Ergebnis lässt sich die Fourier-Reihe in komplexer Schreibweise darstellen als

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \exp(ink_0x) . \quad (\text{B.10})$$

Bisher sind wir davon ausgegangen, dass die Funktion $f(x)$ reell und damit A_n und B_n reell sind. Mit (B.8) folgt dann

$$F_n = F_{-n}^* , \quad (\text{B.11})$$

das heißt, dass F_n und F_{-n} konjugiert komplex sein müssen. Im allgemeinen Fall kann eine komplexe Funktion durch komplexe A_n und B_n dargestellt werden, für die es jeweils keinen solchen Zusammenhang gibt.

B.2 Fourier-Analyse

Bei der Bestimmung der Fourier-Koeffizienten nützen wir die Eigenschaft der Sinusfunktion aus, dass ihr Integral über ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge null ist. Entsprechend ist das Integral des Produkts von zwei sinusförmigen Funktionen mit einem ganzzahligen Wellenlängenverhältnis ebenfalls null.³² Wenn wir demnach über das Produkt der Funktion $f(x)$ (mit Wellenlänge λ) mit einer Sinusfunktion der Wellenlänge λ/m integrieren, wird das Ergebnis für alle Fourier-Koeffizienten null sein bis auf die m -te Komponente. Der Wert des Integrals ergibt dann genau die Amplitude des Koeffizienten F_m .

Wir multiplizieren also $f(x)$ mit $\exp(-imk_0x)$ und integrieren dieses Produkt über eine komplette Wellenlänge. Mit dem Phasenwinkel $\varphi = k_0x$ müssen wir über das Intervall $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ integrieren und erhalten

$$I_m = \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \exp(-im\varphi) d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \exp(in\varphi) \exp(-im\varphi) d\varphi . \quad (\text{B.12})$$

In der Summe ist jeder Term sinusförmig mit einer Wellenlänge $\lambda/|m-n|$ mit Ausnahme des Terms, für den $n = m$ gilt. Die Sinusterme, die über $|m-n|$ Wellenlängen integriert werden, ergeben null, so dass wir

$$I_m = \int_{-\pi}^{\pi} F_m d\varphi = 2\pi F_m \quad (\text{B.13})$$

erhalten. Damit erhalten wir den allgemeinen Ausdruck für die Fourier-Koeffizienten zu

$$F_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \exp(-im\varphi) d\varphi . \quad (\text{B.14})$$

In diesem Ausdruck ist auch der Term 0. Ordnung enthalten, $F_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) d\varphi$ enthalten, der den Durchschnittswert von $f(\varphi)$ angibt.

³²Ausnahme: Wenn beide Wellenlängen gleich sind und die beiden Funktionen nicht um 90° phasenverschoben sind, verschwindet Integral nicht.

Symmetrieeigenschaften – gerade und ungerade Funktionen

Wir können Funktionen in gerade und ungerade Funktionen unterteilen:

$$\text{gerade oder symmetrische Funktion: } f(\varphi) = f(-\varphi) \quad (\text{B.15})$$

$$\text{ungerade oder antisymmetrische Funktion: } f(\varphi) = -f(-\varphi) \quad (\text{B.16})$$

Als Beispiel ist in Abb. B1 eine Rechteckfunktion als gerade und ungerade Funktion gezeigt.

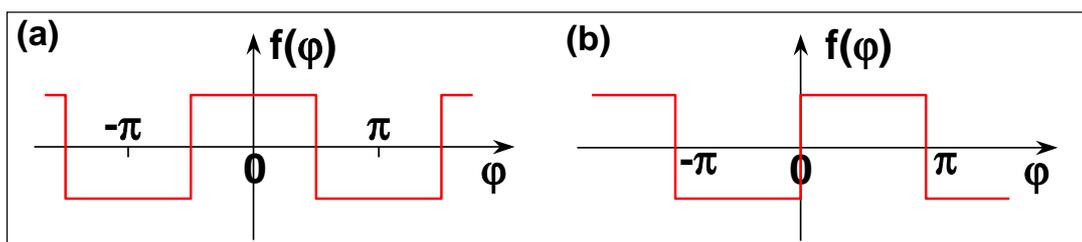


Abbildung B1: Rechteckfunktion als gerade (a) und ungerade Funktion (b).

Betrachten wir die Fourier-Reihe (B.3), so sehen wir sofort, dass eine gerade Funktion als Summe von reinen Kosinustermen dargestellt werden kann, da die Sinusterme Beiträge mit entgegengesetztem Vorzeichen für $+\varphi$ und $-\varphi$ liefern. Daraus folgt sofort, dass alle $B_n = 0$. Andererseits können wir eine ungerade Funktion als Summe von reinen Sinustermen beschreiben, woraus $A_n = 0$ folgt. Mit Hilfe von (B.8) und (B.9) erhalten wir dann

$$\text{gerade Funktion: } F_n = F_{-n} \quad (\text{B.17})$$

$$\text{gerade reelle Funktion: } F_n = F_{-n}^* = F_{-n} \quad (\text{B.18})$$

$$\text{ungerade Funktion: } F_n = -F_{-n} \quad (\text{B.19})$$

$$\text{ungerade reelle Funktion: } F_n = F_{-n}^* = -F_{-n} \quad (\text{B.20})$$

Wir sehen, dass sich die Symmetrie der Funktion in den Fourier-Koeffizienten widerspiegelt.

Beispiel: Rechteckfunktion

Wir möchten die Fourier-Analyse jetzt anhand eines einfachen Beispiels, der Rechteckfunktion, illustrieren. Wir wählen den Nullpunkt, wie in Abb. B1 gezeigt, so dass gilt:

$$f(\varphi) = \begin{cases} a & \text{für } -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2 \\ -a & \text{für } \pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/2 \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

Das heißt, wir haben eine symmetrische Rechteckfunktion gewählt. Durch Verschieben des Nullpunkts um $\pi/2$ können wir eine unsymmetrische Rechteckfunktion erhalten.

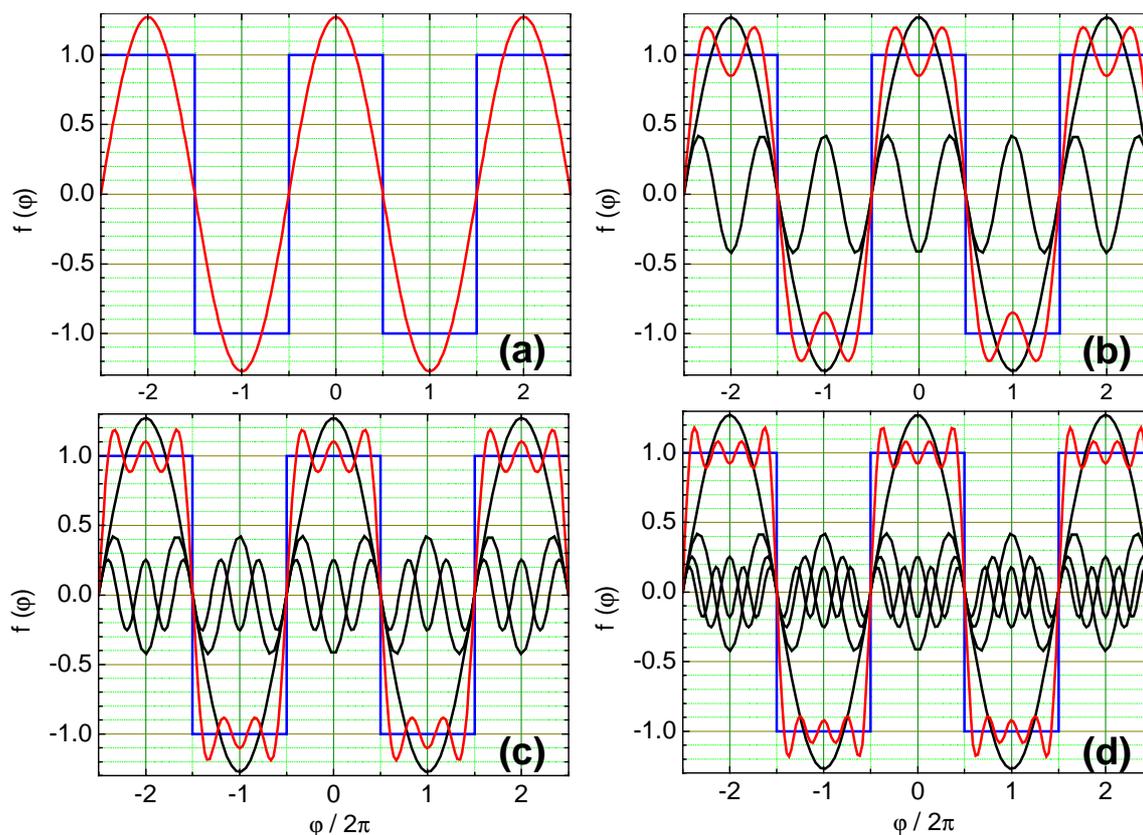


Abbildung B2: Annäherung der geraden Rechteckfunktion durch seine Fourier-Komponenten. Die rote Kurve gibt die erste Fourier-Komponente (a) sowie die Summe der ersten zwei (b), drei (c) und vier (d) Fourier-Komponenten an.

Für die Fourier-Koeffizienten erhalten wir aus (B.14) zu

$$\begin{aligned}
 F_m &= \frac{a}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \exp(-im\varphi) d\varphi - \frac{a}{2\pi} \int_{\pi/2}^{+3\pi/2} \exp(-im\varphi) d\varphi \\
 &= \frac{a}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2} [1 - \exp(-im\pi)] .
 \end{aligned} \tag{B.22}$$

Für die ersten Koeffizienten erhalten wir

$$F_0 = 0 \quad F_{\pm 1} = \frac{2a}{\pi} \quad F_{\pm 2} = 0 \quad F_{\pm 3} = -\frac{2a}{3\pi} \quad F_{\pm 4} = 0 \quad F_{\pm 5} = \frac{2a}{5\pi} . \tag{B.23}$$

Aus (B.7) folgt dann $B_n = 0$ und $A_n = 2F_n$ und wir erhalten für die *gerade Rechteckfunktion*

$$f(\varphi) = \frac{4a}{\pi} \left[\cos \varphi + \frac{1}{3} \cos 3\varphi + \frac{1}{5} \cos 5\varphi + \dots \right] . \tag{B.24}$$

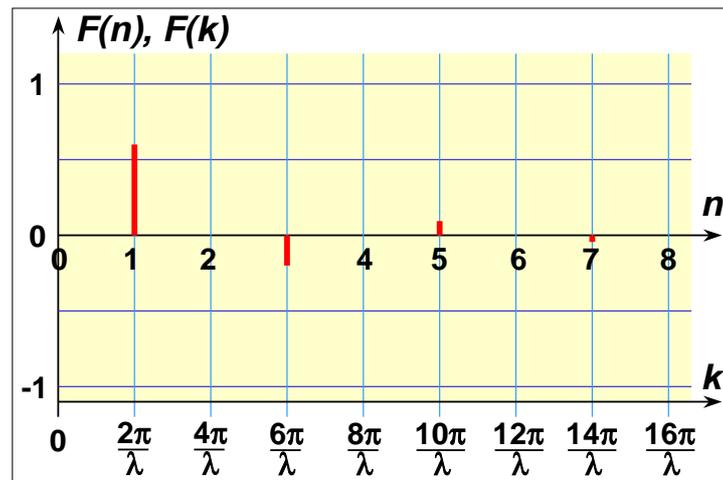


Abbildung B3: Die Funktionen $F(n)$ und $F(k)$ für die gerade Rechteckfunktion. Es ist nur die positive Hälfte gezeigt.

Äquivalent erhalten wir für die *ungerade Rechteckfunktion*

$$f(\varphi) = \frac{4a}{\pi} \left[\sin \varphi + \frac{1}{3} \sin 3\varphi + \frac{1}{5} \sin 5\varphi + \dots \right]. \quad (\text{B.25})$$

In Abb. B2 ist gezeigt, wie die gerade Rechteckfunktion durch die verschiedenen Summationsterme in (B.24) mit steigender Zahl der Fourier-Komponenten immer besser angenähert wird.

Raum und reziproker Raum

Genauso wie wir eine periodische Funktion (siehe z.B. Rechteckfunktion in Abb. B2) als Funktion der Ortskoordinate im gewöhnlichen Raum darstellen können, können wir uns auch die Fourier-Koeffizienten F_n als Funktion $F(n)$ vorstellen. Natürlich besitzt $F(n)$ nur für ganzzahlige n von null verschiedene Funktionswerte. In Abb. B3 ist die positive Hälfte der Funktion $F(n)$ dargestellt, die die Fourier-Reihe der geraden Rechteckfunktion repräsentiert.

Nehmen wir die in Abb. B3 gezeigten Funktionswerte der Funktion $F(n)$, so können wir die ursprüngliche Funktion durch Aufsummieren der Fourier-Reihe rekonstruieren. Wir erhalten dabei aber noch keine Information über die Wellenlänge λ der ursprünglichen Funktion. Diesen Mangel müssen wir noch beheben. Dazu drücken wir die Koeffizienten F_n durch x und nicht durch $\varphi = k_0 x$ aus und erhalten³³

$$F_m = \frac{1}{\lambda} \int_{\text{Wellenlänge}} f(x) \exp(-imk_0 x) dx. \quad (\text{B.26})$$

Die Information über die Wellenlänge ist jetzt in (B.26) durch $k_0 = 2\pi/\lambda$ enthalten. Ersetzen wir noch die Variable n durch $k = nk_0$, so können wir (B.26) umschreiben zu

³³Hierbei benutzen wir $d\varphi = k_0 dx = \frac{2\pi}{\lambda} dx$. Das Integrationsintervall $-\pi \leq \varphi \leq +\pi$ müssen wir wegen $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} x$ in $-\lambda/2 \leq x \leq +\lambda/2$ abändern, also in die Integration über eine Wellenlänge.

$$F(k) = \frac{1}{\lambda} \int_{\text{Wellenlänge}} f(x) \exp(-ikx) dx . \quad (\text{B.27})$$

Wir wollen uns kurz überlegen, wie sich die Funktion $F(k)$ ändert, wenn wir die Wellenlänge der periodischen Funktion (z.B. Rechteckfunktion) ändern. Verkleinern wir die Wellenlänge, so wird die Funktion $F(k)$ wegen $k \propto 1/\lambda$ auseinander gezogen. Die Skala von $F(k)$ ist offensichtlich umgekehrt proportional zu der Skala von $f(x)$. Aus diesem Grund wird der Raum, dessen Koordinaten in k gemessen werden, als *reziproker Raum* bezeichnet. Im Ortsraum werden die Koordinaten in Meter, im dazu reziproken Raum in 1/Meter gemessen. Wir hätten natürlich statt einer ortsabhängigen Funktion $f(x)$ auch eine zeitabhängige Funktion $f(t)$ betrachten können. Auf der Zeitachse messen wir die Koordinaten in Sekunde, im dazu reziproken Raum in 1/Sekunde oder Hertz. Der zur eindimensionalen Zeitachse reziproke Raum ist also der Frequenzraum. Analog dazu spricht man auch häufig hinsichtlich der Skala des reziproken Ortsraums von *Raumfrequenzen*.

Wir möchten darauf hinweisen, dass wir hier das Konzept des reziproken Raumes nur für eindimensionale Systeme eingeführt haben. Die Erweiterung auf zwei oder drei Dimensionen ist aber einfach (siehe hierzu Abschnitt 5.5.4 und 5.6.3).

B.3 Nichtperiodische Funktionen

Wir betrachten die Rechteckfunktion in Abb. B1 und stellen uns vor, dass wir die Breite des Rechteckmaximums konstant lassen, aber die Wellenlänge λ unbegrenzt anwachsen lassen. Für $\lambda \rightarrow \infty$ ist die betrachtete Funktion dann nicht mehr periodisch. Es liegt nur noch ein einzelner Rechteckimpuls vor und alle benachbarten Maxima haben wir ins Unendliche verschoben. Diese Vorgehensweise gibt uns eine Idee, wie wir die Methode der Fourier-Reihenentwicklung auch auf nichtperiodische Funktionen erweitern können. Nichtperiodische Funktionen sind in der Physik, vor allem aber in der Optik und der Quantenmechanik, von großer Bedeutung. Die Erweiterung der Fourier-Theorie auf nichtperiodische Funktionen wurde von Fourier selbst nicht erkannt. Sie basiert auf dem Konzept der *Fourier-Integrale* oder äquivalent der *Fourier-Transformation*.

