

Teil I

Optik

Kapitel 2

Licht als elektromagnetische Welle

In diesem Kapitel behandeln wir die Eigenschaften von Licht als elektromagnetische Welle. Dazu wiederholen wir zunächst die Grundlagen zur Wellenausbreitung und vertiefen einen Teil der Elektrodynamik (Vorlesung Physik II). Damit schaffen wir die Grundlage zur Behandlung von Licht im Rahmen der *elektromagnetischen Theorie*. Wir leiten aus den *Maxwell-Gleichungen* die Wellengleichung im Vakuum und in dielektrischen Medien ab und betrachten die Ausbreitung von Licht in einem homogenen Medium. Insbesondere werden wir ebene Wellen als spezielle Lösungen der Wellengleichung und ihre Phasen- und Gruppengeschwindigkeit diskutieren.

Da die Maxwellsche Theorie Materie als kontinuierlich annimmt und deren Antwort auf elektrische und magnetische Felder einfach durch Stoffkonstanten beschreibt, resultiert aus der Maxwellschen Theorie das Ergebnis, dass der Brechungsindex unabhängig von der Frequenz ist. Dies widerspricht der experimentellen Erfahrung, dass der Brechungsindex eine erhebliche Frequenzabhängigkeit (Dispersion) zeigt. Um die Antwort von Materie auf elektromagnetische Felder besser zu verstehen, befassen wir uns mit der klassischen Dispersionstheorie, in der das betrachtete Medium durch Modellatome oder Moleküle beschrieben wird.

Die Annahme, dass Materie als kontinuierlich aufgefasst werden kann, ist sicherlich stark vereinfachend. Wir werden uns deshalb auch mit der Streuung von Licht an Atome, Molekülen und Mikropartikeln befassen. Dazu werden wir die Ergebnisse der klassischen Dispersionstheorie verwenden, die die Dispersion und Absorption von elektromagnetischen Wellen durch Wechselwirkung einer einfallenden Welle mit atomaren Oszillatoren beschreibt. Wir werden sowohl den Fall der kohärenten Streuung, bei der eine regelmäßige, zeitlich konstante Anordnung von Streuern vorliegt, als auch die inkohärente Streuung diskutieren, bei der eine unregelmäßige oder zeitlich variierende Anordnung von Streuern vorliegt.

Mit Hilfe der Randbedingungen beim Durchgang von Licht durch Grenzflächen leiten wir schließlich die Gesetze für die Reflexion, Transmission und Brechung von Licht an Grenzflächen zwischen homogenen Medien ab.

2.1 Wellen

Wellen sind der zentrale Gegenstand der Optik. Wir wollen deshalb hier zunächst eine kurze mathematische Einführung in ihre Eigenschaften geben. Die Wellenausbreitung in einem Medium wird mathematisch in Form einer Wellengleichung beschrieben. Diese ist eine Differentialgleichung, die die Dynamik und Statik von kleinen Verschiebungen des Mediums miteinander verbindet und deren Lösung als eine sich ausbreitende Störung verstanden werden kann. Hierbei beschränkt sich der Ausdruck “Verschiebung” nicht nur auf mechanische Verschiebungen, sondern gilt allgemein für beliebige Größen eines Feldes, die man zur Beschreibung von Abweichungen vom Gleichgewichtszustand benutzen kann.

2.1.1 Die Wellengleichung für dispersionsfreie Wellen

Die einfachste Form der Wellengleichung beschreibt Medien, in denen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen nicht von ihrer Frequenz abhängt. Solche Medien nennt man *dispersionsfrei*.

Die Differentialgleichung für den eindimensionalen Fall

Zur Ableitung der Wellengleichung fordern wir, dass die Ausbreitung in $\pm x$ -Richtung mit konstanter Geschwindigkeit v erfolgt und die Welle zeitlich unverändert erscheint, wenn man sie aus einem Bezugssystem beobachtet, das sich mit der gleichen Geschwindigkeit v bewegt. Aus der zweiten Forderung erhält man für eine mögliche Lösung $f(x, t)$ der Wellengleichung

$$f(x, t) = f(x - vt, 0) \quad (2.1.1)$$

$$f(x, t) = f(x + vt, 0) . \quad (2.1.2)$$

Mit $(x \pm vt) = \xi_{\pm}$ erhalten wir dann durch Differenzieren von (2.1.1) und (2.1.2) nach x und t

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{d\xi_-} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -v \frac{df}{d\xi_-} \quad (2.1.3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{d\xi_+} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = v \frac{df}{d\xi_+} . \quad (2.1.4)$$

Diese Gleichungen können zu einer einzigen Gleichung zusammengefasst werden, indem wir ein zweites mal Differenzieren und den Term $d^2 f / d\xi^2$ eliminieren. Jede der Gleichungen ergibt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{d\xi^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{d^2 f}{d\xi^2} . \quad (2.1.5)$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \quad (2.1.6)$$

wofür (2.1.1) und (2.1.2) die allgemeinsten Lösungen sind. Gleichung (2.1.6) wird als *Wellengleichung für dispersionsfreie Wellen* bezeichnet, da sich die Form der Welle bei der Ausbreitung nicht ändert.

Obwohl (2.1.6) als allgemeine Lösungen (2.1.1) und (2.1.2) besitzt, gibt es eine spezielle Lösung, die sehr wichtig ist. Diese Lösung ist die einfache *harmonische Welle*, die wir in ihrer komplexen exponentiellen Form als

$$f(x,t) = A \exp[i(kx - \omega t)] \quad (2.1.7)$$

schreiben können. Hierbei ist $k = 2\pi/\lambda$ die *Raumfrequenz oder Wellenzahl* und $\omega = 2\pi\nu$ die *Kreisfrequenz*, ν ist die Frequenz in Zyklen pro Zeiteinheit und λ die Wellenlänge. Wir werden im Folgenden die Kreisfrequenz der Einfachheit halber ebenfalls Frequenz nennen. Das Argument $\phi = (kx - \omega t)$ heißt Phase der Welle. Wir können uns leicht davon überzeugen, dass diese Funktion die Wellengleichung löst und dass die Geschwindigkeit durch

$$v = \omega/k \quad (2.1.8)$$

gegeben ist. Diese Geschwindigkeit wird *Phasengeschwindigkeit oder Wellengeschwindigkeit* genannt, wir werden sie deshalb im Folgenden als v_{ph} bezeichnen.

Superposition von harmonischen Wellen

Eine wichtige Eigenschaft harmonischer Wellen, die wir oft ausnutzen werden, ist die Möglichkeit, andere Wellenformen durch Überlagerung (Superposition) zu erzeugen. Im Fall eines dispersionsfreien Mediums ist dies einfach zu bewerkstelligen.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ soll es z.B. eine Superposition

$$g(x,0) = \sum_j A_{kj} \exp(ik_j x) \quad (2.1.9)$$

von ebenen Wellen geben. Zur Zeit t hat sich jede der Partialwellen mit $v = \omega/k$ ausgebreitet so dass

$$\begin{aligned} g(x,t) &= \sum_j A_{kj} \exp[i(k_j x - \omega_j t)] \\ &= \sum_j A_{kj} \exp[ik_j (x - v_{\text{ph}} t)] \\ &= g(x - v_{\text{ph}} t, 0) . \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Wir sehen, dass sich die ursprüngliche Funktion $g(x,0)$ ohne Veränderung mit der Geschwindigkeit v ausgebreitet hat. Dieses einfache Ergebnis kam durch Einsetzen von $k v_{\text{ph}}$ anstelle von ω zustande. Dies ist nur für dispersionsfreie Wellen zulässig. Falls die Partialwellen unterschiedliche Geschwindigkeiten haben (dispersionsbehaftete Wellen), müssen wir unsere Schlussfolgerungen ändern.

2.1.2 Dispersionbehaftete Wellen

Wir betrachten nun ein Medium, in dem die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen eine Funktion der Frequenz ist. Solche Medien nennt man *dispersierend*.

Im Allgemeinen sind Wellengleichungen nicht auf zweite Ableitungen nach x und t beschränkt. Vorausgesetzt die Gleichungen sind linear in f , können auch andere Ordnungen von Ableitungen auftreten. In jedem solchen Fall gibt es eine Lösung der Form $f = A \exp[i(kx - \omega t)]$. Im Fall einer solchen Welle kann man $\partial f / \partial t$ durch $-i\omega f$ und $\partial f / \partial x$ durch ikf ersetzen und man kann die Wellengleichung in der Form

$$\mathcal{P} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) f = 0 \quad (2.1.11)$$

schreiben, wobei \mathcal{P} eine Polynomfunktion in $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial t}$ ist, die auf f wirkt. Damit folgt als Ergebnis die Gleichung

$$\mathcal{P}(ik, -\omega) = 0, \quad (2.1.12)$$

die *Dispersionsrelation* genannt wird. Für die dispersionsfreie Wellenfunktion würde man unter dieser Betrachtungsweise

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{v_{\text{ph}}^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \right] f = 0 \quad (2.1.13)$$

erhalten, woraus dann die Dispersionsrelation

$$(ik)^2 - \frac{1}{v_{\text{ph}}^2} (-i\omega)^2 = 0 = \frac{\omega^2}{v_{\text{ph}}^2} - k^2 \quad (2.1.14)$$

folgt, die gleichbedeutend mit $\omega/k = \pm v_{\text{ph}}$ ist.

Wir werden in Kapitel 12 mit der Schrödinger-Gleichung ein Beispiel für eine dispersionsbehaftete Wellengleichung kennenlernen.

2.1.3 Komplexe Wellenzahl, Frequenz und Geschwindigkeit

Lösungen der Dispersionsrelation können zu komplexen Werten für k oder ω führen. Auch die Geschwindigkeit ω/k kann komplex werden. Wir wollen hier kurz die physikalische Bedeutung dieser Größen diskutieren.

Komplexe Wellenzahl: gedämpfte Wellen

Nehmen wir an, die Frequenz ω sei reell, aber die Wellenzahl $k = k_1 + ik_2$ sei komplex. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} f &= A \exp[i(k_1 + ik_2)x - i\omega t] \\ &= A \exp(-k_2x) \exp[i(k_1x - \omega t)] . \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

Diese Gleichung beschreibt eine fortschreitende Welle mit der Geschwindigkeit $v = \omega/k_1$, die mit dem Faktor $\exp(-k_2x)$ gedämpft wird. Wir können eine charakteristische Abklinglänge $\ell = 1/k_2$ definieren, innerhalb der die Amplitude auf $1/e$ ihres Anfangswertes abnimmt (siehe hierzu Abb. 2.1a und Abb. 2.2).

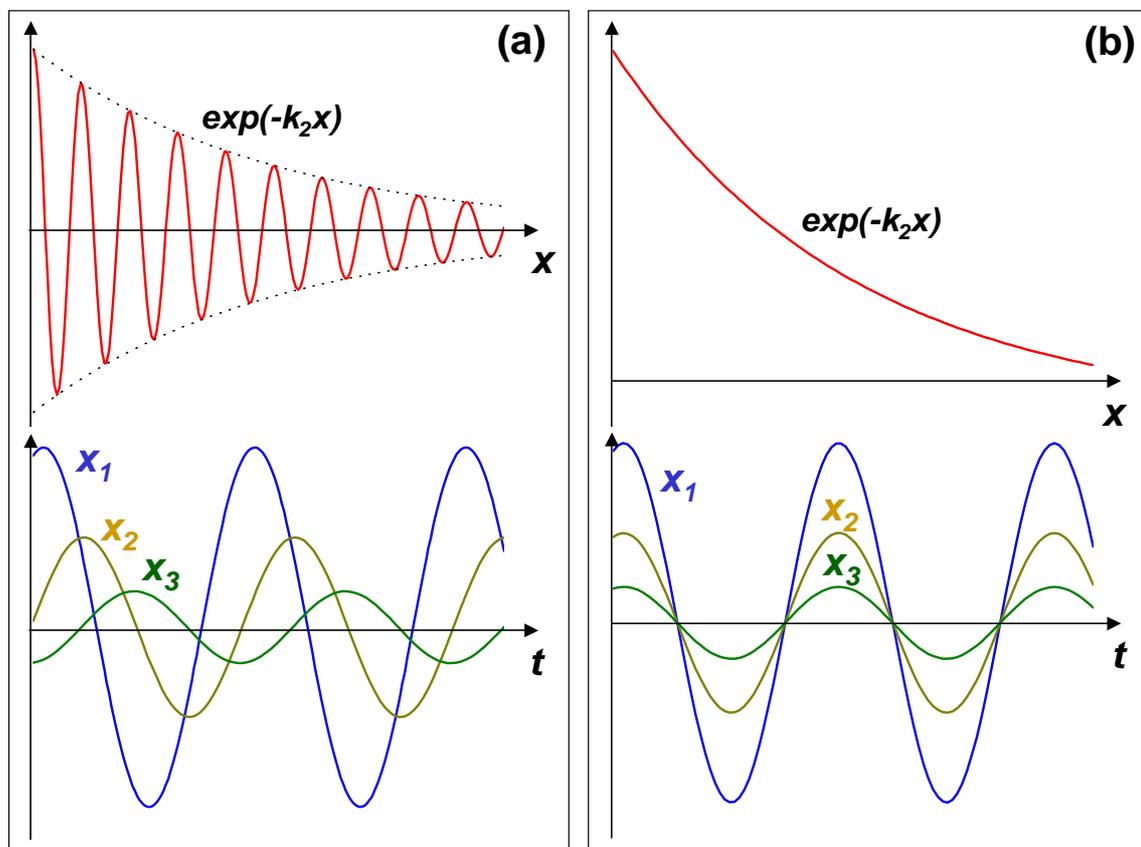


Abbildung 2.1: (a) Gedämpfte Welle als Funktion des Ortes zur Zeit t (oben) und als Funktion von t an verschiedenen Orten $x_1 < x_2 < x_3$ (unten). (b) Evaneszente harmonische Welle als Funktion des Ortes zur Zeit t (oben) und als Funktion von t an verschiedenen Orten $x_1 < x_2 < x_3$ (unten).

Imaginäre Geschwindigkeit: evaneszente Wellen

Manchmal wird die Wellenzahl rein imaginär, d.h. $k_1 = 0$. In diesem Fall besitzt die Welle keinerlei harmonisches Verhalten in der Ortskoordinate mehr, sondern stellt eine reine Exponentialfunktion von x dar. In der Zeitkoordinate findet allerdings noch ein oszillatorisches Verhalten mit der Frequenz ω statt. Eine solche Welle heißt *abklingende oder evaneszente Welle* (siehe hierzu Abb. 2.1b und Abb. 2.2).

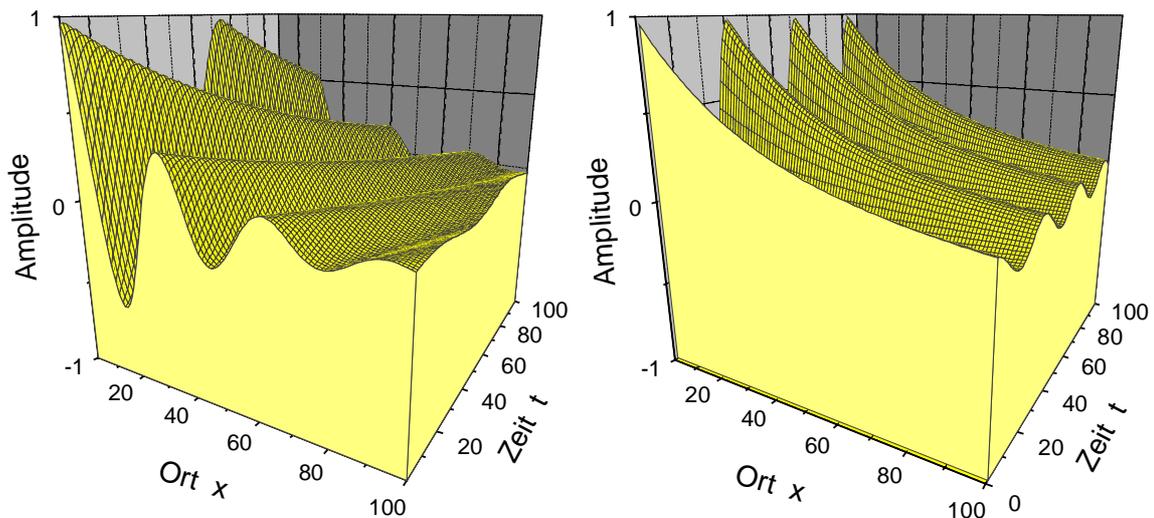


Abbildung 2.2: 3D-Darstellung einer gedämpften Welle (links) und einer evaneszenten Welle (rechts) als Funktion des Ortes und der Zeit.

2.1.4 Die Gruppengeschwindigkeit

Die Wellengleichung (2.1.6) für dispersionsfreie Wellen hat die Eigenschaft, dass sich jede Störung mit beliebiger Frequenz immer gleich schnell ausbreitet. Dies hat zur Folge, dass sich die Form einer Welle bei der Ausbreitung nicht ändert. In dispersionsbehafteten Medien breiten sich dagegen Wellen mit unterschiedlichen Frequenzen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten aus und die Wellenform ändert sich im Lauf der Ausbreitung.

Wir betrachten nun ein so genanntes Wellenpaket, das eine Welle mit Frequenz ω_0 und Wellenzahl k_0 darstellt, deren Amplitude so moduliert ist, dass sie zur Zeit $t = 0$ auf einen bestimmten Raumbereich beschränkt ist (siehe Abb. 2.3). Eine solche Welle lässt sich durch Überlagerung von vielen Partialwellen erzeugen, deren Frequenzen bzw. Wellenzahlen in der Nähe von ω_0 und k_0 liegen. Zu einem bestimmten Zeitpunkt wird das Maximum des Wellenpakets an der Stelle sein, an der sich die einzelnen Partialwellen gleichphasig überlagern und somit gegenseitig verstärken. Wir wollen nun zeigen, dass sich das Maximum des Wellenpakets mit der *Gruppengeschwindigkeit* bewegt. Diese Größe unterscheidet sich von der Phasengeschwindigkeit der einzelnen Partialwellen und entspricht der Geschwindigkeit des Energietransports der Welle.

Wenn das Maximum des Wellenpakets dem Punkt entspricht, an dem die Phasen der Partialwellen alle gleich sind, erhält man für diesen Punkt die Gleichung

$$\frac{d\phi}{dk} = \frac{d}{dk}(kx - \omega t) = 0 . \quad (2.1.16)$$

Die Geschwindigkeit, mit der sich das Maximum bewegt, ist dann gegeben durch

$$v_{\text{gr}} = \frac{x}{t} = \frac{d\omega}{dk} , \quad (2.1.17)$$

was die Definition der Gruppengeschwindigkeit darstellt. Man kann die Gruppengeschwindigkeit durch Verwenden von $\lambda = 2\pi/k$, $\omega/k = v_{\text{ph}}$ und $v = \omega/2\pi$ auch wie folgt ausdrücken:

$$v_{\text{gr}} = \frac{d(v_{\text{ph}}k)}{dk} = v_{\text{ph}} \frac{dk}{dk} + k \frac{dv_{\text{ph}}}{dk} = v_{\text{ph}} - \lambda \frac{dv_{\text{ph}}}{d\lambda} = v_{\text{ph}} - \lambda^2 \frac{dv}{d\lambda} . \quad (2.1.18)$$

Im allgemeinsten Fall ist $d\omega/dk$ keine Konstante. Da das Wellenpaket aus einzelnen Partialwellen mit Wellenvektoren in der Nähe von k_0 besteht, wir implizit der Wert von $d\omega/dk$ an der Stelle k_0 genommen. In erster Näherung bewegt sich das Maximum der Einhüllenden des Wellenpakets mit dieser Geschwindigkeit. Da die Phasengeschwindigkeit im Allgemeinen von der Gruppengeschwindigkeit verschieden ist, werden sich die einzelnen Partialwellen relativ zur Einhüllenden in oder entgegengesetzt zur Ausbreitungsrichtung bewegen. Dies kann man z.B. bei Wasserwellen beobachten, die eine starke Dispersion zeigen.

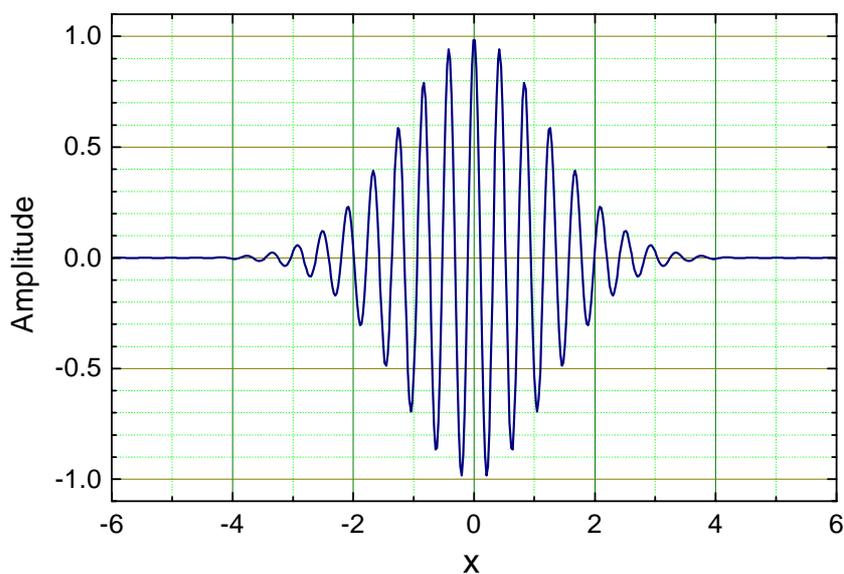


Abbildung 2.3: Wellenpaket.

Die Wellenform wird normalerweise bei der Ausbreitung verändert. In stark dispergierenden Medien ist die Behandlung allerdings schwierig und es kann zu der scheinbar paradoxen Situation kommen, dass die Gruppengeschwindigkeit größer als die Lichtgeschwindigkeit ist.

2.1.5 Wellen in drei Dimensionen

Die Ausdehnung der in den vorangegangenen Abschnitt für den eindimensionalen Fall gemachten Analyse auf drei Dimensionen ist nicht trivial. Dies liegt daran, dass sich auch in dispersionsfreien Medien das Profil einer dreidimensionalen Welle bei der Ausbreitung ändert. Dies kann man leicht einsehen. Die Amplitude einer kugelförmigen Schallwelle muss z.B. mit $1/r$ abnehmen, sonst würde eine punktförmige Schallquelle in jedem Abstand als gleich laut empfunden.

Es gibt allerdings eine wichtige Klasse von Wellen, die sich auch im dreidimensionalen Raum bei der Ausbreitung in einem dispersionsfreien Medium nicht ändert, nämlich die *ebenen Wellen*. Eine Welle, die sich mit der Geschwindigkeit v_{ph} in Richtung $\hat{\mathbf{n}}$ ausbreitet, hat analog zu (2.1.1) die Form

$$f(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}} - v_{\text{ph}}t, 0) . \quad (2.1.19)$$

Wie im eindimensionalen Fall ist $\xi = \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}} - v_{\text{ph}} t$. Dies ist eine Konstante für alle Ebenen, die die Bedingung $\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}} - v_{\text{ph}} t = \text{const}$ erfüllen. Eine solche Ebene wird als *Wellenfront* bezeichnet und ist eine Ebene konstanter Phase senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.

Auf dieser Basis kann man analog zum eindimensionalen Fall die Wellengleichung für den dreidimensionalen Fall ableiten. Man erhält

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v_{\text{ph}}^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} . \quad (2.1.20)$$

Dies ist die *Wellengleichung für dispersionsfreie Wellen* in drei Dimensionen.

2.1.6 Wellen in inhomogenen Medien

Im Falle eines inhomogenen Medium wird die Behandlung der Ausbreitung von Wellen so kompliziert, dass man nur noch in wenigen Fällen analytische Lösungen angeben kann. Bei der Analyse der zugrundeliegenden Physik sind zwei Prinzipien, die von **Huygens** und **Fermat** entwickelt wurden, wichtig.

Das Huygens'sche Prinzip

Huygens wies darauf hin, dass man, falls man den Verlauf einer Wellenfront zu einem bestimmten Zeitpunkt kennt, den weiteren Verlauf dadurch berechnen kann, indem man jeden Punkt der Wellenfront als Ausgangspunkt für eine neue Welle ansieht. Diese neuen Wellen sind Kugelwellen, deren Einhüllende die neue Wellenfront zu einem späteren Zeitpunkt ergibt. Die bei dieser Konstruktion auftretenden Kugelwellen werden *Huygens'sche Elementarwellen* genannt. Es lässt sich mit Hilfe des Huygens'schen Prinzips leicht erkennen, dass sich z.B. die Form einer Kugelwelle bei der Ausbreitung nicht ändert (siehe Abb. 2.4a).

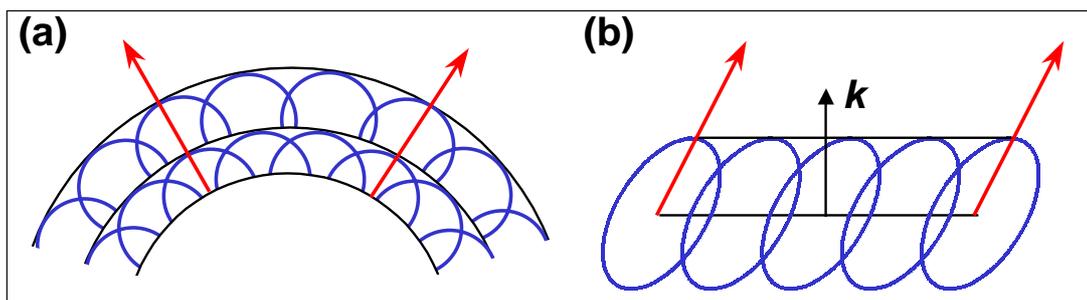


Abbildung 2.4: Huygens'sches Prinzip in (a) einem isotropen Medium und (b) einem anisotropen Medium.

Ein wichtiger Aspekt ist, dass sich das Huygens'sche Prinzip auch auf die Wellenausbreitung in anisotropen Medien anwenden lässt (siehe Abb. 2.4b), wie später in Abschnitt 3.3 noch genau diskutiert wird. In einem anisotropen Medium sind die Elementarwellen nicht mehr kugelförmig, sondern sind z.B. wie in Abb. 2.4b gezeigt elliptische Wellen. Die Ausbreitungsrichtung des Energieflusses ist nicht mehr parallel zum Wellenvektor \mathbf{k} und lässt sich dadurch bestimmen, indem man eine Linie vom Ursprung der elliptischen Elementarwellen zu dem Punkt zieht, an dem diese die Einhüllende berühren. Insgesamt ist das Huygens'sche Prinzip extrem nützlich, um ein physikalisches Bild der Wellenausbreitung für solche Fälle zu erhalten, bei denen eine exakte Berechnung nicht möglich ist.

Christiaan Huygens (1629 - 1695):

Christiaan Huygens wurde am 14. April 1629 in Den Haag geboren. Zunächst studierte Huygens Jurisprudenz in Leiden, wandte sich dann aber der Mathematik und den Naturwissenschaften zu. Er entdeckte 1655 den Saturnmond Titan. Gleichzeitig untersuchte er die Saturnringe, die noch aus der Zeit Galileis ein Rätsel bildeten. Huygens erkannte deren wahre Natur 1656. Im gleichen Jahr beobachtete er den Orionnebel und löste die innere Region des Nebels in Einzelsterne auf. Der hellste Teil des Nebels wird nach ihm Huygens'sche Region genannt. Er entdeckte mehrere interstellare Nebel und einige Doppelsterne. Außerdem ließ er eine große Anzahl von Pendeluhrn bauen und entwickelte Uhren auf Basis von Spiralfedern bzw. Zykloidenpendel, welche eine genaue Zeitmessung ermöglichten und damit auf See zur genaueren Bestimmung des Längengrades dienen konnten. Seine Konstruktionen beschrieb er im Jahre 1658 in dem Buch "Horologium". Angeregt durch Pascal schrieb Huygens 1657 die erste Darstellung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. 1660 bereiste er England und wurde 1663 in die Royal Society gewählt. Im Jahre 1666 erhielt er einen Ruf an die neugegründete Académie Royale des Sciences in Paris. Hier führte er auch astronomische Beobachtungen an der 1672 fertiggestellten Pariser Sternwarte durch. Nach einer schweren Krankheit kehrte er 1681 nach Den Haag zum Familiensitz Hofwijck zurück, wo er am 8. Juni 1695 verstarb.

