

## Kapitel 4

# Geometrische Optik

Die geometrische Optik oder Strahlenoptik beschäftigt sich mit dem, was die meisten Laien unter dem Begriff Optik verstehen, nämlich mit dem Verlauf von *Lichtstrahlen* in optischen Systemen, die aus Linsen und Spiegeln zusammengesetzt sind. Die Ausbreitungsrichtung einer Welle ist in isotropen Medien durch die Normale auf der Phasenfläche, die durch  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = \text{const}$  definiert ist, bestimmt. Grenzt man eine Welle durch Berandungen ein, so nennen wir den begrenzten Teil der Welle ein *Lichtbündel*. Die Strahlengänge in optischen Systemen lassen sich meist mit relativ einfachen Regeln beschreiben. Auch Abbildungsfehler können im Rahmen dieser einfachen Modellvorstellung beschrieben werden. Die Wellennatur des Lichts ist für diese Fragestellungen von untergeordneter Bedeutung.

Würde man der geschichtlichen Entwicklung folgen, so müsste das Kapitel über die geometrische Optik eigentlich denen über die elektromagnetischen Wellen und die Polarisation vorangestellt werden, da Linsen und Spiegel schon lange vor dem Aufkommen der elektromagnetischen Wellen bekannt waren und vielseitig angewendet wurden. Hat man allerdings die Grundlagen der elektromagnetischen Theorie des Licht erst einmal verinnerlicht, so lassen sich die Möglichkeiten und Grenzen der geometrischen Optik wesentlich besser verstehen. Generell kann man das Verhältnis von geometrischer Optik und Wellenoptik ähnlich sehen wie das zwischen klassischer Mechanik und Quantenmechanik. In der geometrischen Optik betrachtet man die Ausbreitung von Lichtstrahlen. Hierbei gelten die folgenden Grundregeln, die man sowohl aus der experimentellen Erfahrung kennt, als auch aus theoretischen Überlegungen ableiten kann:

- Lichtstrahlen breiten sich in einem homogenen Medium geradlinig aus.
- An Grenzschichten zwischen zwei Medien verhalten sich Lichtstrahlen entsprechend dem *Snellius'schen Brechungsgesetz*.
- Mehrere Strahlbündel, die sich durchdringen, beeinflussen sich im Rahmen der linearen Optik nicht (im Bereich der nichtlinearen Optik gilt dies nicht mehr, siehe Kapitel 8).

Die beiden ersten Regeln lassen sich aus dem weiter unten diskutierten Fermatschen Prinzip (siehe Abschnitt 4.1.2) bzw. aus der Theorie elektromagnetischer Wellen ableiten.

Es stellt sich natürlich die Frage, warum wir nicht die Theorie der elektromagnetischen Wellen verwenden, um optische Systeme zu beschreiben. Hierzu kann man antworten, dass es generell möglich ist, optische Instrumente wie z.B. ein Mikroskop mit Hilfe der Wellenoptik zu beschreiben. Man gelangt aber, wenn man von idealisierten Systemen (z.B. eine Grenzfläche zwischen unendlich ausgedehnten homogenen Medien) abgeht, sehr schnell an die Grenzen einer sinnvollen Anwendung der Wellentheorie. Betrachten man zum Beispiel die Abbildung einer Landschaft mit einer Kamera, so muss man

im Rahmen der Wellentheorie wie folgt vorgehen. Man muss zunächst die Randbedingungen festlegen, was bedeutet, dass man für jeden Punkt der Landschaft das elektrische Feld und die Polarisation nach Betrag und Richtung als Funktion der Zeit angeben muss. Diese Information muss mit einer räumlichen Auflösung bestimmt werden, die unterhalb der Wellenlänge liegt. Will man dann eine Fläche von  $10 \times 10 \text{ m}^2$  abbilden, so benötigt man bei einer Wellenlänge von  $\lambda = 500 \text{ nm}$  und einer Rasterung von  $\lambda/5$  bereits  $10^{16}$  Gegenstandspunkte für die Randbedingungen, wobei wir die zeitliche Variation noch nicht berücksichtigt haben. Unter Berücksichtigung der zeitabhängigen Randbedingungen müssen anschließend die Maxwell-Gleichungen gelöst werden. Man sieht sofort, dass diese Aufgabe sehr komplex ist und selbst sehr leistungsfähige Computersysteme überfordern würde.<sup>1</sup> Deshalb muss man versuchen, die gestellte Aufgabe (Abbildung einer Landschaft) mit einer einfacheren Beschreibungsweise zu lösen. In diesem Kapitel soll als die weitreichendste Vereinfachung die geometrische Optik vorgestellt werden, bei der die Wellennatur des Lichts vollkommen vernachlässigt wird. Da die geometrische Optik aus der Maxwell'schen Theorie durch den Grenzübergang  $\lambda \rightarrow 0$  erhalten wird, können mit der geometrischen Optik natürlich nur solche Probleme beschrieben werden, bei denen die Abmessungen der Elemente (z.B. Durchmesser eine Begrenzung) viel größer als die Wellenlänge  $\lambda$  des Lichts sind.<sup>2</sup> Anders ausgedrückt können wir die Näherung der geometrischen Optik nur dann anwenden, wenn der Querschnitt der Lichtbündel groß gegen die Wellenlänge des Lichts ist.

Aus unserer Diskussion folgt sofort, dass die geometrische Optik keine Beugungseffekte beschreiben kann und damit nicht das Auflösungsvermögen optischer Instrumente vorhersagen kann. Von einem praktischen Gesichtspunkt aus beantwortet die geometrische Optik aber die meisten Fragen in Bezug auf optische Instrumente sehr gut und vor allem sehr viel einfacher als die Wellentheorie. Sie versagt nur für sehr kleine Objekte wie z.B. für optische Fasern oder den Durchgang von Licht durch kleine Öffnungen. Diese Fragestellungen werden wir erst in Kapitel 5 diskutieren.

In der geometrischen Optik wird die Ausbreitung von Licht in Form von Strahlen behandelt. Wir werden uns in diesem Kapitel bei der Diskussion von Linsensystemen hauptsächlich auf die *paraxiale Näherung* beschränken. Diese Näherung basiert auf der Annahme, dass für ein gegebenes optisches System eine *optische Achse* definiert werden kann und dass alle Strahlen annähernd parallel zu dieser Achse verlaufen. Daran schließt sich eine nützliche Formulierung der paraxialen geometrischen Optik mit Hilfe von Linearer Algebra und Matrizenrechnung an. Nicht-paraxiale Systeme werden wir nur am Rande behandeln, da sie durch *Aberrationseffekte* viele Probleme komplizieren.

Optische Systeme bestehen im Allgemeinen aus folgenden Elementen:

- **dünne Linsen:**

Dünne Linsen werden zum Beispiel in Brillen und Lupen verwendet, sie bündeln oder zerstreuen Lichtstrahlen.

- **zusammengesetzte Linsen:**

Zusammengesetzte Linsen werden als Ergänzung zu dünnen Linsen verwendet, um die verschiedenen Arten von Aberrationen zu korrigieren, Beispiele sind achromatische Doppellinsen und Mikroskopobjektive.

- **ebene Spiegel und Prismen:**

Diese kehren den optischen Weg des Lichts um und werden oft dazu benutzt, ein Bild umzukehren, wie beispielsweise im Fernglas.

<sup>1</sup>Bei den mit Hilfe der Wellentheorie behandelten Probleme wurden meist Wellen und Grenzflächen mit unendlicher geometrischer Ausdehnung betrachtet. Das heißt, die Wellenlänge war die einzige inhärente Längenskala des Problems. Diese abstrakte Betrachtungsweise hat es uns erlaubt, mit Hilfe der Wellentheorie mathematisch exakte Lösungen für Grenzflächenprobleme zu erhalten.

<sup>2</sup>Solche Systeme werden zum Beispiel in allen Experimenten zur Demonstration von Grenzflächeneffekten verwendet.

- **sphärische und parabolische Spiegel:**

Diese werden in großen optischen Instrumenten, z.B. Teleskopen verwendet und ersetzen Linsen. Sie werden auch bei Wellenlängen eingesetzt, die von den üblichen optischen Materialien absorbiert werden.

Wir werden in diesem Kapitel den Schwerpunkt auf Linsensysteme setzen und Spiegelsysteme nur am Rande behandeln. Der Grund hierfür ist, dass sich gekrümmte Spiegel sehr ähnlich wie Linsen verhalten. Eine ausführliche Diskussion von Spiegelsystemen kann z.B. in **R. Kingslake**, *Optical System Design*, Academic Press, Orlando (1983) gefunden werden.

Die meisten Linsen haben aufgrund des einfacheren Schliffs und der Politur meist kugelförmige Oberflächen. Generell haben Kugelflächen aber keine besonderen Eigenschaften, die sich von ellipsoidischen, parabolischen oder anderen analytischen Oberflächenformen unterscheiden. Insbesondere treten Aberrationen bei allen auf. Bei so genannten *aplanatischen Systemen* erweisen sich allerdings Kugelflächen als perfekte Lösung für wichtige Probleme, wie beispielsweise beim Design von Mikroskopobjektiven.

## 4.1 Grundlegende Konzepte zur geometrischen Optik

### 4.1.1 Lichtquellen

Bei der Behandlung von Problemen der geometrischen Optik werden wir wiederholt mit dem Problem einer *punktförmigen Lichtquelle* konfrontiert werden. Es ist daher angebracht unsere Ausführungen mit der Beschreibung einer punktförmigen Lichtquelle zu beginnen. Wir tun dies auch deshalb, weil wir auf diese Art ein der ebenen Welle komplementäres Beispiel für die Lösung der Wellengleichungen  $\Delta f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$  erhalten, wobei  $v$  die Phasen- oder Wellengeschwindigkeit ist. Eine punktförmige Störung muss bei Annahme eines isotropen Raums zu einer isotropen Welle führen. Daher werden wir das Problem mit Polarkoordinaten beschreiben. Der Laplace Operator kann in Polarkoordinaten wie folgt ausgedrückt werden:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} . \quad (4.1.1)$$

Da wir aber nach isotropen Lösungen suchen, das heißt nach solchen, die nicht von  $\theta$  oder  $\phi$  abhängen, erhält man die Wellengleichung in Polarkoordinaten zu:

$$\Delta f(r,t) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f(r,t)) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(r,t) . \quad (4.1.2)$$

Die allgemeine Lösung von (4.1.2) lautet

$$f(r,t) = \frac{f(r \pm vt)}{r} . \quad (4.1.3)$$

Eine spezielle Lösung stellt die harmonische Kugelwelle

$$f(r,t) = A \frac{e^{i(kr \pm \omega t)}}{r} \quad (4.1.4)$$

dar. Hierbei wird  $A$  als Quellstärke bezeichnet. Die Intensität einer Kugelwelle nimmt folglich mit  $1/r^2$  ab.<sup>3</sup>

Wir können die Lösung der Wellengleichung ganz allgemein als

$$f(\mathbf{r},t) = A(\mathbf{r},t) e^{i\Psi(\mathbf{r},t)} \quad (4.1.5)$$

<sup>3</sup>Dies muss so sein, da die abgestrahlte Energie pro Raumwinkel konstant sein muss.

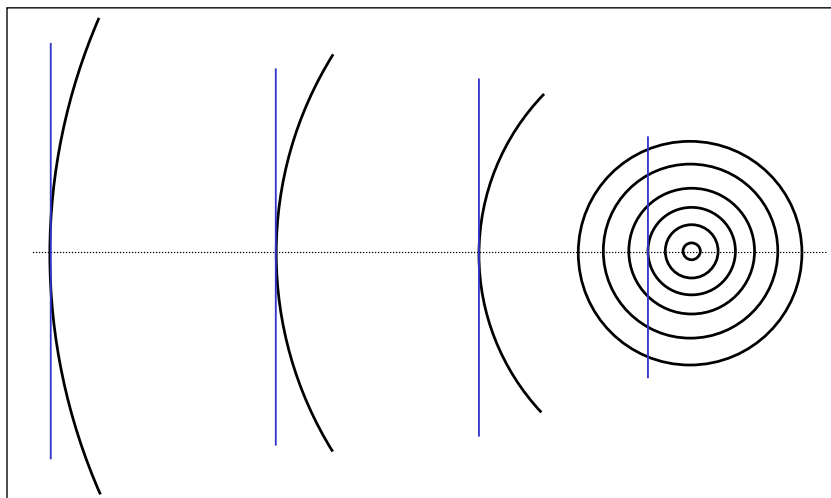


Abbildung 4.1: Linear polarisiertes Licht. (a) Beobachtung an einem festen Ort; Lokale Annäherung einer Kugelwelle durch eine ebene Welle. Die ebene Welle stellt für große Abstände eine gute Näherung dar.

schreiben, wobei die Amplitude im Allgemeinen eine orts- und zeitabhängige Funktion ist. Die Funktion  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  wird als *Eikonal* der Welle bezeichnet und steigt im Grenzfall  $\lambda \rightarrow 0$  beliebig schnell mit  $r$  an.<sup>4</sup>

Für hinreichend kleine Raumbereiche sowie hinreichend kurze Zeitintervalle können wir eine beliebige Welle immer durch eine ebene Welle (siehe hierzu Abb. 4.1)

$$f(\mathbf{r}, t) = a e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi)} \quad (4.1.6)$$

annähern. Für den lokalen Wellenvektor und die lokale Frequenz gilt

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}, t) = \nabla \Psi \quad \text{und} \quad \omega(\mathbf{r}, t) = -\partial_t \Psi, \quad (4.1.7)$$

wobei wir das Eikonal nach  $\mathbf{r}$  und  $t$  entwickelt haben. Solange wir nicht angeben können, wie sich die lokalen Wellenfronten (Flächen konstanten Eikonals) zeitlich und räumlich verändern, ist die lokale Beschreibung durch ebene Wellen nicht besonders hilfreich. Bei dieser Aufgabe hilft uns aber die Wellengleichung weiter. Durch Einsetzen von (4.1.5) in die Wellengleichung  $\Delta f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$  erhält man die so genannte *Eikonal-Gleichung*

$$(\nabla \Psi)^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0. \quad (4.1.8)$$

<sup>4</sup>Das Eikonal nimmt beim Fortschreiten um eine Wellenlänge um den Faktor  $2\pi$  zu.

### 4.1.2 Das Fermat'sche Prinzip

Die Beschreibung der Lichtausbreitung in inhomogenen Medien, das heißt in Medien, in denen sich der Brechungsindex kontinuierlich mit dem Ort ändert, ist mit Hilfe des mit der Wellentheorie abgeleiteten Brechungs- und Reflexionsgesetzes häufig nicht möglich. Lassen wir in einem inhomogenen Medium z.B. Licht von einer punktförmigen Lichtquelle loslaufen, kann es im Prinzip verschiedene Wege zu einem Beobachter wählen. Die Frage ist nun, welchen Weg das Licht tatsächlich nehmen wird. **Fermat** war der erste, der feststellte, dass das Licht wohl immer den Weg einschlägt, auf dem es in kürzester Zeit beim Beobachter eintrifft (entsprechend einem Ökonomiegedanken der Natur).<sup>5</sup> Die geradlinige Ausbreitung von Licht in einem homogenen Medium ist ein offensichtliches Ergebnis dieser Tatsache. Ferner lassen sich die Gesetze der Brechung und Reflexion daraus ableiten. Wenn man dieses Prinzip anwendet, ist es nützlich, den *optischen Pfad* von der Lichtquelle am Punkt  $A$  zum Beobachter am Punkt  $B$  zu definieren:

$$\overline{AB} = \int_A^B n(s) ds . \quad (4.1.9)$$

Hierbei ist  $n(s)$  der Brechungsindex am Punkt  $s$  des Pfades. Man kann den lokalen Brechungsindex aus  $n(s) = c/v(s)$  berechnen. Die Zeit, die das Licht zum Zurücklegen der Strecke zwischen  $A$  und  $B$  benötigt, ist dann  $\overline{AB}/c$ .

Das *Fermat'sche Prinzip* besagt nun folgendes:

Die Lichtausbreitung in einem inhomogenen Medium erfolgt derart, dass der optische Weg  $\overline{AB}$  entlang des benutzten geometrischen Pfades  $S_0$  gegenüber benachbarten geometrischen Pfaden  $S_i$  einen Extremalwert besitzt.

Das bedeutet, dass

$$\left( \frac{\delta \overline{AB}}{\delta S} \right)_{S_0} = \delta \int_A^B n(s) ds = 0 \quad (4.1.10)$$

gilt. Hierbei soll  $\delta$  eine infinitesimale Variation des optischen Weges gegenüber dem kürzesten Weg  $S_0$  bedeuten.

Das Fermat'sche Prinzip lässt sich aus den Maxwell-Gleichungen, d.h. im Rahmen der Wellentheorie, ableiten. Hierzu muss man das Phänomen Interferenz benutzen, das wir erst später diskutieren werden. Die grundlegende Idee ist aber einfach und kann bereits jetzt verstanden werden. Im Rahmen der Wellentheorie kann man sich vorstellen, dass Lichtwellen auf verschiedenen Pfaden von  $A$  nach  $B$  gelangen können (siehe Abb. 4.2). Die Feldstärke am Beobachtungsort  $B$  erhält man durch phasenrichtige Aufsummation über alle möglichen Pfade. In diesem Fall werden nur solche Pfade merklich zur Gesamtfeldstärke bei  $B$  beitragen, für die sich bei einer kleinen Änderung  $\delta S$  des Pfades die Phase  $\varphi$  des ankommenden Lichts nur unwesentlich ändert. Ansonsten träte destruktive Interferenz auf, die zur Auslöschung der

<sup>5</sup>Wir werden weiter unten sehen, dass dies nicht immer der Fall ist und Licht auch einen Weg einschlagen kann, auf dem es am längsten zum Beobachter unterwegs ist.

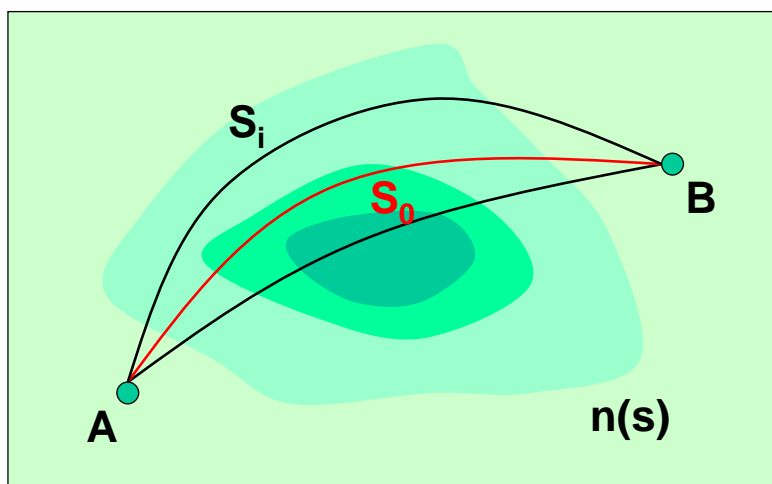


Abbildung 4.2: Das Fermat'sche Prinzip: Die Lichtausbreitung erfolgt auf dem Wege  $S_0$ , für den ein Extremum des optischen Weges vorliegt.

Feldstärke führen würde. Mathematisch formuliert bedeutet dies, dass für den tatsächlich benutzten Pfad ein Extremum der Phasenänderung  $\varphi(\overline{AB})$  zwischen Anfangs- und Endpunkt

$$\varphi(\overline{AB}) = \int_A^B \mathbf{k}(s) \cdot ds . \quad (4.1.11)$$

vorliegen muss. Wegen  $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}$  ist die Forderung (4.1.11) identisch mit der Forderung (4.1.9).

Das Fermat'sche Prinzip lässt sich auch mit Hilfe der Eikonal-Gleichung verstehen. Es lässt sich zeigen, dass die Eikonal-Gleichung einer Hamilton-Jacobi Formulierung zugänglich ist, d.h. dass die Strahlausbreitung über ein Wirkungsintegral beschrieben werden kann, wobei  $\mathbf{k} = -\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}}$  und  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$  die Rolle der Hamilton-Variablen  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{v}$  übernehmen und das Wirkungsintegral mit dem Eikonal gleichzusetzen ist. Aus dem *Maupertius'schen Prinzip der Mechanik*  $\delta S = \delta \int \mathbf{p} \cdot ds = 0$  wird dann das Fermat'sche Prinzip der Optik:  $\delta \varphi = \delta \int \mathbf{k} \cdot ds = 0$ . Da im homogenen, linearen Medium  $k = \omega/cn$  gilt, folgt  $\delta \int \mathbf{n} \cdot ds = 0$ .