Fourier-Transformation und Fourier-Integral

Wir betrachten zunächst wiederum die in Abb. B1 gezeigte gerade Rechteckfunktion. Für diese Funktion ist die Breite des um $x = 0$ zentrierten Rechteckimpulses gerade $\lambda/2$. Wir haben gesehen, dass wir diese Funktion mit einer Fourier-Reihe mit den Fourier-Koeffizienten (B.22) darstellen können. In Abb. B4a sind die entsprechenden Fourier-Koeffizienten gegen k aufgetragen. Die Koeffizienten entsprechen den Wichtungsfaktoren, mit denen die Harmonischen zu der Fourier-Reihe beitragen. Eine solche Kurve nennt man auch *Raumfrequenzspektrum*.

Vergrößern wir nun die Wellenlänge λ auf das Doppelte, lassen aber die Breite des Maximums konstant (Verdoppelung des Abstandes der Maxima), so ist die Breite des Maximums jetzt nur noch $\lambda/4$. Das entsprechende Spektrum der zugehörigen Raumfrequenzen ist in Abb. B4b gezeigt. Die Dichte der Komponenten auf der k -Achse ist jetzt doppelt so hoch. Dies ist einfach einzusehen, da wir ja λ verdoppelt haben, wodurch im reziproken Raum die entsprechende charakteristische Raumfrequenz $k_0 = 2\pi/\lambda$ nur noch halb so groß ist. Die Fourier-Koeffizienten folgen der gleichen Einhüllenden, die durch die Breite des Maximums gegeben ist, liegen jetzt aber doppelt so dicht. In Abb. B4c ist der Fall gezeigt, dass die Wellenlänge gegenüber dem ursprünglichen Wert vervierfacht wurde. Wir sehen also, dass die Terme des Raumfrequenzspektrum immer dichter liegen, je größer wir λ machen. Bei Grenzübergang

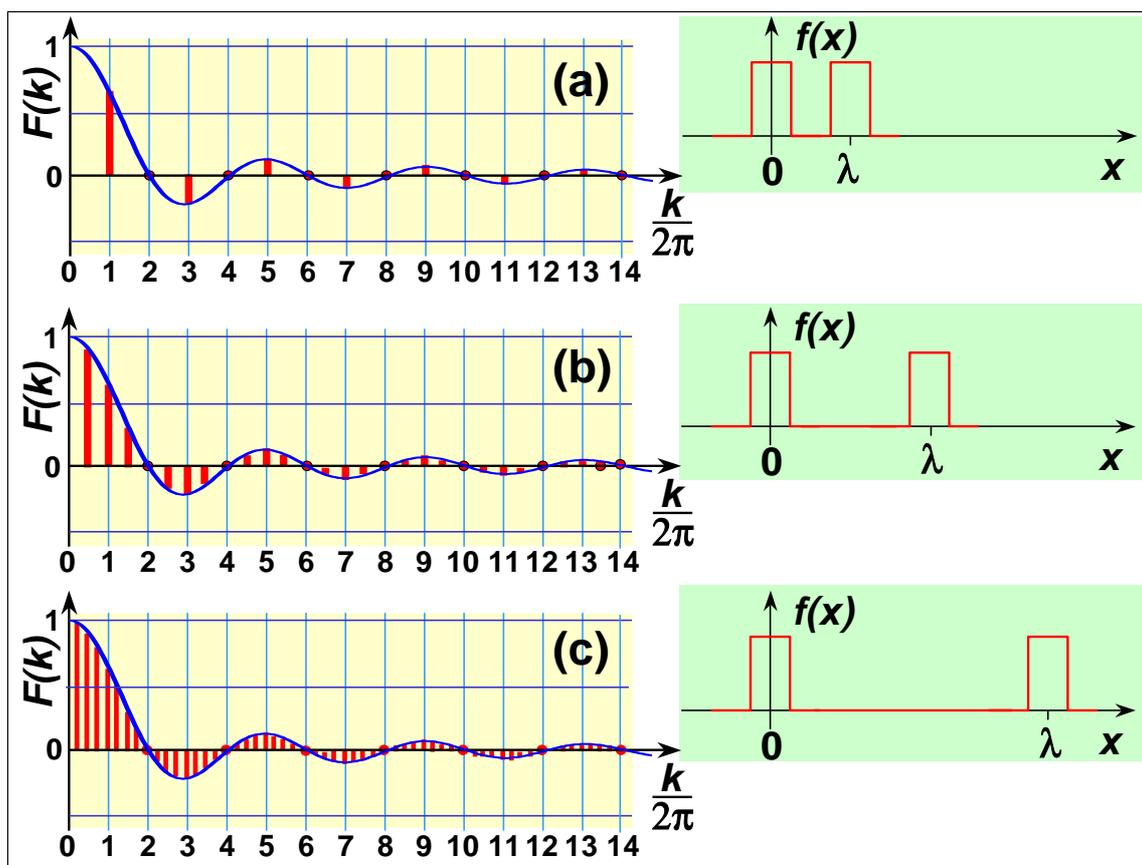


Abbildung B4: Zur Veranschaulichung des Übergangs von einer Fourier-Reihe zur Fourier-Transformation.

$\lambda \rightarrow \infty$ nähern sich die einzelnen Terme bis auf infinitesimale Abstände an. $F(k)$ entspricht dann der Einhüllenden, sie wird *Fourier-Transformierte* der nichtperiodischen Funktion genannt.

Wir erinnern uns, dass ein Integral eigentlich der Grenzwert einer Summe ist, wobei die Anzahl der Summenglieder gegen unendlich und die Größe dieser Elemente gegen null geht. Es ist deshalb einsichtig, dass die *Fourier-Reihe* im Grenzfall $\lambda \rightarrow \infty$ durch das so genannte *Fourier-Integral* ersetzt werden muss. Das Fourier-Integral geben wir hier ohne Beweis an³⁴

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \exp(ikx) dk, \quad (\text{B.28})$$

vorausgesetzt, dass

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-ikx) dx. \quad (\text{B.29})$$

³⁴Unsere Argumentation beweist nicht, dass die Funktion im Limes $\lambda \rightarrow \infty$ stetig wird, obwohl der Unterschied physikalisch unbedeutend erscheint. Vom mathematischen Standpunkt aus ist es besser, den umgekehrten Weg einzuschlagen und die Fourier-Transformierte einer Funktion als Fourier-Integral zu definieren. Haben wir das Fourier-Integral definiert, so können wir zeigen, dass, falls die Funktion $f(x)$ periodisch ist, die Transformierte $F(k)$ nur für diskrete und periodische Werte von k von null verschieden ist. Der Beweis dieser Aussage wird erst später gemacht, wenn wir das Konzept der Faltung eingeführt haben.

Die Ähnlichkeit mit der Reihendarstellung ist evident. Die Größe $F(k)$ wird als *Fourier-Transformierte* bezeichnet.

Beispiel: Die Fourier-Transformierte des Rechteckpulses

Wir wollen als Beispiel die Fourier-Transformierte eines um $x = 0$ zentrierten Rechteckpulses der Höhe a und der Breite b betrachten. Die Rechteckfunktion kommt in der Optik sehr häufig vor, da sie die Transmissionsfunktion eines Spaltes darstellt. Das Integral (B.29) wird damit zu

$$\begin{aligned}
 F(k) &= \int_{-b/2}^{+b/2} a \exp(-ikx) dx \\
 &= \frac{a}{-ik} \left[\exp\left(\frac{-ikb}{2}\right) - \exp\left(\frac{ikb}{2}\right) \right] \\
 &= ab \frac{\sin(kb/2)}{kb/2} \\
 &= ab \operatorname{sinc}(kb/2) .
 \end{aligned} \tag{B.30}$$

Hierbei haben wir die Funktion $\operatorname{sinc}(x) = \sin x/x$ verwendet, die eine eigene Bezeichnung bekommen hat, da sie in der Theorie der Fourier-Transformation sehr häufig vorkommt.

Der Rechteckpuls und seine Fourier-Transformierte sind in Abb. B5 dargestellt. Die Transformierte besitzt bei $k = 0$ den Funktionswert ab , welcher der Fläche unter dem Puls entspricht. Mit zunehmendem k nimmt die Funktion zunächst ab und alterniert dann zwischen positiven und negativen Werten mit Nullstellen bei $k = m2\pi/b$ ($m \neq 0$). Die Funktion ist reell, was man sofort daran erkennt, dass die Funktion um $k = 0$ symmetrisch ist.

Abb. B5 zeigt auch die Reziprozität der Transformation. Macht man den Puls schmaler und höher, so dass die Fläche ab unter dem Puls konstant bleibt, so nimmt mit abnehmender Pulsbreite b der k -Wert zu, an dem die Funktion null wird. Im Grenzfall $b \rightarrow 0, a \rightarrow \infty$ rücken die Nullstellen ins Unendliche und wir erhalten eine konstante Funktion $F(k)$.

Beispiel: Die Fourier-Transformierte der δ -Funktion

Der im vorangegangenen Abschnitt gezeigt Grenzfall $b \rightarrow 0, a \rightarrow \infty$ führt direkt zur *Diracschen δ -Funktion*, die zur Beschreibung vieler Sachverhalte sehr nützlich ist. Sie repräsentiert den Grenzfall eines Rechteckimpulses mit $ab = 1$, dessen Breite gegen null geht, wobei aber die Fläche unter dem Rechteckpuls gleich eins bleiben soll. Die δ -Funktion ist deshalb überall null, außer an der Stelle $x = 0$, an der sie den Grenzwert $\lim_{b \rightarrow 0} 1/b$ annimmt.

Die Fourier-Transformierte der δ -Funktion erhalten wir, indem wir den Grenzfall $b \rightarrow 0$ der $\operatorname{sinc}(kb/2)$ Funktion betrachten. Wir sehen, dass für diesen Grenzübergang die Transformierte für alle Werte von k gleich eins wird. *Die Fourier-Transformierte der Delta-Funktion an der Stelle $x = 0$ ist also eine Konstante mit dem Wert $F(k) = 1$.*

Eine wichtige Eigenschaft der Delta-Funktion ist

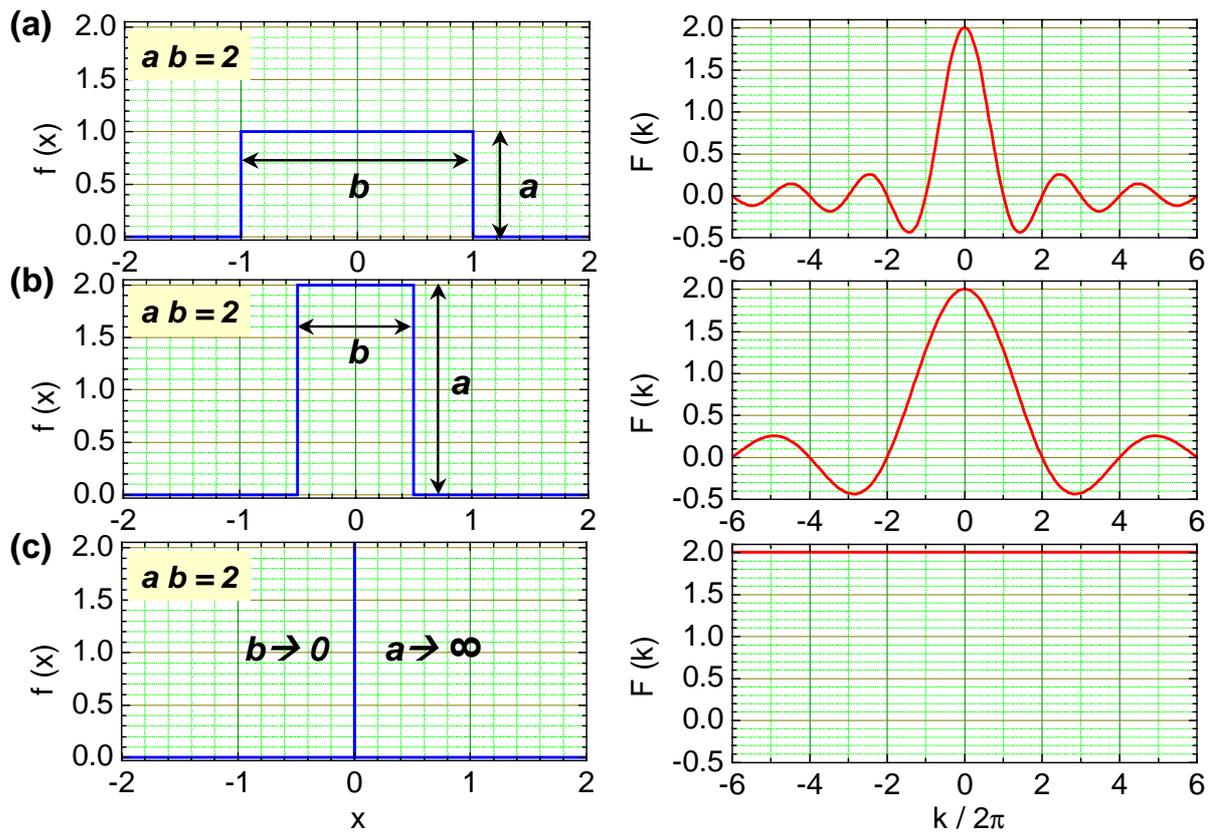


Abbildung B5: Zur Fourier-Transformation des Rechteckpulses. Von (a) nach (c) nimmt die Pulsbreite b ab und die Pulshöhe a zu, so dass die Fläche unter dem Puls gleich bleibt. (c) zeigt den Grenzfall $b \rightarrow 0, a \rightarrow \infty$ des Rechteckpulses, was einem δ -funktionsförmigen Puls entspricht. Die entsprechende Fourier-Transformierte ist eine konstante Funktion.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0) . \quad (\text{B.31})$$

Das Integral (B.31) tastet also den Funktionswert $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ ab.

Die Verschiebung des Ursprungs

Wir wollen jetzt kurz überlegen, wie sie die Fourier-Transformierte einer Funktion ändert, wenn man den Ursprung um die Strecke x_0 verschiebt. Das heißt, wir betrachten jetzt die Transformierte der Funktion $\tilde{f}(x) = f(x - x_0) = f(\tilde{x})$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-x_0) \exp(-ikx) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{x}) \exp[-ik(\tilde{x}+x_0)] d\tilde{x} \\
&= \exp(-ikx_0) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{x}) \exp(-ik\tilde{x}) d\tilde{x} \\
&= \exp(-ikx_0) F(k) .
\end{aligned} \tag{B.32}$$

Wir sehen, dass sich das Ergebnis von $F(k)$ nur durch einen Phasenfaktor $\exp(-ikx_0)$ unterscheidet. Insbesondere sind die Amplituden $|\tilde{F}(k)|$ und $|F(k)|$ identisch.

Beispiel: Die Fourier-Transformierte einer Summe aus mehreren Delta-Funktionen

Wir wollen die Fourier-Transformierte einer Summe

$$f(x) = \sum_n \delta(x-x_n) \tag{B.33}$$

aus Delta-Funktionen an verschiedenen Orten x_n diskutieren. Aus (B.32) ergibt sich sofort die Fourier-Transformierte zu

$$\begin{aligned}
F(k) &= F_0(k) \sum_n \exp(-ikx_n) \\
&= \sum_n \exp(-ikx_n) ,
\end{aligned} \tag{B.34}$$

da die Fourier-Transformierte $F_0(k)$ der Delta-Funktion bei $x=0$ eine Konstante mit dem Wert eins ist.

Befinden sich zum Beispiel zwei Delta-Funktionen an den Stellen $x = -b/2$ und $x = +b/2$ (siehe Abb. B6), so erhalten wir die Transformierte

$$\begin{aligned}
F(k) &= \exp(ikb/2) + \exp(-ikb/2) \\
&= 2 \cos(kb/2) .
\end{aligned} \tag{B.35}$$

Die Fourier-Transformierte ist reell ($f(x)$ ist eine gerade Funktion) und zeigt ein harmonisches Verhalten.