**Das Fermat'sche Prinzip**

Das Fermat'sche Prinzip besagt, dass sich Licht (wir werden sehen, dass wir Licht als elektromagnetische Wellen auffassen können) von einem Punkt A zu einem Punkt B genau so ausbreitet, dass es dafür die kürzeste Zeit benötigt. Wir werden auf dieses Prinzip in Kapitel 4 in Abschnitt 4.1.2 noch genau eingehen.

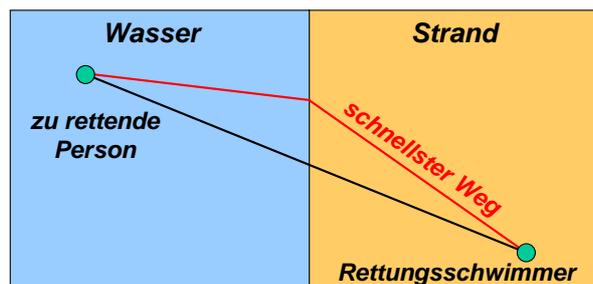


Abbildung 2.5: Zum Fermat'schen Prinzip.

Das Fermat'sche Prinzip kann man sich an einem Beispiel aus dem Alltagsleben gut klar machen. Dazu betrachten wir einen Rettungsschwimmer, der in einiger Entfernung vom Wasser auf dem Strand befindet, und möglichst schnell zu einer Person im Wasser kommen muss, die in Not ist (siehe hierzu Abb. 2.5). Der schnellste Weg zu der Person ist nicht der geometrisch kürzeste Weg. Dies liegt daran, dass der Rettungsschwimmer etwa viermal so schnell laufen wie schwimmen kann. Er wird deshalb einen Weg einschlagen, bei dem er eine größere Strecke laufen, dafür aber eine kürzere Strecke schwimmen muss. Insgesamt spart er damit Zeit. Dies ist ähnlich bei der Lichtausbreitung, die in unterschiedlichen Medien mit unterschiedlicher Geschwindigkeit vor sich geht. Das Licht wählt wie der Schwimmer nicht den geometrisch kürzesten Weg, sondern den Weg der kürzesten Zeit.

2.2 Die Maxwell Gleichungen

Wir wollen im Folgenden den Elektromagnetismus als spezielles Beispiel einer allgemeinen Theorie der Wellenausbreitung diskutieren. Dazu wiederholen wir zunächst die grundlegenden Fakten der klassischen Elektrizitätslehre und des Magnetismus, die in Form der *Maxwell'schen Gleichungen* zusammengefasst werden können. In der Maxwell'schen Formulierung der Gleichungen wurde erstmals der *Verschiebungsstrom* $\partial \mathbf{D} / \partial t$ eingeführt. Dieser ist die Zeitableitung eines fiktiven Verschiebungsfeldes $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, das sich aus dem angelegten elektrischen Feld \mathbf{E} und der daraus resultierende Polarisation \mathbf{P} zusammensetzt; $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{F/m}$ ist die elektrische Feldkonstante. Das Verschiebungsfeld wird sich als enorm wichtig für die Behandlung der Wellenausbreitung in anisotropen Medien erweisen (siehe Kapitel 3).

James Clerk Maxwell (1831- 1879):

James Clerk Maxwell wurde am 13. Juni 1831 in Edinburgh geboren.

Er studierte drei Jahre Mathematik und Physik in Edinburgh und schloss 1854 in Cambridge sein Studium ab. Ein Jahr später legte er hier seine erste Arbeit vor, die schon auf die späteren Maxwellschen Gleichungen zielte. 1856 erhielt Maxwell eine Professur in Aberdeen. Diese hielt er inne bis er 1860 für fünf Jahre an das King's College nach London ging.

Maxwell beschäftigte sich mit der Physiologie des Farbensehens. Aufsehererregend sind Maxwells Arbeiten zur Elektrodynamik, wo er die Vorstellungen von Michael Faraday in eine mathematisch strenge Form brachte und die Feldphysik begründete.

Die Maxwellschen Gleichungen wurden 1862 im Philosophical Magazine unter dem Titel "On Physical Lines of Force" veröffentlicht. In dem zweibändigen Buch *Treatise* (Abhandlung) veröffentlichte Maxwell 1873 eine Zusammenfassung aller bisherigen Arbeiten. Die Maxwellschen Gleichungen erschienen dabei in einer komplizierteren Form. Auf die ursprüngliche Fassung griffen erst später Heinrich Hertz und Oliver Heaviside zurück. Es dauerte Jahrzehnte bis die Maxwellschen Gleichungen voll verstanden und anerkannt wurden. Die Maxwellsche Elektrodynamik bildete zusammen mit der Newtonschen Mechanik das stolze Gebäude der klassischen Physik.

Auch auf dem Gebiet der kinetischen Gastheorie fand er die heute so genannte Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung und begründete damit zugleich die statistische Physik. Zusammen mit Ludwig Boltzmann haben beide Forscher das neue Gebiet aufgebaut. Als Wegbereiter der kinetischen Gastheorie war Maxwell auch ein überzeugter Anhänger der Atomistik. 1871 forderte er in einer Rede vor der British Association for the Advancement of Science Standards für die Grundeinheit der Masse, der Länge und der Zeit.

Finanziell unabhängig legte er 1865 aus gesundheitlichen Gründen sein Lehramt am King's College in London nieder, setzte jedoch seine Forschungen als Privatgelehrter fort. Als die Universität Cambridge einen Lehrstuhl für Experimentalphysik neu gründete und mit einem großen Unterrichtslaboratorium ausstattete, nahm Maxwell die für die britische Wissenschaft wichtige Aufgabe an.

Maxwell starb am 5. November 1879 in Cambridge.



Wir werden uns hier zunächst auf isotrope und lineare Medien beschränken. In einem isotropen linearen Medium ist die Polarisation proportional zum elektrischen Feld, das heißt

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad (2.2.1)$$

$$\text{und} \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi \mathbf{E} = (1 + \chi) \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E} . \quad (2.2.2)$$

Die elektrische Suszeptibilität χ bzw. die Dielektrizitätskonstante ϵ sind hierbei skalare Größen; in anisotropen Medien sind sie dagegen tensorielle Größen. Anisotrope Medien werden später in Kapitel 3, nichtlineare Medien in Kapitel 8 diskutiert werden.

Für ein isotropes, lineares Medium lassen sich die Maxwell'schen Gleichungen wie folgt ausdrücken:

$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	Gauß'sches Gesetz der Elektrostatik	(2.2.3)
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	Gauß'sches Gesetz der Magnetostatik	(2.2.4)
$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}$	Ampère'sches Gesetz	(2.2.5)
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	Faraday'sches Gesetz	(2.2.6)

Hierbei ist ρ die Ladungsdichte und \mathbf{j} die elektrische Stromdichte. Der Zusammenhang zwischen \mathbf{D} und \mathbf{E} sowie \mathbf{B} und \mathbf{H} wird im Fall eines linearen isotropen Mediums durch die dimensionslosen Konstanten ϵ (Dielektrizitätskonstante) und μ (Permeabilität) gegeben:

$$\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E} \tag{2.2.7}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H} . \tag{2.2.8}$$

Hierbei ist μ_0 die magnetische Feldkonstante.

2.3 Elektromagnetische Wellen

Wir betrachten nun ein isotropes, isolierendes Medium, in dem die Ladungsdichte ρ und die Stromdichte \mathbf{j} beide gleich null sind. Aus den Maxwell-Gleichungen folgt dann

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (2.3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.3.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.3.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} . \quad (2.3.4)$$

Wendet man $(\nabla \times)$ auf beide Seiten von (2.3.4) an und setzt (2.3.3) ein, so erhält man

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = -\mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} . \quad (2.3.5)$$

Benutzt man $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ ergibt sich wegen $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ aus (2.3.5)

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon \mu \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.3.6)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon \mu \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 . \quad (2.3.7)$$

Hierbei erhält man die entsprechende Gleichung für das magnetische Feld, indem man $(\nabla \times)$ auf beide Seiten von (2.3.3) anwendet. Die Differentialgleichungen (2.3.6) und (2.3.7) sind die Wellengleichungen für elektromagnetische Wellen.

2.3.1 Phasengeschwindigkeit und Brechungsindex

Der Vergleich mit (2.1.6) aus Abschnitt 2.1 zeigt, dass die Lösung von (2.3.6) eine Welle mit der Phasengeschwindigkeit

$$v_{\text{ph}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} c \quad (2.3.8)$$

ist. Hierbei haben wir für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum die Beziehung $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s}$ verwendet.¹

¹Als Maxwell aus den nach ihm benannten Gleichungen die Geschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen ableitete, stellte er fest, dass der theoretisch erhaltene Wert bemerkenswert nahe bei dem vor kurz vorher im Jahr 1849 von **Fizeau** gemessenen Wert der Lichtgeschwindigkeit von 315 300 km/s lag. Maxwell merkte dazu an: *Diese Geschwindigkeit ist der Lichtgeschwindigkeit so nahe, dass man mit großer Wahrscheinlichkeit folgern kann, dass es sich bei Licht selbst um eine elektromagnetische Störung in Form einer Welle handelt, welche sich durch das elektromagnetische Feld entsprechend den Gesetzen des Elektromagnetismus fortpflanzt.*

Gase bei 0°C, 1013 hPa			Flüssigkeiten bei 20°C			Festkörper bei 20°C		
Substanz	$\sqrt{\epsilon}$	n	Substanz	$\sqrt{\epsilon}$	n	Substanz	$\sqrt{\epsilon}$	n
Luft	1.000 294	1.000 293	Benzol	1.51	1.501	Diamant	4.06	2.419
Helium	1.000 034	1.000 036	Wasser	8.96	1.333	Bernstein	1.6	1.55
Wasserstoff	1.000 131	1.000 132	Äthanol	5.08	1.361	Quarzglas	1.94	1.458
Kohlendioxid	1.004 9	1.000 45	CCl ₄	4.63	1.461	NaCl	2.37	1.50

Tabelle 2.1: Brechungsindex und Wurzel der Dielektrizitätskonstante für verschiedene gasförmige, flüssige und feste Stoffe. Die Werte für $\sqrt{\epsilon}$ wurden bei sehr niedrigen Frequenzen (Hz bis kHz-Bereich) gemessen. Die Messung von n erfolgte bei etwa 5×10^{14} Hz (Natriumdampfampe mit $\lambda = 589.29$ nm).

Wir werden im Folgenden immer annehmen, dass die Permeabilität μ den Wert $\mu = 1$ im Bereich der Frequenzen des sichtbaren Lichts annimmt, da dies für optisch relevante Medien meist der Fall ist. Das Verhältnis der Phasengeschwindigkeit in einem Medium zu der im Vakuum dient zur Definition des *Brechungsindex* n eines Mediums. Wir definieren den Brechungsindex als

$$n = \frac{c}{v_{\text{ph}}} = \sqrt{\epsilon} . \quad (2.3.9)$$

Wir sehen, dass der Brechungsindex aufgrund der Frequenzabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante frequenzabhängig ist. Die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Wellenlänge des eingestrahnten Lichts ist ein bekannter, sehr wichtiger Effekt, den man *Dispersion* nennt. In Tabelle 2.1 sind die Werte von $\sqrt{\epsilon}$ und n gegenübergestellt, die bei unterschiedlichen Frequenzen gemessen wurden. Man erkennt, dass nur für einfache Gase eine geringe Frequenzabhängigkeit vorliegt.

2.3.2 Ebene Wellen und Dispersionsrelation

Die ebene Welle (vergleiche Abschnitt 2.1.5)

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \quad (2.3.10)$$

ist eine Lösung der Wellengleichung (2.3.6). Setzen wir diesen Ausdruck in die Wellengleichung ein, so erhalten wir folgenden Zusammenhang zwischen dem Wellenvektor \mathbf{k} und der Frequenz ω :

$$\mathbf{k}^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{n^2}{c^2} \omega^2 . \quad (2.3.11)$$

Diese Beziehung, die den Betrag des Wellenvektors mit der Kreisfrequenz der Welle verknüpft, bezeichnet man als *Dispersionsrelation*. Wir sehen, dass elektromagnetische Wellen eine lineare Dispersion $\omega = c|\mathbf{k}|$ besitzen.

Mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen lassen sich ferner die Beziehungen zwischen \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} und \mathbf{k} angeben. Ersetzen wir ∇ und $\partial/\partial t$ durch $i\mathbf{k}$ und $-i\omega$, so können wir (2.3.1) bis (2.3.4) in der Form

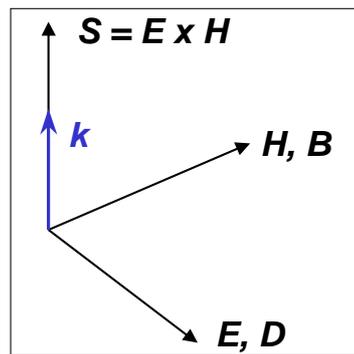


Abbildung 2.6: Lage der Vektoren einer elektromagnetischen Welle in einem isotropen Medium.

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.3.12)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (2.3.13)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D} = -\omega \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (2.3.14)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} = \omega \mu_0 \mathbf{H} \quad (2.3.15)$$

schreiben. Diese Gleichungen erlauben uns, die Orientierung der beteiligten Feldgrößen anzugeben (siehe hierzu Abb. 2.6): Es ist $\mathbf{k} \perp \mathbf{D}$ und $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$, ebenso gilt $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ und $\mathbf{D} \perp \mathbf{H}$. Für isotrope Medien gilt ferner $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$. Diese Beziehungen zeigen, dass *elektromagnetische Wellen transversale Wellen sind*, bei denen die Auslenkungen von \mathbf{B} bzw. \mathbf{D} (oder \mathbf{E}) senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehen. Die relativen Orientierungen von \mathbf{k} , \mathbf{D} und \mathbf{B} bilden dabei ein rechtshändiges System. Durch diese Bedingungen erhält man bei vorgegebenem Wellenvektor \mathbf{k} zwei Möglichkeiten für die Wahl von \mathbf{D} (oder \mathbf{E}), die man als die beiden Polarisierungen des Lichts bezeichnet. Die Ebene, in der \mathbf{D} und \mathbf{k} liegen, heißt Polarisationssebene. Eine ausführliche Diskussion hierzu folgt in Kapitel 3.

Wir wollen noch einige weitere Begriffe zusammenfassen, die im Zusammenhang mit Wellen wichtig sind. Die Wellenlänge λ der Welle ist mit der Wellenzahl k , das heißt mit dem Betrag des Wellenvektors \mathbf{k} über

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} n = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{\nu} \quad (2.3.16)$$

verknüpft. Als Wellenlänge λ bezeichnet man dabei die Wellenlänge im Vakuum. Ist in Folgenden die Wellenlänge im Medium $\lambda_M = \lambda/n$ gemeint, so wird darauf explizit hingewiesen.

2.3.3 Wellenpakete

Eine wichtige Eigenschaft der Wellengleichung (2.3.6) ist, dass gemäß dem Superpositionsprinzip neben zwei Lösungen \mathbf{E}_1 und \mathbf{E}_2 auch deren Summe $\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ eine Lösung ist. Dadurch ist es möglich, durch Superposition von ebenen Wellen geeigneter Frequenz und Wellenzahl Wellenpakete mit definiertem zeitlichem und räumlichem Verlauf zu konstruieren. Der dabei verwendete mathematische Formalismus ist derjenige der Fourier-Transformation (siehe Anhang B).

Addiert man eine Vielzahl von ebenen Wellen mit den Frequenzen ω_j und den Amplituden E_{0j} , so lässt sich dadurch jeder beliebige periodische Feldverlauf $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ darstellen. Speziell für den Ursprung $\mathbf{r} = 0$ gilt für den Zeitverlauf:

$$\mathbf{E}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E}_{0j} \exp(i\omega_j t) . \quad (2.3.17)$$

Verwendet man kontinuierlich verteilte Frequenzkomponenten, so wird aus der Fourier-Reihe ein Fourier-Integral, das auch die Darstellung von nichtperiodischen Zeitverläufen erlaubt:

$$\mathbf{E}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega . \quad (2.3.18)$$

Da $E(t)$ eine reelle Größe ist, kann man die Feldstärke für negative Frequenzen wie folgt angeben: $E(\omega) = E^*(-\omega)$. Durch Umkehrung der Fourier-Transformation lassen sich die Fourier-Komponenten $\mathbf{E}(\omega)$ aus dem Zeitverlauf des Feldes bestimmen:

$$\mathbf{E}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(t) \exp(-i\omega t) dt . \quad (2.3.19)$$

Die Darstellung des elektrischen Feldes durch seinen Zeitverlauf $\mathbf{E}(t)$ oder seinen Frequenzverlauf $\mathbf{E}(\omega)$ ist also äquivalent.

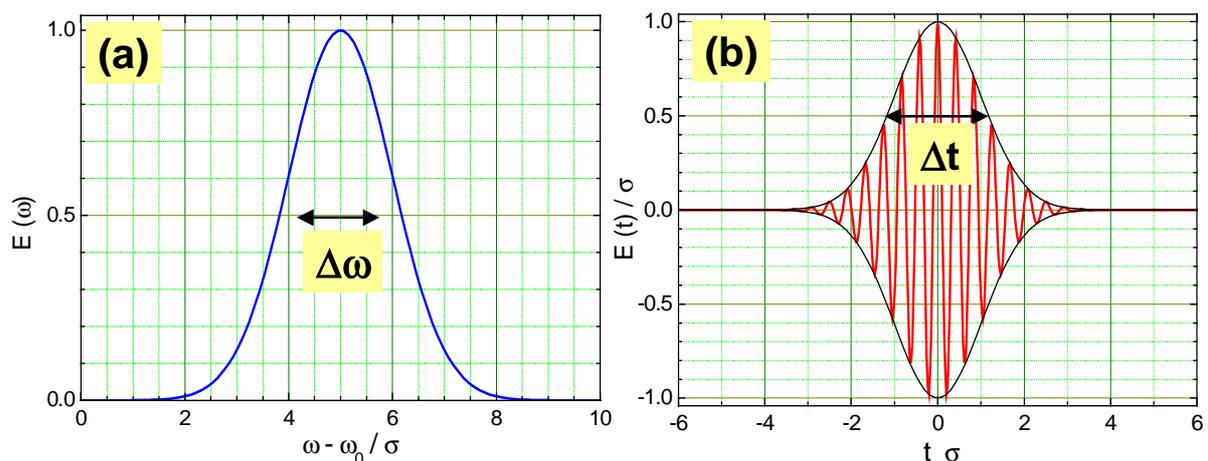


Abbildung 2.7: Frequenzverlauf (a) und Zeitverlauf (b) des elektrischen Feldes eines Gauß-förmigen Wellenpakets.

Als Beispiel wollen wir einen Frequenzverlauf des Feldes in Form einer Gauß'schen Glockenkurve mit einer Zentralfrequenz ω_0 und der Varianz σ^2 annehmen (siehe Abb. 2.7a):

$$E(\omega) = \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (2.3.20)$$

Gemäß (2.3.18) erhalten wir dann

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma^2}\right] \exp(i\omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-t^2 \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2\right] \exp(i\omega_0 t) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{\omega - \omega_0}{\sqrt{2}\sigma} + it\sqrt{\frac{\sigma^2}{2}}\right)^2\right] d\omega. \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Das Integral in (2.3.21) tritt häufig auf und findet sich in allen Integraltafeln. Sein Wert ist unabhängig von t

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right] d\xi = \sqrt{2\pi\sigma^2}. \quad (2.3.22)$$

Damit ergibt sich

$$E(t) = \sigma \exp\left[-\frac{t^2}{2(2/\sigma)^2}\right]. \quad (2.3.23)$$

Wir erhalten also ein Wellenpaket mit einer Schwingungsfrequenz ω_0 und einer zeitlich modulierten Amplitude mit Gauß-förmigem Verlauf und Varianz $2/\sigma$ (siehe Abb. 2.7b). Die Breite $\delta t = 2/\sigma$ des Zeitverlaufs ist mit der Breite $\delta\omega = 2\sigma$ des Frequenzverlaufs über $\delta\omega\delta t = 1$ verknüpft.

Häufig werden die in Abb. 2.7 eingezeichneten vollen Halbwertsbreiten (FWHM: Full Width at Half Maximum) Δt und $\Delta\omega$, verwendet, die man aus $E(\Delta\omega/2) = 0.5$ bzw. $E(\Delta t/2) = 0.5$ erhält. Man erhält $\Delta\omega = \sqrt{8\ln 2} = 2.35\sigma$ bzw. $\Delta t = 2.35/\sigma$ und damit

$$\Delta\omega\Delta t = 8 \ln 2 = 5.54. \quad (2.3.24)$$

Wir lernen daraus, dass ein zeitlich Gauß-förmiger Lichtimpuls immer mit einer bestimmten Frequenzbreite verknüpft ist, die mit abnehmender Dauer des Impulses zunimmt. Verwendet man andere Lichtimpulsformen, so hängt das Produkt $\Delta\omega\Delta t$ von der speziellen Impulsform ab. Für glockenförmige Impulse gilt dabei die Abschätzung

$$\Delta\omega\Delta t \simeq 2\pi \quad \text{oder} \quad \Delta\nu\Delta t \simeq 1 . \quad (2.3.25)$$

Diese Beziehung ist eine für Wellen charakteristische Eigenschaft. Sie besagt, dass man nicht gleichzeitig eine exakte Zeit- und Frequenzbestimmung durchführen kann. Dies ist einsichtig. Will man z.B. die Frequenz sehr genau bestimmen, so muss man möglichst viele Maxima des Wellenzugs abzählen. Dies erfordert aber eine große Zeitdauer Δt . Wir werden diese Beziehung später mit der *Heisenberg'schen Unschärfebeziehung* in Verbindung bringen.

2.3.4 Energie und Impuls von Licht

Eine wesentliche Eigenschaft elektromagnetischer Wellen ist deren Fähigkeit, Energie zu transportieren. Der Vektor, der den Energietransport beschreibt, ist der *Poynting-Vektor*. Er ist allgemein definiert als

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} . \quad (2.3.26)$$

Man sieht leicht, dass für ein isotropes Medium der Poyntig-Vektor parallel zu \mathbf{k} ist.

Durch zeitliche Mittelung von \mathbf{S} erhält man die *Strahlungsflussdichte* oder die *Intensität* I . Die Strahlungsflussdichte hat somit die Dimension Energie pro Zeit und Fläche. Wenn \mathbf{E} und \mathbf{H} senkrecht aufeinander stehen und in Phase sind (isotropes Medium, vergleiche hierzu Abb. 2.6) folgt

$$\langle |\mathbf{S}| \rangle = \langle E_0 \sin \omega t H_0 \sin \omega t \rangle = \frac{1}{2} E_0 H_0 = \frac{1}{2} E_0^2 \varepsilon_0 n c , \quad (2.3.27)$$

da der zeitliche Mittelwert von $\sin^2 \omega t$ für $t \gg 1/\omega$ gleich $1/2$ ist. Wir werden später die Situation kennenlernen, in der zwischen \mathbf{E} und \mathbf{H} ein Phasenunterschied besteht und sich deshalb ein anderer zeitlicher Mittelwert ergibt. Insbesondere wird bei einem Phasenunterschied von 90° die Strahlungsflussdichte Null, d.h. es findet kein Energietransport statt. Evaneszente Wellen sind ein Beispiel für dieses Verhalten (vergleiche hierzu Abschnitt 2.6.4).

Neben der Energiestromdichte besitzt Licht auch eine Impulsdichte, die bei der Absorption oder der Reflexion von Licht wichtig ist und zu einem Strahlungsdruck führt. Das Zustandekommen des Strahlungsdrucks kann man sich klar machen, wenn man die Wechselwirkung eines elektromagnetischen Feldes mit einer zunächst ruhenden freien Ladung betrachtet. Aufgrund der Coulomb-Kraft erfährt die Ladung eine Beschleunigung parallel zum elektrischen Feld, die zu einer Geschwindigkeit v_q der Ladung führt. Dabei wird aus dem elektromagnetischen Feld die Leistung $L = qE v_q$ aufgenommen. Die Bewegung der Ladung im magnetischen Feld B , das senkrecht zu E und k steht, führt zu einer Lorentz-Kraft F_L , die in Richtung des Wellenvektors k zeigt. Diese Kraft kann man als

$$F_L = q v_q B = q v_q \frac{E}{c} = \frac{L}{c} \quad (2.3.28)$$

schreiben. Mit der Absorption der Strahlungsleistung ist also eine Kraft auf die Ladung in Ausbreitungsrichtung der elektromagnetischen Welle verknüpft. Bezieht man die Kraft auf die bestrahlte Fläche, so erhält man den *Strahlungsdruck* P_s , der bei der Absorption der Intensität I auf den Absorber ausgeübt wird, zu

$$P_s = \frac{I}{c}. \quad (2.3.29)$$

Bei einer vollständigen Reflexion von Licht an einem Spiegel tritt aufgrund der Impulserhaltung ein doppelt so großer Strahlungsdruck auf.

Als Beispiel wollen wir kurz den Strahlungsdruck durch Absorption des Sonnenlichts auf der Erdoberfläche berechnen. Mit $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ und einer Bestrahlungsstärke von 1500 W/m^2 erhalten wir einen Strahlungsdruck $P_s = 5 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2$. Dieser Druck ist sehr klein und im Alltagsleben nicht wahrnehmbar. Allerdings können heute mit Hochleistungslasern enorme Druckwerte erzielt werden. Bei mit Lasern erreichbaren Lichtintensitäten im Bereich von 10^{22} W/m^2 werden Strahlungsdrucke im Bereich von 10^{14} N/m^2 oder 1 Gbar erzielt. Solche Druckwerte übersteigen alle technisch herstellbaren stationären Druckwerte.

2.3.5 Phasen und Gruppengeschwindigkeit

Wir wollen nun kurz die Ausbreitung von Lichtimpulsen betrachten und dabei die allgemeinen Betrachtungen aus Abschnitt 2.1.4 benutzen. Dazu betrachten wir ein Wellenpaket (vergleiche (2.3.18))

$$E_x(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E_x(\omega) \exp[i\omega t - ik(\omega)z] d\omega \quad (2.3.30)$$

mit einem in x -Richtung polarisierten elektrischen Feld, das sich in z -Richtung ausbreitet. Hierbei ist $k(\omega)$ über die Dispersionsrelation (2.3.11) bestimmt, wobei eine explizite Frequenzabhängigkeit des Brechungsindex (siehe Abschnitt 2.4) zu berücksichtigen ist.

Wir betrachten ein Wellenpaket mit einem Frequenzspektrum $E_{0x}(\omega)$, das nur in unmittelbarer Umgebung einer Resonanzfrequenz ω_0 von Null verschieden ist, so dass wir $k(\omega)$ in der Nähe von ω_0 in eine Potenzreihe entwickeln können ($\omega = \omega_0 + \Omega$ mit $\Omega \ll \omega_0$):

$$\begin{aligned} k(\omega) &= k(\omega_0) + \Omega \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0} + \frac{1}{2} \Omega^2 \left(\frac{d^2k}{d\omega^2} \right)_{\omega_0} + \dots \\ &= k_0 + \Omega k'(\omega_0) + \frac{1}{2} \Omega^2 k''(\omega_0) + \dots \end{aligned} \quad (2.3.31)$$

Damit erhält man das elektrische Feld näherungsweise zu

$$\begin{aligned}
E_x(z,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[i\omega_0 t - k_0 z] \int E_x(\omega_0 + \Omega) \\
&\quad \times \exp[i\Omega(t - z[k'(\omega_0) + \frac{1}{2}\Omega k''(\omega_0) + \dots])] d\Omega \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[i\omega_0 t - k_0 z] A(z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[i\Phi(z,t)] A(z,t) .
\end{aligned} \tag{2.3.32}$$

Dabei haben wir das Wellenpaket in einen mit der Frequenz ω_0 schnell oszillierenden Anteil und in eine zeit- und ortsabhängigen Amplitudenfunktion $A(z,t)$, die sich aufgrund der Bedingung $\Omega \ll \omega_0$ nur langsam ändert, aufgespalten.