Aus dem Fermat'schen Prinzip ergeben sich folgende interessante Konsequenzen:

- Das Fermat'sche Prinzip gilt auch für die Bildentstehung. Wenn alle Pfade von  $A$  nach  $B$  den gleichen optischen Weg besitzen, so interferieren die ankommenden Wellen alle konstruktiv. In diesem Fall wird kein spezieller Pfad vom Licht ausgewählt.
- Aus dem Fermat'schen Prinzip folgt, dass der Strahlengang umkehrbar sein muss (außer im Fall eines richtungsabhängigen Brechungsindex, wie wir ihn bei der optischen Aktivität kennengelernt haben), da der Hin- und Rückweg gleich lang sind.
- Aus dem Fermat'schen Prinzip folgt das *Snellius'sche Brechungsgesetz*. Hierzu betrachten wir die in Abb. 4.3a gezeigte Grenzfläche zwischen zwei Medien mit Brechungsindizes  $n_e$  und  $n_t$ . Zwei benachbarte Pfade zwischen  $A$  und  $B$  gehen durch die Punkte  $C_1$  und  $C_2$ , wobei  $\overline{C_1 C_2} = d$ . Der optische Weglängenunterschied zwischen beiden Pfaden ist im Falle von  $d \ll \overline{AC_1}, \overline{BC_1}$  gegeben durch

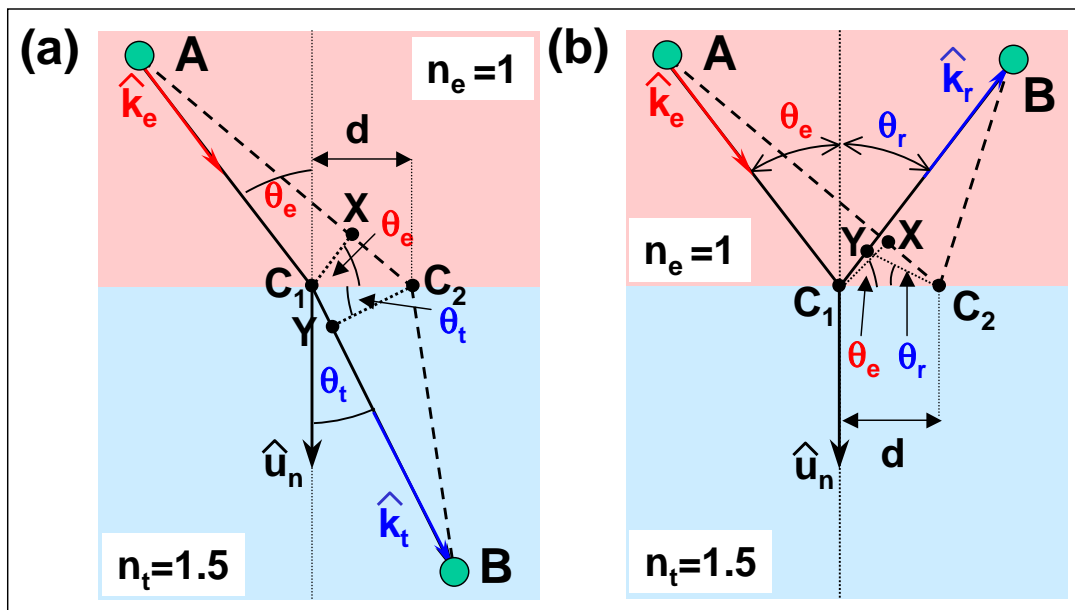


Abbildung 4.3: Ableitung des Snellius'schen Brechungsgesetz mit Hilfe des Fermat'schen Prinzips.

$$n_e \overline{XC_2} - n_t \overline{YC_1} \simeq n_e d \sin \theta_e - n_t d \sin \theta_t . \quad (4.1.12)$$

Dieser Weglängenunterschied muss für den minimalen oder maximalen optischen Weg Null werden, das heißt es muss gelten

$$n_e d \sin \theta_e = n_t d \sin \theta_t \quad \text{oder} \quad \frac{\sin \theta_e}{\sin \theta_t} = \frac{n_t}{n_e} = n . \quad (4.1.13)$$

Das Fermat'sche Prinzip führt also auf das Snellius'sche Brechungsgesetz. Mit den in Abb. 4.3a eingeführten Einheitsvektoren  $\hat{\mathbf{k}}_e$  und  $\hat{\mathbf{k}}_t$  in Einfall- und Brechungsrichtung sowie dem Einheitsvektor  $\hat{\mathbf{u}}_n$  der senkrecht auf der Grenzfläche steht, kann man das Brechungsgesetz auch in vektorieller Form schreiben:<sup>6</sup>

<sup>6</sup>Mit  $\sin \theta_e = |\hat{\mathbf{k}}_e \times \hat{\mathbf{u}}_n|$  und  $\sin \theta_t = |\hat{\mathbf{k}}_t \times \hat{\mathbf{u}}_n|$  kann man schreiben

$$n_e (\hat{\mathbf{k}}_e \times \hat{\mathbf{u}}_n) = n_t (\hat{\mathbf{k}}_t \times \hat{\mathbf{u}}_n)$$

und damit

$$n_e (\hat{\mathbf{k}}_e \times \hat{\mathbf{u}}_n) \times \hat{\mathbf{u}}_n = n_t (\hat{\mathbf{k}}_t \times \hat{\mathbf{u}}_n) \times \hat{\mathbf{u}}_n .$$

Durch Umformen erhält man

$$n_e [(\hat{\mathbf{u}}_n \cdot \hat{\mathbf{u}}_n) \hat{\mathbf{k}}_e - (\hat{\mathbf{u}}_n \cdot \hat{\mathbf{k}}_e) \hat{\mathbf{u}}_n] = n_t [(\hat{\mathbf{u}}_n \cdot \hat{\mathbf{u}}_n) \hat{\mathbf{k}}_t - (\hat{\mathbf{u}}_n \cdot \hat{\mathbf{k}}_t) \hat{\mathbf{u}}_n]$$

und mit  $(\hat{\mathbf{u}}_n \cdot \hat{\mathbf{u}}_n) = 1$  sowie  $(\hat{\mathbf{u}}_n \cdot \hat{\mathbf{k}}_e) = \cos \theta_e$  bzw.  $(\hat{\mathbf{u}}_n \cdot \hat{\mathbf{k}}_t) = \cos \theta_t$  weiterhin

$$n_e [\hat{\mathbf{k}}_e - \cos \theta_e \hat{\mathbf{u}}_n] = n_t [\hat{\mathbf{k}}_t - \cos \theta_t \hat{\mathbf{u}}_n]$$

und damit schließlich

$$n_t \hat{\mathbf{k}}_t = n_e \hat{\mathbf{k}}_e + [n_t \cos \theta_e - n_e \cos \theta_t] \hat{\mathbf{u}}_n$$



$$n_t \hat{\mathbf{k}}_t = n_e \hat{\mathbf{k}}_e + (n_t \cos \theta_t - n_e \cos \theta_e) \hat{\mathbf{u}}_n . \quad (4.1.14)$$

- Aus dem Fermat'schen Prinzip folgt das *Reflexionsgesetz*. Hierzu betrachten wir die in Abb. 4.3b gezeigte Grenzfläche. Zwei benachbarte Pfade zwischen  $A$  und  $B$  gehen durch die Punkte  $C_1$  und  $C_2$ , wobei  $\overline{C_1 C_2} = d$ . Der optische Weglängenunterschied zwischen beiden Pfaden ist im Falle von  $d \ll \overline{AC_1}, \overline{BC_1}$  gegeben durch

$$n_1 \overline{XC_2} - n_1 \overline{YC_1} \simeq n_1 d \cos \theta_e - n_1 d \cos \theta_r . \quad (4.1.15)$$

Dieser Weglängenunterschied muss wiederum für den minimalen oder maximalen optischen Weg Null werden, das heißt es muss gelten

$$\cos \theta_e = \cos \theta_r \quad \text{oder} \quad \theta_e = \theta_r . \quad (4.1.16)$$

Das heißt, es ergibt sich das Reflexionsgesetz. Mit den in Abb. 4.3b eingeführten Einheitsvektoren  $\hat{\mathbf{k}}_e$  und  $\hat{\mathbf{k}}_t$  in Einfall- und Reflexionsrichtung sowie dem Einheitsvektor  $\hat{\mathbf{u}}_n$  senkrecht zur Grenzfläche kann man wiederum das Reflexionsgesetz in vektorieller Form schreiben:

$$\hat{\mathbf{k}}_r = \hat{\mathbf{k}}_e + 2\hat{\mathbf{u}}_n \cos \theta_e = \hat{\mathbf{k}}_e - 2(\hat{\mathbf{k}}_e \cdot \hat{\mathbf{u}}_n) \hat{\mathbf{u}}_n . \quad (4.1.17)$$

- Ein Extremum des optischen Weges wird dann erreicht, wenn ein Minimum oder ein Maximum des optischen Weges vorliegt. Für die meisten Fälle wird dabei der optische Weg und damit die zum Durchlaufen benötigte Zeit minimal. Man spricht deshalb auch vom Prinzip der kürzesten Zeit. Es lassen sich aber auch Bedingungen finden, unter denen der tatsächlich durchlaufene Weg maximal ist. Hierzu betrachten wir die optischen Wege bei der Reflexion an einer Ellipse und einem Kreissegment, das sich im Punkt  $X$  an die Ellipse schmiegt (siehe Abb. 4.4). Der Weg vom Brennpunkt  $F$  zum zweiten Brennpunkt  $F'$  der Ellipse, der über  $X$  führt, ist länger als alle anderen Wege, die über andere Punkte des Kreissegments führen. Trotzdem erfolgt die Strahlenausbreitung über den Punkt  $X$ .
- Das Gesetz der geradlinigen Ausbreitung von Lichtstrahlen in einem homogenen Medium ergibt sich direkt aus dem Fermat'schen Prinzip. Da in einem homogenen Medium  $n = \text{const}$  gilt, verlangt das Fermat'sche Prinzip ein Extremum des geometrischen Weges, da  $n$  in (4.1.9) vor das Integral gezogen werden kann. Aus der Geometrie wissen wir aber, dass der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten  $A$  und  $B$  durch die Gerade  $AB$  gegeben ist.

Es sei hier noch angemerkt, dass wir mit dem Fermat'schen Prinzip die Bestimmung der Richtung der Strahlen auf ein einfaches Variationsprinzip zurückgeführt haben. Wie sieht es aber mit den Intensitäten aus. Von der Differentialgeometrie wissen wir, dass eine zweidimensionale Fläche lokal durch zwei Krümmungsradien beschrieben werden kann. Aus der Energieerhaltung folgt, dass sich die Intensität  $I$  eines Strahls wie

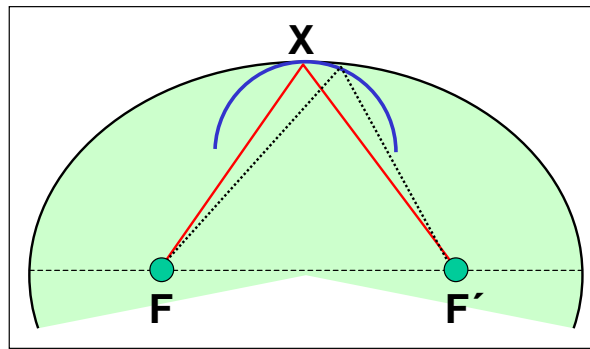


Abbildung 4.4: Bei der Reflexion an einer überkrümmten Ellipse (charakterisiert durch Kreissegment) ist für den tatsächlichen geometrischen Pfad (durchgezogene Kurve) der optische Weg größer als für alle anderen Pfade. Das Licht benutzt also nicht den kürzesten, sondern den längsten optischen Weg.

$$I = \frac{I_0}{R_1 R_2} . \quad (4.1.18)$$

als Funktion des Abstands  $R_1$  und  $R_2$  von den Krümmungszentren verhält. Die Zentren selbst sind im strengen mathematischen Sinne Singularitäten der Intensität. Für eine beliebige Wellenfront bilden die Zentren aller Krümmungsradien zwei zusammenhängende Flächen, die als *Kaustiken* bezeichnet werden. Im Falle der Kugelwelle fallen beide Gebiete zu einem Punkt, dem Brennpunkt zusammen. Generell kann die Oberfläche eines strahlenden Objekts, wie z.B. einer Glühwendel als Kaustik der erzeugten Strahlen betrachtet werden.

## 4.2 Die optische Abbildung

Eine Abbildung im Sinne der linearen Algebra ordnet jedem Punkt des Objektraums eindeutig einen Punkt des Bildraumes zu. Die beiden Punkte werden als zueinander konjugiert bezeichnet. Für die Optik besteht die Abbildungsvorschrift darin, dass von einem Objektpunkt ausgehende Lichtstrahlen sich wieder in einem Bildpunkt sammeln. Dabei verlangen wir zusätzlich, dass im idealen Fall die Abbildung maßstabsgetreu und winkelerhaltend, also nicht verzerrend sein soll. Mathematisch formuliert bedeutet dies, dass die Skalarprodukte bis auf einen gemeinsamen Vorfaktor erhalten bleiben sollen.

### Die Gauß'sche Näherung

Die physikalisch reale und nichttriviale optische Abbildung muss auf die Forderung der streng punktförmigen Abbildung verzichten. Folglich sammeln sich nicht mehr alle vom Objektpunkt ausgehenden Strahlen exakt im Bildpunkt. Für einen sinnvollen praktischen Einsatz muss man aber verlangen, dass sie sich in der Nähe des Bildpunktes sammeln. Anstelle des Bildpunktes treten somit Flecken oder Scheiben auf. Ein typisches Beispiel ist in Abb. 4.5 gezeigt. Wir erkennen, dass ein paralleles Strahlenbündel von einer plankonvexen Linse nicht in einem Punkt auf der optischen Achse gebündelt wird. Der Strahlengang ist hierbei mittels des Snellius'schen Brechungsgesetz berechnet worden. Die gezeigte Situation ist ein Beispiel für die *sphärische Aberration*, die später noch genauer behandelt wird und durch das Auftreten großer Öffnungswinkel des Strahlenbündels verursacht wird. In den meisten der folgenden Abschnitte werden wir deshalb versuchen, große Winkel zu vermeiden. Wir wollen annehmen, dass alle vorkommenden Winkel so klein sind, dass wir

$$\sin \theta \simeq \tan \theta \simeq \theta \quad (4.2.1)$$

und damit das Brechungsgesetz linearisiert als

$$n_e \theta_e = n_t \theta_t \quad (4.2.2)$$

schreiben können. Da  $\theta_e$  und  $\theta_t$  klein sein müssen, sollten fast alle brechenden Oberflächen fast senkrecht auf der optischen Achse stehen. In diesem Fall der *Gauß'schen* oder *paraxialen Optik* gibt es vereinfachte Abbildungsgleichungen, die große praktische Bedeutung erlangt haben.

### Reelle und virtuelle Abbildungen

Unsere Wahrnehmung beruht auf der Annahme geradliniger Lichtausbreitung. Die Tatsache, dass es für einen Beobachter (ohne Kenntnis der Vorgeschichte der Strahlen) grundsätzlich unmöglich ist, zu entscheiden, ob Lichtstrahlen tatsächlich von einem Objekt ausgesandt wurden, macht es notwendig, auch Abbildungen zuzulassen, bei denen die Bildpunkte durch das geradlinige extrapolieren der Strahlen entstehen (siehe Abb. 4.6). Derartige Bilder werden virtuell genannt, da sie nicht ohne zusätzliche Bildverarbeitung (z.B. im Auge) abgebildet werden können.

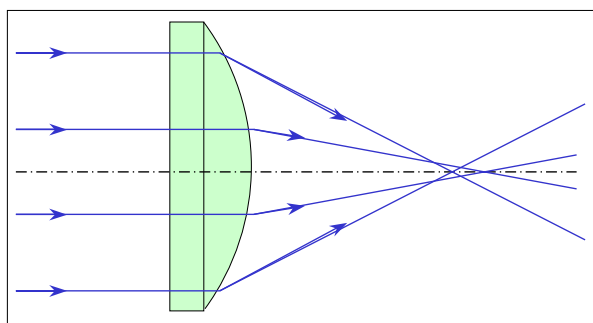


Abbildung 4.5: Sphärische Aberration einer Linse.

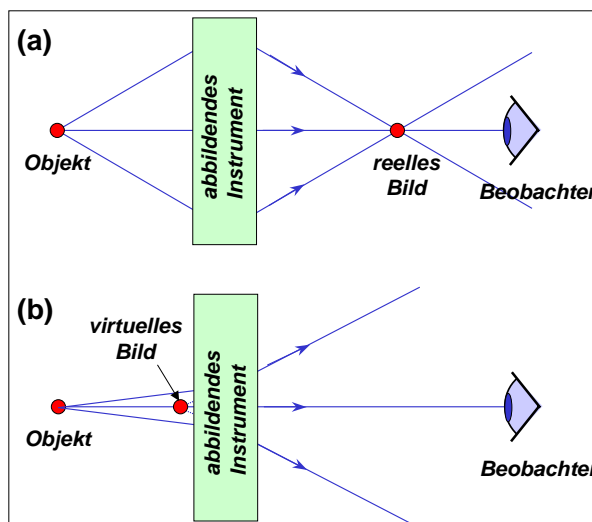


Abbildung 4.6: Schematische Darstellung einer reellen Abbildung (a) und einer virtuellen Abbildung (b).

### 1. Reelle Abbildung:

Befindet sich das abbildende Instrument nicht zwischen Bildpunkt  $P$  und dem Beobachter, so müssen sich die Lichtstrahlen im Bildpunkt schneiden. Der Beobachter sieht also die von diesem Punkt ausgehenden Lichtstrahlen. Dieses reelle Bild kann man mit einem Bildschirm auffangen.

### 2. Virtuelle Abbildung:

Hier liegt das abbildende Instrument zwischen Bildpunkt und Beobachter. Die Lichtstrahlen schneiden sich nicht im Bildpunkt und das Bild kann nicht auf einem Schirm aufgefangen werden.

## Kartesianische Ovale

Physikalisch definieren wir einen Objektpunkt als eine Quelle von Wellenfronten. Die Objektpunkte müssen daher auf den Kaustiken der Wellenfronten liegen. Es ist nun Aufgabe des optischen Systems eine genügend große Zahl der von einem Objekt ausgesandten Lichtsignale wieder möglichst scharf in einem Punkt zu vereinigen. Wir wollen dies für einen einzelnen Objektpunkt untersuchen, welcher eine Kugelwelle aussendet. Der Bildpunkt sei beliebig aber in einem optisch dichteren Medium gewählt. Wir suchen die Grenzfläche, welche zu einer optischen Abbildung führt. Nach dem Fermat'schen Prinzip müssen dann die Summe der optischen Weglängen in beiden Medien für alle Strahlen identisch sein,

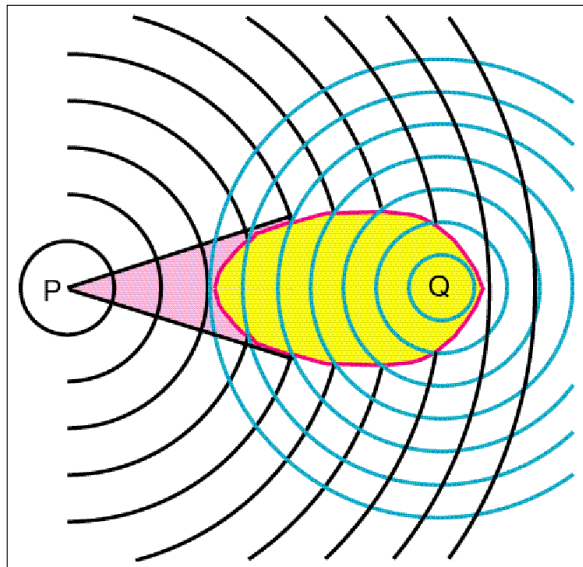


Abbildung 4.7: Kartesisches Oval (gelb). Die vom Punkt  $P$  ausgehenden Strahlen (Kugelwelle) werden im optisch dichteren Medium im Punkt  $Q$  wieder zusammengeführt. Dies ist allerdings nur für das rosa markierte Raumwinkelelement möglich. Dies bedeutet, dass man bei dieser Abbildung einen Intensitätsverlust hat.

d.h. es muss  $s_1 n_1 + s_2 n_2 = \text{const.}$  gelten. Obige Gleichung kann benutzt werden, um für gegebene Brechungsindizes der beiden Medien die mögliche Grenzfläche aus dem Abstand der konjugierten Punkte zu bestimmen. Es handelt sich dabei um mathematische Flächen, die *kartesische Ovale* genannt werden. Selbst in dem betrachteten einfachen Fall ist es uns nicht möglich, die gesamte Lichtintensität zu bündeln, wie leicht aus Abb. 4.7 ersichtlich ist.

### Lochkamera

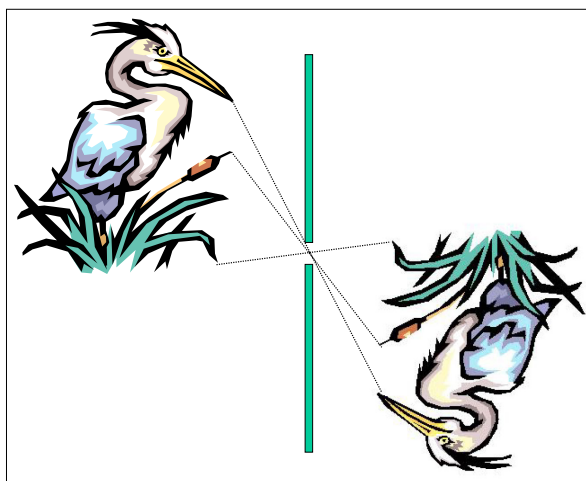


Abbildung 4.8: Schematische Darstellung der Abbildung mit einer Lochkamera. Im Bild ist vorne und hinten sowie oben und unten vertauscht.