Die Fourier-Transformierte einer regelmäßigen Reihe von Delta-Funktionen mit Abstand b

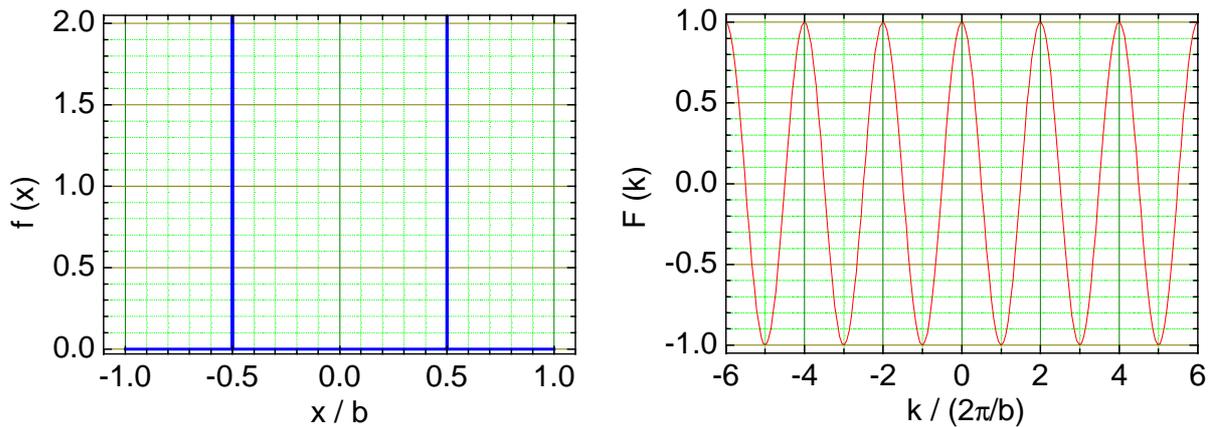


Abbildung B6: Zur Fourier-Transformation der Summe zweier Delta-Funktionen an den Stellen $x = \pm b/2$.

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - nb) \quad (\text{B.36})$$

ergibt

$$F(k) = \sum_{-\infty}^{\infty} \exp(-iknb) , \quad (\text{B.37})$$

Ein Problem hierbei ist, dass die Funktion $f(x)$ in positiver und negativer Richtung gegen unendlich geht und ihr Integral divergiert. Aus rein mathematischer Sicht besitzt die Funktion deshalb keine Fourier-Transformierte. Wir können dieses Problem allerdings umgehen, indem wir annehmen, dass die Reihe langsam ausklingt (dies trägt der physikalischen Situation Rechnung, da physikalische Größen natürlich endlich sind). Das langsame Ausklingen verwirklichen wir durch Multiplikation der Reihe mit dem Faktor $\exp(-\kappa|n|)$, wobei κ genügend klein sein muss, um die Reihe in dem physikalisch relevanten Bereich nicht zu beeinflussen. Wir schreiben die Transformierte in (B.37) als Summe von zwei geometrischen Reihen, wobei wir den zweifach gezählten Term für $n = 0$ wieder einmal abziehen müssen

$$F(k) = \sum_{-\infty}^0 \exp(-iknb + \kappa n) + \sum_0^{\infty} \exp(-iknb - \kappa n) - 1 \quad (\text{B.38})$$

und wir κ so klein wie notwendig machen können. Die Auswertung der geometrischen Reihen ergibt

$$F(k) = \frac{1}{1 - \exp(ikb - \kappa)} + \frac{1}{1 - \exp(-ikb - \kappa)} - 1 . \quad (\text{B.39})$$

Diese Funktion hat periodische Spitzen der Höhe $2/[1 - \exp(-\kappa)] - 1 \approx 2/\kappa$ an den Stellen $k = m2\pi/b$ (m ganzzahlig). Die Breite der Spitzen beträgt etwa $2\kappa/b$ und geht für $\kappa \rightarrow 0$ gegen null, so dass die Spitzen sehr gut Delta-Funktionen approximieren. Insgesamt können wir die Funktion (B.39) somit als periodische Reihe von Delta-Funktionen ansehen

$$F(k) = \frac{4}{b} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta\left(k - m \frac{2\pi}{b}\right), \quad (\text{B.40})$$

wobei der Vorfaktor $4/b$ gerade der Fläche unter einer Spitze entspricht.

Beispiel: Die Gauß-Funktion

Als weiteres Beispiel wollen wir die Fourier-Transformierte der *Gauß-Funktion*

$$f(x) = \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{B.41})$$

mit der *Varianz* σ^2 diskutieren. Wir erhalten

$$\begin{aligned} F(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \exp(-ikx) dx \\ &= \exp\left[-k^2 \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left[\frac{x}{\sqrt{2\sigma^2}} + ik\sqrt{\frac{\sigma^2}{2}}\right]^2\right) dx. \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

Dieses Integral findet sich in fast allen Integraltafeln. Sein Wert ergibt unabhängig von k den Wert

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right) d\xi = \sqrt{2\pi\sigma^2}, \quad (\text{B.43})$$

woraus

$$F(k) = \sqrt{2\pi\sigma^2} \exp\left[-k^2 \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\right] \quad (\text{B.44})$$

folgt. Die Fourier-Transformierte ist also wiederum eine Gauß-Funktion, die jetzt allerdings die Varianz $1/\sigma^2$ besitzt (siehe Abb. B7). Anhand von diesem Beispiel lässt sich die Reziprozität der Skalen der Funktion und ihrer Fourier-Transformierten besonders gut aufzeigen, da Funktion und Transformierte Gauß-Funktionen sind. Die volle Breite der Gauß-Funktion bei halbem Funktionswert (FWHM: Full Width Half Maximum) beträgt $\sqrt{8 \ln 2} \sigma \simeq 2.35\sigma$.

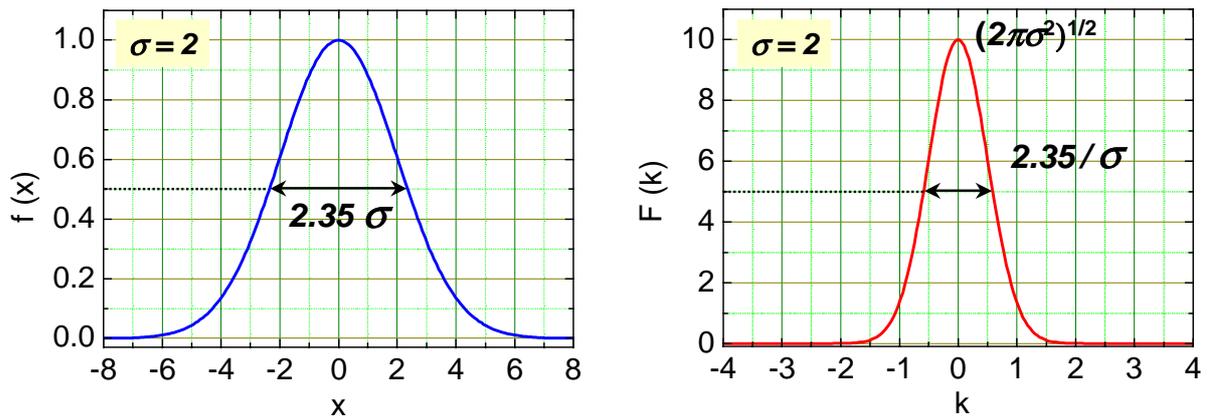


Abbildung B7: Gauß-Funktion und ihre Fourier-Transformierte.

Beispiel: Gedämpfte harmonische Welle und Lorentz-Profil

Als weiteres Beispiel wollen wir die Fourier-Transformierte einer gedämpften harmonischen Welle

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\infty < t < 0 \\ f_0 \exp(-t/2\tau) \cos \omega_0 t & \text{für } 0 \leq t < \infty \end{cases} \quad (\text{B.45})$$

diskutieren. Die Transformierte von $f(t)$ ist

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f_0 \exp(-t/2\tau) \cos \omega_0 t \exp(-i\omega t) dt . \quad (\text{B.46})$$

Die Auswertung des Integrals liefert

$$F(\omega) = \frac{f_0}{2} \left[\frac{1}{2\tau - i(\omega + \omega_0)} \right]^{-1} + \frac{f_0}{2} \left[\frac{1}{2\tau - i(\omega - \omega_0)} \right]^{-1} . \quad (\text{B.47})$$

Um aus $F(\omega)F^*(\omega)$ das beobachtete Frequenzspektrum zu erhalten, müssen wir nur die positiven Frequenzkomponenten berücksichtigen. Wir erhalten dann das *Lorentz-Profil*

$$|F(\omega)|^2 = \frac{f_0^2}{\gamma^2} \frac{\gamma^2/4}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4} . \quad (\text{B.48})$$

Hierbei ist $\gamma = 1/\tau$. Das Lorentz-Profil (siehe hierzu Abb. 6.5) hat seinen Maximalwert f_0^2/γ^2 bei $\omega = \omega_0$ und fällt auf den halben Maximalwert bei $(\omega - \omega_0) = \pm\gamma/2$ ab. Das heißt, die volle Halbwertsbreite des Lorentz-Profiles ist γ .

Fourier-Transformierte einer komplexen Funktion

Bei der Diskussion der Fourier-Reihen periodischer Funktionen in Abschnitt B.1 haben wir auch den Fall eingeschlossen, dass $f(x)$ eine komplexe Funktion ist. Nehmen wir an, dass $f(x)$ eine komplexe Funktion mit der Fourier-Transformierten $F(k)$ ist, dann können wir die Fourier-Transformierte der komplex konjugierten Funktion $f^*(x)$ schreiben als

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) \exp(-ikx) dx &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(+ikx) dx \right]^* \\ &= F^*(-k) . \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

Die Fourier-Transformierte von $f^*(x)$ ist also $F^*(-k)$. In Analogie zu (B.17) bis (B.20) können wir schreiben

$$\text{gerade Funktion:} \quad F(k) = F(-k) \quad (\text{B.50})$$

$$\text{gerade reelle Funktion:} \quad F(k) = F^*(-k) = F(-k) \quad (\text{B.51})$$

$$\text{ungerade Funktion:} \quad F(k) = -F(-k) \quad (\text{B.52})$$

$$\text{ungerade reelle Funktion:} \quad F(k) = F^*(-k) = -F(-k) . \quad (\text{B.53})$$

Wir sehen, dass eine reelle, gerade Funktion eine reelle Transformierte hat und eine reelle, ungerade Funktion dagegen eine rein imaginäre Fourier-Transformierte besitzt. In allen Fällen gilt aber

$$|F(-k)|^2 = |F(k)|^2 . \quad (\text{B.54})$$

Die Fourier-Transformation in zwei und drei Dimensionen

Die vorangegangene Diskussion über Fourier-Reihen periodischer Funktion und die Fourier-Transformation nichtperiodischer Funktionen in einer Dimension lässt sich auch auf zwei und drei Dimensionen erweitern. In der Optik sind vor allem zweidimensionale Funktionen wichtig (z.B. zweidimensionale Transmissionsfunktion eines Bildes). Die Fourier-Transformierte ist mit den zwei Komponenten k_x und k_y der Ortsfrequenz durch ein Doppelintegral definiert:

$$F(k_x, k_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-ik_x x - ik_y y) dx dy . \quad (\text{B.55})$$

Lässt sich die Funktion $f(x, y)$ durch ein Produkt $f_1(x) \cdot f_2(y)$ schreiben, so kann das Integral in zwei eindimensionale Fourier-Transformierte zerlegt werden und es gilt

$$F(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \exp(-ik_x x) dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y) \exp(-ik_y y) dy = F_1(k_x) \cdot F_2(k_y) . \quad (\text{B.56})$$

Für die Symmetrieeigenschaften in zwei Dimensionen ergibt sich:

$$\text{gerade Funktion: } f(x, y) = f(-x, -y) \quad F(k_x, k_y) = F(-k_x, -k_y) \quad (\text{B.57})$$

$$\text{gerade, reell} \quad F(k_x, k_y) = F^*(-k_x, -k_y) = F(-k_x, -k_y) \quad (\text{B.58})$$

$$\text{ungerade Funktion: } f(x, y) = -f(-x, -y) \quad F(k_x, k_y) = -F(-k_x, -k_y) \quad (\text{B.59})$$

$$\text{ungerade, reell} \quad F(k_x, k_y) = F^*(-k_x, -k_y) = -F(-k_x, -k_y). \quad (\text{B.60})$$

B.4 Die inverse Fourier-Transformation

Wir wollen in diesem Abschnitt überlegen, welches Ergebnis wir erhalten, wenn wir die Fourier-Transformation zweimal hintereinander ausführen. Wir werden sehen, dass die Fourier-Transformierte der Fourier-Transformierten einer Funktion genau wieder die Originalfunktion ist. Diese Eigenschaft der Fourier-Transformation nennt man *Fourier-Inversionstheorem*.

Wir können die Fourier-Transformierte der Fourier-Transformierten einer Funktion $f(x)$ direkt als Doppelintegral

$$\tilde{f}(x') = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-ikx) dx \right] \exp(-ikx') dk \quad (\text{B.61})$$

schreiben. Die Auswertung dieses Doppelintegrals ergibt

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x') &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp[-ik(x+x')] dx dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\frac{\exp[-ik(x+x')]}{-i(x+x')} \right]_{k=-\infty}^{k=+\infty} dx . \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

Die Funktion mit den eckigen Klammern kann mit $u = (x+x')$ in einem Grenzübergangsprozess als

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2 \sin ku}{u}$$

geschrieben werden mit dem Wert $2\pi\delta(u)$. Dass diese Funktion eine Delta-Funktion ist, lässt sich durch Darstellung der Funktion für einige Werte von k leicht einsehen. Den Vorfaktor 2π erhält man aus der Berechnung der Fläche unter der Kurve, also durch Auswerten des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2 \frac{\sin ku}{u} du = 2\pi.$$

Damit erhalten wir

$$\tilde{f}(x') = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(x+x') f(x) dx = 2\pi f(-x'). \quad (\text{B.63})$$

Wir sehen also, dass wir nach einer weiteren Transformation der Fourier-Transformierten der Funktion $f(x)$ die Originalfunktion mit Ausnahme einer Spiegelung am Ursprung (x wird durch $-x$ ersetzt) und einem Faktor von 2π wiederhergestellt haben. Es gibt eine Konvention, mit der man die Rücktransformation so definieren kann, dass sie diese Mängel behoben werden. Dazu definieren wir die Hintransformation von $f(x)$ nach $F(k)$ wie zuvor in (B.29)

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-ikx) dx \quad (\text{B.64})$$

und die Rücktransformation oder die *inverse Fourier-Transformation* von $F(k)$ nach $f(x)$ als

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \exp(ikx) dk. \quad (\text{B.65})$$

Mit dieser Konvention erhält man nach Hin- und Rücktransformation wieder genau die Originalfunktion.³⁵

B.5 Die Faltung

Ein in der Optik sehr häufig auftretendes Problem ist die Tatsache, dass wir bei der Abbildung eines Objekts zum Beispiel durch Strahlbegrenzungen und der damit verbundenen endlichen Auflösung ein unscharfes Bild bekommen. Das Bild erhält man dadurch, indem man jedem Bildpunkt eine passend gewichtete Bildverwaschungsfunktion zuweist und anschließend in jedem Punkt der Bildebene alle diese Beiträge aufsummiert. Diese Zuweisung einer Funktion zu jedem Punkt einer anderen Funktion nennt man *Faltung*.

³⁵Es sei hier darauf hingewiesen, dass reale physikalische Systeme natürlich nichts von einer solchen Konvention wissen. Betrachten wir z.B. ein bilderzeugendes System, bei dem die Objektfunktion zuerst Fourier-transformiert wird und anschließend die Fourier-Transformierte wieder zurücktransformiert wird, so erhalten wir ein *invertiertes Bild*.