Die Ausbreitung der schnellen Oszillation erfolgt mit der *Phasengeschwindigkeit* v_{ph} , die sich formal aus der Bedingung $\Phi(z,t) = \omega_0 t - k_0 z(t) = const$ zu

$$v_{ph} = \frac{dz(t)}{dt} = \frac{\omega_0}{k_0} = \frac{c}{n} \tag{2.3.33}$$

ergibt (siehe hierzu Abb. 2.8).

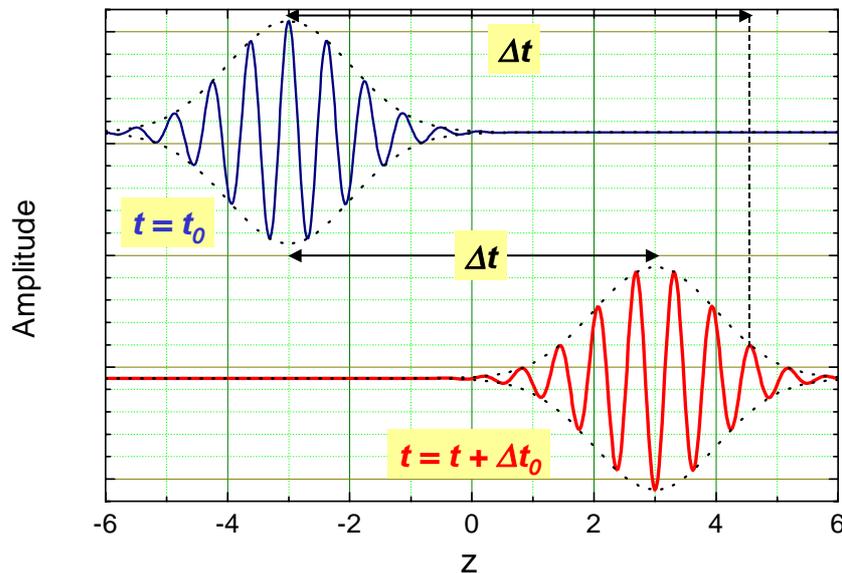


Abbildung 2.8: Zur Phasen- und Gruppengeschwindigkeit: Momentaufnahme eines Wellenpakets zur Zeit t_0 (oben) und zur Zeit $t_0 + \Delta t$ (unten). Das Maximum der Einhüllenden des Wellenpakets breitet sich mit der Gruppengeschwindigkeit, ein Maximum der Amplitude des Feldes mit der Phasengeschwindigkeit aus.

Für die Ableitung der Gruppengeschwindigkeit müssen wir die Ausbreitung der Einhüllenden des Wellenpakets betrachten. Wir verwenden wieder (2.3.32), wobei wir zunächst zweite und höhere Ableitungen des Wellenvektors vernachlässigen wollen. Das Integral ergibt dann eine Amplitudenfunktion $A(\xi)$ mit dem Argument $\xi = t - zk'(\omega_0) = t - z\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0}$. Da die Bewegung des Maxima oder jedes festen Punkts der Einhüllenden durch die Beziehung $\xi = \xi_0$ gegeben ist, erhält man die Gruppengeschwindigkeit zu

$$v_{\text{gr}} = \left(\frac{dz(t)}{dt} \right)_{\xi_0} = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{\omega_0} . \quad (2.3.34)$$

Unter Benutzung der Dispersionsrelation (2.3.11) $k^2 = \frac{n^2}{c^2} \omega^2$ erhält man die folgenden verschiedenen Schreibweisen für die Gruppengeschwindigkeit (vergleiche hierzu (2.1.18)):

$$\begin{aligned} v_{\text{gr}} = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{\omega_0} &= v_{\text{ph}} \frac{dk}{dk} + k \frac{dv_{\text{ph}}}{dk} = \frac{c}{n} - \frac{kc}{n^2} \frac{dn}{dk} \\ v_{\text{gr}} &= \frac{c}{n} + \frac{\lambda c}{n^2} \frac{dn}{d\lambda} = \frac{c}{n} \left(1 + \frac{dn}{d\lambda} \right) . \end{aligned} \quad (2.3.35)$$

Die bisher vernachlässigten Entwicklungsglieder in (2.3.32) bewirken, dass sich die Form der Amplitudenfunktion bei der Ausbreitung ändert. Dies resultiert daraus, dass sich die verschiedenen Frequenzkomponenten, aus denen das Wellenpaket aufgebaut ist, verschieden schnell ausbreiten. Dies führt in der Regel dazu, dass sich Lichtimpulse bei der Ausbreitung durch ein dispersives Medium verbreitern.

Dieses Phänomen ist bei der optischen Nachrichtenübertragung, bei der mit kurzen Lichtimpulsen gearbeitet wird, von Bedeutung. Man verwendet deshalb heute in der modernen optischen Datenübertragung spezielle Glasfasern und Übertragungswellenlängen λ_0 , bei denen besonders kleine Werte der Dispersion $k'' = d^2k/d\omega^2$ auftreten. Bei der Lichtausbreitung im Vakuum treten keine Dispersionseffekte auf. Hier gilt $n = 1$ und damit $k = \omega/c$. Außerdem sind im Vakuum Gruppengeschwindigkeit und Phasengeschwindigkeit gleich groß.

2.4 Klassische Dispersionstheorie

Die Maxwell'sche Theorie behandelt Materie als kontinuierlich und drückt ihre elektrische bzw. magnetische Antwort auf anliegende elektrische bzw. magnetische Felder durch die Stoffkonstanten ϵ und μ aus. Dadurch erhält man das unrealistische Ergebnis, dass der Brechungsindex $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ unabhängig von der Frequenz ist. Der Begriff *Dispersion* beschreibt die Abhängigkeit der dielektrischen Antwortfunktion eines Mediums (Dielektrizitätskonstante², Brechungsindex) von der Frequenz eines elektromagnetischen Feldes. Sie wird durch die Wechselwirkung des elektromagnetischen Feldes mit Materie auf atomarer Skala bestimmt. Nach **Hendrik Antoon Lorentz** (1878) lässt sich das Verhalten eines isotropen dielektrischen Mediums durch Mittelung der Beiträge sehr vieler Atome beschreiben. Die Ausbreitung von Licht in einem Medium wird entscheidend von der Frequenzabhängigkeit $n(\omega)$ des Brechungsindex dieses Mediums bestimmt. Daraus ergeben sich zahlreiche optische Phänomene.

Zahlreiche Aspekte der Wechselwirkung von Licht mit Materie können im Rahmen einer klassischen Theorie beschrieben werden, in der das Medium durch Modellatome oder Moleküle beschrieben wird. Wird ein elektrisches Feld an ein Dielektrikum angelegt, so wird die Ladungsverteilung innerhalb des Mediums gestört. Dabei werden elektrische Dipolmomente erzeugt, die ihrerseits zum inneren Feld beitragen. Einfacher ausgedrückt verschiebt das äußere Feld im Medium positive und negative Ladungen gegeneinander. Das resultierende Dipolmoment pro Volumen nennt man *elektrische Polarisation* \mathbf{P} . Für die meisten Stoffe sind \mathbf{P} und \mathbf{E} zueinander proportional³ und können zufriedenstellend durch die Beziehung

$$\mathbf{P} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E} = (\epsilon - 1) \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (2.4.1)$$

verknüpft werden.

Für den Mechanismus der Umverteilung von positiver und negativer Ladung gibt es drei wesentliche Mechanismen:

1. Die Orientierungspolarisation:

Bei diesem Prozess werden so genannte *polare Moleküle*, die ein permanentes Dipolmoment besitzen (ein wichtiges Beispiel ist Wasser) durch die Wirkung des angelegten elektrischen Feldes ausgerichtet und dadurch eine Polarisation erzeugt. Ohne elektrisches Feld sind die permanenten Dipolmomente statistisch verteilt, so dass keine makroskopische Polarisation vorhanden ist.

2. Die Elektronenpolarisation:

Für unpolare Atome und Moleküle bewirkt das angelegte elektrische Feld eine Verschiebung des negativen Ladungsschwerpunktes der Elektronenhülle gegenüber dem positiven Atomkern, wodurch Dipolmomente und damit eine Elektronenpolarisation entsteht.

3. Die Ionenpolarisation:

In Ionenkristallen wie z.B. NaCl liegen positiv und negativ geladene Ionen vor, die durch ein angelegtes elektrisches Feld gegeneinander verschoben werden. Dies resultiert wiederum in induzierten Dipolmomenten und damit in einer Ionenpolarisation.

²Wir werden, wie bereits in den vorangegangenen Abschnitten getan, nur Medien mit $\mu = 1$ betrachten.

³dies gilt nicht für anisotrope Medien (vergleiche Kapitel 3) und nichtlineare Medien (vergleiche Kapitel 8).

Wir wollen nun kurz diskutieren, wie die einzelnen Polarisierungseffekte von der Frequenz abhängen. Wirkt ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld, so kommt es zu zeitlich variierenden Kräften und/oder Drehmomenten, die proportional zum elektrischen Feld sind.⁴ In polaren Medien rotieren die Moleküle und richten sich somit relativ zum angelegten elektrischen Feld aus. Da die Moleküle aber groß sind, können diese dem elektrischen Feld nur bis zu einer bestimmten Grenzfrequenz folgen. Oberhalb dieser Frequenz ist der Beitrag der Orientierungspolarisation deshalb verschwindend klein. Bei Wasser liegt diese Frequenz bei etwa 10 GHz.

Hendrik Antoon Lorentz (1853 - 1928):

Hendrik Antoon Lorentz wurde am 13. Juli 1853 in Arnheim geboren.

Seine Schulzeit absolvierte er in seiner Geburtsstadt, bis er 1870 für ein Studium der Mathematik und Physik an die Universität Leiden ging. Im Februar 1872 nahm er die Lehrtätigkeit am Abendgymnasium in Arnheim auf und bildete sich autodidaktisch weiter, so dass er 1875 promovieren konnte. Auf Grundlage der Maxwell-Theorie erklärte er in seiner Dissertation "Sur la théorie de la réflexion et de la réfraction de la lumière" die Brechung und Reflexion des Lichtes. Nachdem er 1877 eine Professur auf den mathematischen Lehrstuhl in Utrecht ablehnte, nahm er 1878 einen Ruf auf den ersten niederländischen Lehrstuhl für theoretische Physik an der Universität Leiden an. 1892 gab er eine erste Erklärung des Michelsonschen Versuches durch die Lorentz-Kontraktion. Im gleichen Jahr formuliert Hendrik Antoon Lorentz 1892 eine modellhafte Theorie der Leitfähigkeit und der magnetischen Eigenschaften von Metallen, welche von der Existenz beweglicher negativer Ladungsträger in den Metallen ausgeht. Sie wird später als Elektronentheorie bezeichnet. 1895 führt er die Lorentz-Kraft (eine Möglichkeit das Magnetfeld genauso zu definieren wie das elektrische Feld mit der Coulomb-Kraft) und 1899 die Lorentz-Transformation in die Elektrodynamik ein. 1902 erhält er zusammen mit Pieter Zeemann den Nobelpreis für Physik für die theoretische Deutung des sogenannten Zeemann-Effekts. Ab 1912 war er als Kurator bei der Teyler-Stiftung in Haarlem tätig. Ab 1920 beteiligte er sich an der Planung des Zudersee-Projektes, welche er 1926 abschloss.



Hendrik Antoon Lorentz verstarb am 4. Februar 1928 in Haarlem.

Das gleiche gilt für die Ionenpolarisation. Die Ionen sind relativ schwer und können der Kraft durch das zeitlich variierende elektrische Feld typischerweise nur bis in den Bereich des infraroten Lichts folgen. Elektronen haben dagegen ein sehr kleines Trägheitsmoment, weshalb sie dem elektrischen Feld auch noch bei optischen Frequenzen (etwa 5×10^{14} Hz) folgen können und zur Elektronenpolarisation beitragen. Insgesamt sehen wir, dass die Frequenzabhängigkeit des Brechungsindex durch das Zusammenwirken verschiedener Polarisationsprozesse verursacht wird, welche verschiedene Frequenzabhängigkeiten zeigen. Berücksichtigt man diese Prozesse, so kann man einen Ausdruck für $n(\omega)$ ableiten, der die Ergebnisse auf atomarer Skala berücksichtigt.

Da die Orientierungs- und Ionenpolarisation aufgrund der kleinen Grenzfrequenzen im sichtbaren Spektralbereich nur einen verschwindend geringen Beitrag zur Gesamtpolarisation liefern, wird das Verhalten von Stoffen in diesem Frequenzbereich von der Elektronenpolarisation dominiert. Wir wollen im folgenden Abschnitt kurz ein einfaches Modell für ein klassisches Atom vorstellen, mit dem wir die Frequenzabhängigkeit von n im optischen Bereich ableiten können. Hier spielt also nur die Elektronenpolarisation eine Rolle.

⁴Die Kraft aufgrund von elektrischen Feldern ist $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$, während die Kraft aufgrund von magnetischen Feldern $\mathbf{F}_M = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Wegen $v \ll c$ ist im Allgemeinen $F_M \ll F_E$ und kann vernachlässigt werden.

2.4.1 Das klassische Atom

Wir machen folgende Modellannahme für ein klassisches Atom: Das Atom soll aus einem massiven positiven Kern und einer leichten Elektronenhülle der gleichen Gesamtladung bestehen. Beide sollen, wie in Abb. 2.9 gezeigt ist, durch Federn aneinander gekoppelt sein. Das ungestörte Atom hat ein verschwindendes Dipolmoment, da der Ladungsschwerpunkt für die positive und negative Ladung übereinstimmt. Wird das Atom dagegen durch eine von außen wirkende Kraft verzerrt, so entsteht ein endliches Dipolmoment. Ein gebundenes Elektron, das kurzfristig aus seiner Ruhelage ausgelenkt wird, schwingt anschließend um seine Ruhelage mit der Eigen- oder Resonanzfrequenz $\omega_0 = \sqrt{k/m_e}$, wobei k die Federkonstante und m_e die Elektronenmasse ist.

Man stellt sich nun die Materie als eine Ansammlung vieler polarisierbarer Atome vor. Mit den obigen Modellannahmen können wir die Bewegungsgleichung für eine Auslenkung x zwischen dem Massenzentrum des positiven Kerns und der Elektronenwolke der Atome wie folgt schreiben:

$$m_e \frac{d^2x}{dt^2} + m_e \kappa \frac{dx}{dt} + m_e \omega_0^2 x = F . \quad (2.4.2)$$

Hierbei ist $m_e \kappa$ eine Dämpfungskonstante, mit der berücksichtigt wird, dass es sich bei den Modellatomen um schwingende Dipole handelt, die Energie abstrahlen. Der dabei auftretende Energieverlust kann phänomenologisch als Dämpfungsterm berücksichtigt werden.

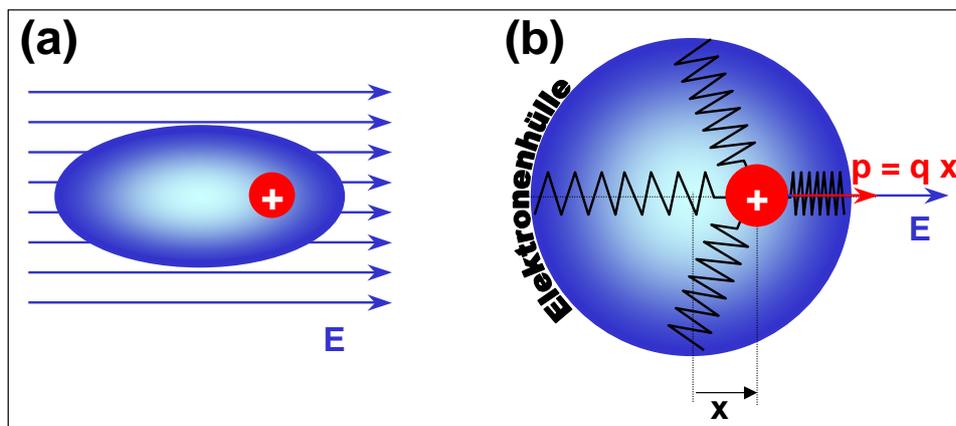


Abbildung 2.9: (a) Störung der Elektronenwolke durch ein angelegtes elektrisches Feld. (b) Mechanisches Oszillatormodell für ein isotropes Medium. Die Federn sind alle gleich, die Schwingung kann in alle Richtungen gleichmäßig erfolgen.

Ist $F = qE$ eine statische Kraft durch ein äußeres elektrisches Feld, so hat (2.4.2) die Lösung $x = F/m_e \omega_0^2$. Mit der Auslenkung x ist ein induziertes Dipolmoment

$$p = qx = \frac{q^2 E}{m_e \omega_0^2} \quad (2.4.3)$$

verknüpft. Damit erhalten wir für die Frequenz $\omega = 0$ die *statische elektrische Polarisierbarkeit* des Atoms zu

$$\alpha(0) = \frac{P}{\epsilon_0 E} = \frac{q^2}{\epsilon_0 m_e \omega_0^2} . \quad (2.4.4)$$

Wir können nun die gleiche Betrachtung für ein zeitlich variierendes elektrisches Feld $E = E_0 \exp(-i\omega t)$ wiederholen. Wir erhalten

$$x(t) = \frac{q}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2 - i\kappa\omega)} E(t) \quad (2.4.5)$$

und

$$\alpha(\omega) = \frac{q^2}{\epsilon_0 m_e(\omega_0^2 - \omega^2 - i\kappa\omega)} . \quad (2.4.6)$$

Wir sehen, dass $\alpha(\omega)$ komplex ist. Dies deutet darauf hin, dass es einen Phasenunterschied zwischen dem angelegten äußeren Feld und dem daraus resultierenden Dipolmoment gibt. Ist $\omega \ll \omega_0$, so sind $x(t)$ und $E(t)$ in Phase, da die Auslenkung der Kraft durch das elektrische Feld gut folgen kann. Für $\omega \gg \omega_0$ sind dagegen $x(t)$ und $E(t)$ gegenphasig.

Bei einer Elektronendichte N ergibt sich für die Polarisation $P(t)$, d.h. für das Dipolmoment pro Volumeneinheit

$$P(t) = qx(t)N = \frac{q^2 N}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2 - i\kappa\omega)} E(t) = [\epsilon(\omega) - 1] \epsilon_0 E(t) . \quad (2.4.7)$$

und damit für die Frequenzabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante

$$\boxed{\epsilon(\omega) = 1 + \frac{q^2 N}{\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\kappa\omega)} .} \quad (2.4.8)$$

Ein reales Medium kann mehrere Atome mit der Dichte N_i mit mehreren unterschiedlichen Resonanzfrequenzen $\omega_{0,i}$ besitzen. Wir können in diesem Fall die Einzelbeiträge zur Dielektrizitätskonstante aufsummieren und erhalten

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{q^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_i \frac{N_i}{(\omega_{0,i}^2 - \omega^2 - i\kappa_i\omega)} . \quad (2.4.9)$$

2.4.2 Frequenzabhängigkeit des Brechungsindex

Für verdünnte Medien (z.B. Gase) kann man im nicht-resonanten Fall ($\omega \neq \omega_0$) immer erreichen, dass $\varepsilon(\omega)$ sehr nahe bei eins liegt (die Dispersion von dichten Medien werden wir weiter unten diskutieren). In diesem Fall können wir $\varepsilon(\omega) = 1 + \Delta\varepsilon$ mit $\Delta\varepsilon \ll 1$ schreiben und wir können den Brechungsindex einfach aus (2.4.8) berechnen:

$$(\varepsilon - 1) = (n^2 - 1) = (n - 1)(n + 1) \simeq 2(n - 1) \quad (2.4.10)$$

$$(n - 1) \simeq \frac{1}{2}[\varepsilon(\omega) - 1] = \frac{q^2 N}{2\varepsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\kappa\omega} \quad (2.4.11)$$

Durch Auftrennen in Real- und Imaginärteil erhalten wir

$$n_{\text{R}} = 1 + \frac{q^2 N}{2\varepsilon_0 m_e} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \kappa^2 \omega^2} = 1 + \frac{\Omega^2}{2\omega_0^2} \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\kappa^2}{\omega_0^2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (2.4.12)$$

$$n_{\text{I}} = \frac{q^2 N}{2\varepsilon_0 m_e} \frac{-\kappa\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \kappa^2 \omega^2} = \frac{\Omega^2}{2\omega_0^2} \frac{-\frac{\kappa}{\omega_0} \frac{\omega}{\omega_0}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\kappa^2}{\omega_0^2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (2.4.13)$$

Hierbei wurde die *Plasmafrequenz* $\Omega = (q^2 N / \varepsilon_0 m_e)^{1/2}$ eingeführt. Der Brechungsindex ist also wie die Dielektrizitätskonstante eine komplexe Größe mit Real- und Imaginärteil. Sein Frequenzverlauf ist in Abb. 2.10 dargestellt. Der Realteil n_{R} des Brechungsindex startet bei kleinen Frequenzen bei $n_0 = 1 + q^2 N / 2\varepsilon_0 m_e \omega_0^2 = 1 + \Omega^2 / 2\omega_0^2$ und steigt dann kontinuierlich bis zur Frequenz ω_0 an. Nur in der unmittelbaren Umgebung der Resonanzfrequenz ω_0 nimmt n_{R} mit zunehmender Frequenz ab. Bei hohen Frequenzen $\omega \gg \omega_0$ nähert sich n_{R} von kleinen Werten dem Wert eins an. Für den hier betrachteten Fall ist der Imaginärteil n_{I} immer negativ. Im Allgemeinen ist n_{I} sehr klein und nur unmittelbar bei $\omega = \omega_0$ merklich von Null verschieden. Sein Frequenzverlauf entspricht einer Lorentz-Kurve.

Die $n(\omega)$ -Kurve hat also insgesamt 3 wichtige Eigenschaften:

1. Außerhalb des Frequenzbereichs $\omega_0 \pm \kappa$ ist $dn_{\text{R}}/d\omega$ positiv und $n_{\text{I}} \ll 1$. Dies wird *normale Dispersion* genannt und ist für alle transparenten Medien typisch.
2. Der Brechungsindex wird für Frequenzen knapp unterhalb ω_0 besonders groß und fällt dann oberhalb der Resonanzfrequenz rasch auf einen Wert unterhalb von eins ab. Im Bereich der starken Änderung ist $dn_{\text{R}}/d\omega$ negativ, dies bezeichnet man als *anomale Dispersion*.
3. Im Bereich anomaler Dispersion kann n_{I} nicht vernachlässigt werden. Es kommt hier zur Absorption (siehe hierzu nächster Abschnitt). Man bezeichnet diesen Bereich auch als *Absorptionsband*.

In realen Materialien tritt nicht nur eine, sondern oft mehrere Resonanzfrequenzen auf. In allen Frequenzbereichen um die Resonanzfrequenzen tritt dann anomale Dispersion auf, wie in Abb. 2.11 gezeigt ist. Die mehrfachen Resonanzen können so erklärt werden, dass es mehrere resonante Zustände gibt, wobei jeder j -te Zustand die Frequenz ω_{0j} und die relative Stärke f_j besitzt. Die Größe f_j wird als *Oszillatorstärke* bezeichnet. Wir können dann den Brechungsindex als Superposition der gesamten Effekte schreiben und erhalten

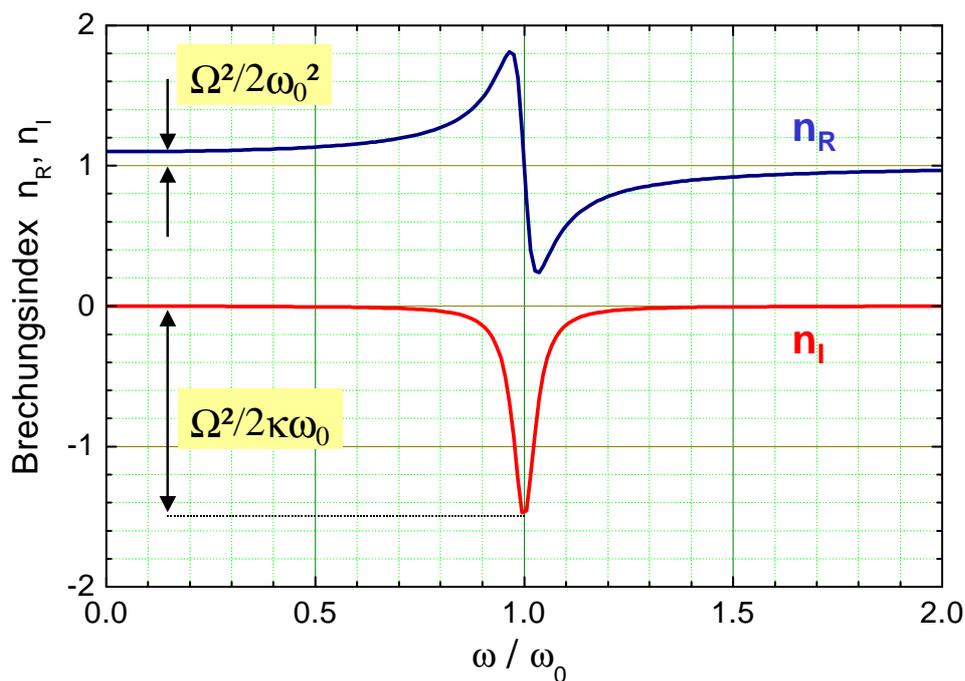


Abbildung 2.10: Frequenzabhängigkeit des Real- und Imaginärteils des Brechungsindex.

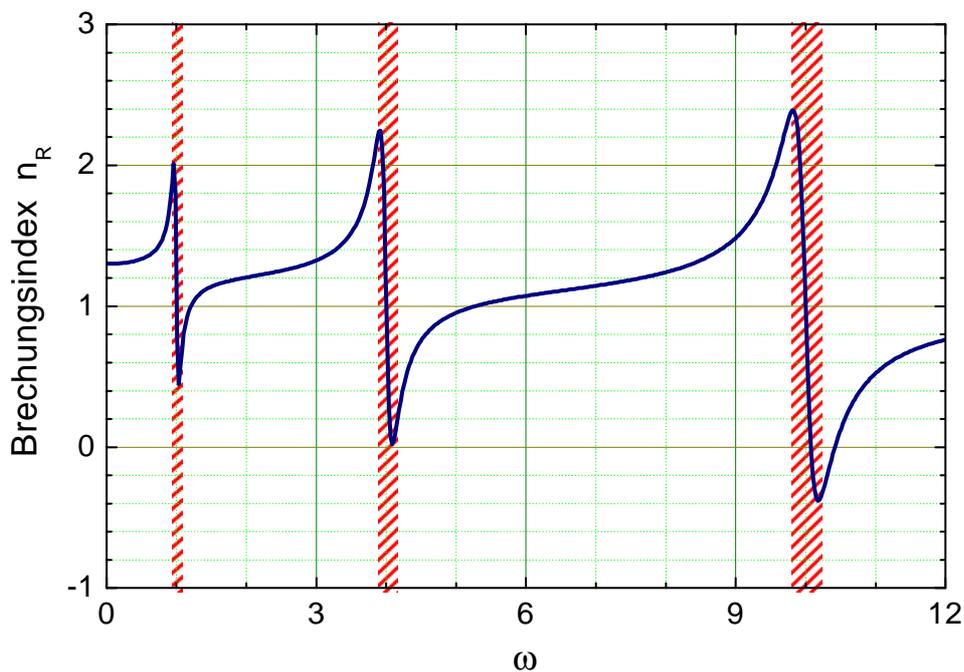


Abbildung 2.11: Schematische Darstellung des Frequenzverlaufs des Brechungsindex bei Vorhandensein verschiedener Resonanzfrequenzen. Der Bereich anomaler Dispersion ist schraffiert unterlegt. In diesen Bereichen tritt starke Absorption auf, man nennt diese Bereiche deshalb Absorptionsbanden.

$$n_R = 1 + \frac{q^2 N}{2\epsilon_0 m_e} \sum_j \frac{f_j (\omega_{0j}^2 - \omega^2)}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)^2 + \kappa_j^2 \omega^2} \quad (2.4.14)$$

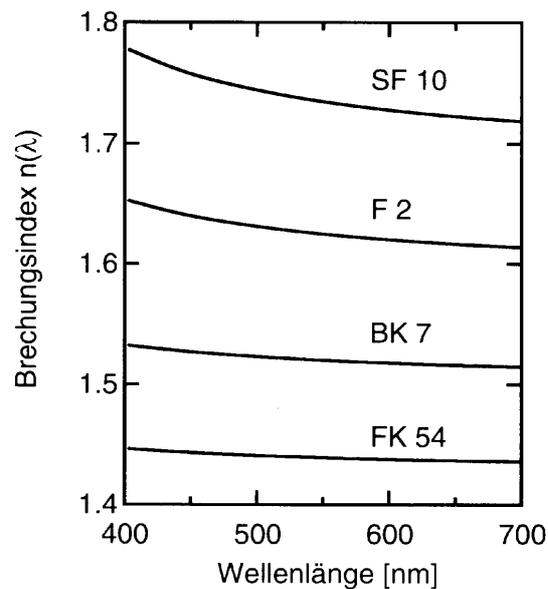


Abbildung 2.12: Wellenlängenabhängigkeit des Brechungsindex für verschiedene optische Gläser im sichtbaren Spektralbereich.