Wir wollen uns jetzt dem anderen Extrem zuwenden. Anstelle nur eines einzelnen Objektpunktes wollen wir möglichst viele Punkte abbilden. Wir nehmen dabei maximalen Intensitätsverlust in Kauf, d.h. es soll ausreichen, dass ein einziger wohldefinierter Strahl Objekt und Bild verbindet. Dies führt uns zur

Lochkamera. Dabei trennt ein Schirm mit einer kleinen Öffnung die beiden Objekt- und Bildhalbräume (siehe Abb. 4.8). Je kleiner die Öffnung, umso schärfer das dann aber auch lichtschwächere Bild.

#### 4.2.1 Abbildung an einem Kugelspiegel

Der abbildende Kugelspiegel ist in Abb. 4.9 gezeigt. Die Anordnung ist so gewählt, dass der zentrale Strahl auf dem *Kugelmittelpunkt*  $M$  zu liegen kommt. Die durch den *Gegenstandspunkt*  $G$  und  $M$  bestimmte Achse bezeichnet man als optische Achse des Problems. Der Durchstoßpunkt der optischen Achse durch den Spiegel bezeichnet man als *Scheitelpunkt*  $S$ . Wir betrachten nun einen Lichtstrahl, der unter dem Winkel  $\gamma$  zur optischen Achse vom Gegenstandspunkt  $G$  zum Spiegel läuft. Er trifft den Spiegel am Punkt  $H$  in einem Abstand  $h$  von der optischen Achse. Nach der Reflexion am Spiegel<sup>7</sup> trifft der Strahl die optische Achse im Punkt  $B$  in einem Abstand  $b$  vom Scheitelpunkt. Für die beteiligten Winkel lässt sich aus dem Reflexionsgesetz folgender Zusammenhang ableiten:<sup>8</sup>

$$\theta = \beta - \alpha = \alpha - \gamma \quad \text{oder} \quad \beta + \gamma = 2\alpha . \quad (4.2.3)$$

Für kleine Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ , das heißt für die paraxiale Näherung lassen sich unter Vernachlässigung der Länge  $d$ , die dann sehr klein wird, Beziehungen zwischen den Winkeln und den beteiligten Abständen herstellen:<sup>9</sup>

$$\tan \gamma \simeq \gamma \simeq h/g \quad (4.2.4)$$

$$\tan \alpha \simeq \alpha \simeq h/r \quad (4.2.5)$$

$$\tan \beta \simeq \beta \simeq h/b . \quad (4.2.6)$$

Setzt man diese Beziehungen in (4.2.3) ein, so ergibt sich die Abbildungsgleichung für einen Kugelspiegel, durch die die *Bildweite*  $b$ , die *Gegenstandsweite*  $g$  und der *Krümmungsradius*  $r$  des Spiegels miteinander verknüpft werden. Man erhält die Abbildungsgleichung für Kugelspiegel zu

$$\boxed{\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r} = \frac{1}{f} . \quad (4.2.7)}$$

Dabei wurde die *Brennweite*  $f$  eingeführt, die gerade gleich dem halben Kugelradius ist. Der Name Brennweite wird verständlich, wenn man einen sehr weit entfernten Gegenstand (z.B. die Sonne) über einen Hohlspiegel abbildet. Für  $g \rightarrow \infty$  wird nach (4.2.7) die Bildweite gleich der Brennweite. Das heißt, das Bild der Sonne und damit der Punkt höchster Intensität – der Brennpunkt – liegt im Abstand  $f$  vor der Spiegeloberfläche.

Gleichung (4.2.7) ordnet jedem Punkt  $G$  auf der optischen Achse einen Bildpunkt  $B$  zu. Gleichzeitig ergibt die geometrische Konstruktion des Bildes, die später im Zusammenhang mit der Abbildung durch

<sup>7</sup>Beachte, dass das Lot auf der Spiegelfläche durch den Radiusvektor  $HM$  gegeben ist.

<sup>8</sup>Für das Dreieck  $GMH$  gilt:  $180^\circ - \alpha + \theta + \gamma = 180^\circ$ .

<sup>9</sup>Es sei hier darauf hingewiesen, dass in fast allen Figuren zur Illustration der optischen Abbildung keine kleinen Winkel verwendet werden, da die Figuren sonst zu unübersichtlich werden.

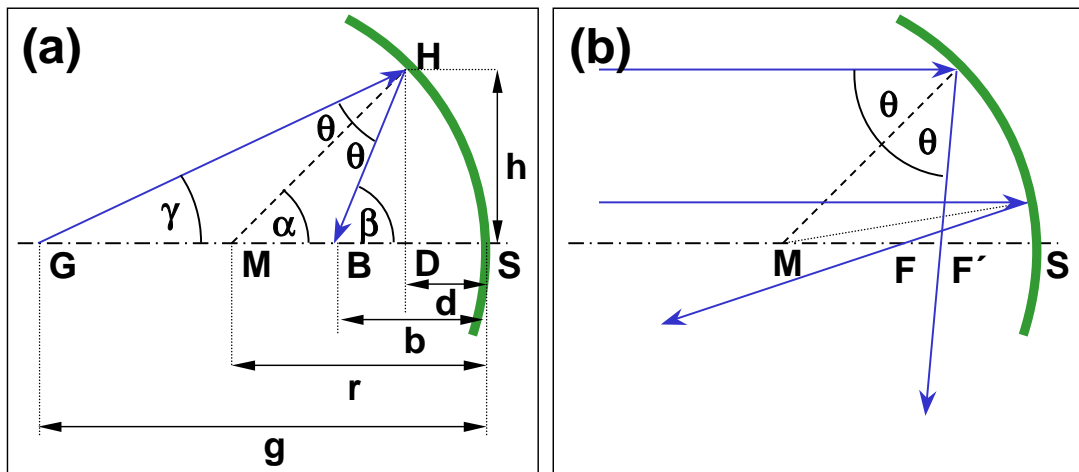


Abbildung 4.9: (a) Abbildung an einem Kugelspiegel:  $G$ : Gegenstandspunkt,  $M$ : Kugelmittelpunkt,  $B$ : Bildpunkt,  $g$ : Gegenstandsweite,  $b$ : Bildweite,  $r$ : Kugelradius. (b) Brennpunkt an einem Spiegel mit großer Öffnung. Während achsennahe und achsenparallele Strahlen nach Reflexion am Spiegel durch den Brennpunkt  $F$  laufen, schneiden achsenferne und achsenparallele Strahlen die optische Achse in Punkten  $F'$ , die näher an der Spiegeloberfläche liegen.

Linsen noch ausführlich diskutiert wird, dass eine Gerade in der Ebene senkrecht zur optischen Achse im Punkte  $G$  (in der *Gegenstandsebene*) wieder in eine Gerade senkrecht zur optischen Achse im Punkte  $G$  (in der *Bildebene*) übergeführt wird, solange man sich im Bereich der Gauß'schen Näherung befindet

Bisher wurde ein Hohlspiegel, das heißt ein *konkaver Spiegel* behandelt. Die Abbildungsgleichung (4.2.7) ist aber auch für einen *konvexen Spiegel* anwendbar. In diesem Fall ist aber formal der Krümmungsradius  $r$  und damit die Brennweite  $f$  negativ zu wählen. Der sich in diesem Fall (und auch für konkave Spiegel bei  $g < f$ ) einstellende negative Bildabstand  $b$  bedeutet, dass das Bild hinter dem Spiegeloberfläche liegt. Die Abbildung ist also virtuell. Die Abbildungsgleichung soll hier nicht näher diskutiert werden, da sie später im Zusammenhang mit der Abbildung von Linsen noch eingehend diskutiert wird.

Es sei an dieser Stelle noch kurz darauf hingewiesen, welche Änderungen im Strahlenverlauf sich ergeben, wenn Strahlenbündel mit großen Öffnungswinkeln oder achsenferne (aber achsenparallele) Strahlen zugelassen werden. Durch eine einfache geometrische Konstruktion kann man zeigen, dass ein achsenferne und achsenparalleler Strahl die optische Achse im Punkt  $F'$  und nicht im Brennpunkt  $F$  schneidet (siehe Abb. 4.9b).  $F'$  liegt rechts vom Brennpunkt, in extremen Fällen könnte  $F'$  sogar hinter der Kugeloberfläche liegen. Auf analoge Weise ließe sich zeigen, dass ein Kugelspiegel für Strahlen mit großem Öffnungswinkel (schiefe Bündel) keine gute Abbildung liefert. Man bezeichnet dieses Phänomen als *Astigmatismus schiefer Bündel*. Durch die Benutzung von nicht-sphärischen Spiegeln lassen sich diese Schwierigkeiten für bestimmte Abbildungsaufgaben umgehen. Will man z.B. ein sehr breites paralleles Lichtbündel auf einen Punkt fokussieren, so ist nach Abb. 4.9b ein Kugelspiegel nicht geeignet. Mit Hilfe des Fermat'schen Prinzips lässt sich zeigen, dass ein Parabolspiegel in der Lage ist, achsenparallel Strahlen auf einen Punkt zu fokussieren. Ebenso ist es möglich, mit einem Rotationsellipsoiden alle Lichtstrahlen, die von einer Punktquelle ausgehen, auf einen Bildpunkt abzubilden. Dies ist genau für ein Punktepaar möglich, nämlich den beiden Brennpunkten der Ellipse.

#### 4.2.2 Abbildung durch brechende Grenzflächen

Wir möchten uns nun näher mit der Brechung an gekrümmten Oberflächen beschäftigen, die zwei homogene Medien mit Brechungsindex  $n_1$  und  $n_2$  voneinander trennen. Dabei können wir das Snellius'sche

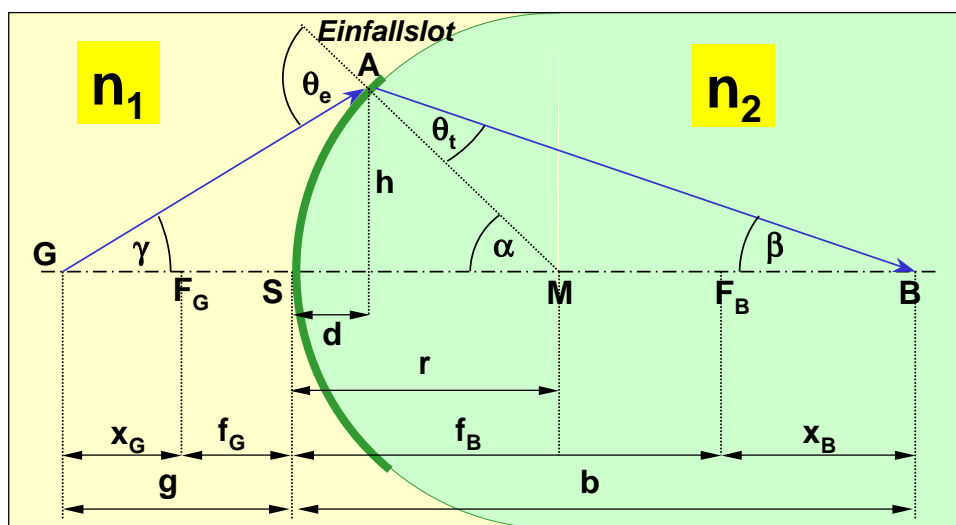


Abbildung 4.10: Brechung an einer Kugeloberfläche, die zwei transparente Bereiche mit den Brechungsindizes  $n_1$  und  $n_2$  voneinander trennt.

Brechungsgesetz lokal anwenden oder auf das Fermat'sche Prinzip zurückgreifen. Von besonderem Interesse sind Kugel-, Ellipsen- und Hyperbelflächen. Wir werden uns hauptsächlich auf den einfachsten Fall, der Kugelfläche, konzentrieren. Aus den abgeleiteten Beziehungen können wir dann das Abbildungsverhalten von Linsen ableiten.

### Abbildung durch brechende Kugelflächen

Wegen ihrer großen technischen Bedeutung wollen wir uns nun sphärischen Grenzflächen zuwenden. Eine Kugel hat per definitionem überall den gleichen Krümmungsradius. Wie bereits oben erwähnt lassen sich daher Kugelflächen relativ einfach schleifen. Grundsätzlich sind zwei Fälle von besonderer Bedeutung: Die Reflexion an einer konkaven (dieser Fall wurde im letzten Abschnitt bereits behandelt) und die Brechung an einer konvexen Kugelfläche.

Die Geometrie einer brechenden konvexen Kugeloberfläche ist in Abb. 4.10 dargestellt. Zur Verknüpfung der einfallenden und der gebrochenen Strahlen verwenden wir das Snelliussche Brechungsgesetz. Für kleine Einfallswinkel (paraxiale Näherung) erhalten wir

$$n_1 \sin \theta_e = n_2 \sin \theta_t \quad \Rightarrow \quad n_1 \theta_e = n_2 \theta_t \quad (4.2.8)$$

Die Bedingung, dass die auftretenden Einfallswinkel klein sind, kann nur erfüllt werden, wenn achsennahe Strahlen verwendet werden und wenn der Krümmungsradius  $r$  der Kugeloberfläche viel größer ist als jeder Abstand eines Strahls von der optischen Achse.

Die Beziehung zwischen der Gegenstandsweite  $g$  und der Bildweite  $b$  ergibt sich wieder über eine zu der Gleichung (4.2.3) analoge Winkelbeziehung<sup>10</sup>

<sup>10</sup>Im Dreieck  $GAM$  gilt:  $(180^\circ - \theta_e) + \alpha + \gamma = 180^\circ$ , also  $\theta_e = \gamma + \alpha$ . Ebenso gilt im Dreieck  $MAB$  gilt:  $(180^\circ - \alpha) + \theta_t + \beta = 180^\circ$ , also  $\theta_t = \alpha - \beta$ .



$$\theta_e = \gamma + \alpha \quad \theta_t = \alpha - \beta . \quad (4.2.9)$$

Mit den Winkelbeziehungen (4.2.4) bis (4.2.6) und dem vereinfachten Brechungsgesetz (4.2.8) erhält man die Abbildungsgleichung für eine brechende Kugeloberfläche zu

$$n_1 \theta_e = n_1 \left( \frac{h}{g} + \frac{h}{r} \right) = n_2 \left( \frac{h}{r} - \frac{h}{b} \right) . \quad (4.2.10)$$

Damit lässt sich die Abbildungsgleichung für eine brechende Kugeloberfläche wie folgt schreiben:

$$\boxed{\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r} .} \quad (4.2.11)$$

### Brennpunkte und Brennebenen

Aus der Abbildungsgleichung (4.2.11) lassen sich zwei unterschiedliche Brennweiten bestimmen, die dann relevant werden, wenn achsenparalleles Licht von links (bildseitige Brennweite) oder rechts (gegenstandsseitige Brennweite) eingestrahlt wird. Für die bildseitige Brennweite erhält man ( $g \rightarrow \infty$ )

$$b = f_B = \frac{n_2 r}{n_2 - n_1} . \quad (4.2.12)$$

Für die gegenstandsseitige Brennweite erhält man in gleicher Weise ( $b \rightarrow \infty$ )

$$g = f_G = \frac{n_1 r}{n_2 - n_1} . \quad (4.2.13)$$

Für die Differenz und das Verhältnis der Brennweiten ergibt sich

$$f_B - f_G = r \quad \frac{f_B}{f_G} = \frac{n_2}{n_1} . \quad (4.2.14)$$

Die beiden Brennweiten haben also stets das gleiche Vorzeichen, das heißt, die beiden Brennpunkte liegen stets auf entgegengesetzten Seiten der brechenden Fläche. Mit den beiden Brennweiten  $f_B$  und  $f_G$  kann man die Abbildungsgleichung als

$$\boxed{\frac{f_G}{g} + \frac{f_B}{b} = 1 .} \quad (4.2.15)$$

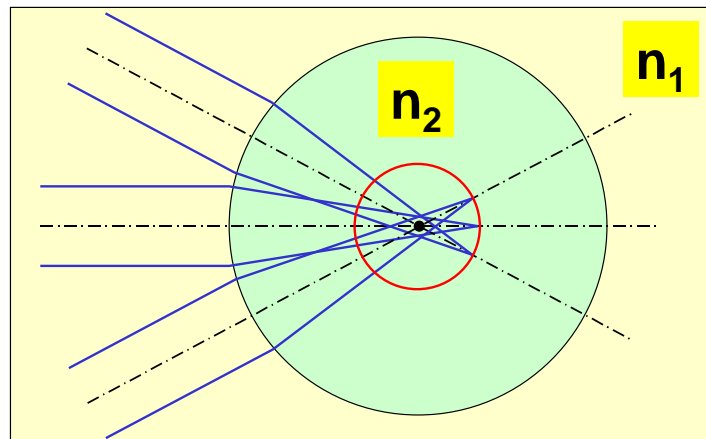


Abbildung 4.11: Abbildung an einer sphärischen Grenzfläche. Die zu verschiedenen optischen Achsen gehörenden Brennpunkte liegen auf einem zum Mittelpunkt der brechenden Fläche konzentrischen Kreis.

schreiben. Der der Brennweite  $f_B$  entsprechende Bildpunkt wird als der bildseitige Brennpunkt  $F_B$  bezeichnet. Analog können wir den Gegenstandspunkt suchen, der zu einer parallelen Strahlausbreitung im Bildraum führt. Dieser objektseitige Brennpunkt wird mit  $F_G$  bezeichnet.

Aufgrund unserer Definition liegen die zu verschiedenen optischen Achsen (also Objektpunkten) gehörigen Brennpunkte auf einer Kugeloberfläche, d.h. sie sind konzentrisch um den Mittelpunkt der reflektierenden bzw. brechenden Grenzfläche angeordnet (siehe Abb. 4.11). Falls die Winkel zwischen den optischen Achsen klein sind (paraxiale Näherung), lässt sich diese Fläche durch eine Ebene annähern. Diese Ebene wird dann als *Brennebene* bezeichnet.

Die obige Abbildungsgleichung lässt sich besonders einfach ausdrücken, wenn man statt den auf die Scheitelpunkte bezogenen Werte von  $g$  und  $b$  die auf die Brennpunkte bezogenen Koordinaten von Gegenstands- und Bildpunkt einführt. Bezeichnet man den Abstand des Gegenstandspunkts vom objektseitigen Brennpunkt  $F_G$  mit  $x_G$  und den Abstand des Bildpunktes  $B$  vom bildseitigen Brennpunkt  $F_B$  mit  $x_B$ , so ist  $g = f_G + x_G$  und  $b = f_B + x_B$  und man erhält die *Newtonsche Form der Abbildungsgleichung* zu

$$x_G x_B = f_G f_B \quad . \quad (4.2.16)$$

Lässt man in der Abbildungsgleichung (4.2.11)  $r = \infty$  werden, das heißt wir betrachten eine ebene Fläche zwischen zwei Medien, so wird  $b = -\frac{n_2}{n_1}g$ . Diese Beziehung sagt aus, dass ein im Abstand  $g$  hinter der brechenden Fläche liegender Gegenstand bei senkrechtem Einblick in die Fläche in der Entfernung  $b = \frac{n_2}{n_1}g$  hinter der Fläche gesehen wird. Dies ist der Grund dafür, dass der Boden von Gewässern bei senkrechtem Einblick gehoben erscheint, und zwar um  $[(1.33 - 1)/1.33]g = \frac{1}{4}g$ .

### Vorzeichenkonvention und mehrfache Abbildung

Die Abbildungsgleichung (4.2.11) lässt sich für beliebige Fälle im Rahmen der paraxialen Näherung einsetzen. Man kann dabei den Gegenstand oder den Kugelmittelpunkt links oder rechts der Kugeloberfläche legen. Zu beachten ist dabei lediglich, dass eine konsistente Wahl der Vorzeichen der verschiedenen

Größen getroffen wird, wie sie in Tabelle 4.1 angegeben ist. Insbesondere haben Oberflächen, die nach rechts konkav sind, einen positiven Krümmungsradius und die Winkel von Strahlen, die nach rechts oben zeigen, ein positives Vorzeichen. Wir werden bei der Betrachtung von Linsensystemen im Folgenden den Lichtstrahl auch immer von links einfallen lassen.

Größe	+ Vorzeichen	– Vorzeichen
$g$	$G$ links von $S$	$G$ rechts von $S$
$f_G$	$F_G$ links von $S$	$F_G$ rechts von $S$
$b$	$B$ rechts von $S$	$B$ links von $S$
$f_B$	$F_B$ rechts von $S$	$F_B$ links von $S$
$r$	$M$ rechts von $S$	$M$ links von $S$

Tabelle 4.1: Vorzeichenkonvention für die Abbildung an einer brechenden Kugeloberfläche. Mit dieser Vorzeichenkonvention sind die in Abb. 4.10 benutzten Größen alle positiv.

Die Abbildungsgleichung (4.2.11) erlaubt es auch, Abbildungen durch kompliziertere Anordnungen von optischen Medien mit den Brechungsindizes  $n_i$  und  $n_j$ , die durch Kugeloberflächen  $F_{ij}$  voneinander getrennt sind, zu berechnen. Man muss dabei lediglich schrittweise vorgehen. Man berechnet für die dem Gegenstand nächstliegende Oberfläche  $F_{12}$  den Bildpunkt, der nun formal im Medium mit Brechungsindex  $n_2$  liege. Dieser Bildpunkt wird dann als Gegenstandspunkt für die zweite Abbildung durch die Oberfläche  $F_{23}$  verwendet. Dieser Vorgang wird dann sukzessive wiederholt, bis alle brechenden Oberflächen berücksichtigt sind. Besonders einfach lässt sich die Berechnung durchführen, wenn alle Kugelmittelpunkte auf der optischen Achse liegen. Man bezeichnet das abbildende System dann als optisch zentriertes System. Eine elegante Methode zur Behandlung solcher Systeme stellt die in Abschnitt 4.3 vorgestellte Matrixformulierung der Gauß'schen Optik dar.