Das Faltungsintegral

Die Faltung zweier reeller Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ist mathematisch definiert als

$$h(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x') g(x-x') dx' . \quad (\text{B.66})$$

In zwei Dimensionen gilt entsprechend

$$h(x,y) \equiv \iint_{-\infty}^{\infty} f(x',y') g(x-x',y-y') dx'dy' . \quad (\text{B.67})$$

Üblicherweise wird der Faltungsoperator mit dem Symbol \otimes bezeichnet, so dass wir vereinfacht schreiben können:

$$h(x) = f(x) \otimes g(x) . \quad (\text{B.68})$$

Wir wollen uns kurz anhand einer optischen Abbildung mit endlicher Auflösung klarmachen, wie die Faltung durch das Integral (B.67) mathematisch erfolgt. Die wichtigsten Schritte haben wir in Abb. B8 dargestellt. Das resultierende Signal $h(x_1)$ an einem bestimmten Punkt x_1 der Bildebene ist eine lineare Überlagerung aller in x_1 existierenden Beiträge. Jedes Element dx des Objekts in der Objektebene liefert ein Signal einer bestimmten Intensität $f(x)dx$, welches durch das optische System in einen endlichen Bereich verschmiert wird, dessen Mitte der Gaußsche Bildpunkt ($x = x'$, Bildpunkt der scharfen Abbildung) bildet. Das Bildsignal im Punkt x_1 ist dann gegeben durch

$$dh(x_1) = f(x') g(x_1 - x') dx' .$$

Das Integral summiert nun die Beiträge auf, die alle einzelnen Bildpunktelemente am Ort x_1 liefern. Natürlich tragen dabei üblicherweise diejenigen Elemente weniger bei, die weiter vom einem gegebenen Bildpunkt entfernt sind, da die Verwaschungsfunktion mit dem Abstand abnimmt. Wäre die Auflösung unendlich gut, so wäre $g(x_1 - x') = \delta(x_1 - x')$ und zum Bildsignal würde nur das Element bei $x_1 = x'$ beitragen. Im eindimensionalen Fall können wir uns $f(x')$ als eindimensionale Verteilung einer Leuchtstärke eines Objekts vorstellen. Hat die Linienverwaschungsfunktion $g(x - x')$ eine Form wie sie in Abb. B8 gezeigt ist, so erscheint das Bild als eine verschwommene Version des Eingangssignals.

Ein anschauliches Beispiel für eine Faltungsoperation ist die Lochkamera. Wir nehmen hierzu an, dass wir mit einer Lochkamera einen Gegenstand photographieren, wobei die Lochkamera eine große Lochblende haben soll. Aufgrund der Größe der Lochblende wird jeder Punkt des Objekts einen verwaschenen Fleck in der Bildebene erzeugen, der um den Punkt x' , dem Punkt, an dem der Bildpunkt bei scharfer Abbildung läge, zentriert ist. Eindimensional wird dieser verwaschene Fleck durch die Funktion $g(x-x')$ beschrieben, deren Ursprung am Ort $x = x'$ liegt (ähnlich wie dies in Abb. B8 gezeigt ist). Die Intensität des Flecks ist proportional zu $f(x')$, die ein scharfes Bild an der Stelle x' hätte. Die Intensität am Punkt x ist daher $f(x')g(x-x')$ und für das komplette verwaschene Bild entspricht die gesamte Intensität dem Integral dieses Produkts über x' .

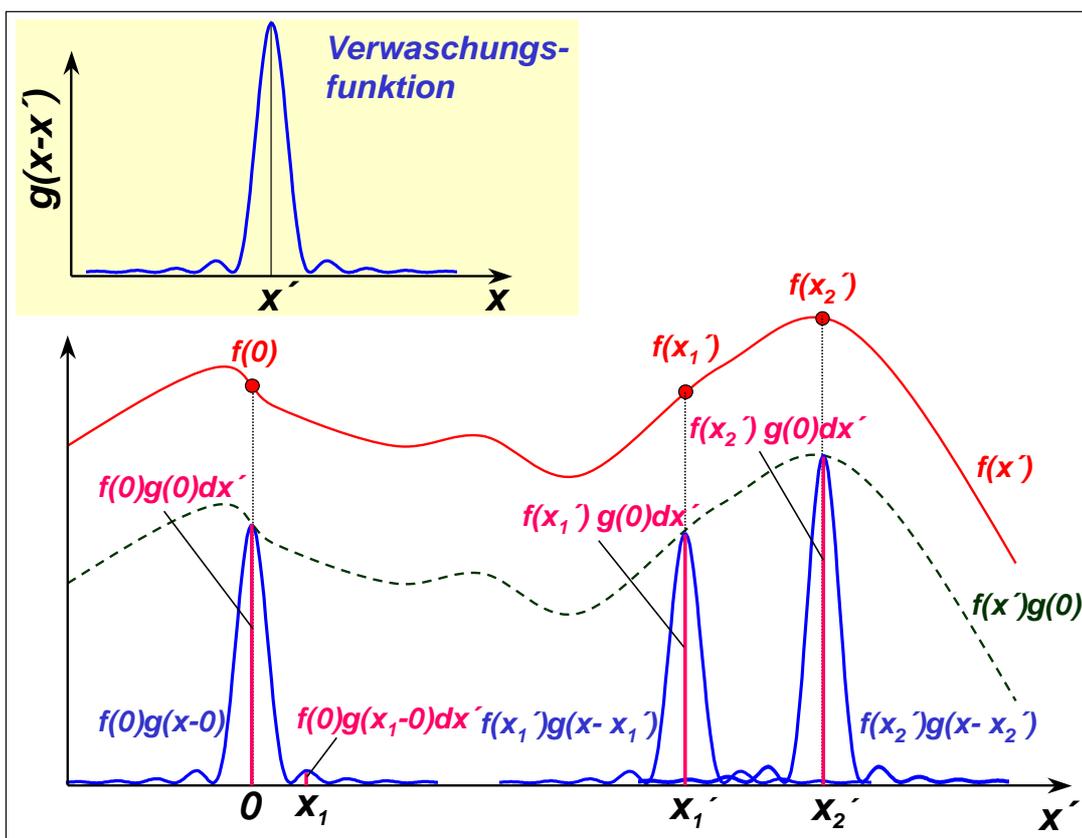


Abbildung B8: Die Überlagerung gewichteter Verwaschungsfunktionen zur Illustration der Bedeutung des Faltungsintegrals.

Werden hinreichend einfache Funktionen gefaltet, so können wir die Funktion $h(x)$ auch ohne Rechnung angeben. In Abb. B9 ist als Beispiel die Faltung zweier gleicher Rechteckpulse $g(x-x')$ und $f(x')$ vorgeführt. Variieren wir x von x_0 bis x_{10} , so schieben wir die Funktion $g(x-x')$ von links nach rechts über die Funktion $f(x')$, wodurch wir den Überlapp der beiden Funktionen ändern. Die schraffierte Fläche markiert das Überlappungsgebiet in Abhängigkeit von x . Durch das Verschieben von $g(x-x')$ durch Variation von x wächst das Überlappungsgebiet zunächst linear an und fällt dann wieder linear mit x ab. Es ist leicht einzusehen, dass die Funktion $h(x)$ gerade die Größe der Fläche als Funktion von x angibt. Diese nimmt also linear zu, bis sich die beiden Pulse vollkommen überlappen, und nimmt dann wieder linear auf null ab. Durch Faltung von $f(x')$ mit der Funktion $g(x-x')$ erhalten wir also eine Verwaschung des Rechteckpulses zum einem Dreieck. Würden wir den Rechteckpuls $g(x-x')$ immer schmaler machen, so würde die Verwaschung immer mehr abnehmen und im Grenzfall $g(x-x') \rightarrow \delta(x-x')$ völlig verschwinden.

Faltung mit einer Reihe von Delta-Funktionen

Wir nehmen an, dass eine der beteiligten Funktionen ein Reihe von Delta-Funktionen ist. Dieser Fall kommt in der Physik häufig zur Anwendung. Als Beispiel können wir z.B. einen kristallinen Festkörper betrachten (vergleiche hierzu Abschnitt 5.6.2). Der Festkörper kann als ein regelmäßiges Gitter von Punkten mit dem Abstand der Gitterkonstante angesehen werden. Die Gitterpunkte befinden sich dann an den Positionen $(\ell a, m b, n c)$ mit den Gitterkonstanten a, b und c , wobei ℓ, m und n ganze Zahlen sind. An jedem Gitterpunkt befindet sich eine identische Einheit, die man als Basis des Kristallgitters bezeichnet. Bei einem einfachen Kochsalzkristall (NaCl) besteht diese gerade aus den beiden Atomen Na und

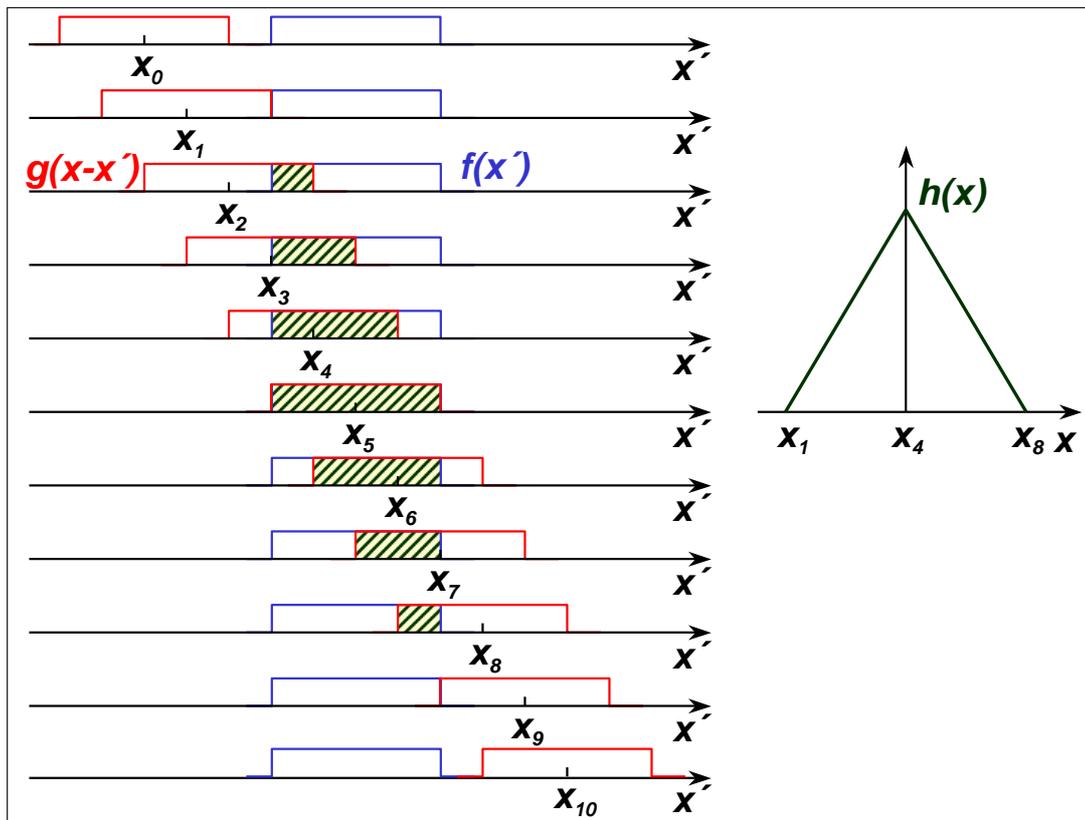


Abbildung B9: Faltung zweier gleicher Rechteckpulse. Links: Durch Variation von x von x_0 bis x_{10} wird die Funktion $g(x-x')$ von links nach rechts über die Funktion $f(x')$ geschoben, wodurch sich der Überlapp der beiden Funktionen ändert (schraffierte Fläche). Rechts: Die Funktion $h(x)$ entspricht der Größe der Überlappfläche von $g(x-x')$ und $f(x')$.

CI, bei komplizierten Substanzen kann diese aus einigen tausend Atomen bestehen. Wir können nun eine Funktion $f(x,y,z)$ definieren, die uns zum Beispiel die Dichteverteilung der Elektronen in dieser Basiseinheit bezüglich des Gitterpunktes angibt.

Beschreiben wir nun das Kristallgitter durch eine Reihe von Delta-Funktionen

$$g(x,y,z) = \sum_{\ell,m,n} \delta(x-\ell a)\delta(y-mb)\delta(z-nc) , \quad (\text{B.69})$$

so können wir den gesamten Kristall durch die Faltungsfunktion

$$h(x,y,z) = \iiint g(x',y',z')f(x-x',y-y',z-z') dx'dy'dz' \quad (\text{B.70})$$

beschreiben.

Im Rahmen der Optik haben wir weitere Beispiele kennen gelernt, bei denen die Technik der Faltung zu beträchtlichen Vereinfachungen geführt hat. Als wichtiges Beispiel sei hier das Beugungsgitter erwähnt. Dieses kann durch einen Schlitz oder eine beliebige linienförmige Funktion gefaltet mit einer eindimensionalen Reihe von Delta-Funktionen dargestellt werden (vergleiche Abschnitt 5.5.3).

Der Faltungssatz

Wir betrachten nun zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ mit ihren zugehörigen Fourier-Transformierten $\text{FT}(f) = F(k)$ und $\text{FT}(g) = G(k)$. Ist nun $h(x) = f(x) \otimes g(x)$, so besagt der *Faltungssatz*

$$\boxed{H(k) = \text{FT}(h) = \text{FT}(f \otimes g) = \text{FT}(f) \cdot \text{FT}(g) = F(k) \cdot G(k) .} \quad (\text{B.71})$$

Das heißt, *die Fourier-Transformierte der Faltung zweier Funktionen ist gleich dem Produkt der Fourier-Transformierten der beiden Originalfunktionen.*

Der Faltungssatz lässt sich leicht beweisen. Hierzu schreiben wir

$$\begin{aligned} \text{FT}(f \otimes g) = H(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x') g(x-x') dx' \right] \exp(-ikx) dx \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x') g(x-x') \exp(-ikx) dx' dx . \end{aligned} \quad (\text{B.72})$$

Mit $u = x - x'$ erhalten wir

$$H(k) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x') g(u) \exp[-ik(x'+u)] dx' du , \quad (\text{B.73})$$

was sich in die beiden Faktoren

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x') \exp(-ikx') dx' \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \exp(-iku) du = F(k) \cdot G(k) \quad (\text{B.74})$$

zerlegen lässt.

Wir wollen kurz zwei Anwendungsbeispiele des Faltungssatzes diskutieren. Wir haben oben gesehen (vergleiche Abb. B9), dass die Faltung zweier identischer Rechteckpulse ($f \otimes g$) einen Dreieckspuls h ergibt. Deshalb muss das Produkt der Fourier-Transformierten von f und g gleich der Transformierten von h sein. Es muss also

$$\text{FT}(h) = \left(a \frac{\sin(ka/2)}{ka/2} \right)^2 \quad (\text{B.75})$$

gelten, wobei a die Breite des Rechteckpulses ist.

Als weiteres Beispiel wollen wir die Faltung eines Rechteckpulses mit den in Abb. B6 gezeigten Delta-Funktionen betrachten. Die Transformierte des resultierenden Doppelpulses ergibt sich als Produkt der beiden einzelnen Transformierten, also als Produkt einer sinc- und einer cos-Funktion.

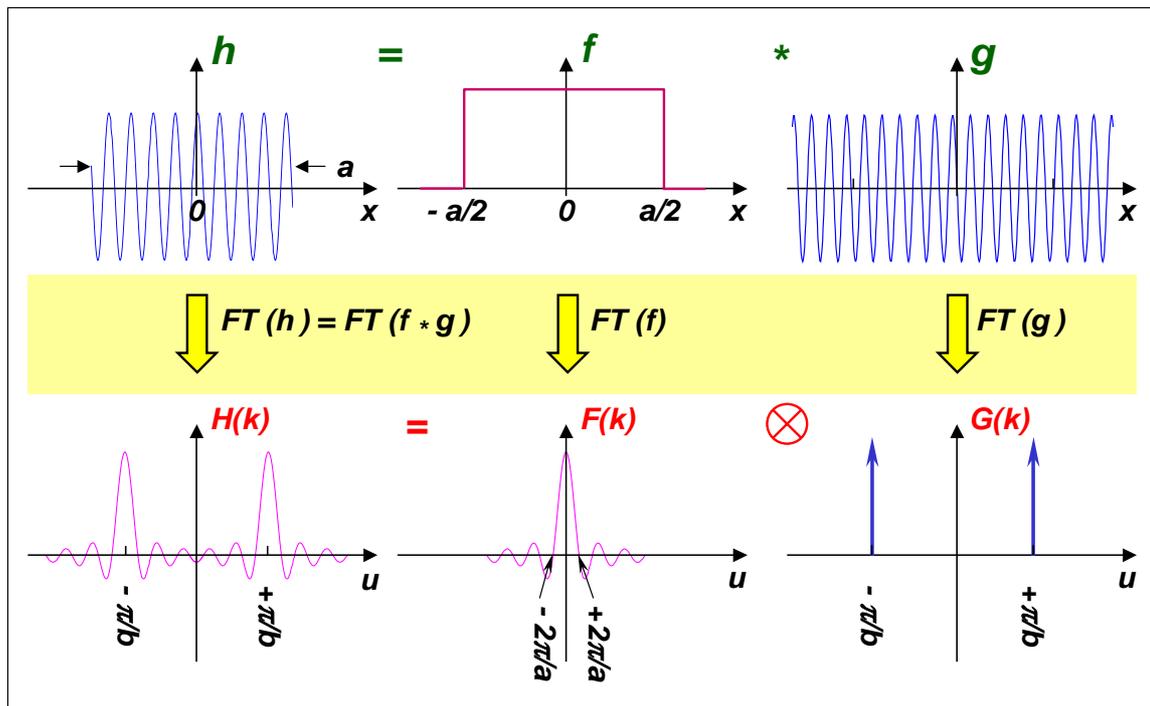


Abbildung B10: Beispiel zum Faltungssatz.