Für transparente Medien gilt, dass die Dispersion im sichtbaren Spektralbereich ganz wesentlich von einer elektronischen Resonanz im ultravioletten Spektralbereich bestimmt wird. Dies bewirkt, dass die Dispersion verschiedener transparenter Medien im sichtbaren Bereich einen sehr ähnlichen Verlauf hat, der in Abb. 2.12 für einige optische Gläser gezeigt ist. Der Brechungsindex ist immer größer als eins (da $\omega < \omega_0$). Außerdem nimmt n mit zunehmender Frequenz zu (normale Dispersion).

Wir können zusammenfassend festhalten, dass $n(\omega)$ im sichtbaren Spektralbereich überwiegend durch die Elektronenpolarisation bestimmt wird. Anschaulich stellt man sich vor, dass elektronische Oszillatoren mit der Frequenz der einfallenden Welle schwingen. Unterscheidet sich diese Frequenz merklich von der Eigenfrequenz der Oszillatoren, so werden nur kleine Schwingungen ausgeführt. In diesem Fall werden nur geringe Energiemengen absorbiert, der Imaginäranteil des Brechungsindex ist klein. An den Resonanzstellen ist dagegen die Schwingung stark, das elektrische Feld der Welle verrichtet mehr Arbeit, die dem Feld entzogen wird. Es tritt ein Absorptionsmaximum oder eine Absorptionsbande auf. Jeder Stoff ist für Strahlung in der unmittelbaren Nähe seiner Eigenfrequenzen undurchlässig, für Strahlung anderer Frequenzen dagegen durchlässig (siehe Abb. 2.11).

Dispersion fern von einem Absorptionsband

Im Bereich normaler Dispersion fern von einer Resonanzfrequenz können wir die Absorption vernachlässigen und wir können (2.4.12) schreiben als

$$n_R \simeq 1 + \frac{\Omega^2}{2(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (2.4.15)$$

Ist speziell ω weit oberhalb der höchsten Resonanzfrequenz (dies trifft z.B. für Röntgenstrahlung zu), so erhalten wir

$$n_{\text{R}} \simeq 1 - \frac{\Omega^2}{2\omega^2} . \quad (2.4.16)$$

Diese Abschätzung zeigt, dass der Brechungsindex für sehr hohe Frequenzen zwar kleiner, aber nur sehr wenig kleiner als eins ist. Setzt man typische Werte ein, so erhält man $1 - n_{\text{R}} \sim 10^{-7}$. Dies ermöglicht äußere Totalreflexion als Methode zur Handhabung von Röntgenstrahlung.

Brechungsindex von Metallen

Sind die Elektronen in einem Material ungebunden, z.B. als Plasma in der Ionosphäre oder als Leitungselektronen in einem Metall, so können wir die Dispersion dadurch berechnen, indem wir $\omega_0 = 0$ setzen, da für die frei beweglichen Elektronen keine Rückstellkräfte vorhanden sind. Wir erhalten dann aus (2.4.11)

$$\varepsilon = n^2 \simeq 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2 + i\kappa\omega} . \quad (2.4.17)$$

Für Frequenzen oberhalb der mittleren Stoßfrequenz der Elektronen kann ferner die Dämpfung vernachlässigt werden und man erhält

$$n \simeq \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} . \quad (2.4.18)$$

Wir sehen, dass $n^2 < 0$ für $\omega < \Omega$. Der Brechungsindex ist hier rein imaginär, die Welle wird evaneszent (siehe Abschnitt 2.6.4) und das Medium daher undurchsichtig. Bei der Plasmafrequenz Ω findet ein Übergang in einen durchsichtigen Zustand statt, man spricht deshalb von einer *Plasmakante*. Diese liegt für die meisten Metalle im ultravioletten Bereich. Im sichtbaren Bereich sind die Metalle also undurchsichtig und reflektieren die auf sie auftreffende Strahlung (der Reflexionskoeffizient von Metallen wird in Abschnitt 2.6.6 diskutiert).

2.4.3 Absorption von Licht

Wir betrachten nun kurz etwas genauer die Auswirkung eines komplexen Brechungsindex $n = n_{\text{R}} + n_{\text{I}}$ auf die Ausbreitung einer ebenen Welle $E(x,t) = E_0 \exp[i\omega t - ikx]$. Mit $k = n\omega/c$ erhalten wir

$$E(x,t) = E_0 \exp\left[\frac{n_{\text{I}}\omega}{c}x\right] \exp\left[i\omega t - i\frac{n_{\text{R}}\omega}{c}x\right] . \quad (2.4.19)$$

Das elektrische Feld besitzt demnach einen schnell oszillierenden Anteil, dessen Amplitude aber aufgrund des Imaginärteils des Brechungsindex (im Allgemeinen ist $n_{\text{I}} < 0$) exponentiell abklingt.

Für die Intensität berechnet man

$$I(x) = I_0 \exp\left[\frac{2n_1\omega}{c}x\right] = I_0 \exp[-ax] . \quad (2.4.20)$$

Hierbei ist a der *Extinktionskoeffizient*, der leicht aus (2.4.13) abgeleitet werden kann. Häufig wird auch der Begriff *Transmission* $T = I(z)/I(0) = \exp[-ax]$ benutzt. In der Lichtübertragung wird meist der Begriff der Dämpfung $\beta = 20 \log[I(x)/I_0]/x$ in Einheiten von dB/m verwendet.

Wir wollen kurz eine Abschätzung der Eindringtiefe von sichtbarem Licht in Metallen geben. Da die Plasmakante im ultravioletten Spektralbereich liegt ($\omega < \Omega$) erhalten wir $n_1 = -\sqrt{(\Omega/\omega)^2 - 1}$. Für Silber ist $N = 6 \times 10^{22}/\text{cm}^3$ und wir erhalten für $\lambda = 500 \text{ nm}$ oder $\omega = 3.76 \times 10^{15}/\text{s}$ den Wert $n_1 = -3.53$. Damit ergibt sich eine Eindringtiefe von $1/a = -\lambda/4\pi n_1 = 11.3 \text{ nm}$. Sichtbares Licht wird also innerhalb von nur wenigen Nanometern in Metallen absorbiert. Wir werden später sehen, dass Metalle im sichtbaren Spektralbereich ein sehr hohes Reflexionsvermögen besitzen, d.h. der größte Anteil des auftreffenden Lichts wird reflektiert, wodurch Metalle ihren Glanz erhalten (siehe Abschnitt 2.6.6).

2.4.4 Dispersion von dichten Medien

Unsere bisherige Betrachtung war nur für dünne Medien anwendbar. Für dichte Medien muss man ein weiteres Problem lösen. Jedes Atom tritt mit seinem lokalen elektrischen Feld in Wechselwirkung, aber im Gegensatz zu dünnen Medien muss jetzt außerdem das von seinen Nachbarn induzierte Feld berücksichtigt werden. Ein Atom merkt daher außer dem angelegten Feld ein Zusatzfeld $P(t)/3\epsilon_0$.⁵ Diese Auswirkung kann man über die *Clausius-Mosotti-Beziehung* berücksichtigen, die wir hier nicht ableiten wollen, und man erhält

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{q^2 N}{3\epsilon_0 m_e} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 + i\kappa_j \omega} . \quad (2.4.21)$$

Es sei hier auch noch darauf hingewiesen, dass wir bis jetzt nur Elektronen als Oszillatoren betrachtet haben. Wie wir weiter oben bereits erwähnt haben, kann es aber auch zu Ionenpolarisation kommen. Die mit diesem Prozess verbundenen Resonanzfrequenzen sind allerdings aufgrund der größeren Masse der beteiligten Ionen wesentlich niedriger. Außerdem muss in den Faktor $Nq^2/3\epsilon_0 m_e$ die Elektronen- durch die wesentlich größere Ionenmasse ersetzt werden. Der Beitrag der Ionenpolarisation ist deshalb wesentlich kleiner und muss nur in unmittelbarer Umgebung der Resonanzfrequenz berücksichtigt werden.

2.4.5 Die Farbe von Gegenständen

Wir wollen in diesem Abschnitt kurz diskutieren, wie die dielektrischen Eigenschaften von Materialien ihre Farbe beeinflussen. Dabei benutzen wir die Tatsache, dass die Farbe eines Materials durch die Zusammensetzung des Lichts bestimmt wird, das von dem Material reflektiert wird und somit zum Auge des Beobachters gelangt. Wir wollen im Folgenden keine subjektiven Aspekte der Farbwahrnehmung berücksichtigen.

⁵Dies gilt nur für isotrope Medien.

Für Körper, die Licht aussenden, ist die Farbe durch die spektrale Zusammensetzung des ausgesandten Lichts bestimmt. Für nicht selbstleuchtende Körper wird die wahrgenommene Farbe durch die Zusammensetzung des zur Beleuchtung verwendeten Lichts und die dielektrischen Eigenschaften des Körpers bestimmt. Beide beeinflussen nämlich die Zusammensetzung der vom Körper reflektierten oder gestreuten Lichts. Wir werden uns im Folgenden auf die Verwendung von weißem Licht zur Beleuchtung beschränken, das spektrale Anteile im gesamten sichtbaren Spektralbereich besitzt⁶

Metalle

Metalle zeichnen sich durch ihre hohe elektrische Leitfähigkeit aus, die sich in einer spektral breitbandigen, hohen Reflektivität äußern (siehe Abb. 2.26). Metalle zeigen deshalb durch die Reflexion des auf sie auftreffenden Lichts den für sie charakteristischen "metallischen Glanz". Ist das Reflexionsvermögen im Sichtbaren allerdings wellenlängenabhängig, so ergibt sich eine charakteristische Färbung. Typische Beispiele dafür sind Cu und Au, die eine rötliche und gelbliche Färbung durch die Abnahme des Reflexionsvermögens im gelb-grünen Spektralbereich zeigen (siehe Abb. 2.26). Es sei darauf hingewiesen, dass es auch metallische Festkörper gibt (z.B. Hochtemperatur-Supraleiter), deren Plasmafrequenz aufgrund der geringen Ladungsträgerdichte N unterhalb des sichtbaren Bereichs liegt. Die Reflektivität dieser Materialien ist deshalb gering und sie erscheinen schwarz.

Isolatoren

Isolatoren, die im sichtbaren Bereich keine Absorption zeigen, sind, soweit keine Streuung durch Inhomogenitäten auftritt, transparent. Typische Beispiele hierfür sind Quarz, Magnesiumoxid, Diamant, etc.. Wenn die Oberfläche dieser Materialien durch Rauigkeiten gestört ist (dies gilt auch für Pulver), so erscheinen sie aufgrund ihres wellenlängenunabhängigen Reflexionsvermögens weiß. Typische Beispiele hierfür sind Puderzucker oder feinkörniges Kochsalz. Suspendiert man diese Pulver in Flüssigkeiten, deren Brechungsindex nahe dem des jeweiligen Pulver liegt, so geht die Streuung und damit die Brillanz der weißen Farbe zurück.

Isolatoren mit schwacher Absorption

Besitzen Isolatoren in sichtbaren Spektralbereich eine schwache Absorption, so beobachtet man sowohl im transmittierten als auch im reflektierten Licht diejenige Farbe, die durch die spektrale Verteilung des transmittierten Lichts bestimmt wird. Es führt dabei z.B. Absorption im gelb/roten Spektralbereich zu blauer Farbe und umgekehrt Absorption im blauen und roten Bereich zu gelb/grünlicher Färbung des Stoffes. Ein typisches Beispiel dafür ist verdünnte Tinte.

Isolatoren mit starker Absorption

Bei Isolatoren mit sehr starker Absorption ist die Farbe wiederum durch die Banden optimaler Transparenz bestimmt. In Reflexion wird jedoch die Erhöhung des Reflexionsvermögens bei den Wellenlängen mit hoher Absorption wichtig. So sieht z.B. eine Schicht eingetrockneter Tinte in Transmission blau, in Reflexion dagegen erscheint sie in gelb/roter Färbung und glänzt metallisch.

⁶Gute Beispiele hierfür sind Sonnenlicht oder das Licht einer Glühbirne.

2.5 Streuung von elektromagnetischen Wellen

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir die Dispersion und Absorption von elektromagnetischen Wellen durch Wechselwirkung der einfallenden Welle mit atomaren Oszillatoren, die zu erzwungenen Schwingungen parallel zum elektrischen Feldvektor der Welle angeregt werden. Wir nehmen hier an, dass die Welle linear in x -Richtung polarisiert ist und in z -Richtung läuft. Jeder Dipol strahlt dabei die mittlere Leistung⁷

$$\langle P_S \rangle = \frac{e^2 x_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2 \vartheta \quad (2.5.1)$$

in den Raumwinkel $d\Omega = 1$ Sterad um die Richtung ϑ gegen die Dipolachse ab (siehe hierzu Abb. 2.13). Da die schwingenden Dipole in x -Richtung ausgerichtet sind, erfolgt die Abstrahlung auch in Richtungen, die um den Winkel $\alpha = 90^\circ - \vartheta$ von der Richtung des einfallenden Strahls abweichen. Dieses Phänomen nennt man *Lichtstreuung*.

Wir wollen nun die Frage diskutieren, wann Lichtstreuung auftritt und von welchen Parametern sie abhängt. Insbesondere wollen wir die Frage diskutieren, warum Licht sich durch ein homogenes isotropes Medium geradlinig ausbreitet, obwohl die einzelnen Dipolstrahler ihre Strahlung in alle Richtungen aussenden.

2.5.1 Kohärente Streuung

Wir betrachten zuerst ein Medium, in dem die einzelnen Atome regelmäßig angeordnet sind und einen zeitlich konstanten Abstand besitzen. Als einfachstes Beispiel können wir eine lineare Kette von N Atomen betrachten, die in x -Richtung mit regelmäßigem Abstand d angeordnet sind (siehe Abb. 2.13). Das in x -Richtung schwingende elektrische Feld eines in z -Richtung einfallenden Lichtstrahl regt die Atome zu Schwingungen in x -Richtung an. Wichtig ist, dass die Schwingungen der einzelnen Atome (Dipolstrahler) alle eine feste Phasenbeziehung haben. Die in eine bestimmte Richtung α laufende Wellen der einzelnen Atome können sich deshalb konstruktiv oder destruktiv überlagern, wir sprechen von *Interferenz*, die wir ausführlich in Kapitel 5 diskutieren werden. Zur Berechnung der Gesamtintensität der gestreuten Welle muss man erst über die Streuamplituden A_k aufsummieren und dann erst Quadrieren, um Interferenzeffekte zu berücksichtigen:

$$I = \left(\sum A_k \right)^2 . \quad (2.5.2)$$

Wie in Kapitel 5 gezeigt wird (vergleiche Gleichung 5.5.12), erhält man für die Streuintensität

$$I(\alpha) = I_0 \frac{\sin^2[N\pi (d/\lambda) \sin \alpha]}{\sin^2[\pi (d/\lambda) \sin \alpha]} . \quad (2.5.3)$$

Für $\lambda \gg d$ hat $I(\alpha)$ ein Maximum für $\alpha = 0$ und fällt dann für größere α auf Null ab.

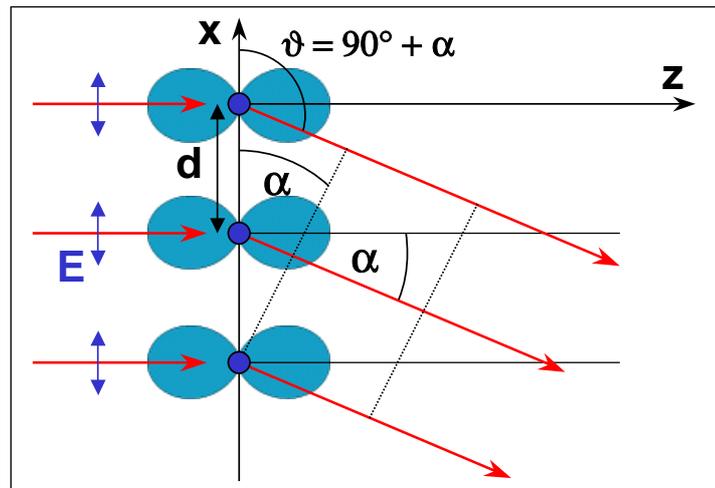


Abbildung 2.13: Streuung einer in z -Richtung einfallenden elektromagnetischen Welle mit \mathbf{E} -Vektor in x -Richtung an einer eindimensionalen atomaren Kette mit Atomen im Abstand d . Die hellblau hinterlegte Fläche gibt die Abstrahlcharakteristik der in x -Richtung schwingenden atomaren Dipole an.

Betrachten wir nur das Verhalten von $I(\alpha)$ für kleine Winkel, so dass wir $\sin \alpha \simeq \alpha$ benutzen können, so ist auch $\pi(d/\lambda) \sin \alpha \ll 1$ und damit $I(\alpha) \simeq N^2 I_0 \frac{\sin^2 x}{x^2}$ mit $x = n\pi(d/\lambda) \sin \alpha$. Berechnet man die Intensität unter dem zentralen Maximum der $\sin^2 x/x^2$ Funktion im Intervall $-\pi \leq x \leq \pi$, so stellt man fest, dass 90% der gesamten Intensität unter diesem Maximum zu finden ist.

Wir wollen nun noch die Winkelbreite des zentralen Maximums abschätzen. Für eine streuende Kette mit $Nd \gg \lambda$ erhalten wir

$$\sin \alpha = \frac{x}{N\pi(d/\lambda)} = \frac{1}{Nd\lambda} \ll 1. \quad (2.5.4)$$

Das heißt, die gesamte Streuintensität geht in einen sehr kleinen Winkelbereich. Für $Nd = 5 \text{ cm}$ und $\lambda = 500 \text{ nm}$ erhält man z.B. einen Winkelbereich von $\alpha \simeq 10^{-5}$. Wir werden später in Kapitel 5 noch sehen, dass die geringen Abweichungen von $\alpha = 0$ nur durch die endliche Länge Nd der in unserem Fall angenommenen eindimensionalen atomaren Kette verursacht werden.

2.5.2 Inkohärente Streuung

Die Situation ändert sich vollkommen, wenn wir eine unregelmäßige Anordnung oder einen zeitlich fluktuierenden Abstand der Atome annehmen. In diesem Fall besteht zwischen den von den einzelnen Streuern auslaufenden Wellen keine feste Phasenbeziehung. Wenn wir die in eine bestimmte Richtung α emittierte Intensität berechnen wollen, so müssen wir keine Interferenzeffekte berücksichtigen, sondern nur die mittleren Intensitäten der von den einzelnen Streuern in diese Richtung emittierten Strahlung aufsummieren:

$$I = \sum |A_k|^2 = \sum I_k. \quad (2.5.5)$$

⁷Die Strahlung eines schwingenden elektrischen Dipols wird ausführlich im Rahmen von Physik II diskutiert.

Die Winkelverteilung der Intensität hängt von den Details des Streuprozesses ab und ist z.B. für die atomaren Dipolstrahler in Abb. 2.13 durch (2.5.1) gegeben. Wir erhalten also auch für größere Winkel eine beträchtliche Streuintensität.

Es ist eine wohlbekanntة Erfahrungstatsache, dass Licht, das auf ein inhomogenes Medium (z.B. eine Substanz, in der kleine Teilchen in einem Trägermaterial mit unterschiedlicher Dielektrizitätskonstante gelöst sind) intensiv gestreut wird. Beispiele dafür aus dem Alltagsleben sind Milch (Fetttröpfchen in Wasser) oder Nebel und Wolken (Wassertröpfchen in Luft). Auch bestimmte Farbphänomene wie das Himmelblau oder das Abendrot werden durch Streuung hervorgerufen. Oft werden die Streuphänomene an kleinen Teilchen unter dem Begriff *Tyndall-Streuung* zusammengefasst. Da die wesentlichen Aspekte der inkohärenten Lichtstreuung im Rahmen der klassischen Elektrodynamik diskutiert werden, soll hier nur kurz und qualitativ die inkohärente Streuung von Licht behandelt werden.

Mie-Streuung

Fällt Licht auf große dielektrische Teilchen mit einem Durchmesser $d \gg \lambda$, so kann man bei bekannter Form der Teilchen Aussagen über die Streuung oder präziser ausgedrückt über die Ablenkung des Lichts durch Brechung und Reflexion machen. Kommt die Größe der Teilchen allerdings in die Größenordnung der Wellenlänge ($d \sim \lambda$), so müssen explizit die Maxwell-Gleichungen unter den vorliegenden Randbedingungen gelöst werden. Für kugelförmige Teilchen mit $d \sim \lambda$ sind die Streuphänomene unter dem Begriff *Mie-Streuung* zusammengefasst. Es treten in diesem Bereich Änderungen der Streueigenschaften mit der Wellenlänge auf. Während für $d > \lambda$ die Streuung im Wesentlichen vorwärts gerichtet ist, gewinnen mit abnehmender Wellenlänge zunehmend rückgestreute Komponenten an Bedeutung. Deshalb ermöglicht eine genaue Beobachtung der Wellenlängenabhängigkeit der Richtungsverteilung des gestreuten Lichts, Informationen über die Teilchengröße zu gewinnen.

Rayleigh-Streuung

Die *Rayleigh-Streuung* behandelt den Fall sehr kleiner Teilchen mit Durchmesser $d \ll \lambda$. Wir können die kleinen Teilchen (z.B. Atome oder Moleküle) als kleine Oszillatoren betrachten, deren Elektronenwolke durch ein ankommendes Photon in Schwingungen versetzt wird. Unmittelbar nach Einsetzen der Schwingung strahlt das Teilchen wieder Licht ab. Es wird dabei ein Photon absorbiert und sofort ein anderes der gleichen Frequenz wieder emittiert. Das heißt, das Licht wird elastisch an dem Teilchen gestreut. Die Moleküle sind in zufälliger Raumrichtung orientiert und senden daher Photonen isotrop in alle Raumrichtungen aus. Ferner soll die Streuung an den einzelnen Teilchen inkohärent erfolgen. Diese Annahme ist nur für sehr dünne Medien gültig, ist aber für dichte Medien nicht haltbar (siehe unten).

Unsere Modellvorstellungen können für die Streuung von Licht an einzelnen Atomen oder Molekülen, aber auch für die Streuung an sehr feinen, staubförmigen Medien oder Dichtefluktuationen verwendet werden.⁸ Da $d \ll \lambda$, nimmt das Teilchen das Feld einer Welle im Wesentlichen als gleichförmig wahr. Das momentane Dipolmoment kann dann als $p(t) = \alpha \epsilon_0 E(t)$ beschrieben werden. Ist $E(t) = E_0 \exp(i\omega t)$, so verhält sich $p(t)$ wie ein schwingender Dipol. Wie im Rahmen der Elektrodynamik ausführlich behandelt wird, lässt sich für diesen Fall der Streukoeffizient der Rayleigh-Streuung einfach

⁸Es sei hier darauf hingewiesen, dass in Luft bei Atmosphärendruck der Abstand der Luftmoleküle zwei Größenordnungen kleiner ist als die Wellenlänge des sichtbaren Lichts. Deshalb erwartet man, dass die Rayleigh-Streuung hier nicht zum Tragen kommt, da die Streuprozesse an den einzelnen Molekülen sicherlich kohärent sind. Hätte Luft eine gleichmäßige Dichte, so würde Licht durch Luft tatsächlich nicht gestreut werden. Es sind nur Abweichungen von der einheitlichen Dichte, die in Luft überhaupt einen Nettostreueffekt bewirken. Die theoretische Behandlung ist analog zur inkohärenten Streuung an einzelnen Molekülen.

berechnen.⁹ Wird die Dielektrizitätskonstante durch gebundene Elektronen mit der Resonanzfrequenz ω_0 verursacht, so erhält man für den Streuquerschnitt

$$\sigma_S = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad (2.5.6)$$

Wir diskutieren kurz die 3 Fälle $\omega \ll \omega_0$, $\omega \sim \omega_0$ und $\omega \gg \omega_0$.

- $\omega \ll \omega_0$:

Weit unterhalb der Resonanz nimmt die Streuung mit ω^4 zu. Da die Resonanzfrequenzen ω_0 für Stickstoff und Sauerstoff, sowie für viele Moleküle im ultravioletten Spektralbereich liegen, wird blaues Licht ($\lambda = 420$ nm) etwa 10 mal so stark gestreut wie rotes Licht ($\lambda = 720$ nm). Vom weißen Sonnenlicht, das die Atmosphäre durchstrahlt, wird also der blaue Anteil wesentlich stärker gestreut. Dadurch erscheint (siehe Abb. 2.14a) uns der Himmel blau, d.h. Rayleigh-Streuung ist verantwortlich für das Blau des Himmels. Muss das Sonnenlicht allerdings, wie z.B. in der Dämmerung, eine dicke Atmosphärenschicht durchqueren, so gelangen aufgrund der starken Streuung der blauen Anteile nur noch die langwelligen Anteile zum Beobachter und verursachen das Rot der unter- bzw. aufgehenden Sonne. Das Weiß der Wolken kommt wiederum dadurch zustande, dass hier Wassertröpfchen mit großem Durchmesser ($d \sim \lambda$) vorkommen, für die eine andere Frequenzabhängigkeit gilt als für die Rayleigh-Streuung.

Es soll hier auch darauf hingewiesen werden, dass das durch die Atome und Moleküle unserer Atmosphäre gestreute Licht teilweise polarisiert ist. Der Polarisationsgrad hängt vom Winkel $\alpha = 90^\circ - \vartheta$ der Blickrichtung relativ zur Richtung der Sonnenstrahlung ab (siehe Abb. 2.14b). Nimmt man $\alpha = 90^\circ$ an, so ist die abgestrahlte Leistung von Dipolen, die in der Zeichenebene schwingen gleich Null, während diejenige der Dipole, die senkrecht zur Zeichenebene schwingen maximal ist. Man erhält dann den Polarisationsgrad

$$P(\alpha) = \frac{I_{\parallel} - I_{\perp}}{I_{\parallel} + I_{\perp}} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} = 0.5 \quad (2.5.7)$$

Betrachtet man den Himmel durch einen Polarisationsfilter, so kann man das polarisierte Streulicht herausfiltern, was zu besseren Kontrasten in der Photographie führt.

- $\omega \sim \omega_0$:

Resonanzstreuung tritt auf, wenn die Frequenz ω des einfallenden Lichts mit der Eigenfrequenz ω_0 des Schwingungssystems übereinstimmt. Für diesen Fall erhält man sehr große Streuquerschnitte.