### Abbildung durch Hyperbel- und Ellipsengrenzflächen

Abbildung kann auch mit nicht-kugelförmigen Grenzflächen gemacht werden. Wir wollen diese Grenzflächen hier aber nicht im Detail diskutieren. Ohne die trigonometrischen Rechnungen explizit durchzuführen, halten wir für die Abbildung durch Hyperbel- und Ellipsengrenzflächen folgende Tatsachen fest:

- Eine ellipsoidförmige Grenzfläche fokussiert eine ebene Welle auf den entfernten Brennpunkt des optisch dichteren Ellipsoids (siehe Abb. 4.12).
- Eine hyperboloidförmige Grenzfläche wandelt ebene Wellen im optisch dichteren Medium in vom Brennpunkt aus divergierende Kugelwellen um. Dabei hängt die Exzentrizität  $e$  ( $e < 1$  für Ellipse,  $e > 1$  für Hyperbel) mit den Brechzahlen über  $e = n_1/n_2$  zusammen.

### 4.2.3 Abbildungsgleichung für eine dünne Linse

Eine *Linse* ist ein brechendes Objekt, bei dem sowohl die Objekt als auch die Bildpunkte im selben Medium liegen. Dies kann z.B. durch zwei benachbarte brechende Kugelflächen realisiert werden. Im Allgemeinen können die Grenzflächen konvex, plan, konkav oder Kombinationen davon sein. Da elliptische Grenzflächen schwer herstellbar sind, werden überwiegend sphärische Grenzflächen verwendet. Beispiele für Linsen sind in Abb. 4.13 dargestellt.

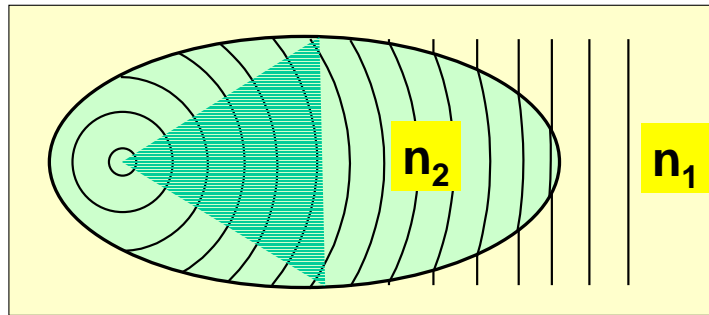


Abbildung 4.12: Eine elliptische Grenzfläche zwischen zwei Medien mit Brechungsindex  $n_1$  und  $n_2$  mit  $n_1 < n_2$  führt für einen bestimmten Raumwinkelbereich die vom Brennpunkt der Ellipse ausgehende Kugelwelle in eine ebene Welle über. Umgekehrt wird eine von rechts einlaufende ebene Welle auf den Brennpunkt der Ellipse fokussiert.

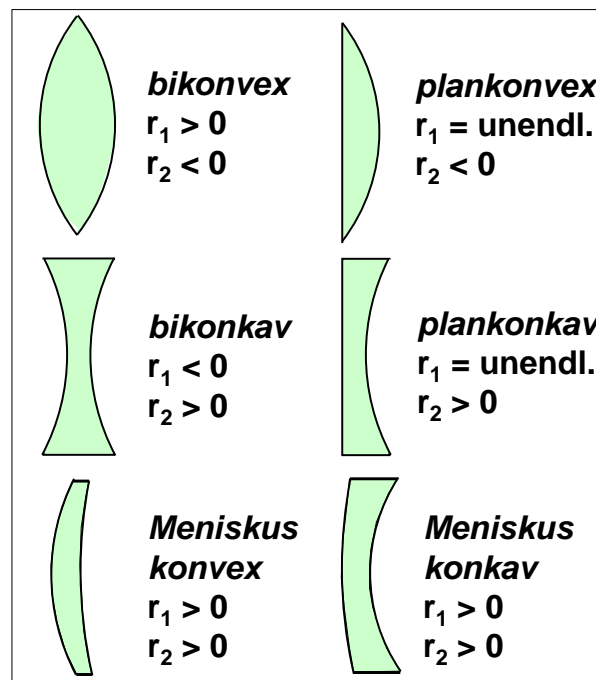


Abbildung 4.13: Schematische Darstellung verschiedener Linsentypen.

Wir werden in den folgenden Abschnitt Linsen behandeln, die einen Brechungsindex  $n > 1$  besitzen und in Luft ( $n = 1$ ) eingebettet sind. Als positive oder *Sammellinse* bezeichnet man Linsen, die im Zentrum dicker sind als in Randbereich. Andernfalls bezeichnet man die Linsen als negative, konkave oder *Zerstreuungslinsen*.

Ist der Abstand  $d$  der Scheitelpunkte der beiden brechenden Oberflächen einer Linse klein gegenüber den Krümmungsradien, so spricht man von einer *dünnen Linse*. Für diesen Fall lässt sich die sukzessive Abbildung durch die beiden Oberflächen durch eine einfache Abbildungsgleichung beschreiben. Wir nehmen an, dass sich der Gegenstand  $G$  im Medium mit dem Brechungsindex  $n_1$  in der Gegenstandsweite  $g$  vor der Linse befindet (siehe hierzu Abb. 4.14). Seinen Bildpunkt, der durch die erste Kugeloberfläche erzeugt wird, bezeichnen wir mit  $B_1$  und liegt im Abstand  $b_1$  hinter der ersten Oberfläche, wobei

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b_1} = \frac{n_2 - n_1}{r_1} \quad (4.2.17)$$

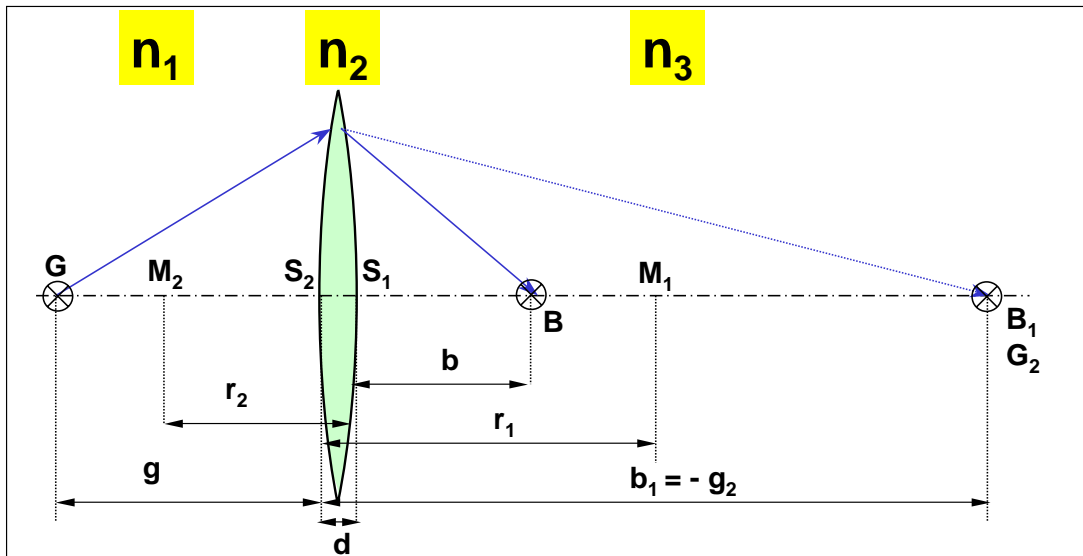


Abbildung 4.14: Abbildung durch eine dünne Linse, für die man die Dicke  $d$  der Linse gegenüber der Gegenstandsweite  $g$ , der Bildweite  $b$  und den Krümmungsradien  $r_1$  und  $r_2$  der Linse vernachlässigen kann.

gilt. Für die zweite Abbildung setzen wir  $g_2 = -b_1$  (siehe Vorzeichenkonvention) und vernachlässigen die Linsendicke  $d$ . Damit erhalten wir eine Gleichung für die Bildweite  $b$ , aus der wir mit Hilfe von (4.2.17)  $b_1$  eliminieren können:

$$\begin{aligned} -\frac{n_2}{b_1} + \frac{n_3}{b} &= \frac{n_3 - n_2}{r_2} \\ \frac{n_1}{g} + \frac{n_3}{b} &= \frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_3 - n_2}{r_2} . \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

Für den Fall, dass sich die Linse mit dem Brechungsindex  $n_2 = n$  in Luft ( $n_1 = 1$ ) befindet, erhalten wir die Abbildungsgleichung für eine dünne Linse<sup>11</sup>

$$\boxed{\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{f} .} \quad (4.2.19)$$

Gleichung (4.2.19) bezeichnet man als *Gauß'sche Linsenformel*. Sie ist identisch mit der Abbildungsgleichung (4.2.7) für einen Kugelspiegel. Bei ihrer Anwendung ist die Vorzeichenkonvention aus Tabelle 4.1 zu berücksichtigen.

Die Abbildungsgleichung erlaubt es uns, den zu einem Objektpunkt konjugierten Bildpunkt zu bestimmen. Dabei wird in der paraxialen Näherung nur die Brennweite der Linse benötigt. Die *Objektweiten* und *Bildweiten* sind ebenfalls so genannte konjugierte Größen. Wenn  $g \rightarrow \infty$ , dann  $b \rightarrow f$ . Das bedeutet, dass alle Strahlen, die parallel zur optischen Achse auf die Linse treffen, im *Fokus* oder *Brennpunkt*  $F$  die optische Achse schneiden (siehe Abb. 4.15). Die Größe  $f$  heißt *Brennweite* und die reziproke Brennweite  $D = 1/f$  einer Linse wird als *Brechkraft* der Linse bezeichnet. Die Einheit der Brechkraft ist die *Dioptrie* ( $\text{m}^{-1}$ ). Eine Linse mit  $f > 0$  heißt *Sammellinse*, mit  $f < 0$  *Zerstreuungslinse*.

<sup>11</sup>Für einen achsenparallelen Strahl ist  $g = \infty$ . Da dieser auf der Bildseite durch den Brennpunkt  $F$  verläuft, folgt  $b = f$ . Die Ableitung von Gl. (4.2.18) erfolgt auch nochmals später im Abschnitt 4.3, vergleiche (4.3.11).

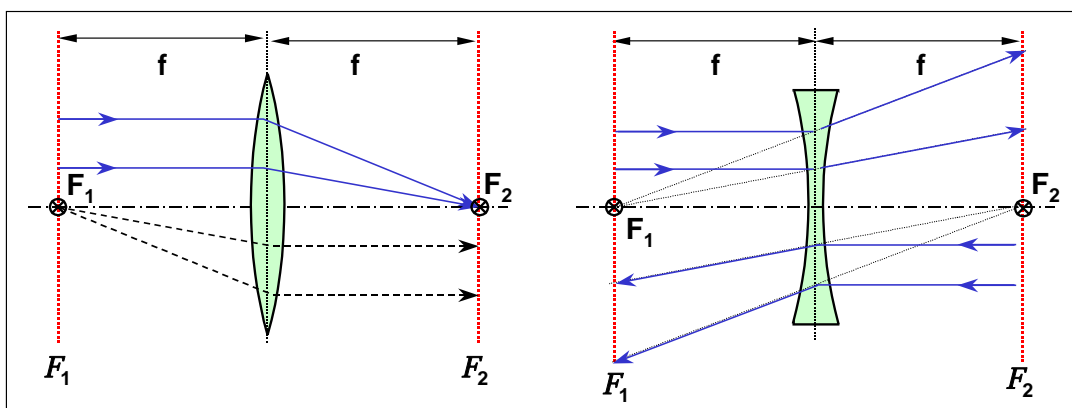


Abbildung 4.15: Brennebenen  $\mathcal{F}$  und Brennweiten  $f$  dünner Linsen in Luft. (a) Sammellinse, (b) Zerstreuungslinse.

Die Brennebene  $\mathcal{F}$  wird als Ebene senkrecht zur optischen Achse durch den Brennpunkt  $B$  definiert. Alle Strahlen, die unter einem bestimmten (aufgrund der verwendeten paraxialen Näherung allerdings kleinen) Winkel auf die Linse treffen, werden in einen Punkt auf der Brennebene  $\mathcal{F}$  abgebildet. Dies ist in Abb. 4.16 gezeigt, wo ein Lichtstrahl unter dem Winkel  $\alpha$  einfällt und die optische Achse im Punkt  $g$  schneidet. Er trifft dann die Brennebene  $\mathcal{F}$  im Punkt  $P$  im Abstand  $h$  von der optischen Achse. Der zu  $g$  konjugierte Punkt ist  $b$  und es gilt<sup>12</sup>

$$y = g\alpha, \quad h = \beta(f - b) = \frac{y}{b}(b - f). \quad (4.2.20)$$

Mit Hilfe der Abbildungsgleichung (4.2.19) folgt dann, dass  $h = \alpha f$  unabhängig von  $g$  ist. Der einfachste Weg, den Punkt  $P$  zu bestimmen, besteht darin, einen ungebrochenen Strahl unter dem Winkel  $\alpha$  durch das Zentrum der Linse zu ziehen. Dieser Strahl schneidet die Brennebene im Punkt  $P$ .

Aus der Abbildungsgleichung und unserer bisherigen Betrachtung ergeben sich folgende wichtigen Tatsachen:

- Gegenstands- und bildseitige Brennweite sind gleich, falls auf beiden Seiten der Linse dasselbe brechende Medium (z.B. Luft) vorliegt. Objekt- und bildseitige Brennpunkte sind natürlich weiterhin verschieden.
- Für  $g \rightarrow \infty$  liegt der Bildpunkt in der Brennebene.
- Für  $g \rightarrow f$  wird  $\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g} \rightarrow 0$ , das heißt, das Bild liegt im Unendlichen.
- Die reziproke Bildweite  $\frac{1}{b}$  nimmt in dem Maße ab, wie  $\frac{1}{f} - \frac{1}{g}$  abnimmt
- Für  $g < f$  wird  $b$  negativ, das heißt, das Bild liegt links von der abbildenden Linse und wir haben es nach unserer obigen Konvention mit einem virtuellen Bild zu tun.
- Für Linsen mit zwei sphärischen Grenzflächen ist die optische Achse eindeutig bestimmt. Sie schneidet die beiden Mittelpunkte. Die Brennpunkte und die Brennebenen sind damit ebenfalls eindeutig festgelegt.

<sup>12</sup>Unter Beachtung der Vorzeichenkonvention aus Tabelle 4.1.

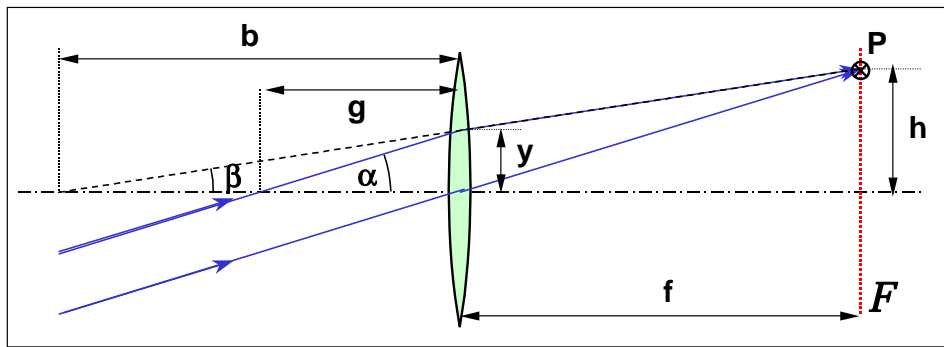


Abbildung 4.16: Brennebene einer dünnen Linse: Alle Strahlen, die unter dem gleichen Winkel  $\alpha$  zur optischen Achse einfallen, werden auf einen Punkt  $P$  in der Brennebene fokussiert.

### Beispiel Plankonvexlinse

Als Zahlenbeispiel berechnen wir zunächst die Brennweite einer Plankonvexlinse aus Glas ( $n = 1.5$ ). Die Eintrittsseite der Linse ist eben, d.h.  $r_1 = \infty$ , die Austrittsseite habe einen Krümmungsradius von  $|r_2| = 50 \text{ mm}$ . Da es sich um eine Konvexlinse handelt, muss der Kugelmittelpunkt links der Linse liegen, das heißt  $r_2 = -50 \text{ mm}$  ist negativ. Man erhält damit die Brennweite  $f = [(1.5 - 1)(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{-50\text{mm}})]^{-1} = 100 \text{ mm}$ . Dreht man die Linse um, so erhält man – wie nicht anders zu erwarten – dieselbe Brennweite.

### Geometrische Bildkonstruktion

Für eine dünne Linse gibt es drei Sorten von Strahlen, deren Verlauf durch die Linse einfach bestimmt werden kann (siehe hierzu Abb. 4.15 und Abb. 4.16):

1. Strahl *I*: Ein paralleler zur optischen Achse einfallender Strahl geht durch den bildseitigen Brennpunkt  $F_B$ . Diese Strahlen werden *Brennstrahlen* genannt.
2. Strahl *II*: Der Strahl durch das Linsenzentrum wird nicht abgelenkt. Diese Strahlen werden *Mittelpunktsstrahlen* genannt.
3. Strahl *III*: Der Strahl durch den gegenstandsseitigen Brennpunkt  $F_G$  verläuft nach der Linse parallel. Diese Strahlen werden ebenfalls *Brennstrahlen* genannt.

Mit Hilfe dieser drei Strahlen lässt sich auf sehr einfache Weise der Bildpunkt konstruieren, der durch den Schnittpunkt dieser von einem Gegenstandspunkt ausgehenden Strahlen ist. Man geht wie folgt vor:

- Man zeichne die Gerade, welche den optischen Mittelpunkt der Linse mit dem Objektpunkt verbindet.
- Man zeichne die Gerade, welche den Objektpunkt mit dem objektseitigen Brennpunkt  $F_G$  verbindet. Dort wo diese Gerade die optische Hauptebene der Linse schneidet, wird sie parallel zur optischen Achse fortgesetzt.
- Der Bildpunkt ergibt sich aus dem Schnittpunkt obiger Linien.
- Zur Kontrolle zeichnen wir vom Objektpunkt eine weitere Linie parallel zur optischen Achse. Dort wo diese die Linsenebene schneidet, wird sie durch eine Gerade fortgesetzt, die durch den bildseitigen Brennpunkt verläuft. Auch diese Gerade muss durch den Bildpunkt laufen.

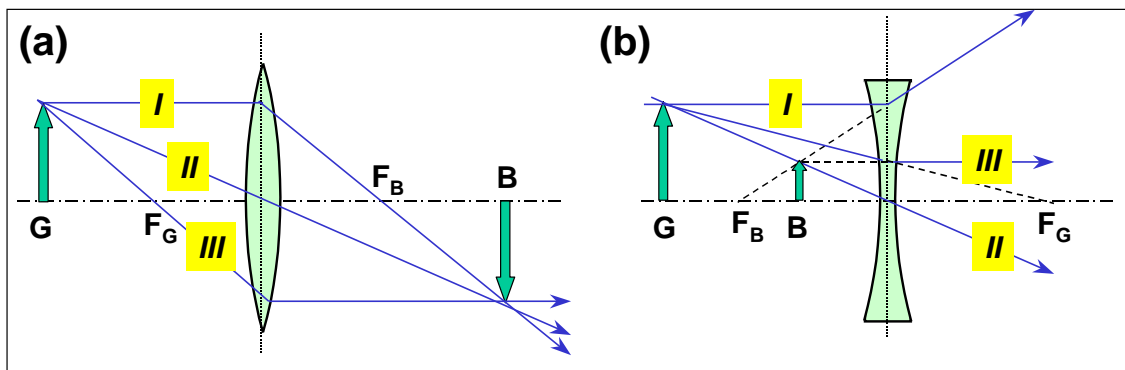


Abbildung 4.17: Geometrische Konstruktion der Abbildung an einer Sammellinse (a) und einer Zerstreuungslinse (b). Mit Hilfe von zwei der drei gezeichneten Strahlen I, II und III lässt sich die Lage des Bildes konstruieren.

Diese geometrische Bildkonstruktion ist in Abb. 4.17 gezeigt. Für eine Linse mit negativer Brennweite (Zerstreuungslinse) ist dabei zu beachten, dass der gegenstandsseitige Brennpunkt  $F_G$  hinter der Linse und der bildseitige  $F_B$  vor der Linse liegt und die obigen Aussagen (1) und (3) entsprechend umformuliert werden müssen.

Haben wir es mit einer Linsencombination zu tun, so sind obige Vorschriften nacheinander auf Bilder und Zwischenbilder anzuwenden. D.h. das Bild der ersten Linse wird zum Objekt der zweiten und so weiter. Wie wir später zeigen werden, haben wir es bei der optischen Abbildung mit einem Problem der linearen Algebra zu tun und damit kann die Abbildungsvorschrift in Matrizenform angegeben werden. Dies ermöglicht es, Bilder auch komplizierter Linsencombinationen mehr oder minder automatisch zu berechnen, wobei moderne Computer und entsprechende Spezialprogramme zum so genannten *Ray tracing* sehr hilfreich sind.