Alternative Formulierung des Faltungssatzes

Wir können nun das Inversionstheorem benutzen und sofort schließen, dass die Fourier-Transformierte eines Produkts ($f \cdot g$) zweier Funktionen multipliziert mit 2π der Faltung $FT(f) \otimes FT(g)$ der einzelnen Transformaten entspricht. Dies ist eine alternative Formulierung des Faltungssatzes, die manchmal auch als *Frequenz-Faltungssatz* bezeichnet wird. Es gilt also

$$FT(f \cdot g) = \frac{1}{2\pi} FT(f) \otimes FT(g) \quad (\text{B.76})$$

Als Anwendungsbeispiel diskutieren wir die Fourier-Transformierte eines endlichen Wellenzuges (siehe Abb. B10). Diesen können wir als Produkt einer unendlich ausgedehnten Kosinusfunktion und einem Rechteckpuls darstellen. Die Fourier-Transformierte des endlichen Wellenzuges erhalten wir dann aus der Faltung der bekannten Transformaten der Kosinusfunktion (Paar von Delta-Funktionen) und des Rechteckpulses (sinc-Funktion). Die Faltung ergibt dann einfach die Summe von zwei sinc-Funktionen an den Stellen der beiden Delta-Funktion.

B.6 Die Korrelationsfunktion

Wir wollen nun die *Korrelationsfunktion* einführen, die eine große Bedeutung in der Statistik und zahlreiche Anwendungen in der Physik hat. Die Korrelationsfunktion ist formal als

$$h_C(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x') g^*(x' + x) dx' = f(x) \odot g(x) \quad (\text{B.77})$$

definiert.³⁶ Hierbei haben wir den Korrelationsoperator mit dem Symbol \odot bezeichnet. Vergleichen wir diesen Ausdruck mit (B.66), so lässt sich durch Umschreiben der Variablen einfach zeigen, dass (B.77) die Faltung von $f(-x)$ mit $g^*(x)$ ist. Der Name Korrelationsfunktion rührt daher, dass das Integral in (B.77) angibt, wie stark die Funktionen f und g überlappen. Um uns dies klar zu machen, betrachten wir zwei Funktionen, die sich in Amplitude und Phase ähnlich sind, wenn ihre Ursprünge sich bei $x = 0$ und $x = -x_0$ befinden. Setzen wir $x = x_0$, so werden $f(x')$ und $g(x' + x_0)$ etwa die gleichen komplexen Werte besitzen und $f(x')g^*(x' + x_0)$ wird positiv und reell sein. Damit wird auch die Korrelationsfunktion $h_C(x_0)$ positiv sein und einen großen Wert annehmen.

Aus der Definition (B.77) der Korrelationsfunktion sehen wir sofort, dass $f(x) \odot g(x) = f(x) \odot g(x)$, wenn entweder $f(x)$ oder $g(x)$ eine gerade Funktion ist. Bei der Faltung wird eine der beiden Funktionen gespiegelt und anschließend die Überlappfläche, also die Fläche unter der Produktkurve, bestimmt. Die Korrelation summiert dagegen die Überlappung, ohne eine der beiden Funktionen zu spiegeln. Ist die für die Faltung zu spiegelnde Funktion gerade, d.h. $f(x) = f(-x)$, so liefert die Faltung das gleiche Ergebnis wie die Korrelation. Da die Faltung kommutativ ist, d.h. $f(x) \otimes g(x) = g(x) \otimes f(x)$, spielt es keine Rolle, welche der beiden Funktionen gerade ist.

Unter Benutzung von (B.49) und des Faltungssatzes (B.71) erhalten wir die Fourier-Transformierte H_C der Korrelationsfunktion zu

$$\boxed{\text{FT}\{h_C\} \equiv H_C(k) = \text{FT}\{f(-x) \otimes g^*(x)\} = F(-k) \cdot G^*(-k) .} \quad (\text{B.78})$$

Da die Korrelationsfunktion bei der Integration von $-\infty$ bis $+\infty$ einen unendlichen Wert annehmen kann, verwendet man häufig auch eine Korrelationsfunktion \tilde{h}_C , die durch das Integrationsintervall dividiert ist:

$$\tilde{h}_C(x) \equiv \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2x_0} \int_{-x_0}^{x_0} f(x')g^*(x'+x) dx' . \quad (\text{B.79})$$

Sind beispielsweise f und g konstante Funktionen $f(x') = A$ und $g(x') = B$, so wird $\tilde{h}_C(x) = A \cdot B = \text{const}$, während h_C unendlich groß werden würde. Sind $f(t)$ und $g(t)$ z.B. elektromagnetische Wellen, so gibt die Funktion $\tilde{h}_C(x)$ bzw. $\tilde{h}_C(\tau)$ eine Energie pro Raum- bzw. Zeitintervall, also eine Energiedichte bzw. Leistung an.

B.7 Die Autokorrelationsfunktion

Wir wollen nun einen speziellen Fall der Korrelationsfunktion betrachten, nämlich die *Autokorrelationsfunktion* h_{AC} , die nach (B.77) mit $f \equiv g$ definiert ist. Es gilt also

$$\boxed{h_{AC}(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x')f^*(x'+x) dx' = f(x) \odot f(x) .} \quad (\text{B.80})$$

Da die beiden Funktionen unter dem Integral nun den gleichen Ursprung besitzen, hat die Autokorrelation eine deutliche Spitze bei $x = 0$.

³⁶Manche Bücher definieren die Korrelationsfunktion mit einem $-x$ anstelle des $+x$ im Argument von g . Physikalisch macht dies keinen Unterschied.

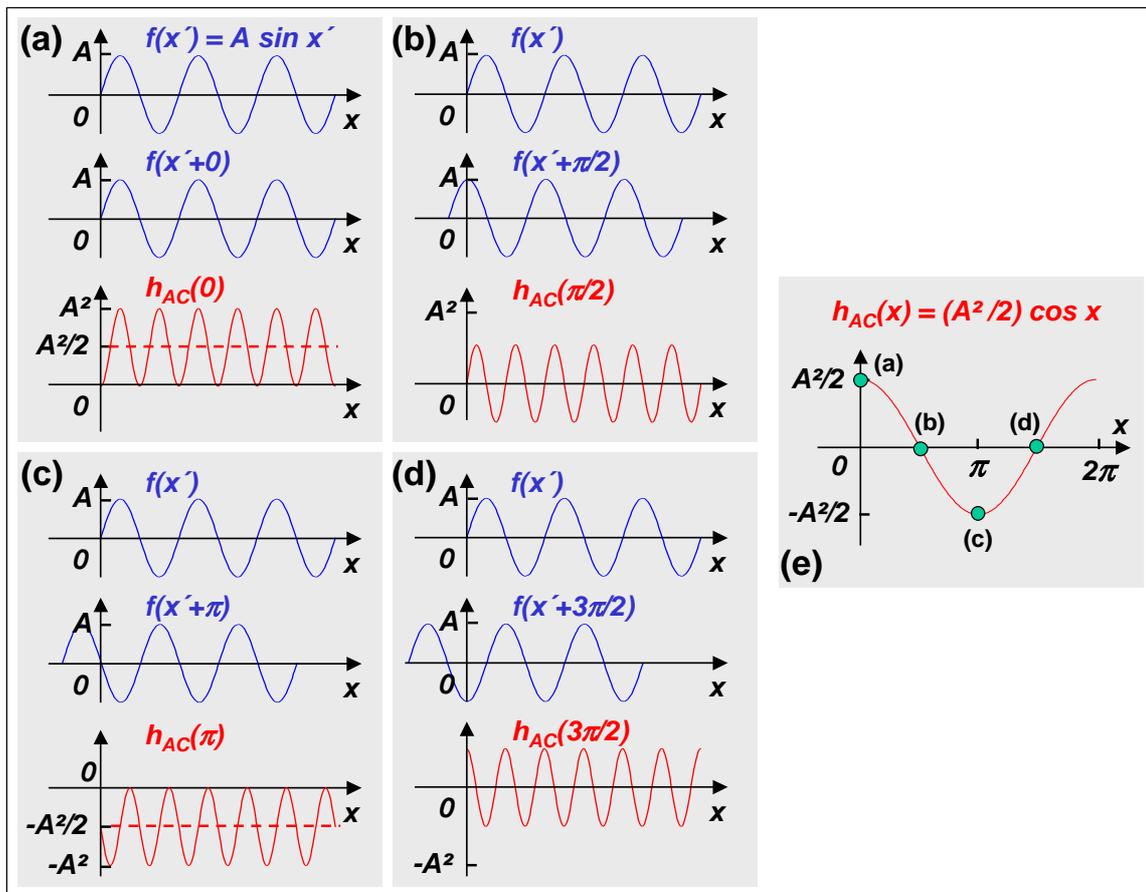


Abbildung B11: Die Autokorrelation einer Sinusfunktion.

Als Beispiel wollen wir die Autokorrelation der Sinusfunktion $A \sin x$ diskutieren (siehe Abb. B11). In Abb. B11a bis d wird die Funktion jeweils um einen bestimmten Wert x verschoben und dazu das Produkt $f(x')f^*(x'+x)$ gebildet. Anschließend wird die Fläche unter der Produktkurve berechnet und gegen x aufgetragen (Abb. B11e). Als Ergebnis erhalten wir $h_{AC}(x) = \frac{1}{2}A^2 \cos x$, wie sich leicht nachrechnen lässt. Diese Funktion hat die gleiche Periode wie $f(x')$, da sie genau einen Periode durchläuft, während x von 0 bis 2π vergrößert wird.

Wir haben oben gesehen, dass die Korrelation dasselbe Ergebnis liefert wie die Faltung, wenn eine der beiden Funktionen gerade ist. Aus diesem Grund liefert z.B. die Autokorrelation eines Rechteckpulses dasselbe Ergebnis wie die Faltung des Rechteckpulses mit sich selbst, also eine dreieckförmige Funktion (siehe Abb. B9).

Wir wollen die physikalische Bedeutung der Autokorrelationsfunktion anhand eines Rauschsignals $f(t)$ (z.B. zeitabhängiger Spannungssignal) mit zeitlichem Mittelwert null klar machen. Die Autokorrelation vergleicht den Wert $f(t)$ mit dem Funktionswert $f(t+\tau)$ zu einem anderen Zeitpunkt. Ist $\tau = 0$, so erhalten wir $\tilde{h}_{AC}(0) = f^2(t)$. Da $f^2(t)$ für alle Werte von t positiv ist, ergibt sich für $\tilde{h}_{AC}(0)$ ein großer Wert. Vergleicht man andererseits das Rauschsignal mit seinem um den Betrag τ_1 verschobenen Abbild, so wird der Wert von $\tilde{h}_{AC}(\tau_1)$ sicherlich etwas kleiner sein, da das Produkt $f(t) \cdot f(t+\tau_1)$ für gewisse t auch negativ sein kann. Das heißt, durch die Verschiebung des Rauschsignals $f(t)$ gegen sich selbst wurde die punktweise Ähnlichkeit der Funktionen verringert. Ist das Rauschsignal zu einer Zeit $t+\tau_2$ statistisch völlig unabhängig von dem Rauschsignal zur Zeit t , so wird das Produkt $f(t) \cdot f(t+\tau_2)$ statistisch betrachtet genauso oft positiv wie negativ sein und die Autokorrelation $\tilde{h}_{AC}(\tau_2)$ wird null werden (es liegt keine Korrelation über die Zeitskala τ_2 vor). Würde das Rauschsignal z.B. durch statistisch

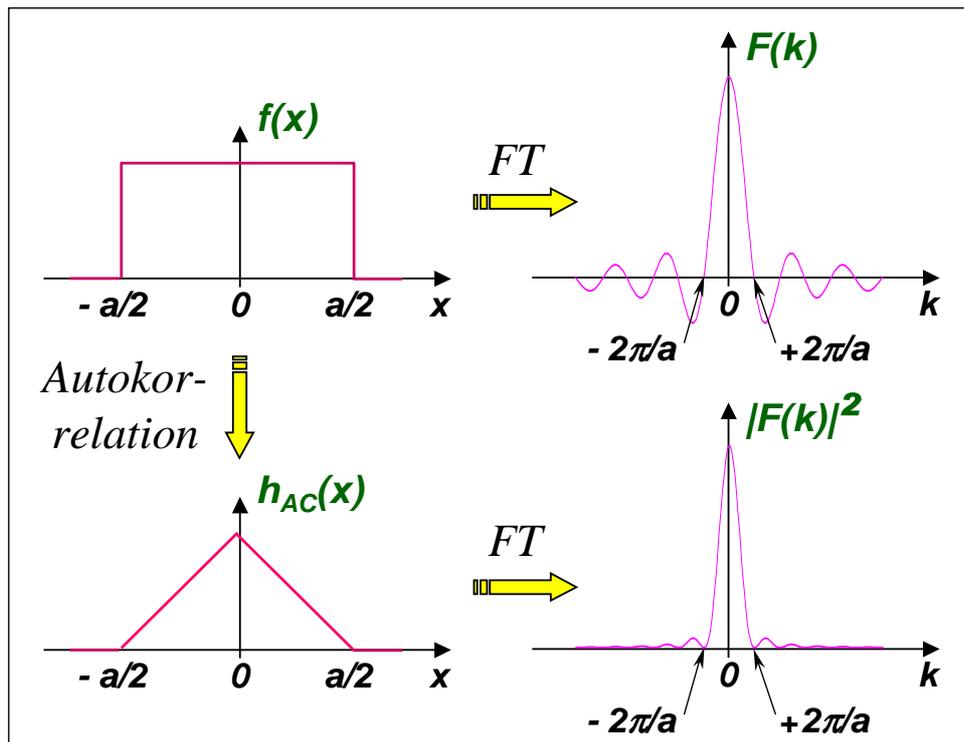


Abbildung B12: Das Betragsquadrat $|F(k)|^2$ der Fourier-Transformierten eines Rechteckpulses $f(x)$ ist durch die Fourier-Transformierte der Autokorrelation von $f(x)$ gegeben.

verteilte Rechteckpulse der Dauer τ_2 bestehen, so würde die Autokorrelation gerade bei τ_2 gegen null gehen.

Die Fourier-Transformierte der Autokorrelationsfunktion

Als Fourier-Transformierte der Autokorrelationsfunktion h_{AC} erhalten wir entsprechend (B.78)

$$\text{FT}\{h_{AC}(x)\} \equiv H_{AC}(k) = F(-k)F^*(-k) = |F(-k)|^2. \quad (\text{B.81})$$

Hierbei haben wir die Tatsache, dass die Autokorrelation der Faltung von $f(-x)$ mit $f^*(x)$ entspricht, und den Faltungssatz ausgenutzt. Benutzen wir die Symmetrieeigenschaften (B.54), d.h. $|F(-k)|^2 = |F(k)|^2$, so erhalten wir für eine reelle Funktion f

$$H_{AC}(k) = |F(k)|^2. \quad (\text{B.82})$$

Gleichung (B.82) besagt, dass für eine reelle Funktion $f(x)$ die Fourier-Transformierte seiner Autokorrelationsfunktion durch das Betragsquadrat seiner Fourier-Transformierten gegeben ist.

Aufgrund des Inversionstheorems (B.65) der Fourier-Transformation gilt auch der umgekehrte Zusammenhang bis auf einen Faktor 2π . Das heißt, das Absolutquadrat der Fourier-Transformierten einer reellen Funktion $f(x)$ ist durch die Fourier-Transformierte der Autokorrelation dieser Funktion gegeben. Dieser Zusammenhang wird als *Wiener-Khinchin-Theorem* bezeichnet. Für zeitabhängige Funktionen $f(t)$

bezeichnet man das Betragsquadrat $|F(\omega)|^2$ als *Leistungsspektrum*, da diese Funktion angibt, welche Frequenzkomponente der zeitabhängigen Funktion wie stark zur Gesamtenergie beiträgt. Das Wiener-Khinchin-Theorem besagt in diesem Fall, dass man das Leistungsspektrum durch Autokorrelation der erzeugenden Funktion bestimmen kann.