- $\omega > \omega_0$:

Bei Lichtfrequenzen $\omega > \omega_0$ erreicht man den Bereich der *Thomson-Streuung*.¹⁰ Für diesen Bereich kann man den Streuquerschnitt formal aus (2.5.6) berechnen, indem man $\omega_0 = 0$ setzt. Der Streuquerschnitt wird dann unabhängig von der Lichtwellenlänge. Man erhält

⁹Der Streukoeffizient σ_S ist durch den Quotienten $\sigma_S = (\langle P_S \rangle / N) / I_e$ aus der gestreuten Lichtleistung $\langle P_S \rangle / N$ eines Atoms und der einfallenden Lichtintensität $I_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$ gegeben. Man kann nun für $\langle P_S \rangle$ Gleichung (2.5.1) und für die dort enthaltene Auslenkung x_0 Gleichung (2.4.5) verwenden, woraus im Fall verschwindender Dämpfung (2.5.6) folgt.

¹⁰Dieser Bereich trifft auch für den Fall freier Elektronen in Metallen zu, wo die Resonanzfrequenz aufgrund fehlender Rückstellkräfte gegen Null geht.

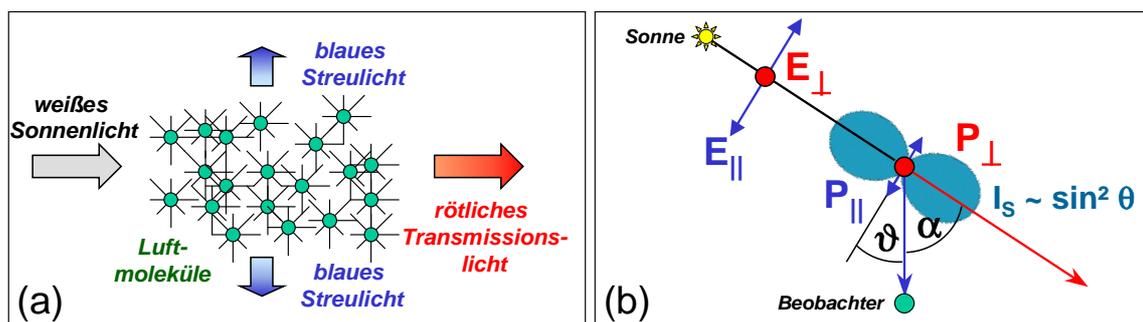


Abbildung 2.14: (a) Zur Entstehung des Himmelsblau: Sonnenlicht fällt durch ein Gebiet, in dem wenige Gasmoleküle verteilt sind (z.B. obere Atmosphäre). Seitlich wird vor allem blaues Licht gestreut, wodurch uns der Himmel blau erscheint. Das ungestreute Licht, das einen hohen Rotanteil enthält, sieht man nur beim Sonnenuntergang. (b) Zur Erklärung der Polarisation des Himmelslichts.

$$\sigma_S = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2. \quad (2.5.8)$$

Es sei hier darauf hingewiesen, dass eine dichte, homogene Substanz nicht merklich zur Seite streut. Dies trifft auf einen Großteil der unteren Atmosphäre zu. Würde z.B. blaues Licht auf Meereshöhe stark zur Seite gestreut, so erschiene ein weit entfernter Berg rötlich. Dies ist aber nicht der Fall, selbst wenn der Abstand einige Kilometer beträgt. Selbst in den mittleren Schichten der Atmosphäre ist die Dichte noch hinreichend groß, um die Rayleigh-Streuung zu unterdrücken. Zur blauen Farbe trägt aber noch ein anderer Prozess bei. Die Wärmebewegung der Luft in der mittleren Atmosphäre führt zu schnell veränderlichen, lokalen Dichteschwankungen. Es sind diese Dichteschwankungen, die in der mittleren Atmosphäre einen Nettostreueffekt bewirken. Um die Unterdrückung der seitlichen Streuung in dichten Medien zu verstehen, müssen wir uns zuerst mit dem Phänomen der Interferenz beschäftigen. Qualitativ kann man sagen, dass in dichten Medien sich die von nah beieinanderliegenden Molekülen erzeugten kohärenten Streuwellen durch destruktive Interferenz gegenseitig aufheben.

2.5.3 Inelastische Streuung

Bisher hatten wir immer elastische Streuung behandelt, bei der keine Frequenzänderung des Lichts auftritt. Es treten aber auch inelastische Streuprozesse auf, bei denen sich die Frequenz des Lichts ändert. So wird z.B. bei der *Raman-Streuung* Licht unter An- bzw. Abregung von Molekülschwingungen gestreut und dabei um $\pm\omega_{\text{ib}}$ frequenzverschoben. Bei der *Brillouin-Streuung* tritt dasselbe Phänomen bei der Wechselwirkung des einfallenden Lichts mit den akustischen Schwingungen eines Festkörpers auf. Diese Streuprozesse bilden die Grundlage von wichtigen Analysemethoden für die Elementaranregungen in Festkörpern.

Schließlich sei noch auf die inelastische Streuung von Licht an freien Elektronen, die so genannte *Compton-Streuung* hingewiesen. Diese wird später im Zusammenhang mit dem Welle-Teilchen-Dualismus von Licht noch näher behandelt.

2.6 Elektromagnetische Wellen an Grenzflächen – Lichtbrechung und -reflexion

Der Durchgang von Licht durch ein homogenes Medium ist eine ununterbrochene Folge von Streuvorgängen. Im Prinzip könnten wir die Reflexion und Brechung von Licht an Grenzflächen zwischen zwei Medien auch mit Hilfe einer Folge von einzelnen Streuprozessen beschreiben. Dies wollen wir hier nicht tun, sondern stattdessen den elektromagnetischen Ansatz verwenden. Die Theorie des Elektromagnetismus bietet nämlich einen leistungsfähigeren Ansatz, mit dem wir auch die Flussdichten des einfallenden, reflektierten und transmittierten Strahls diskutieren können.

Wir haben gesehen, dass die Wellengleichungen für elektromagnetische Wellen in unmagnetischen Medien ($\mu = 1$)

$$\Delta \mathbf{E} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.6.1)$$

$$\Delta \mathbf{B} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.6.2)$$

es erlauben, die Ausbreitung von Licht in homogenen Medien zu beschreiben. Die mathematische Behandlung der Wellenausbreitung wird komplizierter, wenn man inhomogene Medien betrachten will. Ein einfaches Beispiel für ein inhomogenes Medium ist die Grenzfläche zwischen zwei Materialien mit unterschiedlichen dielektrischen Eigenschaften (siehe Abb. 2.15). Bei inhomogenen Systemen müssen die elektromagnetischen Felder bei jedem Übergang von einem Medium in ein anderes speziellen Randbedingungen gehorchen.¹¹ Durch die Randbedingungen wird sichergestellt, dass die Maxwell-Gleichungen überall erfüllt sind.

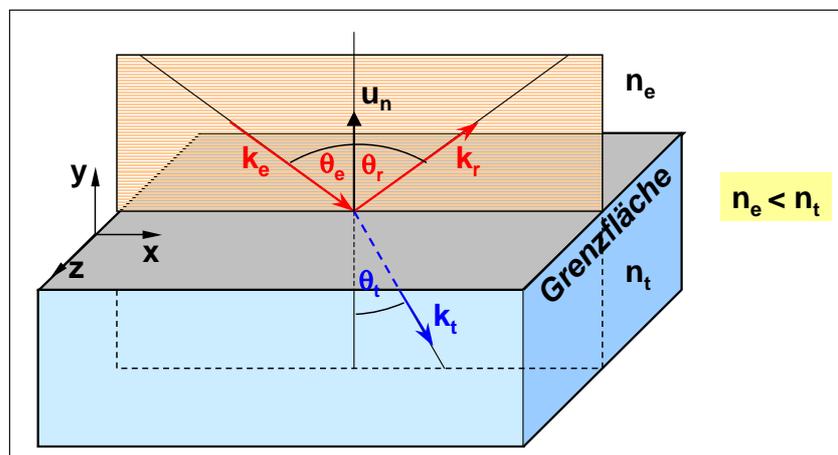


Abbildung 2.15: Durchgang von Licht durch eine ebene Grenzfläche, die zwei Medien mit Brechungsindizes n_e und n_t trennt. Das Licht soll aus dem Medium mit Brechungsindex n_e einfallen. \mathbf{u}_n ist der Einheitsvektor senkrecht auf der Grenzfläche, die Winkel θ_i sind die Winkel zwischen den Wellenvektoren \mathbf{k}_i und dem Normalenvektor.

Randwertprobleme existieren für alle Differentialgleichungssysteme, also auch für die Maxwell-Gleichungen. Aus der klassischen Mechanik ist z.B. bekannt, dass die Kenntnis des Orts und der Geschwindigkeit eines Massenpunkts zu einer bestimmten Zeit t notwendig und hinreichend ist, um die

¹¹Besonders schwierig wird die Beschreibung, wenn sich die dielektrischen Eigenschaften kontinuierlich ändern oder komplexe inhomogene Medien vorliegen, z.B. Pulver gelöst in Flüssigkeit.

Lösungen der Bewegungsgleichungen für diesen Massenpunkt eindeutig festzulegen. In der Elektrostatik geht es darum, die Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$ zu bestimmen, falls entweder Φ (Dirichlet Problem) oder $\partial\Phi/\partial\mathbf{n}$ (Neumann Problem) auf einer geschlossenen Kurve gegeben sind. Die Randbedingungen für elektromagnetische Wellen an einer Grenzfläche zwischen zwei Medien mit unterschiedlichen dielektrischen Eigenschaften können aus den Maxwell-Gleichungen abgeleitet werden (siehe hierzu Vorlesung Physik II). Für Grenzflächen von isotropen, isolierenden und nicht magnetischen ($\mu = 1$) Medien gilt:¹²

$$\text{Die Tangentialkomponenten von } \mathbf{E} \text{ und } \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0\mu} \mathbf{B} \text{ sind stetig} \quad (2.6.3)$$

$$\text{Die Normalkomponenten von } \mathbf{B} \text{ und } \mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E} \text{ sind stetig} \quad (2.6.4)$$

2.6.1 Reflexions- und Brechungsgesetz

In Folgendem soll nun der einfachste Fall zweier homogener Medien mit Brechungsindizes n_e und n_t behandelt werden, die durch eine ebene, glatte Grenzfläche voneinander getrennt werden (siehe Abb. 2.15). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit soll die Grenzfläche bei $y = 0$ charakterisiert werden, d.h. die Grenzfläche ist die x - z -Ebene. Auf diese Grenzfläche lassen wir eine monochromatische ebene Welle

$$\mathbf{E}_e = \mathbf{E}_{e0} e^{i(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r} - \omega_e t)} \quad (2.6.5)$$

aus dem Medium M_e mit Brechungsindex n_e fallen. Der Wellenvektor \mathbf{k}_e soll mit dem Normalenvektor \mathbf{u}_n den Einfallswinkel θ_e einschließen. Weiterhin nehmen wir an, dass eine reflektierte Welle

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{r0} e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t)} \quad (2.6.6)$$

im Medium M_e und eine transmittierte Welle

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{t0} e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t)} \quad (2.6.7)$$

im Medium M_t mit Brechungsindex n_t vorhanden ist. Wir gehen also von einer fest vorgegebenen einfallenden Welle aus und bestimmen die Eigenschaften der reflektierten und transmittierten Welle aus den obigen Randbedingungen.

Die Randbedingung für das elektrische Feld sagt aus, dass die tangentiale Komponente an der Grenzfläche stetig ist, d.h. sie muss auf beiden Seiten der Grenzfläche gleich sein. Da \mathbf{u}_n der Einheitsvektor längs der Grenzflächennormale ist, steht unabhängig von der Richtung des elektrischen Feldes innerhalb der Wellenfront das Kreuzprodukt $\mathbf{u}_n \times \mathbf{E}$ senkrecht auf \mathbf{u}_n und damit tangential zur Grenzfläche. Aus der Stetigkeit der Tangentialkomponente des elektrischen Feldes folgt daher

$$(\mathbf{u}_n \times (\mathbf{E}_e + \mathbf{E}_r)) = (\mathbf{u}_n \times \mathbf{E}_t) \quad (2.6.8)$$

¹²Die Randbedingung für die tangentiale Komponente des elektrischen Feldes folgt dabei unmittelbar aus dem Faraday'schen Gesetz $\oint_L \mathbf{E}(\omega) \cdot d\mathbf{l} = ik \int_S \mathbf{B}(\omega) \cdot d\mathbf{n}$.

Da dies für alle Orte an der Grenzfläche und alle Zeiten gelten muss, kann diese Bedingung nur dann erfüllt werden, wenn die drei Wellenfunktionen für einfallende, reflektierte und transmittierte Welle die gleiche funktionale Abhängigkeit an der Grenzfläche besitzen. Eine notwendige Bedingung hierfür ist, dass die Phasen an der Grenzfläche für alle Zeiten gleich sind. Das heißt, es muss gelten

$$(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r} - \omega_e t)|_{y=0} = (\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t)|_{y=0} = (\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t)|_{y=0} \quad (2.6.9)$$

für alle \mathbf{r} mit $y = 0$ und für alle t . Diese Bedingung lässt sich nur erfüllen, wenn

$$\omega_e = \omega_r = \omega_t \quad , \quad (2.6.10)$$

das heißt, die Frequenz des Lichts ändert sich beim Übergang von einem zum anderen Medium nicht. Ferner muss an der Grenzfläche

$$\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r}|_{y=0} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}|_{y=0} = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}|_{y=0} \quad (2.6.11)$$

gelten. Das Skalarprodukt $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = a$ definiert eine Ebene (nämlich alle \mathbf{r} , deren Projektion auf \mathbf{k} gleich a ist), auf der \mathbf{k} senkrecht steht. Die Bedingung $y = 0$ liefert die Schnittgerade dieser Ebene mit der Grenzfläche. Alle drei Vektoren \mathbf{k}_e , \mathbf{k}_r und \mathbf{k}_t müssen auf dieser Gerade senkrecht stehen. Daraus folgt sofort, dass alle drei Vektoren \mathbf{k}_e , \mathbf{k}_r und \mathbf{k}_t sowie die Grenzflächennormale in einer Ebene, der so genannten *Streuebene* liegen.

Aus (2.6.11) folgt, dass $(\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_r) \cdot \mathbf{r}|_{y=0} = 0$ gilt. Dies besagt, dass der Endpunkt von \mathbf{r} auf einer Fläche senkrecht auf $(\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_r)$ liegt, nämlich der Grenzfläche. Anders ausgedrückt ist damit $(\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_r)$ parallel zu \mathbf{u}_n und es gilt damit $(\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_r) \times \mathbf{u}_n|_{y=0} = 0$, d.h. $(\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_r)$ hat keine Komponente in der Ebene der Grenzfläche. Mit dem Einfallswinkel θ_e und dem Reflexionswinkel θ_r folgt dann insgesamt aus der Gleichheit der Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes

$$k_e \sin \theta_e = k_r \sin \theta_r \quad (2.6.12)$$

und wegen $k_e = k_r = \omega n_e / c$, dass der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel ist:

$$\boxed{\sin \theta_e = \sin \theta_r \quad \text{oder} \quad \theta_e = \theta_r \quad .} \quad (2.6.13)$$

Die erhaltenen Ergebnisse lassen sich im *Reflexionsgesetz* zusammenfassen:

Licht wird an einer Grenzfläche so reflektiert, dass der Wellenvektor des reflektierten Lichts in der Einfallsebene liegt. Ferner gilt, dass der Einfallswinkel θ_e gleich dem Ausfallwinkel θ_r ist.

Analog zu (2.6.12) erhalten wir aus (2.6.11)

$$k_e \sin \theta_e = k_t \sin \theta_t \quad (2.6.14)$$

und mit Hilfe von $k_e / k_t = n_e / n_t$ das *Snellius'sche Brechungsgesetz*

$$\frac{\sin \theta_e}{\sin \theta_t} = \frac{n_t}{n_e} \equiv n \quad (2.6.15)$$

Dabei ist n der relative Brechungsindex. Auch für das transmittierte Licht gilt, dass sein Wellenvektor in der Einfallsebene liegen muss. Ist der Brechungsindex n_t größer als n_e , das Medium M_t also optisch dichter als das Medium M_e , so wird der Wellenvektor zum Lot hin abgelenkt (gebrochen). Im umgekehrten Fall erfolgt die Brechung weg vom Lot. Die beiden Fälle sind in Abb. 2.16 dargestellt. Man erkennt, dass die Projektion der Wellenvektoren auf die Grenzfläche ($k \sin \theta_i$) gleich sind und wie die Brechung die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts ändert.

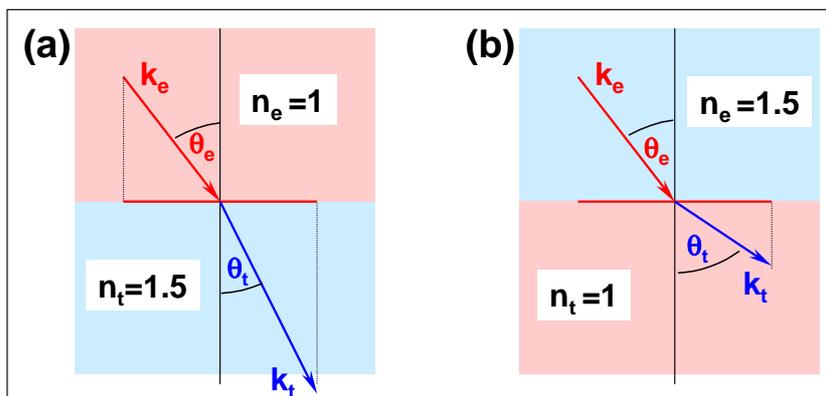


Abbildung 2.16: Änderung der Lichtausbreitung durch Brechung: (a) Einfall vom optisch dünneren her, Brechung zum Lot, (b) Einfall vom optisch dichteren Medium her, Brechung vom Lot.

Es sei an dieser Stelle noch darauf hingewiesen, dass wir in diesem Abschnitt die Änderung der Wellenvektoren bei der Brechung und Reflexion bestimmt haben. In der geometrischen Optik (siehe Kapitel 4), wo wir das Reflexions- und Brechungsgesetz hauptsächlich einsetzen werden, verwendet man jedoch häufig den Begriff Lichtstrahl, der die Richtung des Energieflusses des Lichtes beschreibt. In der Sprechweise der elektromagnetischen Theorie des Lichts ist also der Lichtstrahl mit der Richtung des *Poynting Vektors* \mathbf{S} zu identifizieren. Da für optisch isotrope Medien, und für solche wurde die obige Ableitung gemacht, der Poynting Vektor \mathbf{S} und der Wellenvektor \mathbf{k} die gleiche Richtung besitzen, können wir im Reflexions- und Brechungsgesetz Strahlrichtung und Wellenvektor gleichsetzen. Damit erhalten wir die Formulierung der geometrischen Optik.

2.6.2 Die Fresnel'schen Formeln

Bisher haben wir nur Beziehungen für die Richtung der reflektierten und transmittierten Welle angegeben. Diese wurden allein aus der Stetigkeit der Tangentialkomponente des elektrischen Feldes abgeleitet. Wir haben aber bisher noch keine Aussage über die Intensitätsverhältnisse des reflektierten und transmittierten Lichtes gemacht. Hierzu müssen wir auch den Amplitudenanteil und die entsprechende Beziehung für das magnetische Feld berücksichtigen.

Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall des *senkrechten* Einfalls einer ebenen Welle. In diesem Fall lauten die Randbedingungen für das elektrische und magnetische Feld

$$E_{e0} + E_{r0} = E_{t0} \quad (2.6.16)$$

$$B_{e0} + B_{r0} = B_{t0} \quad (2.6.17)$$

Aus der Maxwell-Gleichung $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ folgt $\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{E})$. Mit dieser Beziehung kann man in (2.6.17) \mathbf{B} durch \mathbf{E} ersetzen. Unter Verwendung von $\mathbf{k}_r = -\mathbf{k}_e$ und $k_i = n_i \omega / c$ erhält man dann

$$n_e E_{e0} - n_e E_{r0} = n_t E_{t0} . \quad (2.6.18)$$

Nach Eliminieren von E_{t0} ergibt sich für die reflektierte Feldstärke

$$\begin{aligned} E_{r0} &= \frac{n_e - n_t}{n_e + n_t} E_{e0} = r E_{e0} \\ \text{und } E_{t0} &= t E_{e0} . \end{aligned} \quad (2.6.19)$$

Gleichung (2.6.19) definiert den *Reflexionskoeffizienten* r und den *Transmissionskoeffizienten* t für das elektrische Feld. Fällt das Licht aus dem optisch dichteren Medium auf die Grenzfläche, so ist $r > 0$. \mathbf{E}_r und \mathbf{E}_e zeigen in die gleiche Richtung, das heißt, beide Wellen sind an der Grenzfläche in Phase. Trifft das Licht dagegen aus dem optisch dünneren Medium auf die Grenzfläche, so ist $r < 0$. Die elektrischen Felder sind antiparallel. Die einfallende und die reflektierte Welle schwingen gegenphasig, es tritt eine Phasenschiebung von π auf. Ist man nur an der reflektierten Intensität interessiert, so ist der Phasenfaktor irrelevant. Für den *Reflexionsgrad* R ergibt sich bei senkrechtem Einfall

$$R = \left(\frac{n_e - n_t}{n_e + n_t} \right)^2 = \left(\frac{1 - n}{1 + n} \right)^2 . \quad (2.6.20)$$

Bei der Behandlung der reflektierten Intensität ist es unwichtig, von welcher Seite das Licht auf die Grenzfläche trifft. Der Reflexionsgrad hängt nur von der Änderung des Brechungsindex, also vom relativen Brechungsindex n ab. Beim Durchgang durch eine Luft/Glas-Grenzfläche (z.B. Fensterscheibe) mit $n_{\text{Glas}} = 1.5$ werden 4% der einfallenden Lichtintensität reflektiert.¹³ Mit wachsendem Brechungsindex des Glases nimmt die Reflexion zu. Zum Beispiel werden an einer Diamantoberfläche ($n_{\text{Diamant}} = 2.41$) bereits 17% des Lichtes reflektiert.

Falls die betrachteten Medien eine nicht zu vernachlässigende Absorption haben, wird der Reflexionskoeffizient r komplex. Der Reflexionsgrad R ist in diesem Fall durch das Quadrat des Betrages von r gegeben: $R = |r|^2 = r r^*$.

Wir diskutieren nun den Fall, dass das Licht nicht senkrecht auf die Grenzfläche trifft. Hierzu unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Fall 1: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} = -\mathbf{u}_n \times (\mathbf{u}_n \times \mathbf{E})$

Das elektrische Feld steht parallel zur Grenzfläche und senkrecht zu der von den Wellenvektoren aufgespannten Streuebene. Die entsprechenden Reflexions- und Transmissionskoeffizienten werden deshalb mit r_{\perp} und t_{\perp} bezeichnet. Dieser Fall wird als *transversal elektrische (TE) Polarisation* bezeichnet.

¹³Wir werden weiter unten sehen, dass der Reflexionskoeffizient für zunehmende Einfallswinkel stark ansteigt.

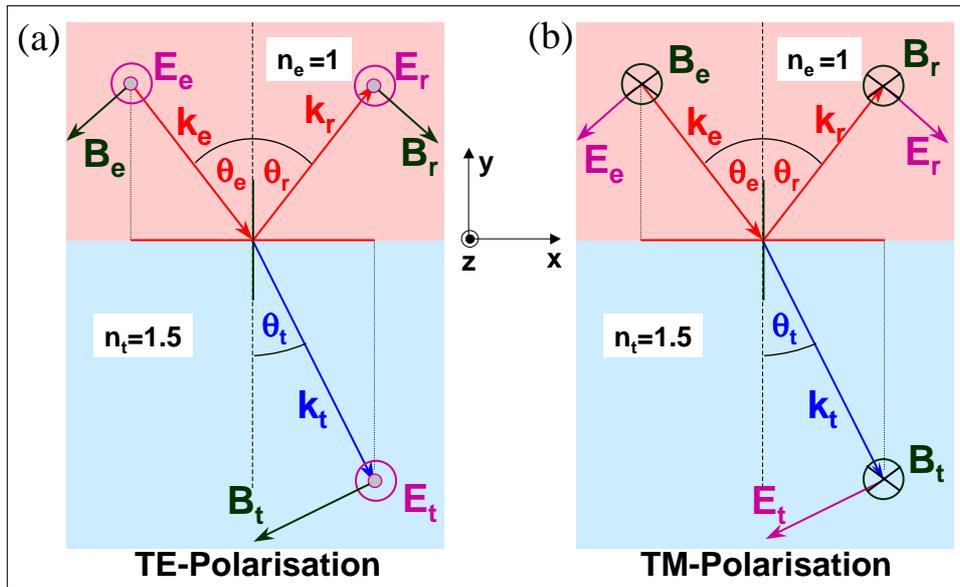


Abbildung 2.17: Zur Herleitung der Fresnel'schen Gleichungen. Gezeigt ist der Fall der TE-Polarisation (a), d.h. das elektrische Feld steht senkrecht auf der Streuebene, und der Fall der TM-Polarisation (b), d.h. das magnetische Feld steht senkrecht auf der Streuebene.

2. Fall 2: $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\parallel} = -\mathbf{u}_n \times (\mathbf{u}_n \times \mathbf{B})$

Das magnetische Feld steht parallel zur Grenzfläche und senkrecht zu der von den Wellenvektoren aufgespannten Ebene. Dieser Fall wird als *transversal magnetische (TM) Polarisation* bezeichnet. Da das elektrische Feld parallel zu der von den Wellenvektoren aufgespannten Ebene liegt, werden die entsprechenden Reflexions- und Transmissionskoeffizienten werden mit η_{\parallel} und t_{\parallel} bezeichnet.

Die beiden Spezialfälle erlauben es, das Brechungsproblem ganz allgemein zu behandeln. Darauf wird nochmals im Kapitel 3 bei der Diskussion der Polarisation eingegangen.

Wir beschäftigen uns jetzt ausführlicher mit Fall 1. Die schon benutzte Stetigkeit der Tangentialkomponente von \mathbf{E} an der Grenzfläche ergibt (für die z -Komponente parallel zur Grenzfläche)

$$E_e + E_r = E_t \tag{2.6.21}$$

Die analoge Stetigkeit der Tangentialkomponente von \mathbf{H} führt auf den Ausdruck (Stetigkeit der x -Komponente, siehe hierzu Abb. 2.17)

$$-H_e \cos \theta_e + H_r \cos \theta_r = -H_t \cos \theta_t \tag{2.6.22}$$

Aufgrund des Faraday'schen Satzes gilt

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu_0 \mathbf{H} \tag{2.6.23}$$

und damit

$$k E = \omega \mu_0 H . \quad (2.6.24)$$

Somit ergibt sich aus (2.6.22)

$$-k_e E_e \cos \theta_e + k_r E_r \cos \theta_r = -k_t E_t \cos \theta_t . \quad (2.6.25)$$

Damit lässt sich eine der drei Amplituden in (2.6.21) eliminieren.

Eliminiert man E_t und benutzt $n_i \omega = ck$ und $n = n_t/n_e$, so erhält man den *Amplituden-Reflexionskoeffizienten* der Feldkomponente senkrecht zur Einfallsebene

$$r_{\perp} = \left. \frac{E_r}{E_e} \right|_{\mathbf{TE}} = \frac{\cos \theta_e - n \cos \theta_t}{\cos \theta_e + n \cos \theta_t} . \quad (2.6.26)$$

Unter Benutzung des Snellius'schen Brechungsgesetz $\frac{\sin \theta_e}{\sin \theta_t} = n$ lässt sich aus dieser Gleichung der Brechungsindex eliminieren und man erhält

$$\boxed{r_{\perp} = \left. \frac{E_r}{E_e} \right|_{\mathbf{TE}} = -\frac{\sin(\theta_e - \theta_t)}{\sin(\theta_e + \theta_t)} . \quad (2.6.27)}$$

Für die TM-Polarisation, d.h. \mathbf{B} parallel zur Grenzfläche, ist die Ableitung völlig analog. Wir erhalten

$$r_{\parallel} = \left. \frac{E_r}{E_e} \right|_{\mathbf{TM}} = -\frac{n \cos \theta_e - \cos \theta_t}{n \cos \theta_e + \cos \theta_t} . \quad (2.6.28)$$

Unter Benutzung des Snellius'schen Brechungsgesetz lässt sich aus dieser Gleichung wiederum der Brechungsindex eliminieren und man erhält

$$\boxed{r_{\parallel} = \left. \frac{E_r}{E_e} \right|_{\mathbf{TM}} = -\frac{\tan(\theta_e - \theta_t)}{\tan(\theta_e + \theta_t)} . \quad (2.6.29)}$$

Die Abhängigkeit des Reflexionskoeffizienten von Einfallswinkel für die TE- und TM-Polarisation ist in Abb. 2.18 für die beiden Fälle des Einfalls vom optisch dünneren und optisch dichteren Medium gezeigt. Man erkennt, dass der Reflexionskoeffizient mit zunehmendem Einfallswinkel zunimmt und für große Winkel gegen 1 geht. Beim Einfall vom optisch dünneren Medium geht der Reflexionskoeffizient bereits für einen kritischen Winkel kleiner als 90° gegen 1.