### Transversale und longitudinale Vergrößerung einer dünnen Linse

Ein wichtiger Aspekt optischer Abbildungen ist es, das Bild eines Objekts in seiner Größe zu ändern und dadurch Vergrößerungen oder Verkleinerungen zu erhalten. Wendet man den Vierstreckensatz auf den Strahl II an, der durch das Zentrum der Linse geht und dabei nicht abgelenkt wird, und die optische Achse an, so erhält man die *transversale Vergrößerung*  $V_T$  eines Objektes. Man spricht von transversaler Vergrößerung, da wir hier zunächst die Änderung der Größe senkrecht zur optischen Achse diskutieren. Unter transversaler Vergrößerung verstehen wir also das Verhältnis der Gegenstandsgröße  $\mathcal{G}$  und der Bildgröße  $\mathcal{B}$ , beide senkrecht zur optischen Achse gemessen. Man erhält somit

$$V_T \equiv \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{G}} = -\frac{b}{g} = \frac{f}{f-g} . \quad (4.2.21)$$

Für das reelle Bild in Abb. 4.17a ergibt sich, da das Bild auf dem Kopf steht, eine negative Vergrößerung. Für den Fall der virtuellen Abbildung in Abb. 4.17b ist die Vergrößerung positiv.

Neben dem Begriff transversale Vergrößerung wird in der Optik auch eine *longitudinale* oder *axiale Vergrößerung*  $V_L$  benutzt. Man bezeichnet damit die Vergrößerung eines Objekts längs der optischen Achse. Man erhält

$$V_L \equiv \frac{db}{dg} = \frac{-f^2}{(g-f)^2} = -V_T^2 . \quad (4.2.22)$$



<b>Sammellinse</b>			
Gegenstandsweite	Abbildungstyp	Bildweite	transversale Vergrößerung
$2f < g < \infty$	reell	$f < b < 2f$	$-1 < V_T < 0$ , verkleinert
$g = 2f$	reell	$b = 2f$	$V_T = -1$
$f < g < 2f$	reell	$2f < b < \infty$	$V_T < -1$ , vergrößert
$g = f$	—	$b \rightarrow \infty$	—
$0 < g < f$	virtuell	$b < -g$	$V_T > 1$ , vergrößert
<b>Zerstreuungslinse</b>			
Gegenstandsweite	Abbildungstyp	Bildweite	transversale Vergrößerung
$0 < g < \infty$	virtuell	$-f < b < 0$	$0 < V_T < 1$ , verkleinert
$g = 0$	virtuell	$b = 0$	$V_T = 1$ , gleich groß

Tabelle 4.2: Abbildung durch Sammellinsen und Zerstreuungslinsen.

Die longitudinale Vergrößerung ist also größer als die transversale und immer negativ.<sup>13</sup>

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir einige wichtige Abbildungseigenschaften dünner Linsen zusammenfassen:

- Für konkave Linsen gilt  $f < 0$ . Die Abbildung liefert immer ein virtuelles Bild. Die transversale Vergrößerung ist positiv und kleiner 1:  $0 < V_T < 1$ .
- Bei konvexen Linsen (Sammellinsen) beeinflusst die Gegenstandsweite die Art der Abbildung (siehe hierzu 4.2). Für große Gegenstandsweiten ist das reelle Bild nahe dem Brennpunkt  $\bar{f}_B$ . Mit der Verringerung der Gegenstandsweite wächst die Bildweite und die Vergrößerung  $|V_T|$ , bis bei  $g = f$  die Bildweite unendlich wird. Für noch kleinere Gegenstandsweiten  $g < f$  ist die Abbildung virtuell, die Vergrößerung  $V_T$  ist dann positiv und größer als eins.

#### 4.2.4 Dicke Linsen und Linsensysteme

Die in den Abschnitten 4.2.1 und 4.2.3 abgeleiteten Abbildungsgleichungen erlauben es auch, kompliziert aufgebaute optische Systeme zu analysieren. Dabei muss die Abbildungsgleichung schrittweise auf jede einzelne Oberfläche des Systems angewendet werden. Allgemeine Aussagen über die Abbildung an einem festen optischen System, bei dem z.B. nur die Gegenstandsweite  $g$  geändert wird, sind bei dieser Vorgehensweise aber nur schwer zu erhalten. Es lässt sich jedoch zeigen (siehe Abschnitt 4.3), dass jedes axialsymmetrische optische System, vor dessen erster und hinter dessen letzter Linse derselbe Brechungsindex vorliegt, eine stark vereinfachende Behandlung erlaubt (siehe hierzu Abb. 4.18). Ein axialsymmetrisches oder *zentriertes optisches System* liegt vor, wenn alle Krümmungsmittelpunkte der einzelnen abbildenden Flächen auf der optischen Achse liegen. Wir werden im Folgenden nur solche zentrierte optische Systeme diskutieren.

Für eine vereinfachende Behandlung führt man zwei *Hauptebenen* ein, die senkrecht auf der optischen Achse stehen und diese in den Punkten  $H_1$  und  $H_2$  schneiden (eine ausführliche Motivation für die Einführung dieser Ebenen folgt in Abschnitt 4.3.3). Man erhält die Hauptebenen dadurch, indem man

<sup>13</sup>Zum Vergleich: Für die Abbildung durch eine brechende Kugelfläche erhält man  $V_T = \frac{n_1 b}{n_2 g}$  und  $V_L = -\frac{(n_1 g)^2}{(n_2 b)^2}$ .

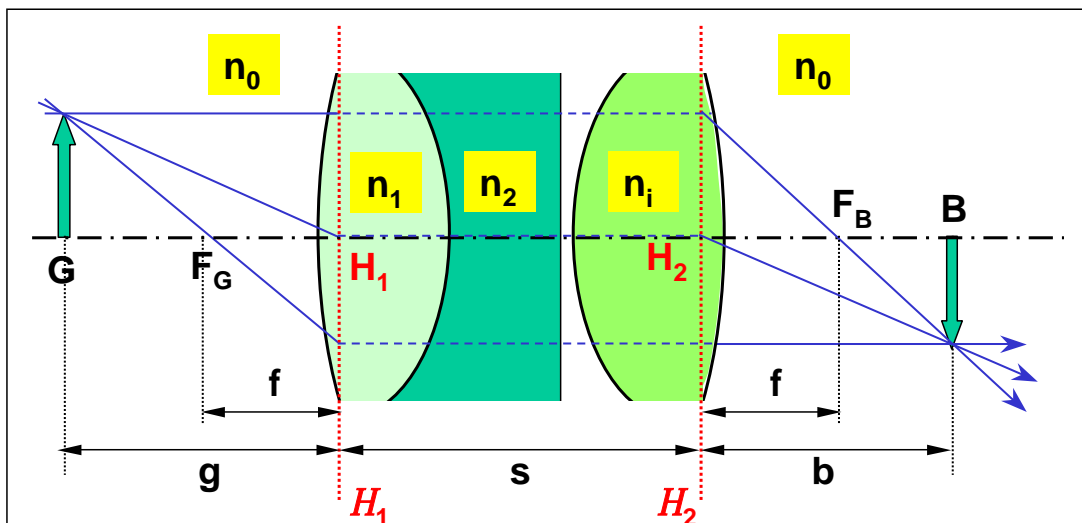


Abbildung 4.18: Die Abbildung an einem komplexeren, axialsymmetrischen optischen System lässt sich durch die Einführung der Hauptpunkte  $H_1$  und  $H_2$  bzw. der Hauptebenen  $\mathcal{H}_1$  und  $\mathcal{H}_2$  behandeln. Bei der Konstruktion des Bildes kann wie bei der dünnen Linse vorgegangen werden, wobei zwischen den Hauptebenen eine achsenparallele Führung der Strahlen erforderlich ist.

einen Strahl, der durch den Mittelpunkt der dicken Linse verläuft, betrachtet. Man verlängert den einfallenden und austretenden Strahl geradlinig bis zu den Schnittpunkten  $H_1$  und  $H_2$  mit der optischen Achse, die die Lage der Hauptebenen festlegen. Dadurch werden die Strahlbrechungen an den Linsenflächen ersetzt durch die Brechungen an den beiden Hauptebenen  $H_1$  und  $H_2$ . Zwischen den Hauptebenen verlaufen die Strahlen parallel zur optischen Achse. Paralleles Licht, das von links auf das System fällt, wird auf den bildseitigen Brennpunkt  $F_B$  im Abstand  $f$  hinter dem Hauptpunkt  $H_2$  fokussiert. Paralleles Licht von rechts wird auf den gegenstandsseitigen Brennpunkt  $F_G$  im Abstand  $f$  links vom Hauptpunkt  $H_1$  fokussiert. Für Objekte in einem endlichen Abstand vom optischen System erfolgt die Abbildung nach der Abbildungsgleichung  $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$ , wobei zu beachten ist, dass die Gegenstandsweite bezüglich  $H_1$  und die Bildweite bezüglich  $H_2$  gemessen ist. Der Abstand  $s$  zwischen den beiden Hauptebenen wird dabei nicht berücksichtigt. Für die geometrische Konstruktion des Bildes geht man genau gleich vor, wie es oben für die dünne Linse beschrieben wurde. Dabei müssen die Strahlen zwischen den Hauptebenen achsenparallel geführt werden (eine Erklärung für diesen Sachverhalt folgt in Abschnitt 4.3.3).

Für ein spezielles optisches System kann man die Brennweite und die Lage der Hauptebenen experimentell bestimmen. Dazu muss man Abbildungen mit  $g \rightarrow \infty$  und  $b \rightarrow \infty$  durchführen, mit denen man jeweils die Brennpunkte  $F_B$  und  $F_G$  erhält. Benutzt man ferner den Spezialfall der 1 : 1-Abbildung ( $g = b = 2f$ ), so lässt sich daraus die Brennweite und die Lage der Hauptpunkte bestimmen (siehe hierzu Abb. 4.18). Eine analytische Berechnung der Abbildung eines komplizierten optischen Systems, das heißt eine Bestimmung der Brennweite und der Lage der Hauptpunkte mit Hilfe von (4.2.11), führt schnell zu unhandlichen Ausdrücken. In diesem Fall benutzt man deshalb besser die *Matrizenmethode der Gauß'schen Optik*, die in Abschnitt 4.3 vorgestellt wird. Für einfache optische Systeme kann man allerdings analytische Lösungen für die Brennweite und die Lage der Hauptebenen erhalten. Wir wollen im Folgenden einige Beispiele diskutieren.

### System aus zwei dünnen Linsen

Wir betrachten das in Abb. 4.19a gezeigte System aus zwei dünnen Linsen mit Brennweiten  $f_1$  und  $f_2$ . Die Brennweite des Gesamtsystems wird vom Abstand  $d$  der beiden Linsen abhängen. Man erhält<sup>14</sup>

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad (4.2.23)$$

$$h_1 = \frac{fd}{f_2} \quad h_2 = -\frac{fd}{f_1} . \quad (4.2.24)$$

Hierbei sind  $h_i$  die Abstände der Hauptpunkte  $H_i$  von den Linsen  $L_i$ . Die Vorzeichenkonvention besagt, dass das Vorzeichen des Abstandes positiv ist, wenn  $H_i$  rechts von  $L_i$  liegt. Für kleine Abstände der Linsen ( $d \ll f_i$ ) lässt sich die Gesamtbrennweite des Systems aus zwei dünnen Linsen zu

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (4.2.25)$$

bestimmen. Mit der Brechkraft  $D_i = 1/f_i$  einer Linse erhält man die Brechkraft des Gesamtsystems von nahe aneinanderliegenden Linsen zu

$$D = \sum_i D_i . \quad (4.2.26)$$

Wir können also feststellen, dass sich bei aneinanderliegenden dünnen Linsen die reziproken Brennweiten oder die Brechkraft addieren. Die Brechkraft wird in *Dioptrien* gemessen, deren Einheit  $1 \text{ dpt} = 1 \text{ m}^{-1}$  ist.

### Brechkraft einer dicken Linse

Wir betrachten jetzt eine dicke Linse, deren Dicke  $d$  bei der Ableitung der Abbildungsgleichung (4.2.19) nicht mehr vernachlässigt werden kann. Wir nehmen an, dass die Linse aus einem Material mit Brechungsindex  $n$  besteht und in Luft ( $n = 1$ ) eingebettet ist. Man erhält für die Brennweite und die Lage der Hauptebenen (siehe Abb. 4.19b) folgende Beziehungen:<sup>15</sup>

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{(n-1)d}{nr_1 r_2} \right] \quad (4.2.27)$$

$$h_1 = -\frac{f(n-1)d}{nr_2} \quad h_2 = -\frac{f(n-1)d}{nr_1} . \quad (4.2.28)$$

Dabei liegen die Hauptpunkte  $H_1$  und  $H_2$  im Abstand  $h_1$  bzw.  $h_2$  vom entsprechenden Scheitelpunkt  $S_i$  der Linsenflächen entfernt. Ein positives Vorzeichen bedeutet dabei, dass  $H_i$  rechts von  $S_i$  liegt.

<sup>14</sup>Auf eine detaillierte Ableitung der Brechkraft wird an dieser Stelle zunächst verzichtet. Eine Ableitung erfolgt in Abschnitt 4.3: Die Abbildungsgleichung für ein System aus zwei dünnen Linsen kann durch zweimaliges Anwenden der Abbildungsmatrix für dünne Linse, Gleichung (4.3.11), erhalten werden.

<sup>15</sup>Eine Ableitung dieser Ausdrücke erfolgt erst später in Abschnitt 4.3, siehe hierzu (4.3.10).

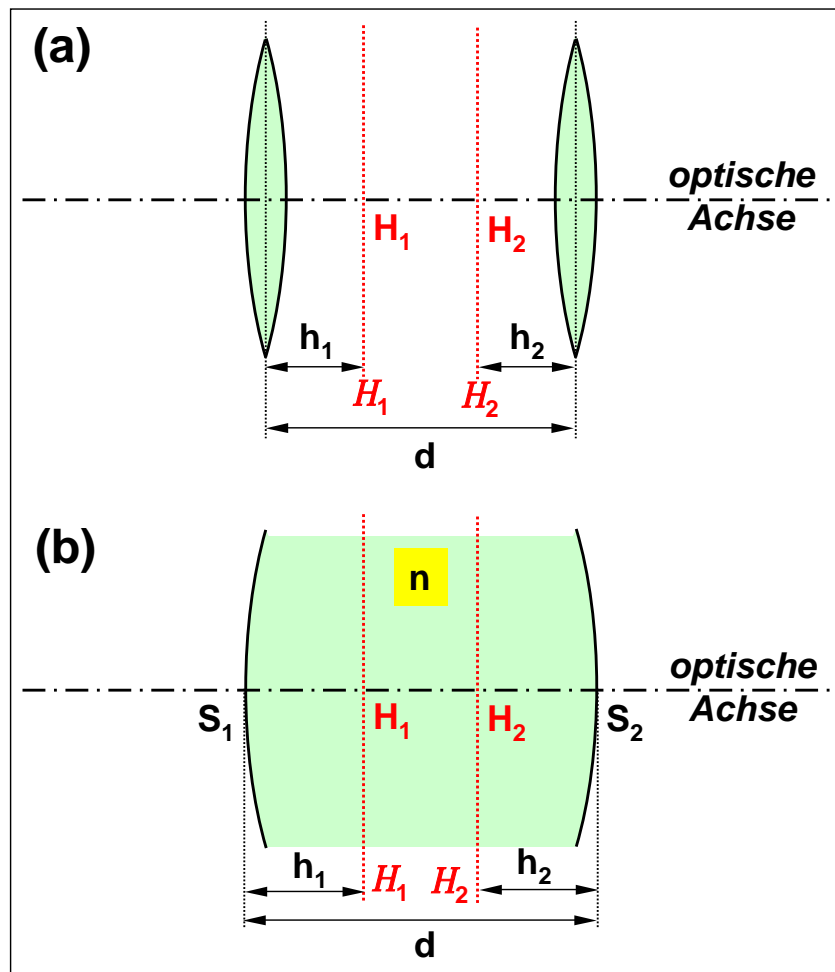


Abbildung 4.19: (a) Abbildung durch zwei dünne Linsen im Abstand  $d$ . (b) Abbildung durch eine dicke Linse der Dicke  $d$ .

Wendet man (4.2.28) auf eine Linse mit kleiner Dicke  $d \ll |r_1|, |r_2|$  an, so lässt sich abschätzen, dass für eine Glaslinse ( $n \simeq 1.5$ ) die beiden Hauptebenen gerade um ein Drittel der Linsendicke voneinander entfernt sind. In Abb. 4.20 sind die Lagen der Hauptebenen für einige Linsenformen gezeigt. Man sieht, dass auch bei einfachen Linsen (z.B. Meniskuslinsen) die Hauptebenen außerhalb der Linse liegen können. Diesen Sachverhalt macht man sich beim Design von mehrlinsigen Objektivsystemen zunutze. Man legt hier durch gezielte Optimierung des Linsensystems die Lage der Hauptebenen außerhalb der geometrischen Begrenzungen des Systems, um damit die Abmessung des Objektivs zu reduzieren. Eine alltägliche Anwendung dieser Vorgehensweise sind Teleobjektive von Photoapparaten, die so gebaut sind, dass die bildseitige Hauptebene möglichst weit vor der Filmebene liegt. Damit lassen sich trotz langer Brennweiten noch relativ kompakte Kameraobjektive herstellen (siehe hierzu auch Abschnitt 4.3.3).

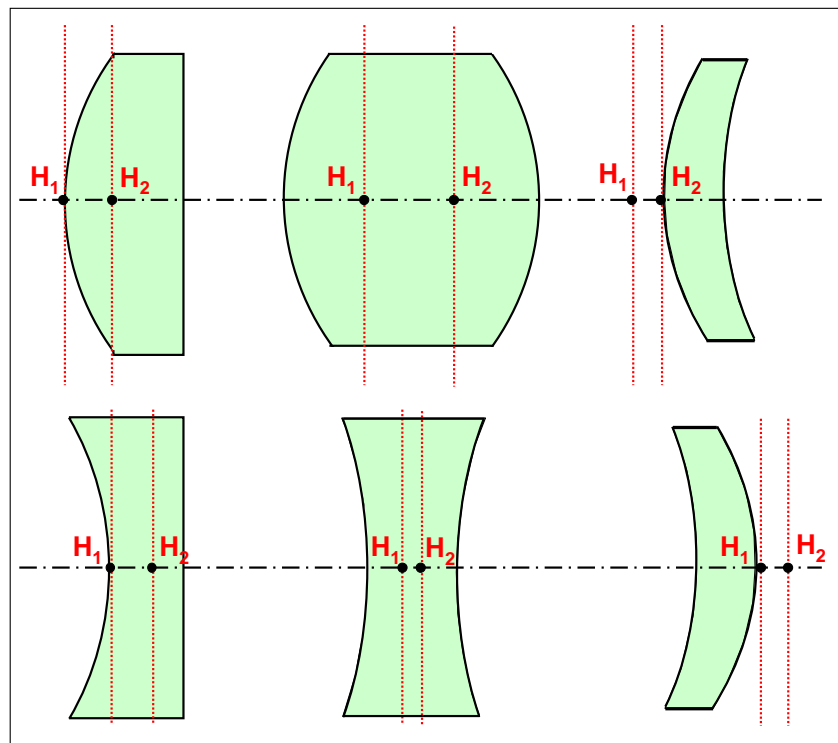


Abbildung 4.20: Die Lage der Hauptebenen in verschiedenen Linsenformen. Es wurde ein Brechungsindex von  $n = 1.5$  angenommen.

### 4.3 Matrixformulierung der Gauß'schen Optik

Es ist sehr mühsam, den algebraischen Ansatz, den wir in Abschnitt 4.2 benutzt haben, auf kompliziertere Linsensysteme anzuwenden. Eine viel elegantere Methode benutzt die Tatsache, dass die Abbildungsgleichungen in der Gauß'schen Näherung lineare Gleichungen sind. Man kann deshalb *Matrizen* verwenden, um die Berechnung auch komplexer Systeme stark zu vereinfachen. Diese Methode eignet sich besonders für numerische Berechnungen.

Das Durchlaufen eines Lichtstrahl durch ein zentriertes optisches System besteht aus aufeinanderfolgenden Brechungen und Translationen. Wir betrachten Strahlen, die von links nach rechts laufen und mit der optischen Achse eine Ebene bilden. Die so genannten schrägen Strahlen werden wir vernachlässigen, da diese in der paraxialen Näherung keine zusätzliche Information liefern.<sup>16</sup> Da wir ein um die optische Achse ( $z$ -Achse) rotationssymmetrisches System betrachten wollen, ist ein Strahl an der Stelle  $z = z_0$  eindeutig definiert, wenn wir seine Entfernung  $y$  von der optischen Achse und seinen Neigungswinkel  $\theta = dy/dz$  kennen. Wir können uns deshalb auf Strahlen in der  $yz$ -Ebene beschränken.

#### 4.3.1 Abbildungsmatrizen

##### Translations- und Brechungsmatrix

Wir nehmen zunächst einen Strahl an, der sich geradlinig in einem Medium mit dem Brechungsindex  $n$  ausbreitet. Er hat den Abstand  $y_1$  von der optischen Achse und die Neigung  $\theta_1$  an der Stelle  $z_1$  sowie  $y_2$  und  $\theta_2$  an der Stelle  $z_2 = z_1 + d$ . Es gilt dann

<sup>16</sup>Die Projektion eines schrägen Strahls auf eine Ebene ist ein in der paraxialen Näherung gültiger Strahl. Dies gilt aber nicht mehr für große Winkel.

$$y_2 = y_1 + d\theta_1 \quad (4.3.1)$$

$$\theta_2 = \theta_1 . \quad (4.3.2)$$

Diese Gleichung kann man als Matrixgleichung mit den Vektoren  $(y, n\theta)$  schreiben:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ n\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ n\theta_1 \end{pmatrix} = \mathbb{T} \begin{pmatrix} y_1 \\ n\theta_1 \end{pmatrix} . \quad (4.3.3)$$

Diese Gleichung definiert die *Translationsmatrix*  $\mathbb{T}$  für die Verschiebung von  $z_1$  nach  $z_1 + d$ .