Die eben abgeleiteten Zusammenhänge sind in Abb. B12 veranschaulicht. Die Transformierte eines Rechteckpulses ist die sinc-Funktion, weshalb das Absolutquadrat sich wie sinc^2 verhält. Aufgrund obiger Aussagen können wir schließen, dass die Fourier-Transformierte der Autokorrelation des Rechteckpulses dann durch das Betragsquadrat der sinc-Funktion gegeben ist. Umgekehrt können wir sagen, dass das Absolutquadrat der Fourier-Transformierten des Rechteckpulses durch die Fourier-Transformierte der Autokorrelation gegeben ist, d.h. dass die sinc^2 -Funktion durch die Fourier-Transformierte der Dreiecksfunktion gegeben ist.

Wir wollen an dieser Stelle noch darauf hinweisen, dass wir aus einer Fourier-Transformierten jederzeit auf die ursprüngliche Funktion zurückschließen können. Sobald die Transformierte aber quadriert wird, verlieren wir die Information über das Vorzeichen aller Beiträge mit unterschiedlichem k . Dies entspricht einem Verlust von Phaseninformation. Dies können wir uns leicht anhand einer Funktion vorstellen, die als Summe mehrerer harmonischer Funktionen mit unterschiedlichen Amplituden und Frequenzen gegeben ist. Verändert man die relativen Phasen dieser harmonischen Funktionen, so ändert sich sowohl die resultierende Summenfunktion $f(x)$ als auch deren Fourier-Transformierte $F(k)$. Der zu jeder Frequenz gehörende Energiebeitrag, also das Leistungsspektrum $|F(k)|^2$ muss aber gleich bleiben. Demnach bleibt auch die Autokorrelation gleich, obwohl sich die Form der Funktion $f(x)$ geändert hat.

Das Parsevalsche Theorem

Wir haben gelernt, dass der Prozess der Fourier-Transformation im Wesentlichen einer Darstellung einer beliebigen Funktion $f(x)$ durch eine Superposition von Partialwellen mit verschiedenen Amplituden und Frequenzen entspricht. Die Fourier-Transformierte $F(k)$ gibt die Amplitude derjenigen Raumfrequenzen an, die im Frequenzbereich zwischen k und $k + dk$ liegen. Offenbar lässt sich also $|F(k)|$ als spektrale Amplitudendichte auffassen und das Betragsquadrat $|F(k)|^2$ sollte proportional zur Energie pro Einheitsintervall der Raumfrequenz sein.

Betrachten wir z.B. die Fraunhofersche Beugung, so wissen wir, dass diese als Fourier-Transformation beschrieben werden kann. Dabei entspricht $f(x)$ der Transmissionsfunktion eines Objektes oder der Amplitudenverteilung der vom Objekt auslaufenden Partialwellen und $F(k)$ der Amplitudenverteilung des Beugungsmusters. Da bei dem Beugungsprozess keine Energie verloren geht, scheint es zwingend zu sein, dass die Gesamtenergie, die das Beugungsobjekt verlässt, gleich der Energie ist, die in der Beugungsebene ankommt. Das heißt, es muss

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = Z \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk \quad (\text{B.83})$$

gelten, wobei Z eine Konstante ist, die wir noch bestimmen müssen. Der Zusammenhang (B.83) heißt *Parsevalsches Theorem*.

Das Parsevalsche Theorem kann leicht aus der vorangegangenen Diskussion zur Autokorrelationsfunktion abgeleitet werden. Wir wenden hierzu das Inversionstheorem (B.65) auf Gleichung (B.81) an. Die inverse Transformation von $|F(-k)|^2$ muss danach gleich der inversen Transformation von $H_{AC}(k)$ also gleich $h_{AC}(x)$ sein. Wir erhalten also

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(-k)|^2 \exp(ikx) dk = h_{AC}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') f^*(x'+x) dx' . \quad (\text{B.84})$$

Setzen wir $x = 0$ und substituieren k durch $-k$, so erhalten wir wieder das Parsevalsche Theorem

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x')|^2 dx' . \quad (\text{B.85})$$

Wir sehen, dass die Konstante $Z = 1/2\pi$. Die Konstante Z erscheint nur aufgrund der Konvention bei der Definition der inversen Fourier-Transformation.

Zwei- und dreidimensionale Korrelationsfunktion

Das Konzept der Korrelation (und Autokorrelation) ist nicht auf eine Dimension begrenzt, sondern kann einfach auf mehrere Dimensionen erweitert werden. In drei Dimensionen gilt

$$h_C(x, y, z) = \iiint_{-\infty}^{\infty} f(x', y', z') g^*(x'+x, y'+y, z'+z) dx' dy' dz' . \quad (\text{B.86})$$

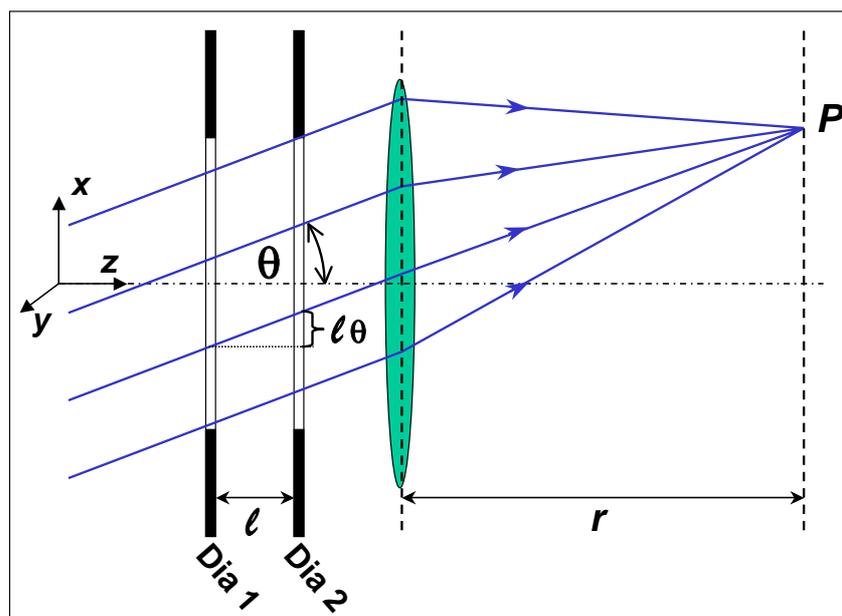


Abbildung B13: Die Erzeugung einer zweidimensionalen Korrelation mit Hilfe der Fraunhoferschen Beugung.

In zwei und drei Dimensionen wird die Korrelationsfunktion häufig zur Mustererkennung angewendet. Die möglichen Anwendungen reichen vom Vergleich von Fingerabdrücken über das Absuchen von Dokumenten nach bestimmten Mustern bis hin zur Sichtung von Luftaufklärungsbildern.

Abb. B13 zeigt, wie man zweidimensionale Funktionen mit optischen Methoden korrelieren kann. Die beiden Funktionen werden durch die Transparenz $f(x,y)$ und $g(x,y)$ von zwei Dias beschrieben. Die Bestrahlungsstärke an einem Punkt P in der Brennebene einer Linse mit Brennweite r wird durch ein Bündel paralleler Strahlen erzeugt, welche beide Dias durchlaufen. Die Koordinaten von P sind $(\theta r, \varphi r)$ und werden durch die Richtung (θ, φ) des Strahlenbündels bestimmt. Ein Strahl durchläuft das erste Dia am Punkt (x', y') mit einer Durchlässigkeit $f(x', y')$ und das zweite Dia am Punkt $(x' + x, y' + y)$ mit der Durchlässigkeit $g(x' + x, y' + y)$. Die Unterschiede in den Koordinaten betragen $x = \theta \ell$ und $y = \varphi \ell$, wobei ℓ der Abstand der beiden Dias ist. Die Bestrahlungsstärke am Punkt P ist dann durch

$$h_C(x,y) = \iiint_{-\infty}^{\infty} f(x',y')g^*(x'+x,y'+y) dx' dy' \quad (\text{B.87})$$

gegeben. Die Verteilung der Intensität in der Beugungsebene bezeichnet man dann als *Korrelogramm*. Verwendet man zwei gleiche Dias, erhält man die zweidimensionale Autokorrelationsfunktion.

C Bessel-Funktionen

Bessel-Funktionen spielen bei der Beugungstheorie eine wichtige Rolle, da viele Beugungsobjekte kreisförmig sind. Wir wollen deshalb hier einige Eigenschaften der Besselfunktionen diskutieren, die für die elementare Wellenoptik wichtig sind.

Es ist am bequemsten, mit der Bessel'schen Integralformulierung der Funktionen $J_n(x)$ zu beginnen:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[i(x \cos \phi + n\phi)] d\phi . \quad (\text{C.1})$$

Diese Funktionen sind in Abb. C1 dargestellt. Charakteristischerweise beginnen $J_n(x)$ von $x = 0$ ausgehend wie x^n , entwickeln aber für $x > n\pi/2$ gedämpfte Oszillationen $\propto x^{-1/2} \cos[x - (n - \frac{1}{2})\pi/2]$. Daher verhalten sich benachbarte Funktionen bei großen x -Werten grob wie Kosinus- und Sinusfunktionen mit einer Phasenverschiebung von $\pi/4$.

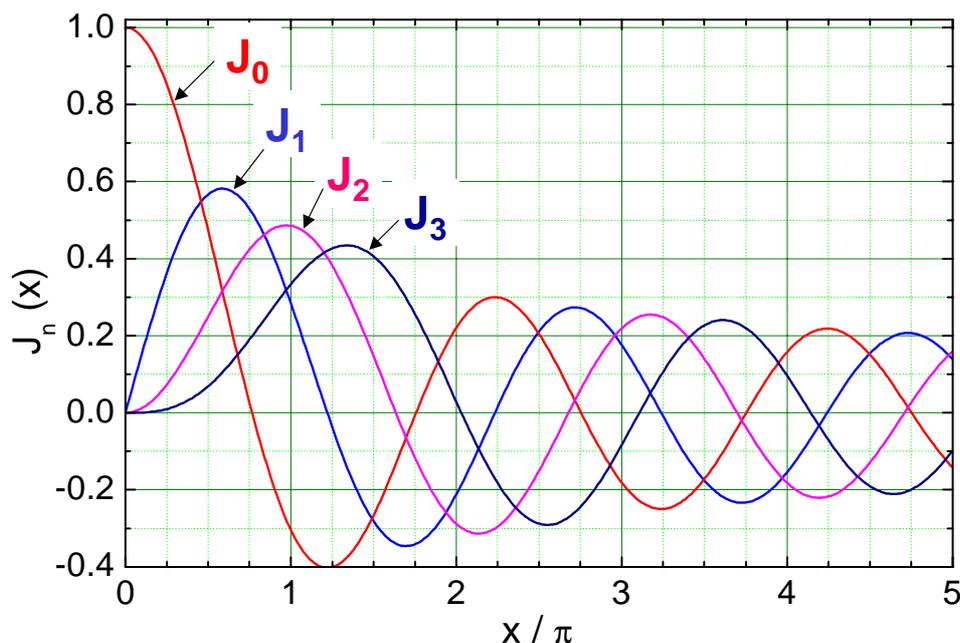


Abbildung C1: Bessel-Funktionen $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$ und $J_3(x)$.

Um die Differential- und Integraleigenschaften der Funktionen zu beweisen, ist es oft am einfachsten, sie als Potenzreihe auszudrücken:

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(j+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j} . \quad (\text{C.2})$$

Aus diesem Ausdruck kann man leicht das $\propto x^n$ Verhalten für $x \ll 1$ erkennen.

C.1 Fraunhofer-Beugung an einer Ringblende

Die Besselfunktion nullter Ordnung entsteht als Beugungsmuster einer ringförmigen Blende. Sie besitzt einen Radius R und eine Breite $\delta R \ll R$. Gemäß (5.4.31) ist ihre Fourier-Transformierte

$$F_0(\xi, \phi) = R \int_0^{R+\delta R} \int_0^{2\pi} \exp[-i\rho\xi \cos(\theta - \phi)] d\rho d\theta . \quad (\text{C.3})$$

Aufgrund der Symmetrie ist dies keine Funktion von ϕ und man erhält durch einsetzen von $\phi = 0$

$$\begin{aligned} F_0(\xi, 0) &= R\delta R \int_0^{2\pi} \exp[-iR\xi \cos \theta] d\theta \\ &= 2\pi R\delta R J_0(\xi R) . \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Die resultierende Beugungsfigur ist in Abb. C2a gezeigt.

C.2 Fraunhofer-Beugung an einer Kreisblende

Das Beugungsmuster einer kreisförmigen Blende kann durch Integration von (C.3) zwischen den Grenzen $r = 0$ und $r = R$ erhalten werden

$$F_0(\xi) = 2\pi \int_0^R J_0(\xi r) r dr = \frac{2\pi}{\xi^2} \int_0^{R\xi} J_0(\xi r) \xi r d(\xi r) . \quad (\text{C.5})$$

Mit Hilfe von (C.2) lässt sich zeigen, dass

$$\int_0^\xi J_n(x) dx = \xi^{n+1} J_{n+1}(\xi) , \quad (\text{C.6})$$

woraus mit $n = 0$ folgt:

$$F_1(\xi) = 2\pi \frac{R}{\xi} J_1(\xi R) = 2\pi R^2 \frac{J_1(\xi R)}{\xi R} . \quad (\text{C.7})$$

Wir wollen an dieser Stelle auf die Ähnlichkeit zwischen den Transformierten von äquivalenten linearen und kreisförmigen Systemen hinweisen:

- Ein Spalt der Breite $2R$ hat die Transformierte $2R \sin(uR)/uR$.
- Eine Kreisblende mit Radius R und Fläche $A = \pi R^2$ hat die Transformierte $2AJ_1(\xi R)/\xi R$.
- Zwei schmale Spalte der Breite w an der Stelle $x = \pm R$ haben die Transformierte $2w \cos(uR)$.
- Eine schmale Ringblende der Breite w und mit Radius R hat die Transformierte $2\pi R w J_0(\xi R)$.

Wir sehen, dass im Wesentlichen $J_1(x)$ die Sinusfunktion $\sin x$ und $J_0(x)$ die Kosinusfunktion $\cos x$ ersetzt.

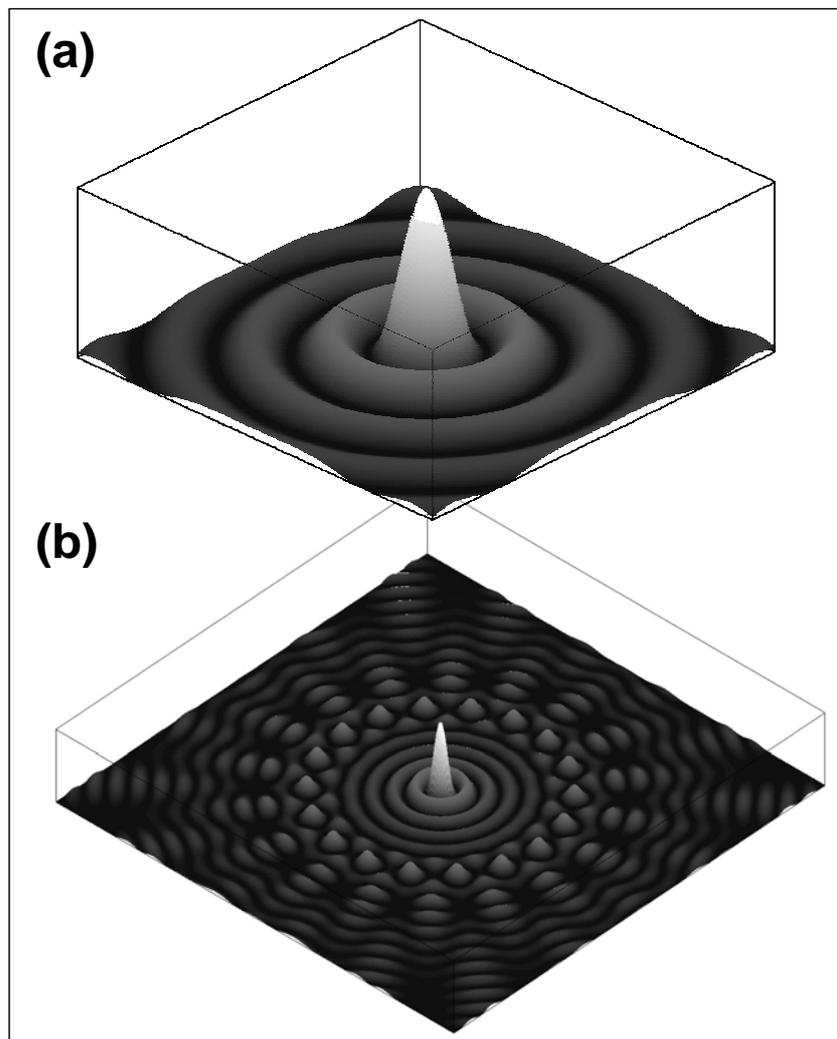


Abbildung C2: Fraunhofer-Beugungsintensität einer (a) Ringblende und (b) von 18 gleichmäßig auf einem Kreis mit Radius R angeordneten Lochblenden.