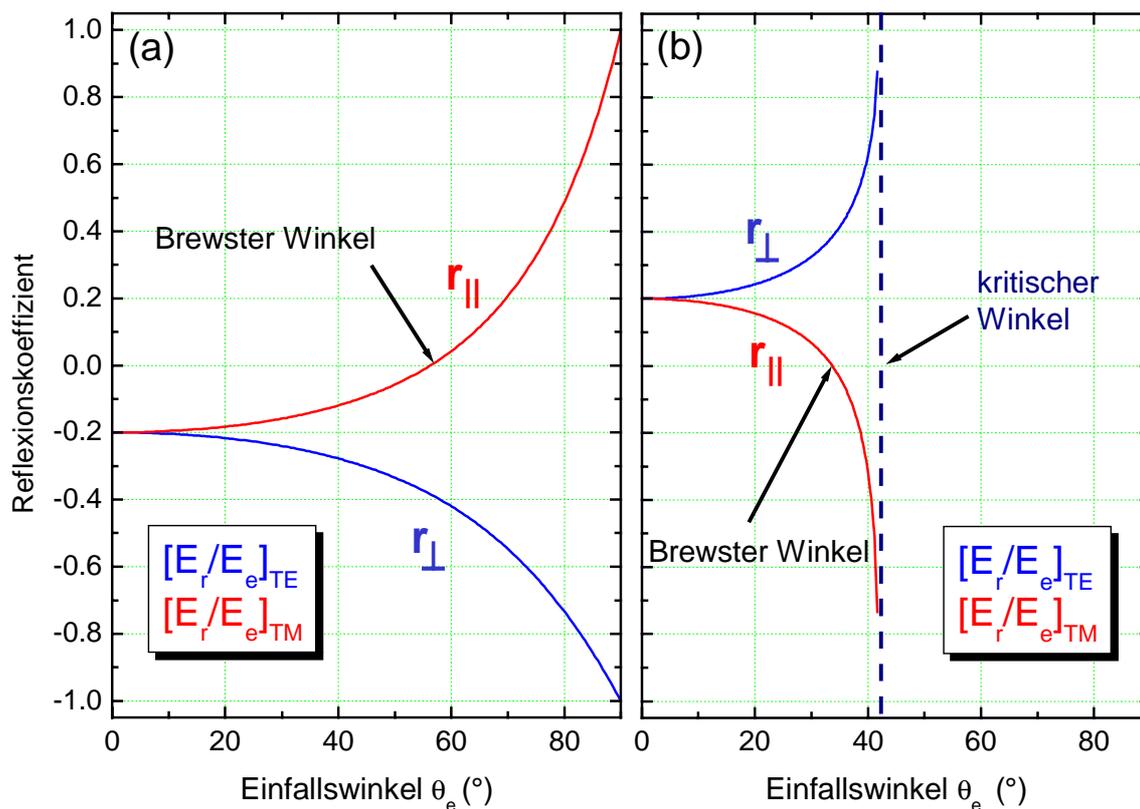


Abbildung 2.18: Amplitudenreflexionskoeffizient für eine Luft/Glas-Grenzfläche ($n_{\text{Glas}} = 1.5$) als Funktion des Einfallswinkels bei Einfall vom (a) optisch dünneren Medium (äußere Reflexion) und (b) optisch dichterem Medium (innere Reflexion).

Die *Amplituden-Transmissionskoeffizienten* der transmittierten Felder können analog bestimmt werden, indem man in (2.6.21) E_r eliminiert. Es ergibt sich

$$t_{\perp} = \left. \frac{E_t}{E_e} \right|_{\text{TE}} = \frac{2 \cos \theta_e}{\cos \theta_e + n \cos \theta_t} \tag{2.6.30}$$

oder

$$t_{\perp} = \left. \frac{E_t}{E_e} \right|_{\text{TE}} = \frac{2 \cos \theta_e \sin \theta_t}{\sin(\theta_e + \theta_t)} \tag{2.6.31}$$

und

$$t_{\parallel} = \left. \frac{E_t}{E_e} \right|_{\text{TM}} = -\frac{2 \cos \theta_e}{\cos \theta_t + n \cos \theta_e} \tag{2.6.32}$$

oder

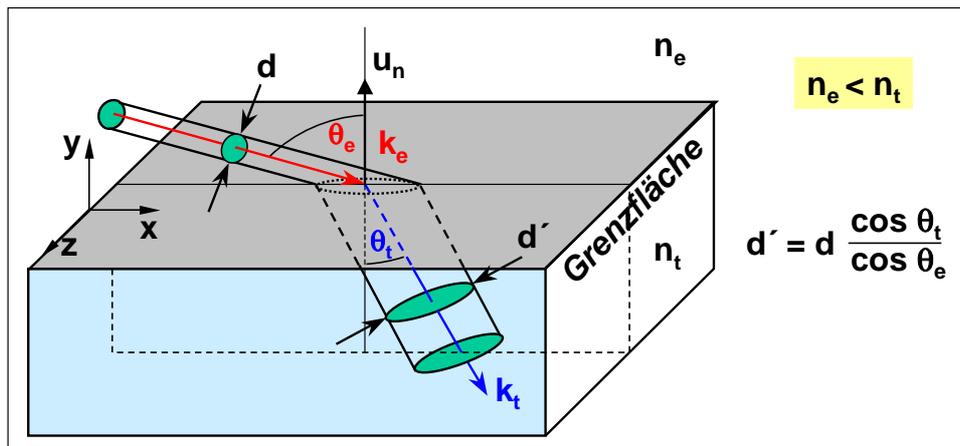


Abbildung 2.19: Änderung des Strahlquerschnitts bei der Brechung. Die Änderung des Strahlquerschnitts kann zur Aufweitung eines Lichtstrahls durch Brechung verwendet werden.

$$t_{\parallel} = \frac{E_t}{E_e} \Big|_{\text{TM}} = -\frac{2 \cos \theta_e \sin \theta_t}{\sin(\theta_e + \theta_t) \cos(\theta_e - \theta_t)} \quad (2.6.33)$$

Die 4 Gleichungen für die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten wurden erstmals von **A. Fresnel** (1821) aus seiner elastischen Lichttheorie abgeleitet, während sie heute (wie auch hier praktiziert) aus der elektromagnetischen Theorie des Lichts abgeleitet werden. Die Gleichungen enthalten die vollständige Theorie der Reflexion, Brechung und Polarisation für *lineare, isotrope und homogene Medien*.¹⁴

Reflexions- und Transmissionsgrad

Ist man nur an der reflektierten oder transmittierten Leistung interessiert, d.h. am Reflexionsgrad R oder Transmissionsgrad T , so kann man diesen durch Anwenden des Energiesatzes bestimmen. Für die auf die Grenzfläche einfallende (W_e), reflektierte (W_r) und transmittierte Leistung (W_t) muss gelten: $W_e = W_r + W_t$.

Mit $R = W_r/W_e$ erhält man dann

$$R_{\parallel} = |r_{\parallel}|^2 \quad \text{und} \quad R_{\perp} = |r_{\perp}|^2 \quad (2.6.34)$$

Mit $T = W_t/W_e$ erhält man

$$T_{\parallel} = 1 - |r_{\parallel}|^2 \quad \text{und} \quad T_{\perp} = 1 - |r_{\perp}|^2 \quad (2.6.35)$$

¹⁴Bei den Fresnel'schen Gleichungen ist Vorsicht hinsichtlich der Vorzeichen geboten. Wir haben alle Richtungen der Felder (genauer gesagt ihrer Phasen) in Abb. 2.17 zufällig gewählt. Wir hätten z.B. annehmen können, dass das Feld \mathbf{E}_r in Abb. 2.17a nach innen zeigt, wodurch sich das Vorzeichen von r_{\perp} geändert hätte. Die Vorzeichen in den Fresnel'schen Gleichungen gehören also zu einem bestimmten Satz von gewählten Feldrichtungen: Diese Wahl ist in der Literatur leider nicht einheitlich, wodurch beträchtliche Verwirrung bezüglich der Vorzeichen der Fresnel'schen Gleichungen auftritt.

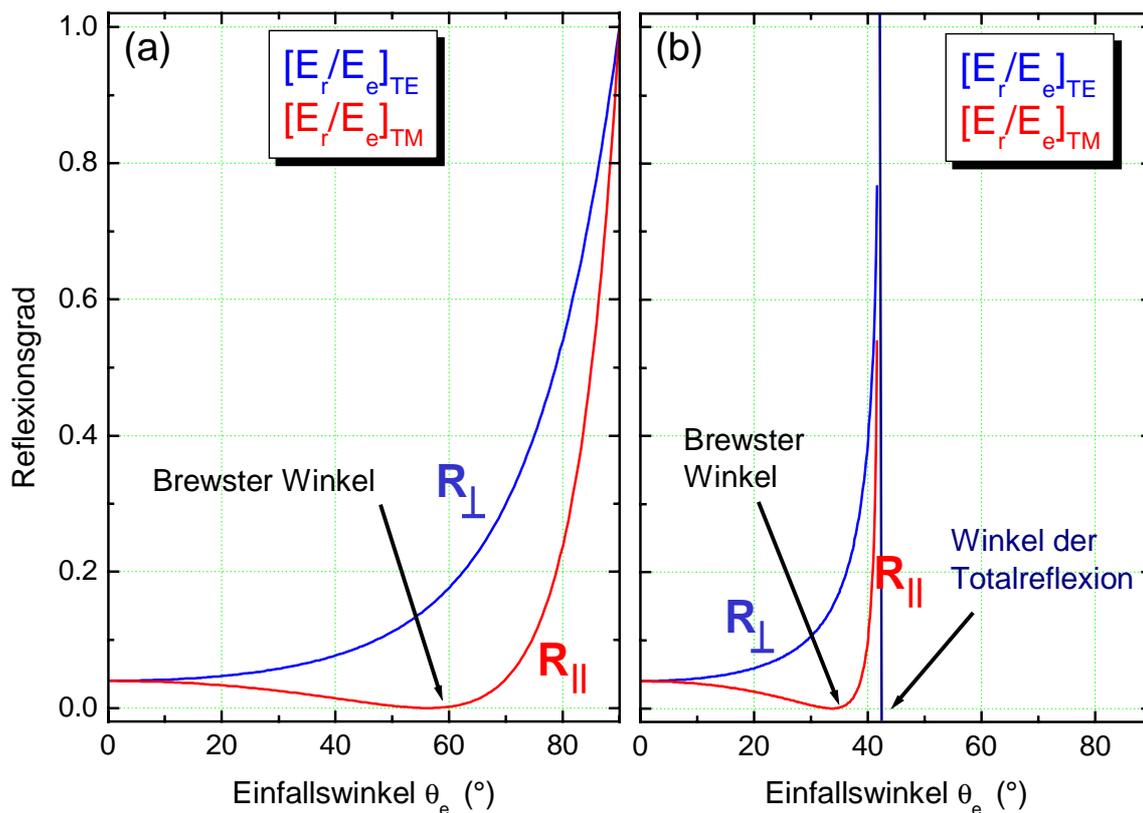


Abbildung 2.20: Reflexionsgrad für eine Luft/Glas-Grenzfläche ($n_{\text{Glas}} = 1.5$) als Funktion des Einfallswinkels bei Einfall vom (a) optisch dünneren Medium (äußere Reflexion) und (b) optisch dichteren Medium (innere Reflexion).

Bei der Berechnung der transmittierten Intensität $I_t = T^I I_e$ ist zu beachten, dass sich für endliche Einfallswinkel die Ausdehnung d des Lichtbündels in der Einfallsebene und damit die durchstrahlte Fläche $A \propto d$ aufgrund der Brechung zu $A' \propto d'$ ändert (siehe Abb. 2.19). Dabei gilt

$$T^W = \frac{W_t}{W_e} = \frac{I_t A'}{I_e A} = \frac{I_t \cos \theta_t}{I_e \cos \theta_e} = \frac{n_t \cos \theta_t}{n_e \cos \theta_e} |t|^2$$

oder

$$T^I = \frac{I_t}{I_e} = T^W \frac{\cos \theta_e}{\cos \theta_t} = |t|^2 \frac{n_t}{n_e} \tag{2.6.36}$$

Der Reflexionsgrad $R_{\perp} = |r_{\perp}|^2$ und $R_{\parallel} = |r_{\parallel}|^2$ ist für äußere und innere Reflexion in Abb. 2.20 als Funktion des Einfallswinkels gezeigt. Man erkennt, dass der Reflexionsgrad für bestimmte Winkel gleich 1 wird (Totalreflexion) und für einen bestimmten Winkel verschwindet (Brewster Winkel). Die physikalischen Ursachen dafür werden im nächsten Abschnitt diskutiert.

2.6.3 Totalreflexion und Brewster-Winkel

Wir wollen nun den physikalischen Inhalt der Fresnel'schen Gleichungen näher analysieren. Dazu eliminieren wir den Brechungswinkel θ_t in (2.6.26) und (2.6.28) mit Hilfe des Snellius'schen Gesetzes und erhalten die vier Fresnel'schen Gleichungen als Funktion von θ_e und n :

$$r_{\perp} = \frac{\cos \theta_e - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_e}}{\cos \theta_e + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_e}} = - \frac{(\cos \theta_e - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_e})^2}{(n^2 - 1)} \quad (2.6.37)$$

$$r_{\parallel} = - \frac{n^2 \cos \theta_e - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_e}}{n^2 \cos \theta_e + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_e}} \quad (2.6.38)$$

$$t_{\perp} = \frac{2 \cos \theta_e \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_e} - 2 \cos \theta_e^2}{(n^2 - 1)} \quad (2.6.39)$$

$$t_{\parallel} = \frac{2n \cos \theta_e}{n^2 \cos \theta_e + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_e}} \quad (2.6.40)$$

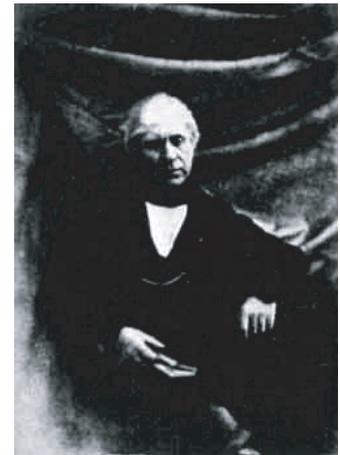
Für die nun folgende Diskussion der Reflexionskoeffizienten benutzen wir die Bezeichnung *äußere Reflexion* für den Fall $n > 1$ und *innere Reflexion* für den Fall $n < 1$.

Sir David Brewster (1781 - 1868) :

Sir David Brewster wurde am 11. Dezember 1781 in Jedburgh, Schottland geboren. Brewster arbeitete über Reflexion und Polarisation, Absorption, Interferenz und Fluoreszenz des Lichts. Nach seiner Tätigkeit als Privatgelehrter war er Professor in St. Andrews und ab 1859 Rektor an der Universität in Edinburgh. 1815 wird er Mitglied und später Vizepräsident der Royal Society. 1815 entwickelte er das nach ihm benannte Brewster'sche Gesetz. Er erfand außerdem 1816 das Kaleidoskop worauf er am 10. Juli 1817 ein englisches Patent erhält. 1836 entwickelte er das dioptrische Stereoskop (ein vereinfachtes Verfahren der Stereoskopie, bestehend aus einer zweiäugigen Kamera und einem handlichen Linsenstereoskop) und präsentiert es 1849 der Royal Scottish Society of Art. 1851 wird es auf der Weltausstellung gezeigt.

Bei der Untersuchung der Doppelbrechung von Kristallen entdeckte er den Pleochroismus und die chromatische Polarisation. Brewster entwickelte die Theorie der drei Grundfarben zu Rot, Gelb und Blau weiter. Er zeichnete die ersten trichomatischen Empfindlichkeitskurven des menschlichen Auges auf und führte den Nachweis, dass alle Farbbeimpfindungen mit drei Grundfarben zu erzeugen sind. Auch wenn das Maximum seiner Kurven im Grünen lagen, wählte Brewster als dritte Grundfarbe Gelb.

Er starb am 10. Februar 1868 in Allerly bei Melrose.



Wir können folgende Sachverhalte feststellen:

1. Wir sehen zunächst, dass für senkrechten Einfall $r_{\parallel} = r_{\perp} = \frac{n_e - n_t}{n_e + n_t}$. Die Gleichheit der Reflexionskoeffizienten kommt deshalb zustande, weil die Einfallsebene für θ_e nicht mehr bestimmt ist.
2. Für $\theta_e \rightarrow 90^\circ$ erhalten wir $r_{\parallel} = r_{\perp} \rightarrow -1$. Das heißt, das auf die Grenzfläche auftreffende Licht wird nahezu vollständig reflektiert und dies unabhängig davon, wie groß r_{\parallel} und r_{\perp} bei $\theta_e = 0$ sind. Dieses Phänomen kennen wir gut aus dem Alltag. Zum Beispiel wirkt der Boden eines langen Flurs aufgrund des flachen Blickwinkels ($\theta_e \rightarrow 90^\circ$) wie ein Spiegel. Man nutzt dieses Phänomen auch aus, um Spiegel für Röntgenstrahlung zu erhalten.
3. Im Falle der äußeren Reflexion ist der Ausdruck $\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_e}$ in (2.6.37) und (2.6.38) immer größer Null. Damit ist das Verhältnis von reflektierter zu einfallender Feldamplitude für beide Polarisationsrichtungen für alle Einfallswinkel reell.

4. Bei TE-Polarisation ist bei äußerer Reflexion ($n^2 - 1 > 0$) der Reflexionskoeffizient immer negativ (siehe (2.6.37)). Damit erfährt das Licht bei äußerer Reflexion für alle Winkel einen Phasensprung von π (siehe blaue Kurve in Abb. 2.18a), d.h. die Feldstärken von reflektierter und einfallender Welle zeigen an der Grenzfläche in entgegengesetzte Richtungen.

5. Brewster Winkel:

Bei TM-Polarisation wechselt der Phasensprung von π zu Null (Nulldurchgang der $r_{\parallel}(\theta_e)$ Kurve, siehe rote Kurve in Abb. 2.18a) beim so genannten *Brewster Winkel*¹⁵

$$\theta_{\text{Brewster}} \equiv \theta_B = \arctan n \quad (2.6.41)$$

Beim Brewster Winkel wird $r_{\parallel} = 0$, das heißt es findet keine Reflexion statt. Die Bedingung $r_{\parallel} = 0$ erhält man, wenn der Nenner in (2.6.28) bzw. (2.6.30) divergiert, das heißt, wenn für den Einfallswinkel $\tan(\theta_B + \theta_t) = \infty$ oder $\theta_B + \theta_t = 90^\circ$ gilt. In diesem Fall steht der gebrochene und der reflektierte Strahl senkrecht aufeinander (siehe Abb. 2.21a).

Mit einem einfachen molekularen Bild (siehe Abb. 2.21b) kann die physikalische Ursache der beim Brewster Winkel verschwindenden Reflexion verdeutlicht werden. Dazu nehmen wir an, dass das reflektierte Licht durch oszillierende Dipole im Medium M_t erzeugt wird, die ein Dipolmoment \mathbf{P} parallel zum Feld \mathbf{E}_t besitzen, das für die TM-Polarisation in der von den Wellenvektoren aufgespannten Ebene und senkrecht zu \mathbf{k}_t liegt. In der Vorlesung Physik II wurde gezeigt, dass längs der Oszillationsrichtung (siehe schwarzer Pfeil in Abb. 2.21b) der Dipole, also in Richtung von \mathbf{k}_t , keine Abstrahlung erfolgt und daher der Reflexionskoeffizient verschwindet. Für die TE-Polarisation schwingt dagegen das elektrische Feld senkrecht zu der von den Wellenvektoren aufgespannten Ebene und die Abstrahlung erfolgt damit sowohl in Richtung von \mathbf{k}_t als auch von \mathbf{k}_r .

Diese anschauliche Erklärung des Brewster'schen Gesetzes ist auch im Einklang mit der Tatsache, dass das an sehr kleinen Teilchen gestreute Licht in allen Richtungen, die senkrecht zum einfallenden Strahl stehen, linear polarisiert ist (siehe hierzu Abschnitt 3.2.1). Aufgrund der Transversalität des Lichts schwingt das elektrische Feld in der Ebene senkrecht zum Lichtstrahl. Nimmt man an, dass der Lichtstrahl in y -Richtung einfällt, so schwingt das elektrische Feld in der xz -Ebene. Beobachtet man nun aus der x -Richtung, so sieht man aufgrund der Abstrahlcharakteristik der Dipole nur Licht, das von in z -Richtungen schwingenden Dipolen stammt. Beobachtet man dagegen aus der z -Richtung, so sieht man nur Licht, das von in x -Richtungen schwingenden Dipolen stammt. In beiden Fällen erhält man linear polarisiertes Licht. Ein entsprechendes Experiment lässt sich an einem mit Wasser gefüllten Trog durchführen, dessen Inhalt zur Erhöhung der Streuung mit einer alkoholischen Mastixlösung eingetrübt wurde.¹⁶ Man beobachtet dann das senkrecht zum einfallenden Lichtstrahl ausgesandte Streulicht mit einem drehbaren Analysator. Dreht man den

¹⁵Man setze hierzu den Zähler im Ausdruck für r_{\parallel} gleich Null und erhält

$$n^2 \cos \theta_B = \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_B}$$

und damit

$$n^2 \cos^2 \theta_B = 1 - \frac{\sin^2 \theta_B}{n^2}.$$

Ersetzt man 1 durch $\sin^2 + \cos^2$, so erhält man

$$(n^2 - 1) \cos^2 \theta_B = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \sin^2 \theta_B$$

und damit

$$\frac{\sin^2 \theta_B}{\cos^2 \theta_B} = \tan^2 \theta_B = \frac{n^2 - 1}{1 - 1/n^2} = n^2.$$

¹⁶Zur Eintrübung könnte man auch Seife oder Milch verwenden.

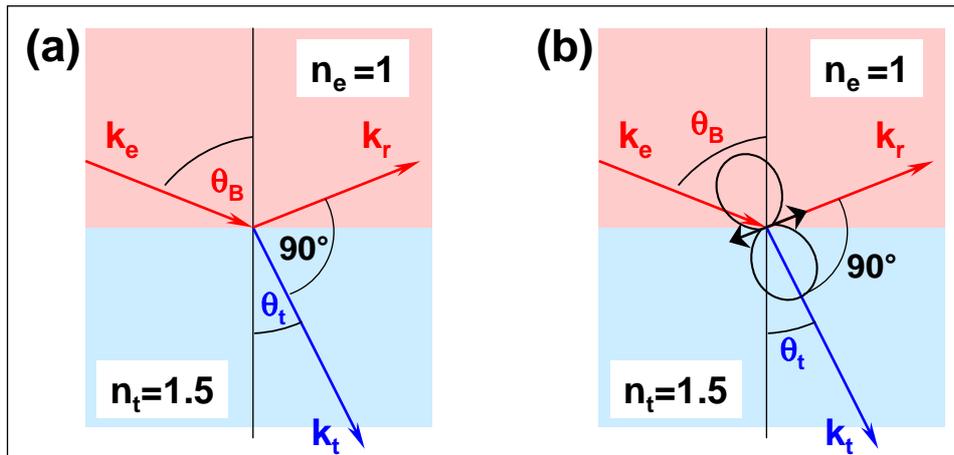


Abbildung 2.21: Lichteinfall auf eine Grenzfläche unter dem Brewster Winkel: (a) Transmittierter und reflektierter Strahl stehen senkrecht aufeinander. (b) Nimmt man an, dass der reflektierte Strahl durch oszillierende Dipole der Grenzschicht erzeugt wird, so erfolgt in Richtung \mathbf{k}_r (Schwingungsrichtung des Dipols) keine Emission, da die Abstrahlung eines Dipols einem $\cos^2 \theta$ -Gesetz folgt.

Analysator, wird das senkrecht zum einfallenden Lichtstrahl ausgesandte Streulicht jeweils in einem Drehabstand von 90° sichtbar oder unsichtbar. Man kann auch einen bereits linear polarisierten Lichtstrahl zur Beleuchtung verwenden und beobachtet dann Streulicht nur in die Richtung senkrecht zur Polarisationsrichtung.

Für Licht, das aus der Luft ($n_e \simeq 1$) auf Glas mit $n = 1.5$ auftrifft (äußere Reflexion), berechnet man den Brewster Winkel zu $\theta_B = 56.3^\circ$. Für die innere Reflexion ist $\theta_B = 33.7^\circ$. In der Praxis nutzt man das Verschwinden der Reflexion am Brewster Winkel aus, wenn polarisiertes Licht durch viele Oberflächen ohne Reflexionsverluste transmittiert werden soll (Brewster Fenster) oder wenn mit einfachen Mitteln polarisiertes Licht, d.h. Licht mit einer definierten Richtung des \mathbf{E} -Feldvektors erzeugt werden soll.

6. Innere Reflexion und Grenzwinkel

Im Falle der inneren Reflexion ist der Ausdruck $n^2 - \sin^2 \theta_e$ in den Ausdrücken für r_{\parallel} und r_{\perp} für alle Winkel größer als $\theta_T = \arcsin n$ negativ. Der Winkel

$$\theta_T \equiv \arcsin \left(\frac{n_t}{n_e} \right) = \arcsin n . \quad (2.6.42)$$

ist der *Grenzwinkel* oder der Winkel der *Totalreflexion*. Es ist genau der Winkel, bei dem im Snellius'schen Brechungsgesetz $\sin \theta = 1$ wird, das heißt, bei dem sich das gebrochene Licht parallel zur Grenzfläche ausbreitet.

Für größere Winkel $\theta_e > \theta_T$ erhält man aus (2.6.37) und (2.6.39) unter Benutzung von $\sqrt{-1} = i$

$$r_{\perp} = \frac{\cos \theta_e - i\sqrt{\sin^2 \theta_e - n^2}}{\cos \theta_e + i\sqrt{\sin^2 \theta_e - n^2}} \quad (2.6.43)$$

und

$$r_{\parallel} = \frac{n^2 \cos \theta_e - i\sqrt{\sin^2 \theta_e - n^2}}{n^2 \cos \theta_e + i\sqrt{\sin^2 \theta_e - n^2}} . \quad (2.6.44)$$

Diese komplexen Ausdrücke sind von der Form

$$x = \frac{a + ib}{a - ib} \quad (2.6.45)$$

und haben somit den Betrag 1. Damit ist das Verhältnis von reflektierter und einfallender Strahlungsintensität gleich 1, was Totalreflexion bedeutet. Für Glas mit $n = 1.5$ liegt der Winkel der Totalreflexion bei $\theta_T = 41.8^\circ$.¹⁷

2.6.4 Innere Totalreflexion und evaneszente Wellen

Wir wollen in diesem Abschnitt einige Aspekte der inneren Totalreflexion etwas genauer diskutieren. Bisher hatten wir die Totalreflexion nur vom Gesichtspunkt des Energieflusses behandelt und festgestellt, dass bei der Totalreflexion perfekte Reflexion auftritt. Das heißt, laut unserer Ableitung wird die gesamte Leistung reflektiert. Die Amplitudenreflexionskoeffizienten r_{\parallel} und r_{\perp} sind allerdings nicht Null, sondern endliche komplexe Zahlen. Wir wollen uns nun mit dem Verlauf des elektrischen Feldes (d.h. mit der Amplitude) auf der Rückseite der Grenzschicht beschäftigen, auf der offensichtlich keine Lichtabstrahlung auftritt. Dazu betrachten wir wiederum die in Abb. 2.15 gezeigte Anordnung.