Eine zweite Matrix beschreibt die Brechung des Lichtstrahls beim Durchgang durch eine Oberfläche mit dem Krümmungsradius  $r$  zwischen zwei Medien mit den Brechungsindizes  $n_1$  und  $n_2$ . Sie lässt sich über das Snellius'sche Brechungsgesetz  $n_1 \sin \theta_e = n_2 \sin \theta_t$  herleiten. Mit den Winkeln aus Abbildung 4.21 folgt zunächst

$$n_1 \sin \theta_e = n_1 \sin(\phi + \theta_1) = n_2 \sin(\phi + \theta_2) = n_2 \sin \theta_t . \quad (4.3.4)$$

Für kleine Winkel wird daraus

$$n_1 \phi + n_1 \theta_1 = n_2 \phi + n_2 \theta_2 . \quad (4.3.5)$$

Mit  $\phi = y_1/r$  erhalten wir

$$n_2 \theta_2 = n_1 \theta_1 - (n_2 - n_1) \frac{y_1}{r} . \quad (4.3.6)$$

Hierbei ist zu beachten, dass  $\phi > 0$ . Da  $z_1$  und  $z_2$  übereinstimmen, gilt auch  $y_1 = y_2$ . Damit können wir die *Brechungsmatrix*  $\mathbb{R}$  über folgende Gleichung definieren:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ n_2 \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{r} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1 \theta_1 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1 \theta_1 \end{pmatrix} . \quad (4.3.7)$$

Eine allgemeine Matrix  $\mathbb{M}_{21}$ , die Strahlen vom Ort  $z_1$  mit ihren Fortsetzungen am Ort  $z_2$  verbindet, ist durch

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ n_2 \theta_2 \end{pmatrix} = \mathbb{M}_{21} \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1 \theta_1 \end{pmatrix} \quad (4.3.8)$$

gegeben, wobei  $\mathbb{M}_{21}$  ein Produkt aus  $\mathbb{T}$  und  $\mathbb{R}$  ist. Da  $\det\{\mathbb{R}\} = \det\{\mathbb{T}\} = 1$  ist, folgt  $\det\{\mathbb{M}_{21}\} = 1$ .<sup>17</sup> Dabei haben wir zur Normierung dieser Matrizen das Produkt  $n\theta$  und nicht  $\theta$  alleine verwendet.

<sup>17</sup>Die Determinante einer  $2 \times 2$ -Matrix ist durch  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  gegeben. Da die Diagonalelemente gleich 1 sind und ein Nebendiagonalelemente 0 ist, wird die Determinante gleich 1.

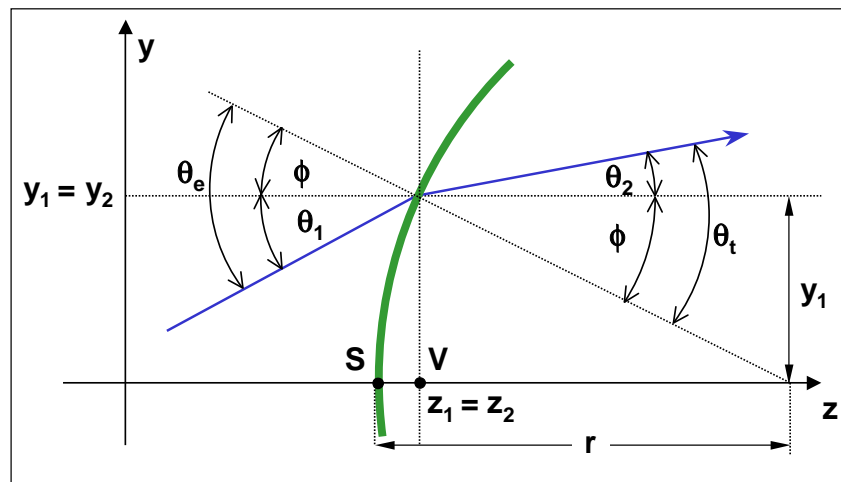


Abbildung 4.21: Darstellung der Brechungsmatrix. In der Gauß'schen Näherung fallen die Punkte  $S$  und  $V$  zusammen.

### Matrixdarstellung einer dünnen Linse

Wir haben bereits in Abschnitt 4.2.3 gesehen, dass eine *dünne Linse* aus einem optisch transparenten Medium mit Brechungsindex  $n$  besteht, das durch zwei sphärische Oberflächen begrenzt wird und in Luft ( $n = 1$ ) eingebracht ist. Die Verbindungslinie der beiden Krümmungsmittelpunkte definiert die optische Achse. Das System ist bezüglich dieser Achse rotationssymmetrisch. Die *Vertices*  $V_1$  und  $V_2$  der Linse sind die Schnittpunkte jener Ebenen normal zur optischen Achse, die die Durchstoßpunkte der Strahlen durch die brechenden Flächen enthalten. Sie liegen an den Orten  $z = z_1$  und  $z = z_2$ , wobei  $d = z_2 - z_1$ . Aus Abb. 4.22 wird klar, dass man  $(y_1, \theta_1)$  zu  $y_2, \theta_2$ ) durch sukzessive Anwendung der entsprechenden  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{T}$  und wiederum  $\mathbb{R}$  Matrix kommt. Die Matrix  $\mathbb{M}_{21}$  zwischen  $z = z_1$  und  $z = z_2$  lässt sich somit aus

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_2 \\ n_2 \theta_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{r_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{r_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1 \theta_1 \end{pmatrix} \\ &= \mathbb{M}_{21} \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1 \theta_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

ableiten, wobei<sup>18</sup>

$$\mathbb{M}_{21} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{(n-1)d}{nr_1} & \frac{d}{n} \\ -(n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{(n-1)d}{nr_1 r_2} \right) & 1 - \frac{(n-1)d}{nr_2} \end{pmatrix}. \quad (4.3.10)$$

Für eine dünne Linse kann man annehmen, dass  $d$  so klein ist, dass der zweite Term im linken unteren Matrixelement vernachlässigt werden kann. Da  $n - 1$  in der Größenordnung von 1 ist, ist  $\frac{d}{r_1 r_2} \ll \frac{|r_1 - r_2|}{r_1 r_2}$  oder  $d \ll |r_1 - r_2|$ . Setzt man  $d = 0$ , so folgt:<sup>19</sup>

<sup>18</sup>Der erste Term in der zweiten Reihe der Matrix entspricht der für eine dicke Linse angegebenen Brennweite, vergleiche hierzu Gleichung (4.2.27) unter Beachtung der Vorzeichenkonventionen.

<sup>19</sup>Diese Beziehung entspricht Gleichung (4.2.19), also der Abbildungsgleichung für eine dünne Linse; zu beachten sind allerdings die Vorzeichenkonventionen. Durch zweimaliges Anwenden der Matrix für eine dünne Linse lässt sich der Ausdruck (4.2.23) für ein System als zwei dünnen Linsen ableiten. Auch hier ist die Vorzeichenkonvention zu beachten.

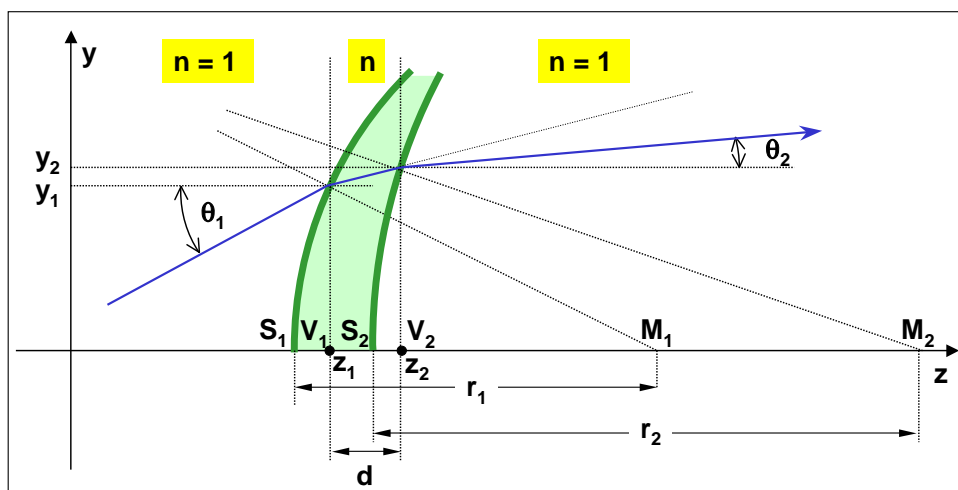


Abbildung 4.22: Strahlengang bei der Bildentstehung einer dünnen Linse in Luft. Alle Größen sind hier positiv. In der Gauß'schen Näherung fallen  $S_1$  und  $V_1$ , sowie  $S_2$  und  $V_2$  zusammen.

$$\mathbb{M}_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.3.11)$$

Hierbei ist  $f$  gleich der in (4.2.19) definierten Brennweite. In der Matrix  $\mathbb{M}_{21}$  stecken alle Eigenschaften, die wir von einer dünnen Linse an Luft erwarten:

- ein parallel zur optischen Achse mit Abstand  $y_1$  einfallender Strahl  $(y_1, 0)$  verlässt die Linse im gleichen Abstand, wird aber für  $f > 0$  zur Achse hin gebrochen, die er bei  $f$  schneidet. Der Strahl wird beschrieben durch  $(y_1, -y_1/f)$ .
- im Falle von  $r_1 = r_2$  haben wir eine sphärische Linse. Man könnte erwarten, dass sie eine unendliche Brennweite hat. Man darf aber  $d$  nicht vernachlässigen, da  $r_1 - r_2 = 0$ . Deshalb muss man jetzt den vollständigen Ausdruck für  $f$  aus (4.3.10) anwenden.
- Falls  $1/r_1 > 1/r_2$  und  $n > 1$  (dies ist die in Abb. 4.22 gezeigte Situation), haben wir eine Sammellinse. Diese Beziehung weist auch darauf hin, dass die Linse in ihrem Zentrum am dicksten ist.

### Objekt- und Bildraum

Ein Linsensystem ist durch seinen linken und rechten Vertex  $V_1$  und  $V_2$  räumlich begrenzt. Es ist nützlich, einen *Objektraum* mit Ursprung  $V_1$  und einen *Bildraum* mit Ursprung  $V_2$  zu definieren. Links von  $V_1$  wird der abzubildende Gegenstand plziert, man kann dann rechts von  $V_2$  ein reelles Bild auf einem Schirm projizieren. Beide Räume haben auch virtuelle Gegenstücke. So kann man z.B. ein virtuelles Bild links von  $V_2$  erzeugen, man kann diese Bild dann aber nicht auf einem Schirm an dieser Position sichtbar machen. Entsprechend ein virtuelles Objekt mit entsprechenden optischen Elementen rechts von  $V_1$  erzeugt werden.



### 4.3.2 Bildentstehung

Die wohl häufigste Anwendung optischer Systeme ist die Erzeugung von Bildern. Wir wollen deshalb hier kurz diskutieren, wie wir den Vorgang der Bildentstehung mit Matrizen beschreiben können. Wir nehmen dazu ein beliebiges System an, das von  $z_1$  bis  $z_2$  reicht und durch die Matrix

$$\mathbb{M}_{21} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (4.3.12)$$

beschrieben werden kann. Diese Matrix bewirkt die Transformation

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ n_2 \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1 \theta_1 \end{pmatrix} . \quad (4.3.13)$$

Wenn dieses System am Ort  $z_2$  ein Bild eines Gegenstands, der sich am Ort  $z_1$  befindet, erzeugt, dann werden die durch  $z_1$  und  $z_2$  gehenden  $(x, y)$ -Ebenen als *konjugierte Ebenen* bezeichnet. Bilderzeugung bedeutet, dass alle Strahlen, die den Punkt  $(y_1, z_1)$  unter verschiedenen Winkeln verlassen, auf den Punkt  $(y_2, z_2)$  fokussiert werden. Anders ausgedrückt,  $y_2$  muss unabhängig von  $n_1 \theta_1$  sein. Man sieht sofort, dass diese Forderung  $B = 0$  bedingt. Es folgt außerdem aus  $\det \mathbb{M}_{21} = 1$ , dass  $AD = 1$  sein muss.<sup>20</sup> Die *transversale Vergrößerung* des Systems ist dann

$$V_T = \frac{y_2}{y_1} = A . \quad (4.3.14)$$

Ein Strahl, der von  $(0, z_1)$  unter dem Winkel  $\theta_1$  ausgeht, wird den Punkt  $(0, z_2)$  unter dem Winkel  $\theta_2$  passieren. Das Verhältnis der beiden Winkel ist die *Winkelvergrößerung*. Aus  $n_2 \theta_2 = D n_1 \theta_1$  folgt

$$V_W = \frac{\theta_2}{\theta_1} = D \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{V_T} \frac{n_1}{n_2} . \quad (4.3.15)$$

#### Beispiel: dünne Linse in Luft

Wir kehren nun zur Behandlung der dünnen Linse (siehe Abschnitt 4.2.3) zurück. Wir setzen einen Gegenstand an die Position  $z_1 = -g$  (wobei  $g$  aufgrund unserer Vorzeichenkonvention positiv ist) und rechts davon bei  $z = 0$  eine dünne Linse. Das Bild finden wir rechts von der Linse bei  $z = b$ . Unter Verwendung von (4.3.11) erhalten wir für das Gesamtsystem die Matrix<sup>21</sup>

<sup>20</sup> $\det \mathbb{M}_{21} = AD - BC = 1$ , da  $B = 0$ .

<sup>21</sup>Hierbei stellen die linke und rechte Matrix Translationsmatrizen dar, die eine Translation von dem jeweiligen Gegenstandspunkt oder Bildpunkt zur Linse machen.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{b}{f} & g + b - \frac{gb}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{g}{f} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

Da das System bildenerzeugend ist, gilt

$$B = g + b - \frac{gb}{f} = 0 \quad (4.3.17)$$

oder

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \quad (4.3.18)$$

Dies ist die bereits bekannte Abbildungsgleichung (4.2.19). Die transversale Vergrößerung ist  $V_T = A = 1 - \frac{b}{f} = -\frac{b}{g}$  (vergleiche hierzu (4.2.21)) und die Winkelvergrößerung ist  $V_W = 1 - \frac{g}{f} = -\frac{g}{b}$ .

Ein weiterer Weg, die Bildentstehung auszudrücken, ergibt sich aus der Tatsache, dass im Fall  $B = 0$   $AD = 1$  wird. Daraus folgt dann

$$\left(1 - \frac{b}{f}\right) \left(1 - \frac{g}{f}\right) = 1 \quad (4.3.19)$$

oder

$$\boxed{(f - b)(f - g) = f^2}. \quad (4.3.20)$$

Diese Gleichung wird als *Newton'sche Gleichung* bezeichnet. Diese Gleichung ist sehr nützlich. Wir werden weiter unten sehen, dass sie für jede Linse gilt, nicht nur für dünne. Ihre Nützlichkeit kommt daher, dass sie sich nicht auf die Linsenvertices bezieht, sondern auf den Bildpunkt, den Gegenstandspunkt und die Brennpunkte.

### Teleskopische oder afokale Systeme

Aus der obigen Betrachtung sieht man, dass für  $C = 0$  der Winkel  $\theta_2$  nicht mehr von  $y_1$  abhängt. Ein paralleles Strahlenbündel, das in das System eintritt, wird als paralleles Strahlenbündel das System wieder verlassen, allerdings unter einem anderen Winkel. Systeme mit diesen Eigenschaften heißen *teleskopisch* oder *afokal*. Von einem Gegenstand im Unendlichen wird ein Bild im Unendlichen erzeugt. Zwei gebräuchliche teleskopische Systeme sind das *astronomische Teleskop* und das *Galilei-Teleskop* (siehe Abschnitt 4.6.3).

### 4.3.3 Hauptpunkte und Hauptebenen

Wir betrachten jetzt ein abbildendes Linsensystem, das zwischen seinen Vertices  $V_1$  an der Stelle  $z_1$  und  $V_2$  an der Stelle  $z_2$  durch die allgemeine Matrix

$$M_{21} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{pmatrix} \quad (4.3.21)$$

beschrieben wird, die die Matrix der dünnen Linse ersetzt. Anstelle von (4.3.16) haben wir dann

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{A} + b\mathcal{C} & \mathcal{B} + g\mathcal{A} + b(\mathcal{D} + g\mathcal{C}) \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} + g\mathcal{C} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

Die Bedingung für die Bilderzeugung ist wieder durch  $B = 0$  gegeben, was zu

$$\mathcal{B} + g\mathcal{A} + b\mathcal{D} + gb\mathcal{C} = 0 \quad (4.3.23)$$

führt. Daraus folgt abermals  $AD = 1$  und damit

$$(\mathcal{A} + b\mathcal{C})(\mathcal{D} + g\mathcal{C}) = 1. \quad (4.3.24)$$

Um das Problem zu vereinfachen, vergleichen wir (4.3.24) mit der Newton'schen Gleichung  $(f - b)(f - g) = f^2$  (vergleiche (4.3.20)) für die dünne Linse. Beide haben die gleiche Form, wenn wir (4.3.24) wie folgt schreiben:

$$(f\mathcal{A} - b)((f\mathcal{D} - g) = f^2. \quad (4.3.25)$$

Hierbei haben wir  $-1/\mathcal{C}$  wie bei der dünnen Linse als Brennweite  $f$  definiert. Setzt man  $b = \infty$  bzw.  $g = \infty$ , so befinden sich die Brennpunkte  $F_1$  bzw.  $F_2$  an den Stellen  $z_1 + \mathcal{D}/\mathcal{C}$  und  $z_2 - \mathcal{A}/\mathcal{C}$ . Wir schreiben nun (4.3.25) in der Form

$$(f - [b - (\mathcal{A} - 1)f])(f + [-g - (1 - \mathcal{D})f]) = f^2. \quad (4.3.26)$$

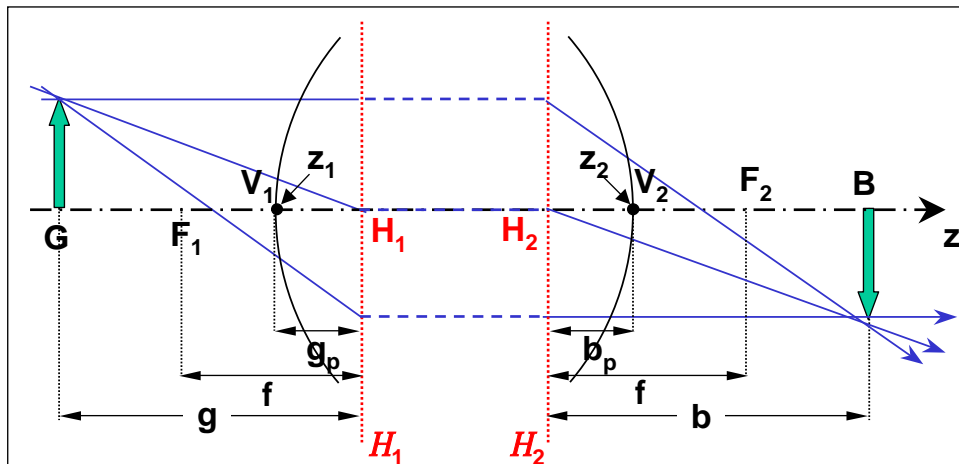


Abbildung 4.23: Zur Definition der Größen bei der Beschreibung eines abbildenden dicken Linsensystems mit Hilfe der Matrixformulierung.

Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} g_p &= -(\mathcal{D} - 1)/\mathcal{C} \\ b_p &= (1 - \mathcal{A})/\mathcal{C} \\ f &= -1/\mathcal{C} . \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

erhält man daraus

$$\boxed{[f - (b - b_p)] [f - (g - g_p)] = f^2 .} \quad (4.3.28)$$

Diese Gleichung entspricht der Newton'schen Gleichung, vorausgesetzt wir messen die Objekt- und die Bildentfernung von den *Hauptpunkten*  $H_1$  an der Stelle  $z = z_1 - g_p$  und  $H_2$  an der Stelle  $z = z_2 + b_p$  aus. Damit kann (4.3.26) als

$$\frac{1}{g - g_p} + \frac{1}{b - b_p} = \frac{1}{f} \quad (4.3.29)$$

geschrieben werden.

Die Hauptebenen  $\mathcal{H}_1$  und  $\mathcal{H}_2$  senkrecht zur optischen Achse durch die Hauptpunkte  $H_1$  und  $H_2$  werden in vielen Lehrbüchern als *konjugierte Ebenen* bei einer Vergrößerung von 1 definiert. Ersetzt man  $g = g_p$  und  $b = b_p$  in (4.3.22), so findet man sofort

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix} . \quad (4.3.30)$$

Hieraus erkennt man, dass die Hauptebenen tatsächlich konjugierte Ebenen ( $B = 0$ ) bei einer transversalen Vergrößerung und einer Winkelvergrößerung von 1 ( $A = 1$  und  $D = 1$ ) sind.