C.3 Fraunhofer-Beugung an Ring aus m Lochblenden

Ein Ring aus m gleichverteilten Lochblenden kann grob durch die Funktion

$$f(\rho, \theta) = [1 + \cos(m\theta/2\pi)]\delta(\rho - R) \quad (\text{C.8})$$

dargestellt werden, die m auf einem Kreis mit Radius R gleichverteilte Maxima besitzt. Ihre Transformierte ist

$$\begin{aligned}
F_m(\xi, \phi) &= \int_0^{2\pi} \left[1 + \frac{1}{2} \exp(im\theta/2\pi) + \frac{1}{2} \exp(-im\theta/2\pi) \right] \exp[i\xi R \cos(\phi - \theta)] d\theta \\
&= J_0(\xi R) + \frac{1}{2} \int \exp(i[-\xi R \cos(\phi - \theta) + m\theta/2\pi]) d\theta \\
&\quad + \frac{1}{2} \int \exp(i[-\xi R \cos(\phi - \theta) - m\theta/2\pi]) d\theta \\
&= J_0(\xi R) + \frac{1}{2} [\exp(im\phi/2\pi) + \exp(-im\phi/2\pi)] J_m(\xi R)
\end{aligned} \tag{C.9}$$

und man erhält schließlich

$$\boxed{F_m(\xi, \phi) = J_0(\xi R) + \cos(m\phi/2\pi) J_m(\xi R) .} \tag{C.10}$$

Die Intensität $|F_m(\xi, \phi)|^2$ besteht aus zwei Anteilen, die sich kaum überlappen, wenn m groß ist. Im Zentrum ($\xi R \sim 1$) gibt es das übliche $J_0(\xi R)$ Muster des Ringes bei $\rho = R$; für kleine ξ werden die einzelnen Löcher nicht aufgelöst. Auf der anderen Seite ist die Funktion $J_m(\xi R)$ sehr schwach, wenn $\xi R < m\pi/2$ ist, sie entwickelt aber gedämpfte Oszillationen bei größerem ξ . Diese Funktion wird durch $\cos^2(m\phi/2\pi)$ moduliert, die m Maxima auf dem Vollkreis besitzt (siehe Abb. C2).

D Literatur

1. **E. Hecht: Optik**
Oldenbourg Verlag München Wien, ISBN 3-486-24917-7 (2001)
2. **W. Zinth H.-J. Körner: Physik III, Optik Quantenphänomene und Aufbau der Atome**
Oldenbourg Verlag München, ISBN 3-486-4054-4 (1998)
3. **M.V. Klein, T.E. Furtak: Optik**
Springer Verlag, Berlin (1988)
4. **W. Demtröder: Experimentalphysik II – Elektrizität und Optik**
Springer Verlag, Berlin, Heidelberg (1999)
5. **S. G. Lipson, H. S. Lipson, D. S. Tannhauser: Optik**
Springer Verlag, Berlin Heidelberg (1997)
6. **M. Born: Optik, Ein Lehrbuch der elektromagnetischen Lichttheorie**
Springer Verlag, Berlin (1985)
7. **Daniel: Physik III**
Walter de Gruyter, Berlin ISBN 3-11-014630-4
8. **L. Bergmann, C. Schäfer: Lehrbuch der Experimentalphysik, Band III Optik**
Walter de Gruyter, Berlin (1993).
9. **Vogel, Gerthsen: Physik**
Springer Verlag, Berlin (1994)
10. **Fowles: Introduction to Modern Optics**
Dover, Holt, Rinehart and Winston, New York (1968)
11. **Eyges: The Classical Electromagnetic Field**
Dover, ISBN 0-486-63947-9
12. **Purcell: Berkeley Physics Course II**
McGraw-Hill, New York
13. **Großmann: Mathematischer Einführungskurs für die Physik**
Teubner Studienbücher, Heidelberg, ISBN 3-519-23028-3
14. **A. Sommerfeld: Vorlesungen über theoretische Physik, Band IV Optik**
Verlag Harri Deutsch (1978).
15. **H. Haken, H. C. Wolf: Atom- und Quantenphysik**
Springer Verlag Berlin (1993).
16. **R. Kingslake: Optical System Design**
Academic Press, Orlando (1983).
17. **M. Born, E. Wolf: Principles of Optics**
Pergamon Press, Oxford (1970).

E SI-Einheiten

Das aus dem metrischen System weiterentwickelte Internationale Einheitensystem SI (*Système Internationale d'Unités*) enthält als die 7 Basiseinheiten *Meter* (m), *Kilogramm* (kg), *Sekunde* (s), *Ampère* (A), *Kelvin* (K), *Candela* (Cd) und *Mol* (mol). Hinzu kommen die beiden ergänzenden Einheiten *Radiant* und *Steradian*. Seit dem 01. 01. 1978 ist in der Bundesrepublik Deutschland die Verwendung des SI-Einheitensystems im amtlichen und geschäftlichen Verkehr gesetzlich vorgeschrieben.

Abgeleitete SI-Einheiten werden durch Multiplikation und Division aus den SI-Basiseinheiten, immer mit dem Faktor 1 (kohärent), gebildet.

Für viele abgeleitete SI-Einheiten wurden besondere Namen und Einheitenzeichen festgelegt, z.B. Newton (N) für die Einheit der Kraft und Volt (V) für die der elektrischen Spannung.

Das SI ist weltweit von der internationalen und nationalen Normung übernommen worden (z.B. ISO 1000, DIN 1301). In den EU-Mitgliedstaaten ist es die Grundlage für die Richtlinie über Einheiten im Messwesen (EU-Richtlinien 80/181 und 89/617).

Ausführliche Informationen zum SI Einheitensystem findet man bei der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt unter <http://www.ptb.de> oder dem National Institut of Standards unter <http://www.physics.nist.gov>.

E.1 Geschichte des SI Systems

Bis kurz vorm Mars war noch alles in Ordnung. Doch dann passierte das Unglück: Statt eine stabile Umlaufbahn einzunehmen, kam der Mars Climate Orbiter dem roten Planeten zu nahe und verglühte in seiner Atmosphäre. Das war im September 1999. Sofort begann eine fieberhafte Suche nach der Ursache für den Fehler. Das Ergebnis war kaum zu glauben: Die beiden NASA-Kontrollzentren in Denver und Pasadena hatten mit unterschiedlichen Maßeinheiten gerechnet: das eine Team in Metern und Kilogramm, das andere in Foot und Pound über ein Jahrhundert, nachdem sich die USA und 16 andere Staaten darauf geeinigt hatten, künftig nur noch das metrische System zu verwenden und 40 Jahre, nachdem nahezu weltweit die (auf dem metrischen System beruhenden) SI-Einheiten eingeführt waren.

Ein peinlicher Vorfall und ein eindrucksvolles Beispiel dafür, wie wichtig es ist, dass alle Welt mit gleichem Maß misst. *Für alle Welt, für alle Völker* dieses Motto wurde zur Zeit der Französischen Revolution geprägt, als in Frankreich die neue Längeneinheit "Meter" entstand. Das neue Maß wurde zur Grundlage des internationalen metrischen, dezimalen Maßsystems, das ein großes Durcheinander bei den Maßeinheiten beendete. Über die Einhaltung und Weiterentwicklung des metrischen Systems wachen die Organe der Meterkonvention. Ihr ausführendes Organ, die Generalkonferenz für Maß und Gewicht, tagte zum ersten Mal im Jahr 1889. Sie genehmigte Prototype für das Meter und das Kilogramm und verteilte sie an die Mitgliedstaaten. Auf den folgenden Treffen ging es vor allem um ein Ziel: ein neues internationales Einheitensystem zu schaffen. 1948 verabschiedete die 9. Generalkonferenz für Maß und Gewicht einen Entwurf für ein solches Einheitensystem, das zunächst auf sechs Basiseinheiten beruhte. Alle anderen Einheiten sind mit diesen Basiseinheiten ausschließlich über Multiplikation und Division verbunden. Der große Vorteil dieses Systems: Sämtliche Umrechnungsfaktoren fielen weg.

Die 10. Generalkonferenz für Maß und Gewicht im Jahr 1954 nahm die sechs Basiseinheiten offiziell an: Länge (Meter), Masse (Kilogramm), Zeit (Sekunde), elektrische Stromstärke (Ampere), thermodynamische Temperatur (Kelvin) und Lichtstärke (Candela). Eine siebte Basiseinheit, die der Stoffmenge (Mol), kam erst 1973 dazu. Sie wird heute üblicherweise an sechster Stelle genannt. Diese Änderung der historisch gewachsenen Reihenfolge hat das Internationale Büro für Maß und Gewicht (Bureau International des Poids et Mesures, BIPM) veranlasst, um auszudrücken, dass die Entwicklung in der Optik möglicherweise zu einer Diskussion über die Candela als Basiseinheit führen wird.

Im Jahr 1960 bekam das neue System seinen Namen: *Système International d'Unités*, abgekürzt SI. Die 11. Generalkonferenz für Maß und Gewicht im Jahr 1960 vereinbarte, dass diese Abkürzung in allen Sprachen zu verwenden ist, und verabschiedete Vorsätze zur Bezeichnung der dezimalen Vielfache und Teile von Einheiten. In Deutschland wurde das neue System mit dem Gesetz über Einheiten im Messwesen (Einheitengesetz) vom 2. Juli 1969 und der Ausführungsverordnung zu dem Gesetz vom 5. Juli 1970 eingeführt. Seit dem 1. Januar 1978 sind die alten Einheiten in Deutschland verboten.

E.2 Die SI Basiseinheiten

Größe	Abkürzung	Name der Einheit	Symbol	Definition
Länge	l	Meter	m	Das Meter ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während der Dauer von $(1/299\,792\,458)$ Sekunden durchläuft.
Masse	m	Kilogramm	kg	Das Kilogramm ist die Einheit der Masse; es ist gleich der Masse des Internationalen Kilogrammprototyps (Ur-Kilogramm, 1889).
Zeit	t	Sekunde	s	Die Sekunde ist das $9\,192\,631\,770$ fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstruktur-niveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids ^{133}Cs entsprechenden Strahlung.
elektrische Stromstärke	I	Ampère	A	Das Ampere ist die Stärke eines konstanten elektrischen Stromes, der, durch zwei parallele, geradlinige, unendlich lange und im Vakuum im Abstand von einem Meter voneinander angeordnete Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je einem Meter Leiterlänge die Kraft 2×10^{-7} Newton hervorrufen würde.
Temperatur	T	Kelvin	K	Das Kelvin, die Einheit der thermodynamischen Temperatur, ist der $273,16$ -te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes des Wassers.
Lichtstärke	J	Candela	cd	Die Candela ist die Lichtstärke in einer bestimmten Richtung einer Strahlungsquelle, die monochromatische Strahlung der Frequenz 540×10^{12} Hertz aussendet und deren Strahlstärke in dieser Richtung $(1/683)$ Watt durch Steradian beträgt.
Stoffmenge	n	Mol	mol	Das Mol ist die Stoffmenge eines Systems, das aus ebensoviel Einzelteilchen besteht, wie Atome in $0,012$ Kilogramm des Kohlenstoffnuklids ^{12}C enthalten sind. Bei Benutzung des Mol müssen die Einzelteilchen spezifiziert sein und können Atome, Moleküle, Ionen, Elektronen sowie andere Teilchen oder Gruppen solcher Teilchen genau angegebener Zusammensetzung sein.

ergänzende SI Einheiten:

Fortsetzung auf nächster Seite

Fortsetzung von letzter Seite

Größe	Abkürzung	Name der Einheit	Symbol	Definition
ebener Winkel	ϑ	Radian	rad	
Raumwinkel	Ω	Steradian	sr	

E.3 Einige von den SI Einheiten abgeleitete Einheiten

Größe	Abkürzung	Name der Einheit	Symbol	SI-Einheit
Frequenz	ν	Hertz	Hz	s^{-1}
Kreisfrequenz	ω	Radian/Sekunde		s^{-1}
Geschwindigkeit	v	Meter/Sekunde		ms^{-1}
Beschleunigung	a	Meter/Sekunde ²		ms^{-2}
Winkelgeschwindigkeit	ω	Radian/Sekunde		s^{-1}
Winkelbeschleunigung	α	Radian/Sekunde ²		s^{-2}
Kraft	F	Newton	N	
Energie	E	Joule	J	m^2kgs^{-2}
Leistung	P	Watt	W	m^2kgs^{-3}
Druck	p	Pascal	Pa	$kgm^{-1}s^{-2}$
Ladung	Q	Coulomb	C	As
Spannung (Potenzial)	U	Volt	V	$m^2kgs^{-3}A^{-1}$
elektrische Feldstärke	E	Volt/Meter	V/m	$mkgs^{-3}A^{-1}$
elektrische Polarisierung	P	Coulomb/Meter	C/m	Asm^{-1}
elektrische Flussdichte	D	Coulomb/Meter ²	C/m ²	Asm^{-2}
elektrischer Widerstand	R	Ohm	Ω	$m^2kgs^{-3}A^{-2}$
elektrische Leitfähigkeit	σ	Siemens/Meter	S/m	$m^{-3}kg^{-1}s^3A^2$
magnetische Flussdichte	B	Tesla	$T=Vs/m^2$	$kgs^{-2}A^{-1}$
magnetische Feldstärke	H	Ampère/Meter		A/m
magnetischer Fluss	Φ	Weber	$Wb=Vs/m^2$	$m^2kgs^{-2}A^{-1}$
Selbstinduktion	L	Henry	$H=Vs/Am^2$	$m^2kgs^{-2}A^{-2}$
Wärmekapazität	C	Joule/Kelvin	J/K	$m^2kgs^{-2}K^{-1}$
Entropie	S	Joule/Kelvin	J/K	$m^2kgs^{-2}K^{-1}$

Fortsetzung auf nächster Seite

Fortsetzung von letzter Seite

Größe	Abkürzung	Name der Einheit	Symbol	SI-Einheit
Enthalpie	J	Joule	J	$\text{m}^2\text{kg}\text{s}^{-2}$
Wärmeleitfähigkeit	λ	Watt/Meter Kelvin	W/m K	$\text{mkg}\text{s}^{-3}\text{K}^{-1}$

E.4 Vorsätze

Faktor	Bezeichnung	Abkürzung
10^{18}	Exa	E
10^{15}	Peta	P
10^{12}	Tera	T
10^9	Giga	G
10^6	Mega	M
10^3	Kilo	k
10^2	Hekto	h
10^1	Deka	da
10^{-1}	Dezi	d
10^{-2}	Zenti	c
10^{-3}	Milli	m
10^{-6}	Mikro	μ
10^{-9}	Nano	n
10^{-12}	Pico	p
10^{-15}	Femto	f
10^{-18}	Atto	a

E.5 Abgeleitete Einheiten und Umrechnungsfaktoren

In der Bundesrepublik Deutschland ist das Gesetz über Einheiten im Messwesen die Rechtsgrundlage für die Angabe physikalischer Größen in gesetzlichen Einheiten. Es verpflichtet zu ihrer Verwendung im geschäftlichen und amtlichen Verkehr. Die gesetzlichen Einheiten sind in den folgenden Tabellen farbig hinterlegt. Die Ausführungsverordnung zum Gesetz über Einheiten im Messwesen (Einheitenverordnung) verweist auf die Norm DIN 1301.