Ausgangspunkt unserer Betrachtung ist die transmittierte ebene Welle

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{t0} e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t)} . \quad (2.6.46)$$

Hierbei lässt sich $\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}$ als Funktion des Brechungswinkels θ angeben (siehe Abb. 2.22):

$$\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} = k_{t\parallel}x + k_{t\perp}y = k_t \sin \theta_t x - k_t \cos \theta_t y = k_t x \sin \theta_t - ik_t y \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_e}{n^2} - 1} , \quad (2.6.47)$$

wobei wir das Brechungsgesetz $\sin \theta_e / \sin \theta_t = n$ dazu benutzt haben, $\cos \theta$ in der Form

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_e}{n^2}} = i \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_e}{n^2} - 1} \quad (2.6.48)$$

zu schreiben. Die Tatsache, dass die Phase unserer Welle einen endlichen reellen Anteil hat, bedeutet physikalisch, dass wir es mit einem im Raum hinter der Grenzfläche exponentiell abfallenden Feld zu tun haben. Man spricht hier von einer *evaneszenten Welle*.

¹⁷Ein Beispiel aus dem täglichen Leben für die innere Totalreflexion ist das Nichterkennen eines Teelichts unter einer mit Wasser gefüllten Glaskanne. Schaut man von unten unter einem zu flachen Winkel auf die Wasseroberfläche, so kann man zwar durch das Wasser auf den Boden der Kanne schauen, das unter dem Boden der Kanne brennende Teelicht erkennt man aber nicht.

Es ist ferner interessant sich zu überlegen, warum die innere Totalreflexion den Gesichtswinkel beim Blick durch eine Glasscheibe nicht einschränkt.

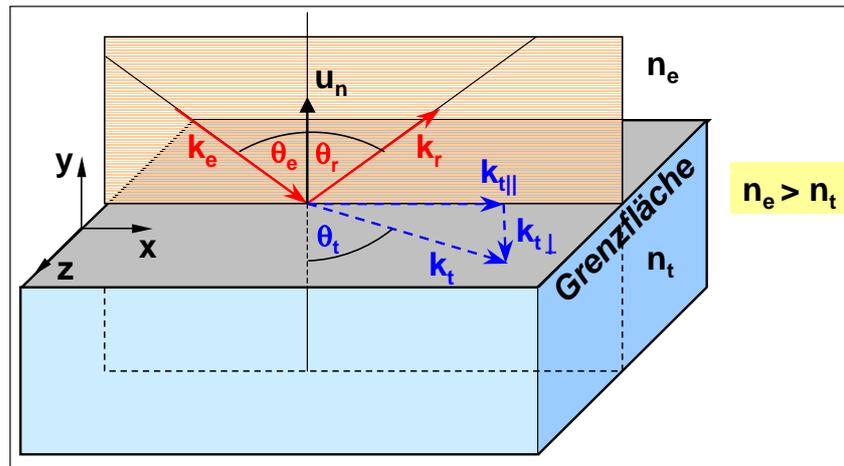


Abbildung 2.22: Fortpflanzungsvektoren bei der inneren Reflexion.

Für $\theta_e > \theta_T$ gilt aufgrund des Brechungsgesetzes $\sin^2 \theta_e / n^2 > 1$. Damit wird im Bereich der Totalreflexion $k_{t\perp}$ rein imaginär:

$$k_{t\perp} = \pm i k_t \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_e}{n^2} - 1} = \pm i \beta . \quad (2.6.49)$$

Wir legen nun wieder die in Abb. 2.15 gezeigte Geometrie zugrunde. Damit erhält man für das elektrische Feld¹⁸

$$\mathbf{E}_t(x, y, t) = \mathbf{E}_{t0} \exp(-\beta y) \exp[i(k_{t\parallel} x - \omega t)] . \quad (2.6.50)$$

Das elektrische Feld klingt also hinter der Grenzfläche in y -Richtung mit der charakteristischen Abklinglänge

$$\ell = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{k_t \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_e}{n^2} - 1}} = \frac{\lambda_t}{2\pi} \left(\frac{\sin^2 \theta_e}{n^2} - 1 \right)^{-1/2} \quad (2.6.51)$$

ab. Eine oszillatorische Bewegung findet nur parallel zur Grenzfläche (in unserem Fall in x -Richtung) statt. Man hat somit eine an die Grenzfläche gebundene, so genannte *evaneszente Welle* oder *Oberflächenwelle*. Wichtig ist der Befund, dass die Feldstärke an der Grenzfläche nicht instantan verschwindet, sondern exponentiell abklingt. Die Fronten der evaneszenten Welle verlaufen parallel zur Grenzfläche. Wichtig ist auch, dass die evaneszente Welle keine Leistung transportiert.

Man sieht, dass die Abklinglänge proportional zur Wellenlänge im optisch dünneren Medium ist. Für $n_e = 1.5$, $n_t = 1$, $\theta_T = 41.8^\circ$ und $\theta_e = 45^\circ$ erhält man bei $\lambda = 600$ nm für die Abklinglänge $\ell \approx \lambda/2$. Man sieht, dass die evaneszente Welle sehr schnell auf der Längenskala der Wellenlänge abklingt.

¹⁸Wir berücksichtigen im ersten Exponentialterm nur den negativen Exponenten. Der positive Exponent ist physikalisch nicht sinnvoll.

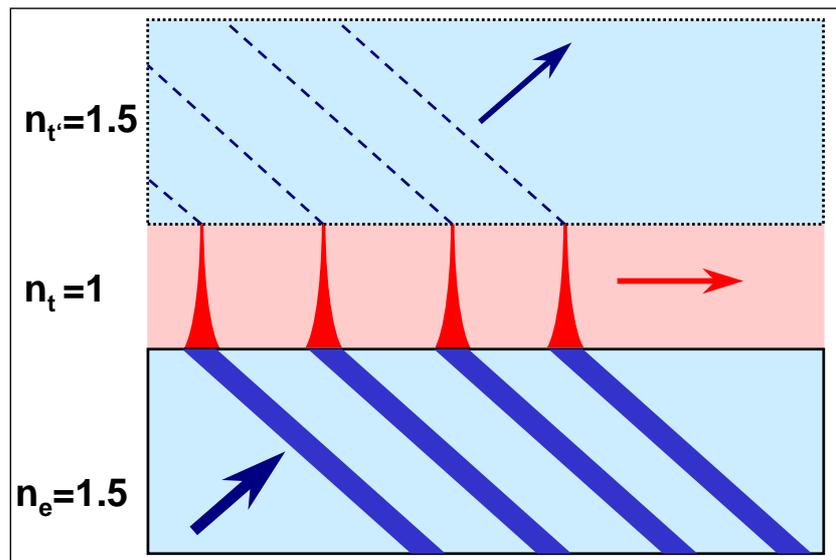


Abbildung 2.23: Zur Veranschaulichung evaneszenter Wellen: Fällt aus einem optisch dichteren Medium Licht auf die Grenzfläche, so bildet sich für Winkel $\theta_e > \theta_T$ im Bereich der Grenzschicht eine Oberflächenwelle aus. Nähert man ein zweites dichte Medium dieser Grenzfläche (gestrichelter Bildteil), so kann dadurch ein Teil des Lichts den verbotenen Bereich des optisch dünnen Mediums durchtunneln und sich im zweiten dichten Medium weiter ausbreiten.

Optisches Tunneln

Experimentell kann man die evaneszente Welle dadurch sichtbar machen, indem man eine zweite Glasplatte nahe an die Rückseite der Grenzschicht heranführt (siehe Abb. 2.23). Hierbei ist der obige Prozess umgekehrt und aus der evaneszenten Welle wird eine in die zweite Glasplatte hineinlaufende Welle ausgekoppelt. In der Reflexion wird dann ein entsprechender Verlust beobachtet. Man erhält somit trotz Totalreflexion eine Energieübertrag durch den “verbotenen” Bereich zwischen den beiden Glasplatten. Dieses “Tunneln” des Lichts wird später im Zusammenhang mit dem Welle-Teilchen-Dualismus weiter diskutiert. Den Tunneleffekt kann man experimentell sehr einfach mit Mikrowellen zeigen, da deren Wellenlänge im Zentimeterbereich liegt und deshalb der Abstand zwischen den beiden dichten Medien ebenfalls im Zentimeterbereich liegen kann, um den Tunneleffekt zu beobachten.

Mit Hilfe von (2.6.50) kann man die in die zweite Glasplatte tunnelnde Feldamplitude zu

$$\mathbf{E}_{\text{tun}}(y) \approx \mathbf{E}_{t0} \exp(-\beta d) . \quad (2.6.52)$$

abschätzen, wobei d der Abstand der beiden Glasplatten ist. Diese Näherung gilt nur für große d . Für kleine d erhält man einen komplizierteren Ausdruck, da hier das Gesamtsystem als Vielschichtsystem analysiert werden muss.

Das optische Tunneln kann zur Herstellung von Strahlteilern verwendet werden. Ein typisches Beispiel dafür ist in Abb. 2.24 gezeigt. In der Prismenanordnung sind die Hypothenusenflächen der beiden Prismen eben und parallel zueinander. Man bringt nun einen dünnen transparenten Film mit niedrigerem Brechungsindex als Präzissionsabstand zwischen die beiden Prismen, wobei die Intensität des tunnelnden Lichts über die Filmdicke gemäß (2.6.52) eingestellt werden kann. Solche Strahlteiler haben ein beträchtliches Anwendungspotenzial in optischen Instrumenten.

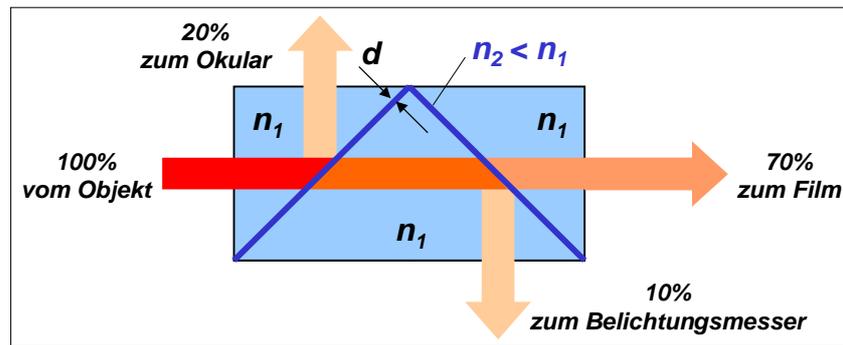


Abbildung 2.24: Typisches Beispiel für einen Strahlteiler auf der Basis des optischen Tunnelns. Ein solcher Strahlteiler wird zum Beispiel dazu verwendet, um durch ein Mikroskop hindurch zu fotografieren.

Evaneszente Welle und Energiefluss

Die Amplitude der evaneszenten Welle nimmt mit zunehmendem Abstand von der Glasplatte exponentiell ab, so dass offensichtlich in diese Richtung kein Energiefluss möglich ist. Auf der anderen Seite existiert eine Welle, die eine bestimmte Energiedichte besitzt. Wir müssen nun zeigen, dass der Energiefluss innerhalb der evaneszenten Welle auf Richtungen parallel zur Grenzfläche beschränkt ist. Für die senkrechten Wellenkomponenten im zweiten Medium (Luft) erhält man mit (2.6.50)

$$E_z = E_{z0} \exp(-\beta y) \exp(i(k_{\parallel} x - \omega t)) . \quad (2.6.53)$$

Unter der Benutzung der Beziehung $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}$ kann man die Feldkomponente B_x und B_y bestimmen und mit diesen die Komponenten des Poynting Vektors $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ ableiten. Man erhält

$$S_x = -\frac{1}{\mu_0} E_z B_y \propto E_z^2 \left(1 + \sqrt{1 - \sin^2 \theta_e} \right) \quad (2.6.54)$$

$$S_y = \frac{1}{\mu_0} E_z B_x \propto i E_z^2 \sqrt{1 - \sin^2 \theta_e} . \quad (2.6.55)$$

Der imaginäre Wert von S_y sagt aus, dass keine Energie senkrecht zur Grenzfläche transportiert wird. Die Felder E_z und B_x besitzen eine Phasenschiebung von $\pi/2$, so dass das Zeitmittel ihres Produktes Null wird. Dagegen gibt es für E_z und B_y keine Phasenschiebung, so dass Energie in x -Richtung, d.h. parallel zur Grenzfläche transportiert wird.

2.6.5 Phasenvariation im Bereich der Totalreflexion

Im Bereich der äußeren Reflexion ($n_e < n_t$) ergibt sich das Phasenverhalten aus den Vorzeichen der Reflexions- bzw. Transmissionskoeffizienten. Aus Abb. 2.18 folgt sofort, dass bei äußerer Reflexion die Phasenverschiebung der reflektierten senkrechten Komponente für alle Einfallswinkel immer $-\pi$ ist. Die Phasenverschiebung der reflektierten parallelen Komponente ist dagegen nur bis zum Brewster-Winkel $-\pi$ und springt dann auf $+\pi$. Die relative Phasenverschiebung der senkrechten und parallelen Komponente ist deshalb bis zum Brewsterwinkel 0 und springt dann auf π .

Bei innerer Reflexion ($n_e > n_t$) ist die Situation bis zum Winkel der Totalreflexion ähnlich. Die relative Phaseverschiebung ist bis zum Brewster-Winkel ebenfalls 0 und springt dann auf $-\pi$. Im Bereich der Totalreflexion sind die Amplitudenreflexionskoeffizienten wegen $|r| = 1$ auf dem komplexen Einheitskreis zu finden. Wir können sie daher die Ausdrücke (2.6.43) und (2.6.44)

$$\begin{aligned} r_{\perp} &= \frac{\cos \theta_e - i\sqrt{\sin^2 \theta_e - n^2}}{\cos \theta_e + i\sqrt{\sin^2 \theta_e - n^2}} \\ r_{\parallel} &= -\frac{n^2 \cos \theta_e - i\sqrt{\sin^2 \theta_e - n^2}}{n^2 \cos \theta_e + i\sqrt{\sin^2 \theta_e - n^2}} \end{aligned}$$

als¹⁹

$$\begin{aligned} r_{\perp} &= e^{-i\delta_{\perp}} = \frac{ae^{-i\alpha}}{ae^{+i\alpha}} = e^{-i2\alpha} \\ r_{\parallel} &= -e^{-i\delta_{\parallel}} = -\frac{ce^{-i\gamma}}{ce^{+i\gamma}} = e^{-i2\gamma} \end{aligned} \quad (2.6.56)$$

schreiben, wobei durch Vergleich mit den Ausdrücken für r_{\parallel} und r_{\perp}

$$\begin{aligned} ae^{-i\alpha} &= \cos \theta_e - i\sqrt{\sin^2 \theta_e - n^2} \\ ae^{i\alpha} &= \cos \theta_e + i\sqrt{\sin^2 \theta_e - n^2} \\ ce^{-i\gamma} &= n^2 \cos \theta_e - i\sqrt{\sin^2 \theta_e - n^2} \\ ce^{i\gamma} &= n^2 \cos \theta_e + i\sqrt{\sin^2 \theta_e - n^2} \end{aligned} \quad (2.6.57)$$

gilt. Wegen

$$\delta_{\perp} = 2\alpha \quad \text{und} \quad \delta_{\parallel} = 2\gamma \quad (2.6.58)$$

ist

$$\begin{aligned} \tan \frac{\delta_{\perp}}{2} &= \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_e - n^2}}{\cos \theta_e} \\ \tan \frac{\delta_{\parallel}}{2} &= \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_e - n^2}}{n^2 \cos \theta_e} \end{aligned} \quad (2.6.59)$$

Damit gilt für die relative Phasendifferenz $\Delta = \delta_{\parallel} - \delta_{\perp}$ der senkrechten und parallelen Feldkomponente

¹⁹Hierbei benutzen wir die Exponentialform von komplexen Zahlen $a + ib = \rho e^{i\varphi}$ mit $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $\tan \varphi = b/a$. Ferner benutzen wir die Beziehungen $a + ib = \rho e^{i\varphi}$ und $a - ib = \rho e^{-i\varphi}$.

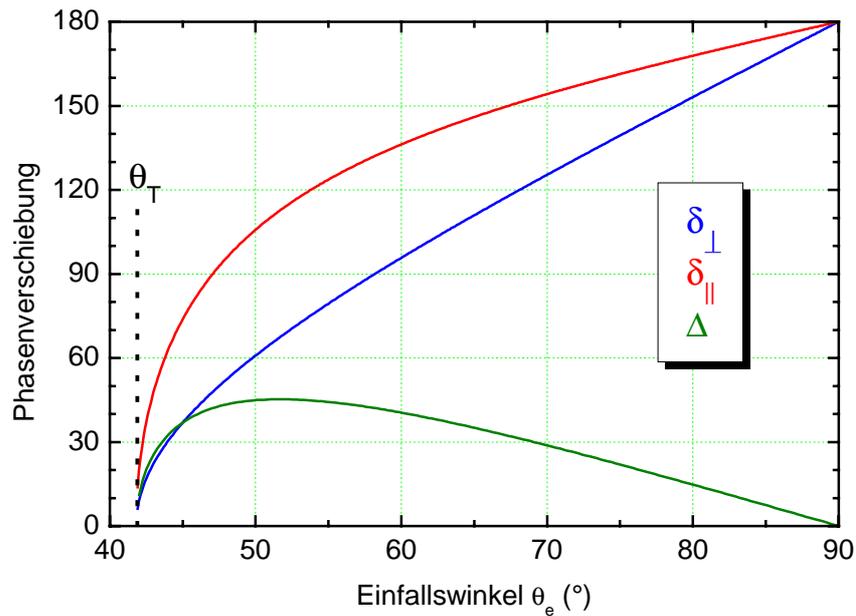


Abbildung 2.25: Phasenverschiebung bei Totalreflexion. Die Rechnung wurde für eine Glas/Luft-Grenzfläche ($n_e = 1.5$ und $n_t = 1$) durchgeführt.

$$\tan \frac{\Delta}{2} = \tan \left(\frac{\delta_{\parallel}}{2} - \frac{\delta_{\perp}}{2} \right) = \frac{\cos \theta_e \sqrt{\sin^2 \theta_e - n^2}}{\sin^2 \theta_e} \quad (2.6.60)$$

Das Phasenverhalten ist in Abb. 2.25 gezeigt. Man sieht sofort, dass Δ überall positiv ist und nur für die Grenzwerte $\theta_e = \theta_T$ und $\theta_e = 90^\circ$ verschwindet. Wir sehen also, dass die TE- und die TM-Komponente bei der Totalreflexion eine unterschiedliche Phasenschiebung erfährt. Diese Tatsache kann man gezielt ausnutzen, wie wir in Abschnitt 3.2.2 sehen werden, die Polarisation von Licht gezielt einzustellen.

Zwischen den Nullwerten bei $\theta_e = \theta_T$ und $\theta_e = 90^\circ$ muss es ein Maximum für Δ geben. Dieses kann man durch Differenzieren des Ausdrucks für Δ nach dem Einfallswinkel und Nullsetzen der Gleichung erhalten. Man erhält

$$\sin^2 \theta_e = \frac{2n^2}{1+n^2} \quad \text{für } \theta_e = \theta_{\max} \quad (2.6.61)$$

Durch Einsetzen in (2.6.60) unter Benutzung von $\cos \theta_e = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_e}$ erhält man

$$\tan \frac{\Delta_{\max}}{2} = \frac{1-n^2}{2n} \quad \text{für } \theta_e = \theta_{\max} \quad (2.6.62)$$

Man erkennt, dass das Maximum um so höher ausfällt, je kleiner der relative Brechungsindex ist. Der Grenzfall $n \rightarrow 0$ mit $\Delta \rightarrow \pi/2$ legt die Möglichkeit nahe, zirkular polarisiertes Licht ($\Delta = \pi/2$) mit einer einmaligen Totalreflexion zu erzeugen (der Begriff der Polarisation wird in Kapitel 3 eingeführt). Wie wir in Abschnitt 3.2.2 diskutieren werden, ist es aber im sichtbaren Bereich bedeutend einfacher, eine Phasendifferenz $\Delta = \pi/4$ zu erreichen und damit durch zweimalige Totalreflexion zirkular polarisiertes Licht zu erzeugen (siehe Fresnel'sches Parallelepiped in Abschnitt 3.2.2).

2.6.6 Reflexionsvermögen von absorbierenden Medien

Wie oben gezeigt wurde, können die Fresnel'schen Gleichungen auch dann angewendet werden, wenn die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten komplex sind, nämlich im Falle der Totalreflexion an vollkommen transparenten Medien. Wir wollen in diesem Abschnitt kurz auf absorbierende Medien eingehen, die durch einen komplexen Brechungsindex charakterisiert sind. Solche Medien sind z.B. Metalle.

Das charakteristische Merkmal von Metallen ist ihre endliche elektrische Leitfähigkeit, die man sich durch das Vorhandensein freier elektrischer Ladungen, die sich innerhalb des Metalls frei bewegen können, vorstellen kann. Die elektrische Stromdichte in einem Metall ist mit dem elektrischen Feld über die Leitfähigkeit σ verknüpft. Wären die Elektronen in einem Metall völlig frei, so hätten wir einen idealen Leiter. In diesem Fall würden die Schwingungen der Elektronen einfach dem harmonischen elektrischen Feld folgen. Es gäbe dann keine Rückstellkraft und damit keine Eigenfrequenz, folglich auch keine Absorption und nur Reemission. In realen Metallen führen aber die Elektronen Stoßprozesse (z.B. mit Gitterschwingungen) aus, wodurch ein Teil der elektromagnetischen Energie in Wärme umgewandelt wird. Dies resultiert in einer Absorption der Strahlung, deren Stärke von der elektrischen Leitfähigkeit des Metalls abhängt.

Bei einer endlichen Leitfähigkeit eines Mediums erhält man aus den Maxwell'schen Gleichungen die Wellengleichung

$$\Delta \mathbf{E} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 . \quad (2.6.63)$$

Das letzte Glied auf der linken Seite ist eine erste Ableitung nach der Zeit ähnlich der Dämpfung im Oszillatormodell. Durch die zeitliche Änderung von \mathbf{E} entsteht eine Spannung. Diese Spannung führt zu Strömen und aufgrund des endlichen Widerstands des Metalls zu Dissipation: Licht wird absorbiert. Die obige Gleichung lässt sich formal auf die Gleichung einer ungedämpften Welle zurückführen, wenn die Dielektrizitätskonstante als komplexe Größe behandelt wird. Dadurch entsteht ein komplexer Brechungsindex, der auf eine Absorption hinausläuft.

Der Reflexionskoeffizient beim Übergang von einem nicht absorbierenden zu einem absorbierenden Medium lässt sich also berechnen, indem man die entsprechenden komplexen Werte des Brechungsindex $n_t = n_R + i\kappa$ bei der Ableitung der Formeln für das Reflexionsvermögen verwendet (siehe (2.6.26) bis (2.6.29)). Man gelangt dann zu den entsprechenden Ausdrücken für die Reflexionskoeffizienten wie im Falle nichtabsorbierender Medien. Zu berücksichtigen ist hierbei aber, dass statt der trigonometrischen Funktionen mit reellem Argument entsprechende komplexe Funktionen einzusetzen sind.

Aufgrund des komplexen Anteil des Brechungsindex klingt die elektrische Feldamplitude im Innern des metallischen Leiters mit

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp\left(-\frac{\omega}{c} \kappa y\right) \quad (2.6.64)$$

exponentiell ab. Da die Bestrahlungsstärke I dem Quadrat der Amplitude proportional ist, klingt diese wie $I = I_0 \exp(-\beta y)$ ab. Hierbei wird $\beta = 2\kappa\omega/c$ als *Absorptions-* oder besser als *Dämpfungskoeffizient* bezeichnet. Für Metalle liegt die charakteristische Abklinglänge $1/\beta$ typischerweise bei wenigen Nanometern, weshalb Metalle undurchsichtig erscheinen. Nur ganz dünne Metallfilme sind durchsichtig.

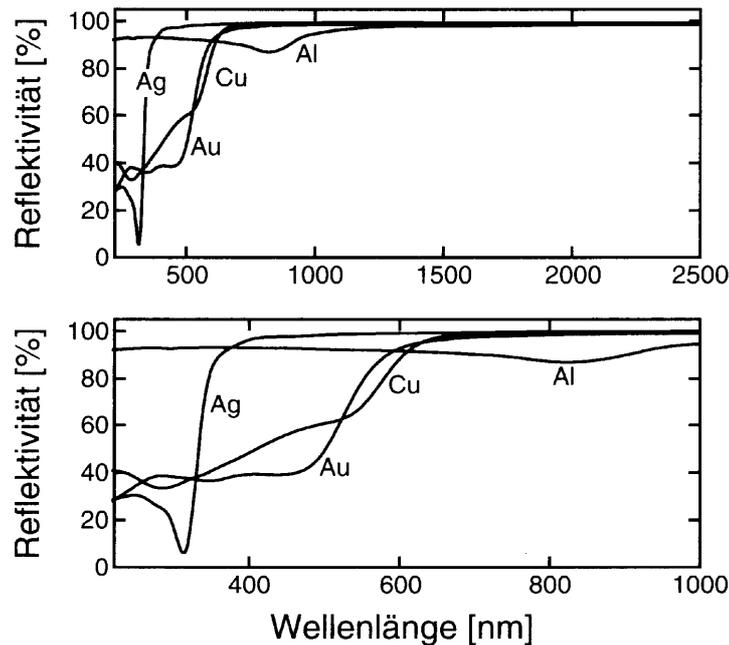


Abbildung 2.26: Reflektivität verschiedener Metallschichten als Funktion der Wellenlänge (aus Zinth und Körner, Physik III).

Mit solchen dünnen Metallfilmen (z.B. auf Brillengläsern) lässt sich eine definierte Abschwächung der Lichtintensität erzielen.

Der bekannte metallische Glanz elektrischer Leiter kommt durch deren hohen Reflexionsgrad zustande. Wir wollen hier den Reflexionskoeffizienten nur für den Spezialfall des senkrechten Einfalls diskutieren. Für den Einfall aus Luft ($n_e = 1$) erhält man das so genannte *Beer'sche Gesetz*

$$r = \frac{1-n}{1+n} \quad \text{bzw.} \quad R = rr^* = \frac{(n_R - 1)^2 + \kappa^2}{(n_R + 1)^2 + \kappa^2} \quad (2.6.65)$$

Das Reflexionsvermögen nimmt also mit zunehmender Dämpfung des Mediums (zunehmendem κ) zu. Für starke Dämpfung, wie z.B. für den Fall von Metallen für Frequenzen $\omega < \omega_p$, wird das Reflexionsvermögen praktisch 100% (siehe Abb. 2.26). Für Metalle wie Cu, Au, Ag oder Al ist das Reflexionsvermögen im infraroten Spektralbereich annähernd 100%. Nähert man sich dem Sichtbaren, so geht das Reflexionsvermögen zurück. Dies lässt sich damit erklären, dass man sich der Plasmafrequenz der Metalle nähert. Der hohe Reflexionsgrad von Metallen ist eine Folge davon, dass die einfallende Welle nicht merklich in das Material eindringen kann. Es kommen deshalb nur sehr wenige Elektronen des Metalls mit der Welle in Berührung. Jedes einzelne absorbiert zwar stark, aber die Summe der insgesamt absorbierten Energie bleibt wegen der geringen Zahl trotzdem klein.

Betrachtet man die Winkelabhängigkeit des Reflexionsvermögens für ein absorbierendes Medium, so findet man in allen Winkelbereichen eine Zunahme des Reflexionsvermögens durch den Imaginärteil des Brechungsindex. Qualitativ beobachtet man eine ähnliche Winkelabhängigkeit wie im Fall ohne Absorption. Ein wichtiger Unterschied ist, dass die Nullstelle von R_{\parallel} beim Brewster Winkel verschwindet und statt dessen nur noch ein Minimum des Reflexionsvermögens auftritt (siehe Abb. 2.27). Aus der Lage diesen Minimums und dem Verlauf von R_{\parallel} und R_{\perp} lassen sich der Real- und Imaginärteil des Brechungsindex für stark absorbierende Medien bestimmen. Eine weitere Diskussion der Reflexionsvermögens wird von Metallen wird in Abschnitt 3.2 gegeben.