Die vier Punkte  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $F_1$  und  $F_2$  sind 4 der 6 *Kardinalpunkte*, die für Zwecke der Strahlengangsbestimmung die Matrix eines Linsensystems darstellen. Die zwei noch fehlenden sind die *Knotenpunkte*  $N_1$  und  $N_2$ , die mit  $H_1$  und  $H_2$  übereinstimmen, falls der Objekt- und Bildraum denselben Brechungsindex haben, was für Linsen in Luft immer zutrifft. Wir wollen abschließend die Orte der Haupt- und Brennpunkte in Bezug auf die Matrixelemente des Systems zusammenfassen, wobei wir annehmen, dass sich das System in Luft befindet:<sup>22</sup>

$$\begin{aligned} \text{Hauptpunkte:} \quad & H_1 \text{ an der Stelle } z = \frac{\mathcal{D}-1}{\mathcal{C}} + z_1 \\ & H_2 \text{ an der Stelle } z = \frac{1-\mathcal{A}}{\mathcal{C}} + z_2 \\ \text{Brennpunkte:} \quad & F_1 \text{ an der Stelle } z = \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{C}} + z_1 \\ & F_2 \text{ an der Stelle } z = -\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{C}} + z_2 \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt  $F_1 H_1 = F_2 H_2 = -1/\mathcal{C} = f$ , so dass jeder Brennpunkt eine Strecke  $f$  vom zugehörigen Hauptpunkt entfernt ist.

### Geometrische Bedeutung der Brenn- und Hauptpunkte

Wenn ein Strahlenbündel parallel zur optischen Achse einfällt, gilt  $g = \infty$  und damit  $b - b_p = f$ . Das heißt, das Bündel wird in den Brennpunkt  $F_2$  fokussiert. Ein Bündel, das schräg unter einem Winkel  $\alpha$  zur optischen Achse einfällt, wird an der Stelle  $y = \alpha f$  in der Brennebene  $\mathcal{F}_2$  fokussiert. Ebenso verlässt jeder Strahl, der durch  $F_1$  geht, das System parallel zur optischen Achse. Es gibt auch an dieser Stelle eine Brennebene  $\mathcal{F}_1$ , die senkrecht zur optischen Achse durch den Punkt  $F_1$  verläuft. Dies ist völlig analog zum Fall der dünnen Linse (vergleiche Abschnitt 4.2.3).

Für eine dünne Linse liegen  $\mathcal{H}_1$  und  $\mathcal{H}_2$  in der Linsenebene. Bei einem Linsensystem können sie sich allerdings an anderen Stellen befinden (siehe hierzu Abb. 4.20). Da sich  $F_1$  in einer Entfernung  $f$  links von  $\mathcal{H}_1$  befindet, kann  $\mathcal{H}_1$  als die Linsenebene einer dünnen Linse mit Brennweite  $f$  interpretiert werden, die Licht einer Punktquelle am Ort  $F_1$  in einen parallelen nach rechts laufenden Strahl umwandelt. Analog ist  $\mathcal{H}_2$  die Linsenebene der gleichen dünnen Linse, die einen parallel von links einfallenden Strahl in  $F_2$  fokussiert.

Um den Strahlengang in einer Linse zu verfolgen, verwenden wir die Hauptpunkte wie folgt (siehe hierzu Abb. 4.24): Ein durch  $F_1$  einfallender Strahl verlässt das System parallel zur optischen Achse in dem Abstand, in dem er  $\mathcal{H}_1$  erreicht, also genauso als ob dort in dieser Ebene eine dünne Linse vorhanden wäre. Ebenso geht ein von links einfallender achsenparalleler Strahl durch den Punkt  $F_2$ , als ob er durch eine dünne Linse in der Ebene  $\mathcal{H}_2$  gebrochen worden wäre. Jeder durch  $H_1$  einfallende Strahl verlässt das System durch  $H_2$ , da  $\mathcal{H}_1$  und  $\mathcal{H}_2$  konjugiert sind. Weiterhin sind der einfallende und auslaufende Strahl parallel, da die Winkelvergrößerung zwischen den Hauptebenen bei einem Strahl in Luft 1 beträgt. Man sieht, dass man jeden Strahl durch das System verfolgen kann, indem man seinen Schnittpunkt mit  $\mathcal{H}_1$  herausfindet, ihn von  $\mathcal{H}_2$  aus im gleichen Abstand von der optischen Achse fortsetzt und einen parallelen Hilfsstrahl durch den Brennpunkt zieht, um die Austrittsrichtung zu bestimmen.

### Beispiel: Teleobjektiv

Ein anschauliche Demonstration der Funktion der Kardinal Ebenen kann man mit einem *Teleobjektiv* erhalten. Dieses kann als ein System definiert werden, bei dem die Brennweite deutlich größer ist als

<sup>22</sup>Verwendet man die Matrix aus (4.3.10) und benutzt  $\mathcal{C} = -1/f$ , so erhält man sofort die in (4.2.28) angegebenen Ausdrücke für die Lage der Hauptebenen. Hierbei muss  $z_1 = z_2 = 0$  gesetzt werden, da in (4.2.28) der Abstand der Hauptpunkte von den Scheitelpunkten angegeben wurde.

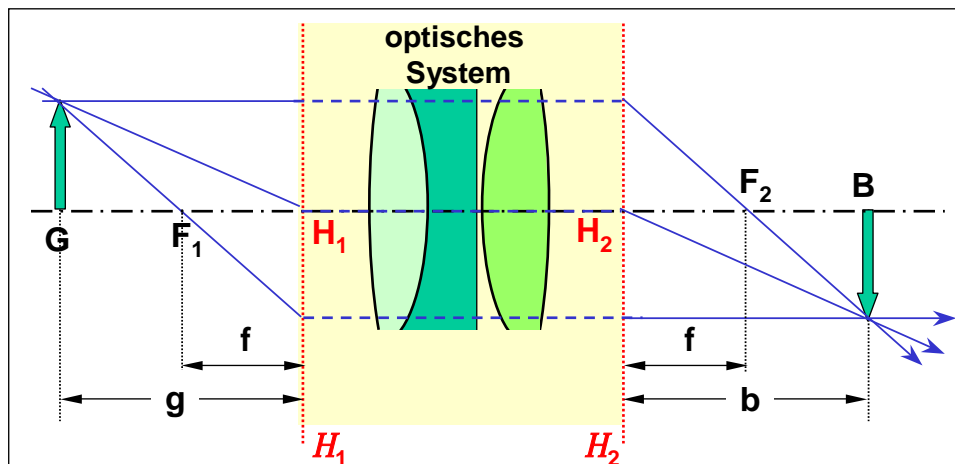


Abbildung 4.24: Strahlengang durch ein beliebiges optisches System in Luft, konstruiert mit den Haupt- und Brennpunkte.

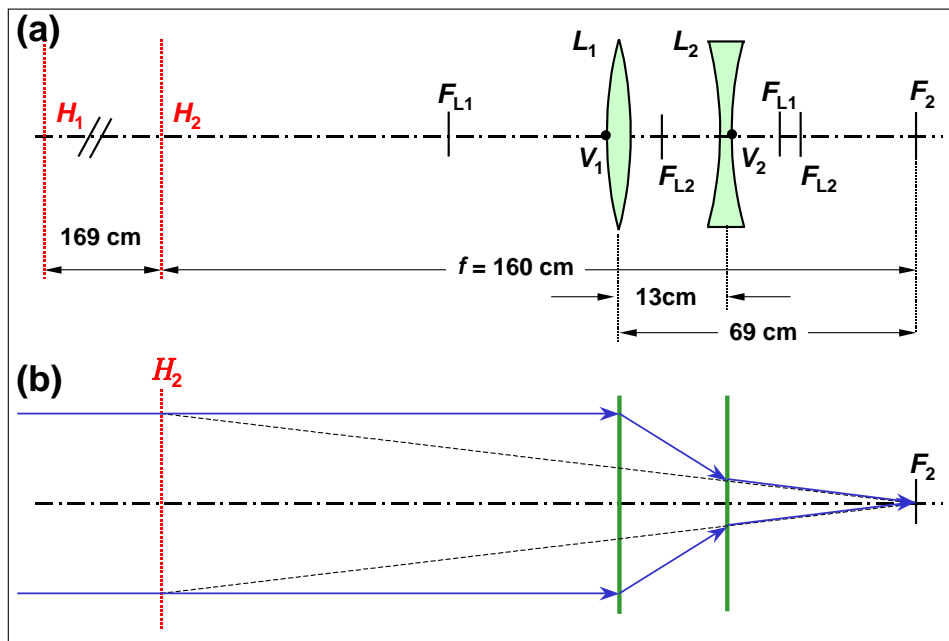


Abbildung 4.25: Teleobjektiv bestehen aus zwei Linsen  $L_1$  und  $L_2$  mit Brennweiten 20 cm und  $-8$  cm in einem Abstand von 13 cm. (a) Kardinalpunkte, (b) Strahlengang für ein Objekt auf der optischen Achse bei  $g = \infty$ . Die äquivalente dünne Linse an der Stelle  $H_2$  hat den gestrichelt gezeichneten Strahlengang.

der Abstand  $\overline{V_1 F_2}$ . Ein solches Objektiv mit kurzer Bauweise und großer Brennweite wird vor allem in Photoapparaten verwendet, um ein stark vergrößertes Bild auf dem Film zu erzeugen. Ein Beispiel für ein solches System ist in Abb. 4.25 gezeigt.

Das Teleobjektiv besteht im Wesentlichen aus einem Paar dünner Linsen  $L_1$  und  $L_2$  und zwar einer schwächeren Sammellinse und einer stärkeren Zerstreuungslinse. Diese Linsen sind etwas weiter als die Summe ihrer Brennweiten voneinander entfernt, so dass sie in ihrer Kombination wie eine schwache Sammellinse wirken. Berechnet man die Positionen von  $H_1$  und  $H_2$ , so sieht man, dass beide auf der gleichen Seite der Linsen liegen. Jeder Punkt eines weit entfernten Gegenstands dient als Quelle paralleler Strahlen, entsprechend wird er in  $F_2$  abgebildet. Für Licht, das aus dem Objektraum einfällt, verhält sich das System wie eine dünne Linse an der Stelle  $H_2$  mit der Brennweite  $\overline{H_2 F_2}$ , während die tatsächliche

Länge des Objektivs nur  $\overline{V_1 F_2}$  beträgt.

## 4.4 Abbildungsfehler

Die Gauß'sche Näherung gilt nicht für reale Linsen und Spiegel. Bei realen optischen Systemen hat man es oft mit Strahlen zu tun, die durch die Randbereiche der Linsen gehen oder die optische Achse unter großen Winkeln schneiden. In diesem Fall können wir die paraxiale Näherung nicht mehr verwenden. Sobald diese Näherung aber nicht mehr anwendbar ist, verliert die geometrische Optik ihre elegante Einfachheit und wird sehr technisch, wenn die Näherung  $\sin \theta \simeq \tan \theta \simeq \theta$  aufgegeben werden muss. Da die technischen Einzelheiten oft von sehr großer praktischer Bedeutung sind, wollen wir in diesem Abschnitt anhand einiger Beispiele von Linsenfehlern und ihren Korrekturen diese Problematik behandeln.

Die hauptsächlichen Abbildungsfehler von Linsen sind:

1. die sphärische Aberration (Öffnungsfehler),
2. die Koma,
3. der Astigmatismus,
4. die Krümmung der Bildebene (Bildfeldwölbung),
5. die Verzeichnung oder Verzerrung der Abbildung (Distorsion),
6. die chromatische Aberration (Farblängsfehler und chromatische Vergrößerungsdifferenz).

Diese Abbildungsfehler können in die beiden Kategorien *monochromatische Aberrationen* (1.-5.) und *chromatische Aberrationen* (6.) zusammengefasst werden.

### 4.4.1 Die monochromatische Aberration

Es gibt kein bilderzeugendes Instrument, das ein perfektes Bild eines *ausgedehnten Objekts* liefern kann. In der Praxis versucht man nun, die auftretenden Aberrationen, die für eine bestimmte Anwendung am meisten stören, so weit wie möglich zu unterdrücken. Dies hat oft zur Folge, dass andere Abbildungsfehler dadurch vergrößert werden.

Die Klassifizierung der Abbildungsfehler, die sich heute durchgesetzt hat, wurde im Jahr 1860 von **Seidel** eingeführt und geht geschichtlich der Theorie der beugungsbegrenzten Optik voraus. Im Idealfall würde eine Linse, die einen leuchtenden Objektpunkt abbildet, eine sphärische Wellenfront erzeugen, die genau in einem Punkt der Bildebene zusammenläuft. Der Ort dieses Punktes in der Ebene wäre linear mit dem Objektpunkt durch die Vergrößerung  $V_T$  verknüpft. Einige der hier besprochenen Abbildungsfehler – sphärische *Aberration*, *Koma*, *Astigmatismus* – beschreiben, wie dieser Bildpunkt an Schärfe verliert. Andere beschreiben die Abweichung des realen Bildpunktes von seiner theoretischen Position. Die *Bildfeldwölbung* gibt an, wie weit vor oder hinter der Bildebene wir das Bild finden, und die *Verzeichnung* besagt, wie stark die Abweichungen von einer gleichmäßigen Vergrößerung sind. All diese Abbildungsfehler sind häufig von der Position des abzubildenden Objektpunktes  $(x, y, z)$  und der Linseneigenschaft, insbesondere vom Linsendurchmesser abhängig, der in der paraxialen Näherung überhaupt keine Rolle gespielt hat.

Vom Gesichtspunkt der Wellentheorie aus stimmt die auslaufende Wellenfront einfach mit der Front überein, die am "richtigen" Punkt, wie er in der Gauß'schen Näherung definiert ist, konvergiert. Wenn wir nun die Abweichungen der realen Wellenfront von der idealen am Ort der Austrittspupille<sup>23</sup> berechnen,

<sup>23</sup>Eine genaue Definition der Austrittspupille folgt später.



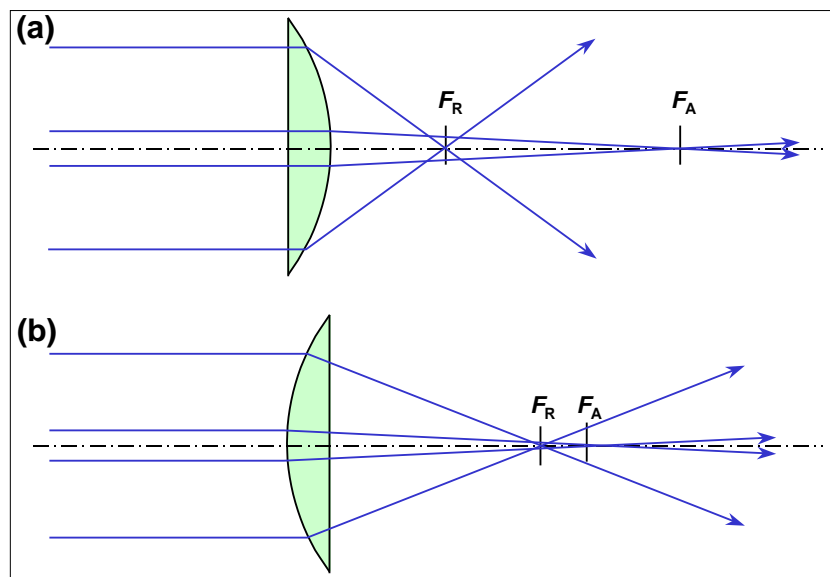


Abbildung 4.26: Sphärische Aberration: Achsenferne Strahlen besitzen eine wesentlich kleinere Brennweite als achsennahe Strahlen. Dieser Effekt kann durch geeignete Wahl der Durchleuchtungsrichtung verringert werden.

erhalten wir eine Funktion  $\Delta$ , die die Abbildungsfehler beschreibt. Die Unterteilung von **Seidel** spaltet nun diese Funktion in eine Linearkombination von Radial- und Winkelfunktionen auf, von denen jede mit einem der oben genannten Abbildungsfehler korrespondiert. Es gibt auch noch Aberrationen höherer Ordnung, auf die hier aber nicht eingegangen wird. Wir diskutieren im Folgenden einige Bildfehler ausführlicher.

### Die sphärische Aberration

Verwendet man die Koordinaten  $(\rho, \theta)$  am Ort der Austrittspupille und befindet sich das Objekt auf der optischen Achse, so entspricht die sphärische Aberration der Funktion

$$\Delta(\rho, \theta) = A \rho^4 . \quad (4.4.1)$$

Die sphärische Aberration ist in Abb. 4.26 dargestellt. Bei der verwendeten positiven Linse besitzt der achsenferne Strahl eine wesentlich kleinere Brennweite als der achsennahe Strahl. Diese Abweichung wird durch die Kugelform der brechenden Oberfläche verursacht. Die damit verbundene Aberration lässt sich stark verringern, wenn man nur achsennahe Strahlen zulässt, eine passend gerechnete Linsenkombination verwendet, oder eine Linse mit einer asphärischen Oberfläche benutzt. Im Allgemeinen lässt sich die sphärische Aberration nur für bestimmte Gegenstandsweitenbereiche korrigieren. In einigen Fällen lässt sich die sphärische Aberration bereits durch den geschickten Einsatz einer Linse minimieren. Orientiert man die in Abb. 4.26 gezeigte Linse z.B. mit der gekrümmten Fläche zum einfallenden parallelen Strahl, so werden die beteiligten Winkel kleiner, wodurch sich wiederum die sphärische Aberration reduziert. Eine weitere Verbesserung wird erzielt, wenn man die beiden Linsenoberflächen so wählt, dass jeweils die gleiche Strahlableitung auftritt.

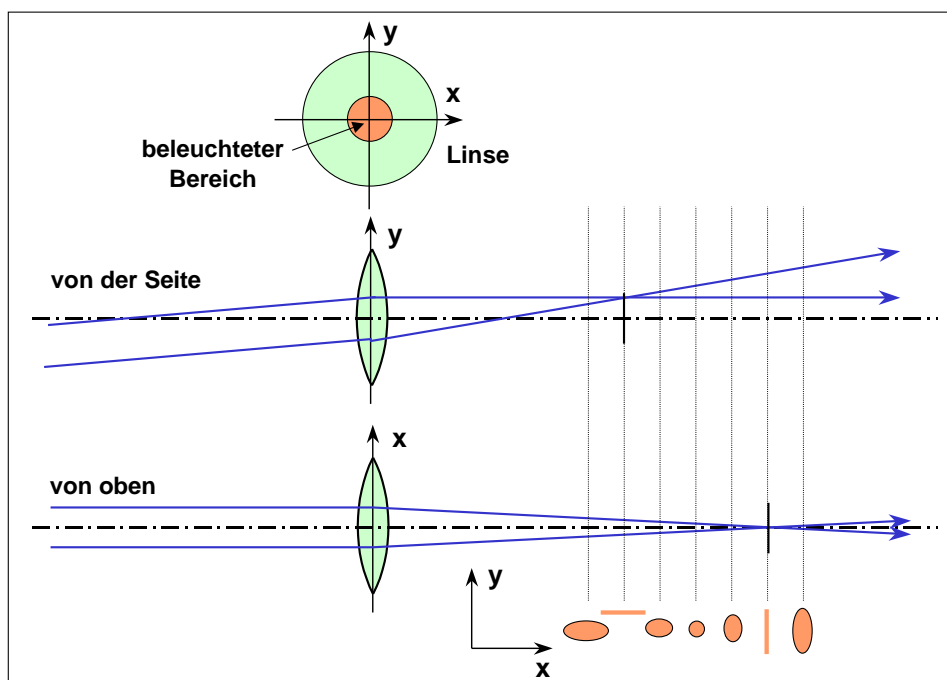


Abbildung 4.27: Astigmatismus: Durchläuft ein Lichtbündel schief eine sphärische Linse, so findet man keinen Brennpunkt mehr. Hinter der Linse tritt nur noch eine Einengung des Lichtbündels auf.

### Koma und Astigmatismus

Ist das Objekt um die Strecke  $x$  von der optischen Achse ( $z$ -Achse) entfernt, so erhält man zusätzlich zum dem durch (4.4.1) gegebenen Ausdruck einen Term proportional zu  $x$ , die so genannte *Koma*<sup>24</sup>

$$\Delta(\rho, \theta) = Bx\rho^3 \cos \theta . \quad (4.4.2)$$

Die Versetzung um  $x$  resultiert in einem schiefen Strahlbündel, das die Linse durchläuft. Zu den Aberrationen schiefer Strahlbündel gehört neben dem Koma-Fehler auch der Astigmatismus, die beide häufig zusammen auftreten. Beim Koma-Fehler spielen schiefe Bündel mit großen Öffnungswinkeln eine Rolle. Die Strahlen, die unterschiedliche Bereiche der Linse durchlaufen, werden auf verschiedenen Punkten in der Bildebene abgebildet. Das Bild einer punktförmigen Quelle enthält dadurch einen einigermaßen scharfen Kern, dem sich ein kometenartiger Schweif anschließt. Die Erscheinung der Koma lässt sich durch ein hinreichendes Abblenden der benutzten Linse unterdrücken, wodurch der Öffnungswinkel des vom Objektpunkt kommenden Strahlenbündels verkleinert wird.