Länge, Fläche, Volumen

Einheit	Abkürzung	Umrechnung
Ångström	Å	$1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$
Astronomische Einheit	AE	$1 \text{ AE} = 1.4960 \times 10^{11} \text{ m}$
Fermi	fm	$1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$
inch	inch	$1 \text{ inch} = 0.254 \text{ m}$
foot	ft	$1 \text{ ft} = 0.3038 \text{ m}$
yard	yd	$1 \text{ yard} = 0.9144 \text{ m}$
mile	mile	$1 \text{ mile} = 1609 \text{ m}$
Lichtjahr	Lj	$1 \text{ Lj} = 9.46 \times 10^{15} \text{ m}$
Parsekunde	pc	$1 \text{ pc} = 30.857 \times 10^{15} \text{ m}$
Ar	a	$1 \text{ a} = 100 \text{ m}^2$
Hektar	ha	$1 \text{ ha} = 10^4 \text{ m}^2$
barn	b	$1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$
Liter	l	$1 \text{ l} = 10^{-3} \text{ m}^3$
gallon	gal (US)	$1 \text{ gal} = 3.7851 \times 10^{-3} \text{ m}^3$
barrel	bbl	$1 \text{ bbl} = 158.988 \times 10^{-3} \text{ m}^3$

Masse

Einheit	Abkürzung	Umrechnung
Atomare Masseneinheit	u	$1 \text{ u} = 1.660\,565\,5 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Tonne	t	$1 \text{ t} = 1000 \text{ kg}$
metrisches Karat		$1 \text{ Karat} = 2 \times 10^{-4} \text{ kg}$
pound	lb	$1 \text{ lb} = 0.4536 \text{ kg}$
ounce	oz	$1 \text{ oz} = 1/16 \text{ lb} = 0.02835 \text{ kg}$

Zeit, Frequenz

Einheit	Abkürzung	Umrechnung
Tag	d	1 d = 86400 s
Stunde	h	1 h = 3600 s
Minute	min	1 min = 60 s
Jahr (tropisches)	a	1 a = 365.24 d = 3.156×10^7 s
Hertz	Hz	1 Hz = 1 s^{-1}

Temperatur

Einheit	Abkürzung	Umrechnung
Grad Celsius	$^{\circ}\text{C}$	$T(^{\circ}\text{C}) = T(\text{K}) - 273.15 (\text{K})$
Grad Fahrenheit	$^{\circ}\text{F}$	$T(^{\circ}\text{F}) = \frac{9}{5} T(^{\circ}\text{C}) + 32$

Winkel

Einheit	Abkürzung	Umrechnung
Radian	rad	1 rad = 1 m/m
Grad	$^{\circ}$	$1^{\circ} = (2\pi/360) \text{ rad} = 1.745 \times 10^{-2} \text{ rad}$
Winkelminute	'	$1' = 2.91 \times 10^{-4} \text{ rad}$
Winkelsekunde	"	$1'' = 4.85 \times 10^{-6} \text{ rad}$
Neugrad	gon	$1 \text{ gon} = 2\pi/400 \text{ rad}$

Kraft, Druck, Viskosität

Einheit	Abkürzung	Umrechnung
Newton	N	$1 \text{ N} = 1 \text{ kgm/s}^2$
Dyn	dyn	$1 \text{ dyn} = 10^{-5} \text{ N} = 1 \text{ gcm/s}^2$
Kilopond	kp	$1 \text{ kp} = 1 \text{ kg} \cdot g = 9.8067 \text{ N}$
Pascal	Pa	$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ kg/ms}^2$
Bar	bar	$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$
Atmosphäre (physikalisch)	atm	$1 \text{ atm} = 101\,325 \text{ Pa}$
Atmosphäre (technisch)	at	$1 \text{ at} = 98\,066 \text{ Pa}$
Torr, mmHg	Torr	$1 \text{ Torr} = 1 \text{ mmHg} = 133.322 \text{ Pa}$
Poise	P	$1 \text{ P} = 0.1 \text{ Pas}$
psi	lb/in ²	$1 \text{ psi} = 6895.0 \text{ Pas}$

Energie, Leistung, Wärmemenge

Einheit	Abkürzung	Umrechnung
Joule	J	$1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ kgm}^2/\text{s}^2$
Kilowattstunde	kWh	$1 \text{ kWh} = 3.6 \times 10^6 \text{ J} = 860 \text{ kcal}$
Kalorie	cal	$1 \text{ cal} = 4.187 \text{ J}$
Erg	erg	$1 \text{ erg} = 1 \text{ gcm}^2/\text{s}^2 = 10^{-7} \text{ kgm}^2/\text{s}^2 = 10^{-7} \text{ J}$
Elektronenvolt	eV	$1 \text{ eV} = 1.6022 \times 10^{-19} \text{ J}$ 1 eV entspricht $11\,604 \text{ K}$ ($E = k_B T$) 1 eV entspricht $2.4180 \times 10^{14} \text{ Hz}$ ($E = h\nu$)
Watt	W	$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ kgm}^2/\text{s}^3$
Pferdestärke	PS	$1 \text{ PS} = 735.6 \text{ W}$

Elektromagnetische Einheiten

Einheit	Abkürzung	Umrechnung
Coulomb	C	$1\text{ C} = 1\text{ A s}$
Volt	V	$1\text{ V} = 1\text{ J/A s} = 1\text{ kg m}^2/\text{A s}^3$
Farad	F	$1\text{ F} = 1\text{ C/V} = 1\text{ A}^2\text{ s}^4/\text{kg m}^2$
Ohm	Ω	$1\Omega = 1\text{ V/A} = 1\text{ kg m}^2/\text{A}^2\text{ s}^3$
Siemens	S	$1\text{ S} = 1/\Omega$
Tesla	T	$1\text{ T} = 1\text{ V s/m}^2 = 1\text{ kg/A s}^2$
Gauß	G	$1\text{ G} = 10^{-4}\text{ T}$
Oersted	Oe	$1\text{ Oe} = (10^3/4\pi)\text{ A/m}$, entspricht 1 G ($B = \mu_0 H$)
Henry	H	$1\text{ H} = 1\text{ V s/A} = 1\text{ m}^2\text{ kg/A}^2\text{ s}^2$
Weber	Wb	$1\text{ Wb} = 1\text{ V s} = 1\text{ m}^2\text{ kg/A s}^2$
Maxwell	M	$1\text{ M} = 10^{-8}\text{ Wb}$

F Physikalische Konstanten

Fundamentalkonstanten treten im Netz der physikalischen Theorien als quantitative Verknüpfungspunkte dieser Theorien auf. So ist beispielsweise die Theorie der Hohlraumstrahlung über die Planck-Konstante h mit der Quantentheorie sowie über die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit mit der Elektrodynamik und über die Boltzmann-Konstante k mit der Statistischen Mechanik verknüpft. Die Konstanten werden durch die Theorien nicht festgelegt, sie sind vielmehr experimentell so genau wie überhaupt nur möglich zu ermitteln. Denn die quantitativen Aussagen der Theorien können nur so genau sein, wie die Konstanten bekannt sind. Die möglichst genaue Kenntnis der Fundamentalkonstanten setzt aber eine möglichst genaue experimentelle Darstellung der im Internationalen Einheitensystem (SI) definierten physikalischen Einheiten voraus. Dieser Sachverhalt bindet die Ermittlung der Werte der Fundamentalkonstanten eng an die Metrologie, die Wissenschaft vom genauen Messen, deren vornehmste und wichtigste Aufgabe die bestmögliche experimentelle Realisierung der definierten Einheiten ist.

Umgekehrt aber sind die Fundamentalkonstanten deshalb von besonderem Interesse für die Metrologie, weil sie selbst als ideale Einheiten dienen oder die ideale Basis für Einheiten bilden können. Schon heute werden sie zur Darstellung der SI-Einheiten herangezogen. Experimente zur Bestimmung einer Fundamentalkonstanten werden häufig direkt an metrologischen Instituten wie der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt oder zumindest in enger Zusammenarbeit mit solchen Instituten ausgeführt.

Im Jahre 1999 hat die Task Group on Fundamental Constants des *Committee on Data for Science and Technology* (CODATA) des International Council of Scientific Unions (ICSU) einen neuen Satz von Fundamentalkonstanten erstellt und ihn zur einheitlichen Verwendung in Wissenschaft und Technik empfohlen. Dessen Werte sind das Ergebnis einer multivariaten Ausgleichsrechnung und beruhen auf Daten, die bis zum 31. Dezember 1998 publiziert vorlagen. Es ist geplant, zukünftig regelmäßig alle vier Jahre eine neue Ausgleichsrechnung unter Hinzuziehung neuer Daten vorzunehmen.

Eine Auswahl der wichtigsten Fundamentalkonstanten sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst. Quelle: Peter J. Mohr und Barry N. Taylor, *CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants 1998, Journal of Physical and Chemical Reference Data* **28**, No. 6, (1999) und *Reviews of Modern Physics* **72**, No. 2, (2000).

Physikalische Konstante	Symbol	Wert	Einheit	rel. Fehler
universelle Konstanten				
Lichtgeschwindigkeit	c	299 792 458	m/s	exakt
Plancksche Konstante	h	$6.626\,068\,76(52) \times 10^{-34}$	Js	7.8×10^{-8}
$h/2\pi$	\hbar	$1.054\,571\,596(82) \times 10^{-34}$	Js	7.8×10^{-8}
		$6.582\,118\,89(26) \times 10^{-16}$	eVs	3.9×10^{-8}
Gravitationskonstante	G	$6.673(10) \times 10^{-11}$	$\text{m}^3/\text{kg s}^2$	
Induktionskonstante, magnetische Feldkonstante	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$	N/A^2	exakt
Influenzkonstante, elektrische Feldkonstante, $1/\mu_0 c^2$	ϵ_0	$8.854\,187\,817 \dots \times 10^{-12}$	F/m	exakt

Fortsetzung auf nächster Seite

 Fortsetzung von letzter Seite

Physikalische Konstante	Symbol	Wert	Einheit	rel. Fehler
	$1/4\pi\epsilon_0$	$8.987\,551\dots \times 10^9$	Nm^2/C^2	exakt
Vakuumimpedanz $1/\mu_0 c^2$	Z_0	$376.730\,313\,461\dots$	Ω	exakt
Planck-Masse $\sqrt{\hbar c/G}$	m_P	$2.1767(16) \times 10^{-8}$	kg	7.5×10^{-4}
elektromagnetische Konstanten				
Elementarladung	e	$1.602\,176\,462(63) \times 10^{-19}$	C	3.9×10^{-8}
Magnetisches Flussquant $h/2e$	Φ_0	$2.067\,833\,636(81) \times 10^{-15}$	Vs	3.9×10^{-8}
von Klitzing Konstante h/e^2	R_K	$25\,812.807\,572(95)$	Ω	3.7×10^{-9}
Leitfähigkeitsquant $2e^2/h$	G_0	$7.748\,091\,696(28) \times 10^{-5}$	S	3.7×10^{-9}
Josephson-Konstante $2e/h$	K_J	$483\,597.898(19)$	Hz/V	3.9×10^{-8}
Bohrsches Magneton $e\hbar/2m_e$	μ_B	$9.274\,008\,99(37) \times 10^{-24}$	J/T	4.0×10^{-8}
		$5.788\,381\,749(43) \times 10^{-5}$	eV/T	7.3×10^{-9}
		$1.399\,624\,624(56) \times 10^{10}$	Hz/T	4.0×10^{-8}
Kernmagneton	μ_K	$5.050\,783\,17(20) \times 10^{-27}$	J/T	4.0×10^{-8}
		$3.152\,451\,238(24) \times 10^{-8}$	eV/T	7.6×10^{-9}
		$7.622\,593\,96(31) \times 10^6$	Hz/T	4.0×10^{-8}
atomare und nukleare Konstanten				
Feinstrukturkonstante $e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$	α	$7.297\,352\,533(27) \times 10^{-3}$		3.7×10^{-9}
	$1/\alpha$	$137.036\,999\,76(83)$		3.7×10^{-9}
Ruhemasse des Elektrons	m_e	$9.109\,381\,88(72) \times 10^{-31}$	kg	7.9×10^{-8}
		$5.485\,799\,110(12) \times 10^{-4}$	u	2.1×10^{-9}
Ruheenergie des Elektrons	$m_e c^2$	$5.109\,989\,02(21) \times 10^5$	eV	4.0×10^{-8}
Ruhemasse des Protons	m_p	$1.672\,621\,58(13) \times 10^{-27}$	kg	7.9×10^{-8}
		$1.007\,276\,466\,88(13)$	u	1.3×10^{-10}
Ruheenergie des Protons	$m_p c^2$	$9.382\,719\,98(38) \times 10^8$	eV	4.0×10^{-8}
Ruhemasse des Neutrons	m_n	$1.674\,927\,16(13) \times 10^{-27}$	kg	7.9×10^{-8}
		$1.008\,664\,915\,78(55)$	u	5.4×10^{-10}
Ruheenergie des Neutrons	$m_n c^2$	$9.395\,653\,30(38) \times 10^8$	eV	4.0×10^{-8}
Magnetisches Moment des Elektrons	μ_e	$9.284\,763\,62(37) \times 10^{-24}$	J/T	4.0×10^{-8}
	μ_e/μ_B	$1.001\,159\,652\,1869(41)$		4.1×10^{-12}
Magnetisches Moment des Protons	μ_p	$1.410\,606\,633(58) \times 10^{-26}$	J/T	4.1×10^{-8}
	μ_p/μ_B	$1.521\,032\,203(15)$		1.0×10^{-8}
	μ_p/μ_N	$2.792\,847\,337(29)$		1.0×10^{-8}

 Fortsetzung auf nächster Seite

 Fortsetzung von letzter Seite

Physikalische Konstante	Symbol	Wert	Einheit	rel. Fehler
Massenverhältnis Proton/Elektron	m_p/m_e	1836.152 6675(39)		2.1×10^{-9}
spezifische Ladung des Elektrons	e/m_e	$1.758\,820\,174(71) \times 10^{11}$	C/kg	4.0×10^{-8}
Rydberg-Konstante	R_∞	$10\,973\,731.568\,549(83)$	1/m	7.6×10^{-12}
		$2.179\,871\,90(17) \times 10^{-18}$	J	7.8×10^{-8}
		13.605 691 72(53)	eV	3.9×10^{-8}
Bohrscher Radius $\alpha/4\pi R_\infty = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/m_e e^2$	a_B	$5.291\,772\,083(19) \times 10^{-11}$	m	3.7×10^{-9}
Klassischer Elektronenradius $\alpha^2 a_B$	r_e	$2.817\,940\,285(31) \times 10^{-15}$	m	1.1×10^{-8}
Compton Wellenlänge des Elektrons $h/m_e c$	λ_C	$2.426\,310\,215(18) \times 10^{-12}$	m	7.3×10^{-9}
physikalisch-chemische Konstanten				
Loschmidtsche Zahl, Avogadro Konstante	N_A	$6.022\,141\,99(47) \times 10^{23}$	1/mol	7.9×10^{-8}
Atomare Masseneinheit $\frac{1}{12} m(^{12}\text{C})$	u	$1.660\,538\,73(13) \times 10^{-27}$	kg	7.9×10^{-8}
Faradaysche Konstante $N_A e$	F	96 485.3415(39)	C/mol	4.0×10^{-8}
Gaskonstante	R	8.314 472(15)	J/mol K	1.7×10^{-6}
Boltzmann-Konstante	k_B	$1.380\,6503(24) \times 10^{-23}$	J/K	1.7×10^{-6}
Molvolumen eines idealen Gases RT/p (bei $T = 273.15$ K, $p = 101\,325$ Pa)	V_m	$22.413\,996(39) \times 10^3$	m ³ /mol	1.7×10^{-6}
Tripelpunkt des Wassers	T_t	273.15	K	
	T_0	272.16	K	
		0	°C	
Stefan-Boltzmannsche Strahlungskonstante $(\pi^2/60)k_B^4/\hbar^3 c^2$	σ	$5.670\,400(40) \times 10^{-8}$	W/m ² K ⁴	7.0×10^{-6}
Wiensche Verschiebungskonstante $b = \lambda_{\max} T$	b	$2.897\,7686(51) \times 10^{-3}$	m K	1.7×10^{-6}
fundamentale physikalische Konstanten – angenommene Werte				
Normaldruck	p_0	101 325	Pa	exakt
Standard Fallbeschleunigung	g	9.806 65	m/s ²	exakt
konventioneller Wert der Josephson-Konstante	K_{J-90}	483 597.9	Hz/V	exakt

 Fortsetzung auf nächster Seite

Fortsetzung von letzter Seite

Physikalische Konstante	Symbol	Wert	Einheit	rel. Fehler
konventioneller Wert der von Klitzing-Konstante	R_{K-90}	25 812.807	Ω	exakt