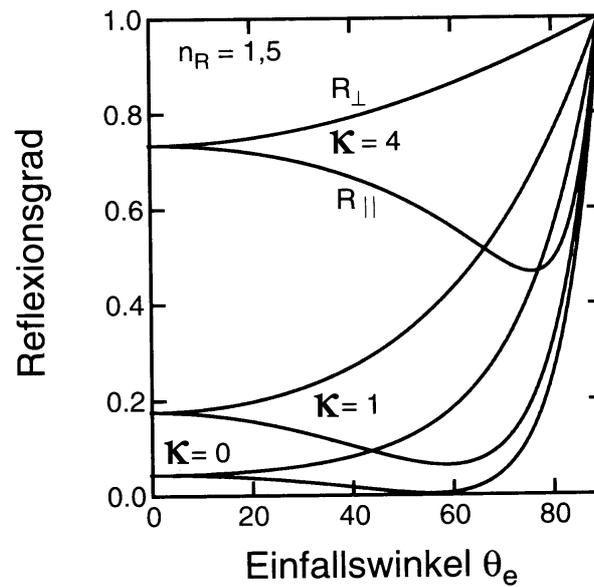


Abbildung 2.27: Reflexionsgrad einer absorbierenden Schicht bei Einfall aus Luft ($n_e = 1$). Für einen festen Realteil $n_R = 1.5$ des Brechungsindex wurde der Imaginärteil κ von $\kappa = 0$ bis $\kappa = 4$ variiert (aus Zinth und Körner, Physik III).

2.6.7 Anwendungen der Brechung und Totalreflexion

Strahlteiler

Durch die Aufteilung in einen reflektierten und transmittierten Strahl beim Einfall von Licht auf eine Grenzfläche lassen sich in sehr einfacher Weise Strahlteiler realisieren. Ein Beispiel für einen Strahlteiler, der auf dem optischen Tunneln beruht, wurde bereits in Abb. 2.24 gezeigt.

Umlenkprismen

Da bei der Totalreflexion der ideale Reflexionsgrad von 100% vorliegt, wird diese häufig benutzt, wenn Licht praktisch verlustfrei abgelenkt werden soll. Dies lässt sich z.B. mit optischem Kronglas ($n_g = 1.5$) an einem 90° Prisma bewerkstelligen (siehe Abb. 2.28a). Das auf die Katheten senkrecht einfallende Licht erreicht unter dem Einfallswinkel $\theta_e = 45^\circ$ die Hypothense. Da für das verwendete Glas mit der Totalreflexionswinkel $\theta_T = 41.8^\circ$ beträgt, erhält man perfekte Reflexion für einen sehr breiten Wellenlängenbereich. Die Reflexionsverluste an den Ein- und Austrittsflächen des Prismas lassen sich durch dielektrische Antireflex-Schichten fast vollständig eliminieren. Damit lässt sich eine Gesamteffizienz des Systems von mehr als 99% realisieren. In analoger Weise lässt sich die Totalreflexion auch zur Umlenkung eines Strahls um 180° realisieren (Retroreflexion, siehe Abb. 2.28b).

Lichtleiter

Besondere Bedeutung kommt der Totalreflexion im Zusammenhang mit der Übertragung von Licht in lichtleitenden Glasfasern zu. Hierzu verwendet man im Allgemeinen Glasfasern, die aus einem Kern eines optisch dichten und einem Mantel eines optisch dünnen Mediums bestehen. Um den Einfluss von Verschmutzungen der Glasfaser zu vermeiden, verwendet man als optisch dünnes Medium nicht einfach Luft, sondern ein anderes Glas oder auch Kunststoff (vor allem bei Fasern mit großem Durchmesser) mit

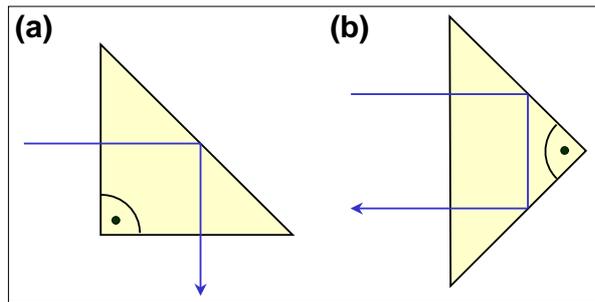


Abbildung 2.28: Anwendung der Totalreflexion: (a) Strahlableitung um 90° mit 90° Prisma; (b) 180° Retroreflexion durch zweifache Reflexion an den Katheten.

kleinerem Brechungsindex (siehe Abb. 2.29). Ist der Unterschied der Brechungsindizes groß genug, so kann man erreichen, dass sich das Licht in der inneren Glasfaser auch bei einer endlichen Krümmung verlustfrei entlang der Faser ausbreitet. Das Licht läuft praktisch um die Ecke. Die einzige Bedingung dafür ist, dass der Auftreffwinkel des Lichts auf die Grenzfläche zwischen den beiden Medien immer größer als der Totalreflexionswinkel ist.

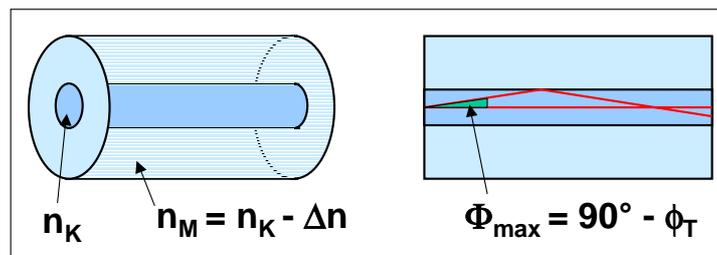


Abbildung 2.29: Schematische Darstellung eines Lichtleiters, dessen transparenter Kern einen Brechungsindex n_K hat, der um Δn größer ist als der Brechungsindex n_M des Mantels. Licht breitet sich verlustfrei aus, wenn es innerhalb des Winkels Φ_{\max} zur Strahlachse läuft.

In der Praxis verwendet man heute meist Fasern mit einem Quarzglaskern ($n_K = 1.46$) und mit Mantelgläsern, deren Brechungsindex geringfügig kleiner ist ($\Delta n \simeq 0.02$). Der Totalreflexionswinkel beträgt somit etwa 80° . Das bedeutet, dass sich das Licht verlustfrei (Absorptionsverluste seien hier vernachlässigt) im Innern der Glasfaser ausbreiten kann, wenn es innerhalb eines Kegels mit halbem Öffnungswinkel von

$$\Phi_{\max} = 90^\circ - \theta_T = 90^\circ - \arcsin\left(\frac{n_M}{n_K}\right) \simeq 10^\circ . \quad (2.6.66)$$

zur Faserachse läuft. Die Größe Φ_{\max} nennt man auch die numerische Apertur der Glasfaser. Eine numerische Apertur von 1 bedeutet, dass die Gesamtheit des Lichts, das in den Leiter über die Stirnfläche eintritt, transmittiert wird.

Es sei hier noch darauf hingewiesen, dass die Laufzeit von Licht, das sich ohne Totalreflexion durch eine Faser der Länge L ausbreitet, durch $t_F = n_K L / c$ gegeben ist. Dagegen benötigt Licht, das unter dem Winkel der Totalreflexion auf den Fasermantel auftrifft aufgrund des längeren Weges die Laufzeit

$$t'_F = \frac{n_K L}{c} \frac{1}{\cos \Phi_{\max}} \simeq \frac{n_K L}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \Phi_{\max}\right) = t_F + \Delta t . \quad (2.6.67)$$

Der Unterschied Δt der Laufzeit wird bei der Informationsübertragung in Glasfasern bedeutend. Für dicke Glasfasern ist deshalb die praktisch Übertragungslänge auf wenige Kilometer beschränkt. Verkleinert man allerdings den Faserkern auf Durchmesser in der Größenordnung der Wellenlänge des Lichts, so ist es nicht mehr erlaubt, mit ebenen Wellen zu rechnen. Es muss dann vielmehr die transversale Geometrie des Lichtwellenleiters explizit berücksichtigt werden. In Analogie zu den geführten Wellen in der Elektrodynamik (siehe Physik II) erhält man eine Ausbreitung in Moden, die durch die Feldverteilung und Ausbreitungsgeschwindigkeiten charakterisiert sind. Für sehr kleine Kerndurchmesser d gibt es nur noch eine einzige Mode (single mode fiber), wenn

$$d \leq \frac{0.76\lambda}{\sqrt{n_K^2 - n_M^2}} \quad (2.6.68)$$

gilt. In diesen *Single-Mode-Fasern* tritt für feste Wellenlängen nur noch eine Ausbreitungsgeschwindigkeit auf. Aus diesem Grund werden heute in der Fernübertragung von Information per Lichtleiter nur noch Single-Mode-Fasern verwendet. Die mögliche Übertragungslänge ist nur noch durch die Absorptionsverluste und die Dispersion der Faser beschränkt. Das Transmissionsvermögen von Glasfasern hängt stark von der Wellenlänge ab. Bei kurzen Wellenlängen ($< 1000\text{nm}$) führt die *Rayleigh-Streuung* mit ihrem $1/\lambda^4$ -Verhalten (siehe Abschnitt 2.5) zu hohen Verlusten, während im infraroten Bereich zunehmend Absorption durch Schwingungsübergänge wichtig wird. Typischerweise ist die Absorption für $\lambda \simeq 1.5\mu\text{m}$ minimal. Hier kann man mit optimierten Glasfasern Dämpfungen von weniger als 0.25 dB/km und gleichzeitig ein Produkt aus Bandbreite \times Übertragungsweg von mehr als $100\,000\text{ MHz km}$ erzielen. Toleriert man bei der Übertragung eine Abschwächung des Lichts um den Faktor 100, so kann man Information in Lichtleitern über ca. 80 km übertragen, wobei die nutzbare Modulationsbandbreite mehr als 1.25 GHz beträgt. Mon-Mode-Fasern eignen sich somit hervorragend zu Informationsübertragung. Multi-Mode-Fasern werden nur für lokale Netzwerke benutzt, bei denen die Entfernungen klein sind und dadurch die Übertragungsbandbreite noch nicht durch die Modendispersion begrenzt wird.

Intensitätsregler

Bringt man ein optisch dichtes Medium an eine totalreflektierende Grenzfläche, so wird diese gestört. Die Störung ist umso stärker, je weiter die evaneszente Welle in das Medium hineinragt. Durch Änderung des Abstands zwischen dem Medium und der totalreflektierenden Grenzfläche kann man die in das dichte Medium eingekoppelte Lichtleistung variieren. Diese Anordnung kann man also als Intensitätsregler benutzen.

Polarisatoren

Eine ausführliche Diskussion der Anwendung der Totalreflexion zur Erzeugung verschiedener Polarisationszustände der reflektierten Lichts wird in Kapitel 3 gegeben.

Gekrümmte Lichtstrahlen und Fata Morgana

Wir haben in diesem Kapitel bisher nur die Reflexion und Transmission von Licht durch scharfe Grenzflächen zwischen Medien mit unterschiedlichem Brechungsindex betrachtet. An diesen Grenzflächen

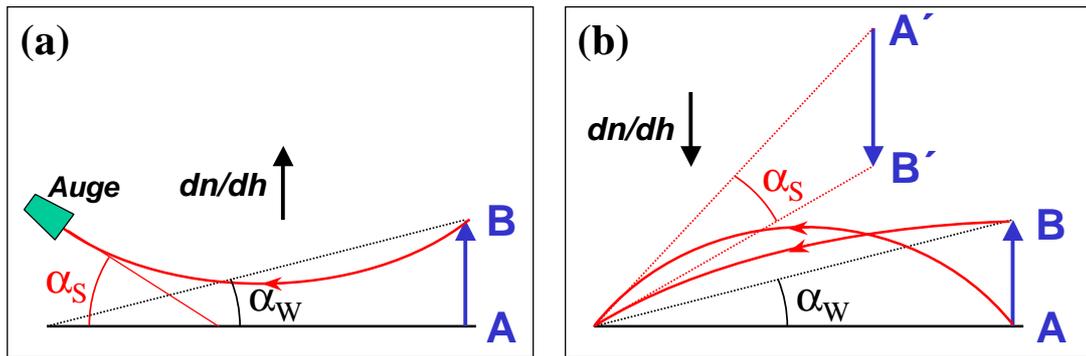


Abbildung 2.30: Krümmung von Lichtstrahlen durch einen Gradienten des Brechungsindex und Erklärung von Luftspiegelungen. (a) $dn/dh > 0$, (b) $dn/dh < 0$.

tritt eine abrupte Änderung des Brechungsindex auf. Viele optische Phänomene, die vor allem in unsere Erdatmosphäre auftreten, basieren allerdings auf kontinuierlichen Änderungen des Brechungsindex. Z.B. führt die kontinuierliche Abnahme der Dichte unsere Atmosphäre mit wachsender Höhe h zu einer kontinuierlichen Abnahme $dn/dh < 0$ des Brechungsindex. Dies führt zu einer Krümmung von Lichtstrahlen, die parallel zum Brechungsindexgradienten verlaufen.

Auch die Erscheinung der *Fata Morgana* beruht auf der Krümmung von Lichtstrahlen in der Atmosphäre (siehe Abb. 2.30). Wenn die von zwei Gegenstandspunkten A und B ausgehenden Lichtstrahlen in der Atmosphäre gekrümmt werden, so erscheint dem Beobachter, je nach Brechungsindexgradient dn/dh , ein aufrechtes oder ein auf dem Kopf stehendes Bild (Abb. 2.30a). Bei starker Erwärmung von bodennaher Luft (z.B. über einer asphaltierten Straße oder in einer Wüstenregion) kann die Dichte der Luft nach oben aufgrund eines starken Temperaturgradienten zunehmen, so dass $dn/dh > 0$. Bei genügend großer Krümmung der Lichtstrahlen ist der scheinbare Sehwinkel α_S (eine genaue Definition erfolgt in Kapitel 4) größer als der wahre Sehwinkel α_W , so dass das scheinbare Bild wesentlich näher erscheint als der wirkliche Gegenstand (Abb. 2.30b).

2.7 Das elektromagnetische Spektrum

Maxwell veröffentlichte im Jahr 1867 die erste ausführliche Abhandlung seiner Theorie des Elektromagnetismus. Bis dahin kannte man nur den Frequenzbereich, der sich vom Infraroten bis zum Ultravioletten erstreckt. Für die Optik ist dieser Frequenzbereich zwar der wichtigste, er stellt aber nur einen Bruchteil des elektromagnetischen Spektrums dar. In Abb. 2.31 werden die wichtigsten Frequenzbereiche vorgestellt, in die man das Spektrum gewöhnlich unterteilt.

Radiowellen

Im Jahr 1887 wurden von **Heinrich Hertz** elektromagnetische Wellen künstlich erzeugt und nachgewiesen.²⁰ Nach dem Entdecker der Radiowellen wird heute die Frequenz dieser Wellen in Einheiten von "Hertz" angegeben. Heute ordnen wir die von Hertz damals untersuchten Wellen dem radiofrequenten Teil des elektromagnetischen Spektrums zu, das sich von wenigen Hertz bis zu etwa 1 GHz erstreckt, was Wellenlängen von vielen Kilometern bis etwa 30 cm entspricht. Der 50 Hz Wechselstrom von Hochspannungsleitungen sendet z.B. Strahlung mit einer Wellenlänge von 6×10^6 m aus.

Mikrowellen

Der Frequenzbereich der Mikrowellen erstreckt sich von etwa 1 GHz bis 300 GHz, die dazugehörigen Wellenlängen liegen zwischen 30 cm und 1 mm. Da Strahlung mit einer Wellenlänge zwischen 1 cm und 30 m die Erdatmosphäre durchdringen kann, sind Mikrowellen wichtig für die Satellitenkommunikation. Auch in der Radioastronomie spielen Mikrowellen eine wichtige Rolle. Z.B. senden ungeladene Wasserstoffatome, die in weiten Bereichen des Universum vorkommen, 21 cm Wellen aus. Diese Strahlung lieferte viel Information über die Struktur des Universums.

Infrarotstrahlung

Der infrarote Frequenzbereich erstreckt sich von etwa 300 GHz bis 4 THz.²¹ Er wurde 1800 von dem Astronomen **Sir William Herschel** (1738 - 1822) entdeckt. Wie der Name besagt, liegt dieses Frequenzband direkt unterhalb des sichtbaren Spektralbereichs. Man teilt es gewöhnlich in das nahe IR (780 - 3 000 nm), das mittlere IR (3 000 - 6 000 nm), das ferne IR (6 000 - 15 000 nm) und das extrem ferne IR (15 000 nm - 1 mm) ein, wobei diese Einteilung nicht streng festgelegt ist.

Sichtbares Licht

Der Bereich des sichtbaren Lichts erstreckt sich von etwa 3.84×10^{14} bis 7.69×10^{14} Hz, was einem Wellenlängenbereich zwischen 720 und 390 nm entspricht. **Newton** erkannte als erster, dass weißes Licht in Wirklichkeit ein Gemisch aller Farben des sichtbaren Bereichs ist. Die Wellenlängen- und Frequenzbereiche der verschiedenen Farbtöne kann man wie folgt einteilen:

Farbe	λ (nm)	ν (THz)	Farbe	λ (nm)	ν (THz)
Rot	720 - 622	384 - 482	Grün	577 - 492	520 - 610
Orange	622 - 597	482 - 503	Blau	492 - 455	610 - 659
Gelb	597 - 577	503 - 520	Violett	455 - 390	659 - 769

²⁰Heinrich Hertz war damals Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe.

²¹1 THz = 10^{12} Hz.

Frequenz ν (Hz)	Wellenlänge λ (m)		Mikroskopische Quelle	Nachweis	Künstliche Erzeugung
10^{21}	10^{-12} 1 pm	γ -Strahlen	Atomkerne	Geiger- und Szintillationszähler	Beschleuniger
10^{18}	10^{-9} 1 nm	Röntgenstrahlen	innere Elektronen	Ionisations-Kammer	Röntgenröhre
10^{15}	10^{-6} 1 μ m	Ultraviolett sichtbares Licht	innere und äußere Elektronen Valenzelektronen		Photoelektrischer Photomultiplier Auge Bolometer
10^{12} 1 THz	10^{-3} 1 mm	Infrarot	Molekülschwingungen und -rotationen	Thermosäule	
10^9 1 GHz	10^0 1 m	Mikrowellen Radar	Elektronenspin, Kernspin	Kristall	Magnetron, Klystron, Wanderfeldröhre
10^6 1 MHz	10^3 1 km	UHV VHF, TV UKW Rundfunk Radiowellen		Elektronische Schaltkreise	Elektronische Schaltkreise
10^3 1 kHz		Wechselstrom			Wechselstromgeneratoren

Abbildung 2.31: Das elektromagnetische Spektrum.

Ultraviolettes Licht

Dem Bereich des sichtbaren Lichts schließt sich zu kürzeren Wellenlängen der Bereich der ultravioletten Strahlung an (etwa $8 \times 10^{14} - 3 \times 10^{16}$ Hz). Die Energie der ultravioletten Strahlung²² reicht aus, um die Atome in der Hochatmosphäre zu ionisieren. Dadurch entsteht die Ionosphäre. Die Energie von UV-Licht liegt auch im Bereich vieler chemischer Reaktionen, welche daher auch durch UV-Licht ausgelöst werden können. Zum Glück enthält unsere Atmosphäre Ozon, das einen Großteil der UV-Strahlung der Sonnen absorbiert. Würde die UV-Strahlung ungehindert auf die Erdoberfläche gelangen, so wäre sie für uns tödlich.

Röntgen-Strahlung

Die Röntgen-Strahlung wurde 1895 von **Wilhelm Conrad Röntgen** entdeckt. Ihr Frequenzbereich erstreckt sich von etwa 2.4×10^{16} bis 5×10^{19} Hz. Die entsprechenden Wellenlängen sind sehr kurz und liegen im Bereich atomarer Abmessungen. Röntgenlicht wird heute sehr vielfältig zur Analyse der Kristallstruktur von Festkörpern und in der Medizintechnik eingesetzt.

²²Die Energie der Photonen liegt im Bereich von 3.2 bis 100 eV. Der Begriff des Photons, des Quants der elektromagnetischen Strahlung, wird erst später eingeführt.

Gamma-Strahlung

Die Gammastrahlen bilden das hochenergetische (10^4 bis 10^{19} eV) bzw. kurzwellige Ende des elektromagnetischen Spektrums. Die Gammastrahlen werden bei Übergängen innerhalb des Atomkerns emittiert.

2.8 Anmerkungen zur Quantenfeldtheorie

Zusammenfassung

Elektromagnetische Wellen im Vakuum:

- Alle elektromagnetischen Wellen im Vakuum sind Lösungen der Wellengleichung

$$\Delta \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{mit } \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2},$$

die aus den Maxwell-Gleichungen abgeleitet werden kann.

- Ebene Wellen der Form

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$$

sind wichtige Spezialfälle der allgemeinen Lösung.

- Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von elektromagnetischen Wellen im Vakuum beträgt unabhängig von deren Frequenz

$$c = \omega/k = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 299\,792\,485 \text{ m/s.}$$

- Zwischen elektrischem und magnetischem Feld einer elektromagnetischen Welle bestehen folgende Beziehungen:

$$|\mathbf{E}| = \frac{\omega}{k} |\mathbf{B}| = c |\mathbf{B}|.$$

\mathbf{E} , \mathbf{B} und \mathbf{k} bilden ein Rechtssystem:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}.$$

- Elektromagnetische Wellen transportieren Energie und Impuls, wobei der Poynting-Vektor

$$\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

die Richtung des Energietransports angibt.

Die Intensität I einer elektromagnetischen Welle ist durch die Energie, die pro Sekunde durch die Fläche 1 m^2 transportiert wird, gegeben und beträgt

$$I = \langle |\mathbf{S}| \rangle = \frac{1}{2} E_0 H_0.$$

Der Strahlungsdruck einer ebenen elektromagnetischen Welle beträgt

$$P_S = \frac{\langle |\mathbf{S}| \rangle}{c}.$$

Dies entspricht einem Impuls pro Volumeneinheit von

$$\Pi_S = \frac{\langle |\mathbf{S}| \rangle}{c^2}.$$

Elektromagnetische Wellen in Materie:

- Die Phasengeschwindigkeit von elektromagnetischen Wellen in Materie mit dem Brechungsindex n beträgt

$$v_{\text{ph}} = \frac{c}{n}.$$

Die Phasengeschwindigkeit hängt wegen $n = n(\omega)$ von der Frequenz ab (Dispersion).

- Der Brechungsindex ist im Allgemeinen eine komplexe Zahl

$$n = n_R + i\kappa,$$

wobei der Realteil n_R die Dispersion und der Imaginärteil κ die Absorption der Welle angibt.

- Die Gruppengeschwindigkeit eines Wellenpaketes beträgt

$$v_{\text{gr}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n} \left(1 - \frac{dn}{d\lambda} \right).$$

Für transparente Materialien ist $dn_R/d\omega$ über weite Frequenzbereiche positiv und κ kann vernachlässigt werden: *normale Dispersion*. Im Bereich *anomaler Dispersion* in der Umgebung von Resonanzfrequenzen ist $dn_R/d\omega$ negativ und κ kann nicht mehr vernachlässigt werden.

- Die Intensität einer in y -Richtung auf ein absorbierendes Medium auftreffenden Welle klingt gemäß

$$I = I_0 \exp(-\beta y) \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{2\omega}{c} \kappa$$

im absorbierenden Medium ab (*Beersches Absorptionsgesetz*).

- Licht wird von Atomen, Molekülen und Mikropartikeln gestreut. Dabei tritt *kohärente Streuung* auf, wenn die Streuer regelmäßige, zeitlich konstante Abstände besitzen. Hier sind Interferenzeffekte wichtig. Die Gesamtintensität der gestreuten Welle erhält man durch Summation der Streuamplituden und anschließendes Quadrieren der Summe:

$$I = \left(\sum A_k \right)^2.$$

Bei unregelmäßigen oder zeitlich fluktuierenden Abständen tritt *inkohärente Streuung* auf. Interferenzeffekte spielen hier keine Rolle. Die Gesamtintensität der gestreuten Welle erhält man hier durch Summation der Quadrate der Streuamplituden:

$$I = \sum |A_k|^2 = \sum I_k.$$

- Die Ausbreitungsrichtungen bei der Reflexion und Transmission von Licht an einer Grenzfläche zwischen zwei homogenen Medien mit Brechungsindex n_e und n_t wird durch das *Reflexionsgesetz* und *Snelliussche Brechungsgesetz* beschrieben:

$$\begin{aligned}\theta_e &= \theta_r && \text{Einfallswinkel} = \text{Reflexionswinkel} \\ \frac{\sin \theta_e}{\sin \theta_t} &= \frac{n_t}{n_e} = n \quad .\end{aligned}$$

- Die Amplitudenverhältnisse der senkrecht (TE-Polarisation) und parallel (TM-Polarisation) zur durch die Wellenvektoren der einfallenden, der reflektierten und der transmittierten Welle aufgespannten Streuebene stehenden elektrischen Feldkomponente werden durch die *Fresnelschen Gleichungen* beschrieben:

$$\begin{aligned}r_{\perp} &= \left. \frac{E_r}{E_e} \right|_{\text{TE}} = -\frac{\sin(\theta_e - \theta_t)}{\sin(\theta_e + \theta_t)} \\ r_{\parallel} &= \left. \frac{E_r}{E_e} \right|_{\text{TM}} = -\frac{\tan(\theta_e - \theta_t)}{\tan(\theta_e + \theta_t)} \\ t_{\perp} &= \left. \frac{E_t}{E_e} \right|_{\text{TE}} = \frac{2 \cos \theta_e \sin \theta_t}{\sin(\theta_e + \theta_t)} \\ t_{\parallel} &= \left. \frac{E_t}{E_e} \right|_{\text{TM}} = -\frac{2 \cos \theta_e \sin \theta_t}{\sin(\theta_e + \theta_t) \cos(\theta_e - \theta_t)} \quad .\end{aligned}$$

- Beim *Brewster-Winkel*

$$\theta_B = \arctan n$$

wird die Amplitude der reflektierten parallelen Feldkomponente Null ($r_{\parallel}(\theta_e = \theta_B) = 0$).

- Fällt die elektromagnetische Welle vom optisch dünneren auf ein optisch dichteres Medium ($n_e < n_t$), spricht man von äußerer Reflexion, im umgekehrten Fall von innerer Reflexion.
- Bei innerer Reflexion tritt ab einem Grenzwinkel

$$\theta_T = \arcsin n$$

Totalreflexion auf.

- Im Bereich der Totalreflexion klingt die elektromagnetische Welle im optisch dünneren Medium in der Richtung senkrecht zur Grenzfläche exponentiell ab. Man spricht von einer evaneszenten Welle. Bringt man ein zweites optisch dünnes Medium zwischen zwei optisch dichte Medien, so tritt im Winkelbereich der Totalreflexion ein Teil der Welle über, falls das optisch dünne Medium eine sehr kleine Dicke ($d \sim \lambda$) hat. Man spricht von optischem Tunneln.
- Bei innerer Reflexion tritt im Bereich der Totalreflexion eine winkelabhängige Phasenschiebung Δ zwischen der senkrechten und parallelen Feldkomponente auf:

$$\tan \frac{\Delta}{2} = \tan \left(\frac{\delta_{\parallel}}{2} - \frac{\delta_{\perp}}{2} \right) = \frac{\cos \theta_e \sqrt{\sin^2 \theta_e - n^2}}{\sin^2 \theta_e}.$$

- Für das Reflexionsvermögen $R = |r|^2$ und Transmissionsvermögen $T = |t|^2$ gilt

$$R + T = 1,$$

wenn keine Absorption stattfindet.

Für senkrechten Einfall gilt

$$R = \left(\frac{n_e - n_t}{n_e + n_t} \right)^2 = \left(\frac{1 - n}{1 + n} \right)^2.$$

Für absorbierende Medien mit $n = n_R + i\kappa$ ergibt sich

$$R = \frac{(n_R - 1)^2 + \kappa^2}{(n_R + 1)^2 + \kappa^2}.$$