Astigmatismus tritt auch bei Bündeln mit kleinen Öffnungswinkeln auf. Wir diskutieren den Astigmatismus anhand von Abb. 4.27, wo eine Konvexlinse im schraffierten Bereich von einem parallelen Strahlenbündel beleuchtet wird. Die Achse des Bündels schließt mit der optischen Achse den Winkel  $\alpha$  ein. Man beobachtet nun keinen definierten Brennpunkt mehr. Der Querschnitt des Bündels wird hinter der Linse vielmehr ellipsenförmig. Er zieht sich zunächst zu einer horizontalen Linie zusammen, erhält am "Ort der kleinsten Konfusion" Kreisform, bevor er dann eine vertikale Linie bildet und dann endgültig auseinander läuft. Die Ursache für den Astigmatismus liegt darin begründet, dass Strahlen, die achsenparallel auf die Linse treffen, eine andere Brennweite besitzen als Strahlen, die unter einem großen

<sup>24</sup>Aus dem Griechischen: Haar.

Winkel  $\alpha$  einlaufen. Extremen Astigmatismus kann man beobachten, wenn man anstelle einer rotationssymmetrischen Linse eine Zylinderlinse verwendet. Hier erfolgt eine Fokussierung nur noch in der Ebene senkrecht zur Zylinderachse. Der Brennpunkt geht dann in eine Fokallinie über.

### Die Abbe'sche Sinusbedingung und weitere Abbildungsfehler

Die Abbe'sche Sinusbedingung, die wir erst später beweisen werden, besagt, dass wenn ein Strahl unter dem Winkel  $\theta_1$  ein Punktobjekt verlässt und unter dem Winkel  $\theta_2$  im Bildpunkt konvergiert und außerdem die Bedingung  $\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \text{const.}$  gilt, weder sphärische Aberration noch Koma auftreten. Die in der Beziehung auftretende Konstante ist natürlich die Winkelvergrößerung. Dies kann man leicht verdeutlichen, indem man  $\theta$  klein werden lässt, wodurch man den bekannten Ausdruck der paraxialen Näherung erhält. Eine dünne Linse erfüllt die Abbe'sche Sinusbedingung nicht, denn für eine dünne Linse ist das Verhältnis der Winkeltangenten konstant. Die Sinusbedingung wird z.B. von aplanatischen Linsensystemen erfüllt, die sehr häufig in der Mikroskopie verwendet werden.

Die sphärische Aberration oder die Koma lassen sich durch Abblenden der Linsen, d.h. durch eine Einengung ihrer wirksamen Öffnung reduzieren. Das Anbringen einer Blende vor oder nach der Linse kann aber einen neuen Fehler hervorrufen, der sich in einer Verzerrung des Bildes bemerkbar macht. Bildet man z.B. ein Kreuzgitter mit einer Konvexlinse auf einen Bildschirm ab und bringt im Bildraum eine den Strahlengang begrenzende Blende an, so erhält man ein verzeichnetes Bild, in dem die Randbereiche auseinandergezogen sind. Man spricht von einer *kissenförmigen Verzeichnung*. Bringt man die Blende im Objektraum an, so erhält man eine *tonnenförmige Verzeichnung*, bei der die Randpartien zusammengezogen sind. Bildverzerrungen sind am kleinsten bei Linsensystemen, die symmetrisch um ihre Mittelebene sind. Ist die Vergrößerung  $-1$ , kann man sich dies durch die Umkehrbarkeit der Lichtstrahlen klarmachen, es gilt aber auch näherungsweise für andere Vergrößerungen. Die Probleme beim Design von Linsensystemen werden deutlich, wenn man versucht, gleichzeitig Bildverzerrungen (die ein symmetrisches System verlangen) und sphärische Aberrationen und Koma (die eine asymmetrische, gebogene Linse verlangen) zu korrigieren. Eine Lösung kann nur durch eine Vielzahl von *kombinierten Linsen* gefunden werden.

### 4.4.2 Die chromatische Aberration

Zur monochromatischen Aberration kommt hinzu, dass eine einfache Linse Hauptpunkte hat, deren Position vom Brechungsindex der Linse abhängt, der wiederum eine Funktion der Wellenlänge  $\lambda$  ist. Dies resultiert in den *chromatischen Aberrationen*, die immer dann auftreten, wenn kein monochromatisches Licht verwendet wird. Spiegel haben natürlich diese Abbildungsfehler nicht. Der Brechungsindex  $n(\lambda)$  eines durchsichtigen Materials ist normalerweise eine abnehmende Funktion der Wellenlänge (normale Dispersion), er ist aber von Material zu Material verschieden (siehe hierzu Abschnitt 2.4).

Die Brechkraft einer einfachen dünnen Linse ist aufgrund des wellenlängenabhängigen Brechungsindex  $n(\lambda)$  gegeben durch (vergleiche (4.2.19))

$$\frac{1}{f(\lambda)} = (n(\lambda) - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (4.4.3)$$

Aufgrund der normalen Dispersion haben transparente Materialien für rotes Licht einen kleineren Brechungsindex als für blaues Licht. Dadurch besitzt die dünne Linse für rotes Licht eine größere Brennweite als für blaues Licht (siehe Abb. 4.28). Dies hat folgende Konsequenzen:

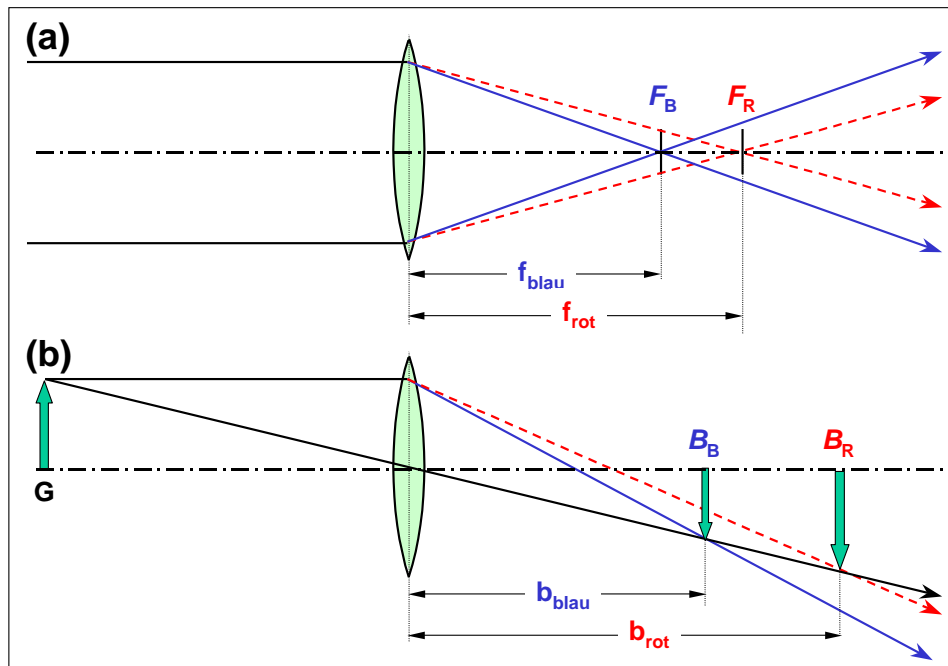


Abbildung 4.28: Chromatische Aberration: (a) Durch die Wellenlängenabhängigkeit der Brechzahl wird die Brennweite einer einfachen Linse für blaues Licht kleiner als für rotes. (b) Bei einer Abbildung treten das rote und blaue Bild in verschiedenen Bildweiten und mit unterschiedlichen Bildgrößen auf.

- Der Ort  $B_r$  des durch rotes Licht übertragenen Bildpunktes liegt in einem anderen Abstand  $b_{\text{rot}}$  hinter der Linse als der Ort  $B_b$  des durch das blaue Licht übertragenen Bildpunktes. Es gibt also keinen Ort, an dem eine scharfe Abbildung durch die roten und blauen Lichtstrahlen erfolgt.
- Die unterschiedliche Bildweite  $b_{\text{rot}} \neq b_{\text{blau}}$  bewirkt, dass die beiden Bilder unterschiedliche Größe besitzen (laterale Aberration).

Aufgrund des monotonen Verlaufs der Dispersion ist es nicht möglich, mit einer einfachen Linse Abbildungen ohne Farbfehler zu bekommen. Aus (4.4.3) folgt aber, dass eine Kombination von zwei oder mehr Linsen durch eine geschickte Wahl der Krümmungsradien  $r$  so geplant werden kann, dass die Brennweiten für zwei oder mehrere spezifische Wellenlängen gleich sind. In der gebräuchlichsten Ausführung besteht ein solches System aus zwei Linsen mit Krümmungsradius  $r_1, r_2$  und  $s_1, s_2$  und wird *achromatisches Dublett* oder einfach *Achromat* genannt. Die Brechungsindexvariation  $n(\lambda)$  eines Glases wird durch seine *Brechzahlkurve* beschrieben, die für optische Systeme im Sichtbaren definiert ist durch

$$\omega = \frac{n_b - n_r}{n_y - 1}, \quad (4.4.4)$$

wobei  $n_b, n_y$  und  $n_r$  die Brechungsindizes für blaues, gelbes (yellow) und rotes Licht sind. Normalerweise werden dazu die Wellenlängen  $\lambda = 486.1 \text{ nm}$ ,  $587.6 \text{ nm}$  und  $656.3 \text{ nm}$  verwendet. Die *Abbe-Zahl*  $V = 1/\omega$  kann in den meisten Tabellen zu optischen Materialien gefunden werden.

Es lässt sich zeigen, dass die Brennweiten für blaues und rotes Licht gleich sind, falls

$$(n_{b,F} - n_{r,F}) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + (n_{b,K} - n_{r,K}) \left( \frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2} \right) = 0 \quad (4.4.5)$$

ist. Hierbei bezeichnen die Indizes  $F$  und  $K$  verschiedene Glassorten.<sup>25</sup> Drückt man dies durch die jeweiligen Brennweiten  $f_F$  und  $f_K$  für gelbes Licht aus, erhält man

$$\frac{\omega_F}{f_F} + \frac{\omega_K}{f_K} = 0 \quad (4.4.6)$$

und die gemeinsame Brechkraft der beiden Linsen ist dann

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_F} + \frac{1}{f_K} \quad (4.4.7)$$

Eine zusammengesetzte Linse hat eine gemeinsame Oberfläche, d.h.  $r_2 = s_1$ , so dass die beiden Gleichungen (4.4.6) und (4.4.7) drei Krümmungsradien bestimmen. Es verbleibt dann ein Freiheitsgrad. Wir werden weiter unten sehen, dass man mit diesem einen weiteren Abbildungsfehler korrigieren kann. Bei unverklebten Linsendoublets mit  $r_2 \neq s_1$  hat man sogar zwei freie Parameter.

### 4.4.3 Korrektur der sphärischen Aberration

In Abb. 4.5 und Abb. 4.26 haben wir die Strahlengänge mit sphärischer Aberration gezeigt. Betrachtet man die Strahlenverläufe, so könnte man auf die Idee kommen, dass eine Verbiegung der Linse, d.h. das Addieren einer Konstanten zu sowohl  $1/r_1$  als auch zu  $1/r_2$ , eine Kompensation ergeben könnte. Eine solche Verbiegung wird die Brennweite nicht ändern, da diese nur von dem Unterschied zwischen  $r_1$  und  $r_2$  abhängt. Leider stellt sich heraus, dass man auf diese Weise die sphärische Aberration einer Einzellinse für Objekte im Unendlichen nicht vollständig korrigieren kann. Für Objekte innerhalb der Brennweite funktioniert dieser Trick allerdings (z.B. aplanatische Systeme, die einer besonderen Form einer gebogenen Meniskuslinse entsprechen). Ist das Objekt im Unendlichen, so stellt sich für  $n = 1.6$  beispielsweise heraus, dass sich die beste Reduktion der sphärischen Aberration bei einem Verhältnis von  $r_2/r_1 = -12$  einstellt. Dies entspricht fast einer plankonvexen Linse, wobei die flache Seite zum Bild hin zeigt (siehe Abb. 4.26b). Damit kann man die Linsenbrechung mehr oder weniger gleichmäßig zwischen den beiden Oberflächen aufteilen, was sich als gute Daumenregel für den Fall erweist, dass man keine aplanatischen Verhältnisse hat.

Benutzt man einen Achromaten, so kann der in 4.4.2 diskutierte zusätzliche Freiheitsgrad dazu benutzt werden, die sphärische Aberration zu korrigieren. In diesem Fall kann man eine gute Korrektur durch Verbiegen der Linse auch für Objekte im Unendlichen erzielen. Die meisten Teleskopobjektive werden so aufgebaut. Es ist auch üblich, Achromate für monochromatisches Licht zu verwenden, da man den Vorteil der Korrektur sphärischer Aberrationen ausnutzen kann.

<sup>25</sup> $F$  steht für Flintglas und  $K$  für Kronglas, die beiden am meisten verwendeten Glassorten für eine chromatische Korrektur.

## 4.5 Begrenzungen in optischen Systemen

Neben der Anforderung, ein möglichst scharfes Bild von einem Gegenstand zu liefern, gibt es weitere wichtige Anforderung an ein optisches System. Insbesondere ist es von Bedeutung, welche Bildgröße und welche Bildhelligkeit man mit einem gegebenen System erzielen kann. Um diese Eigenschaften eines optischen Systems zu diskutieren, muss man auf Begrenzungen des Strahlenganges eingehen, wie sie z.B. durch die Begrenzungen der Linsen oder in den Strahlengang gebrachte Blenden verursacht werden.

Es soll hier zunächst die maximal mögliche Bildgröße, das *Gesichtsfeld*, diskutiert werden. Dieses kann trivialerweise durch die verfügbare Ausdehnung  $W$  der Bildebene beschränkt werden. In der Praxis wird es aber fast immer durch die auftretenden Linsenfehler oder durch Blendensysteme (Aperturen) begrenzt werden (siehe hierzu Abb. 4.29). Mit dem Gesichtsfelddurchmesser  $W$  ist der maximale Gesichtsfeldwinkel  $\varepsilon$  verknüpft, der durch

$$\varepsilon = \frac{W}{b} \quad (4.5.1)$$

gegeben ist.<sup>26</sup>

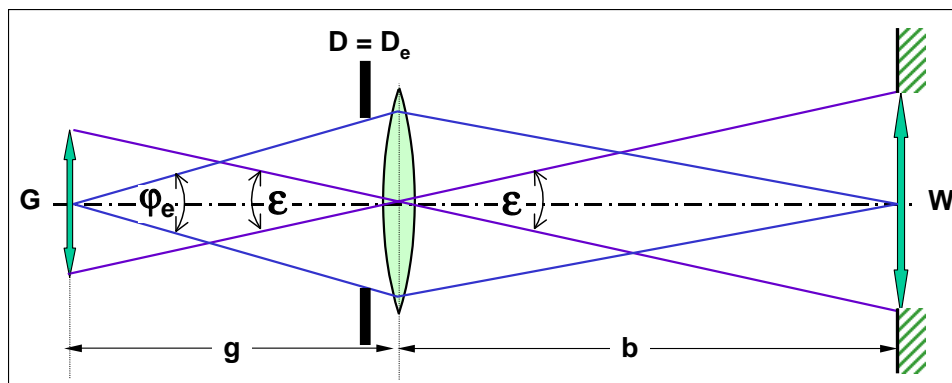


Abbildung 4.29: Schematische Darstellung eines optischen Systems zur Definition von Gesichtsfeld  $W$  und Eintrittspupille  $D_e$ .

Will man den Anteil des Lichtes, der von einem isotrop emittierenden Gegenstandspunkt auf die Bildebene abgebildet wird, bestimmen, so ist der vom optischen System erfasste Raumwinkel  $\varphi$  wichtig. Dieser Winkel wird durch die Strahlbegrenzungen (Aperturen) im abbildenden System bestimmt. Ganz allgemein bezeichnet man die real vorhandenen Strahlbegrenzungen als *Aperturblenden* oder *Aperturen*, ihre Bilder als *Pupillen*. Insbesondere bezeichnet man das von einem Achsenpunkt in der Objektebene aus gesehene Bild einer Aperturblende  $D$  als *Eintrittspupille*  $D_e$  und das von einem Achsenpunkt in der Bildebene aus gesehene Bild der Aperturblende als *Austrittspupille*  $D_a$ . Ist der Aperturblende keine Linse vorgeschaltet (wie z.B. in Abb. 4.29), so ist die Aperturblende selbst die Eintrittspupille, d.h.  $D = D_e$ . Für Gegenstandsweiten  $g$ , die groß gegen die Brennweite  $f$  sind, ergibt sich für eine einfache Linse  $\varphi_e \simeq D/g$ . Dabei ist  $D$  der Aperturdurchmesser und wir nehmen an, dass die Blende sich nahe bei der Linse befindet.

<sup>26</sup>Hier wurde  $\varepsilon$  vereinfachend bezüglich des Linsenzentrums definiert. Für komplexere optische Systeme muss aber  $\varepsilon$  korrekterweise auf das Zentrum der Eintrittspupille bzw. der Austrittspupille bezogen werden.

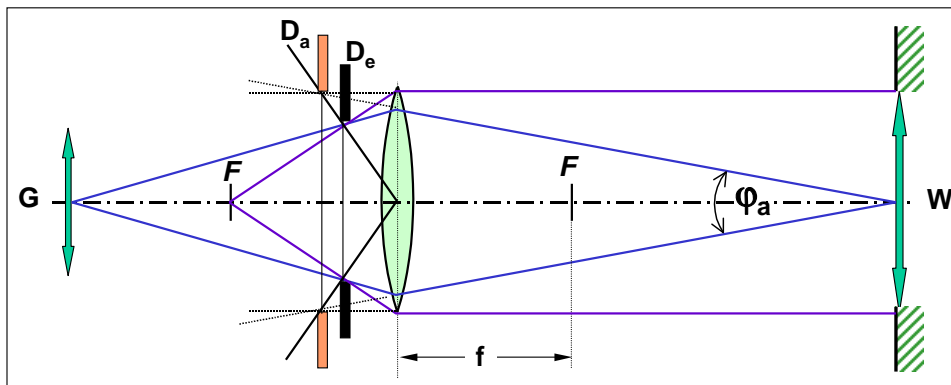


Abbildung 4.30: Schematische Darstellung eines optischen Systems zur Definition der Austrittspupille  $D_a$ .

Die Helligkeit des Bildes hängt von der abgebildeten, vom optischen System erfassten Lichtmenge und der Fläche des Bildes ab, die proportional zur Bildgröße  $\mathcal{B}$  ist. Mit Hilfe der lateralen Vergrößerung  $V_T = \mathcal{B}/\mathcal{G} = f/(f - g)$  erhält man die Bildhelligkeit zu

$$H \propto \frac{D_e^2}{\mathcal{B}^2} \propto \frac{D_e}{f^2}, \quad (4.5.2)$$

falls  $g \gg f$ . Für eine gegebene Gegenstandsweite erhält man eine Bildhelligkeit, die mit dem Durchmesser  $D_e$  der Eintrittspupille quadratisch ansteigt, mit der verwendeten Brennweite jedoch quadratisch abfällt. In der technischen Anwendung wird deshalb oft die Blendenzahl  $F = f/D_e$  benutzt. So spricht man z.B. von einem  $f$  zu 1.4-Objektiv, wenn  $f/D_e = 1.4$ . Die gebräuchlichen Blendenzahlen sind 1.4; 2; 2.8; 3.2; 4; 5.6; 8; usw. Beim Übergang von einer Blendenzahl zur nächst höheren in dieser Reihe ändert sich  $D_e$  etwa um den Faktor  $1/\sqrt{2}$ . Somit halbiert sich die Bildhelligkeit, was beim Photographieren eine Verdopplung der Belichtungszeit bedeutet.

Soll das durch das erste optische System erzeugte Bild über ein weiteres System verarbeitet werden, so ist auch der Austrittswinkel  $\varphi_a$  wichtig, unter dem das Licht das erste System verlässt und das Zwischenbild beleuchtet (siehe Abb. 4.30). Dieser Winkel ist durch die *Austrittspupille*  $D_i$  bestimmt. In analoger Weise zur Eintrittspupille ist die Austrittspupille als das Bild der Aperturblende, wie es von einem Achsenpunkt auf der Bildebene aus gesehen wird, definiert. Die Austrittspupille definiert dann den Raumwinkel  $\varphi_a$ , unter dem das Licht das optische System verlässt. Für komplizierte optische Systeme kann die Bestimmung der Pupillen sehr komplex sein (siehe hierzu Abb. 4.31a).

Macht man die Aperturblende sehr klein, so bleiben schließlich nur noch die durch ihren Mittelpunkt verlaufenden Strahlen übrig. Diese Strahlen bezeichnet man als *Hauptstrahlen* (siehe Abb. 4.31b). Als Hauptstrahl bezeichnet man also den Strahl, der von einem außeraxialen Objektpunkt zum Mittelpunkt der Eintrittspupille verläuft und vom Mittelpunkt der Austrittspupille kommend das optische System verlässt. Er repräsentiert das konisch vom Objekt ausgesandte Strahlenbündel und ist somit für die Konstruktion optischer Systeme von Bedeutung. Ähnliche Bedeutung haben die *Randstrahlen*, welche vom Achsenpunkt des Objekts kommend die Aperturblende berühren. Von Vignettierung oder Abschattung spricht man, wenn sich die effektive Aperturblende für achsenferne Objektpunkte verkleinert, was zu einer Helligkeitsverzerrung des Bildes führt.

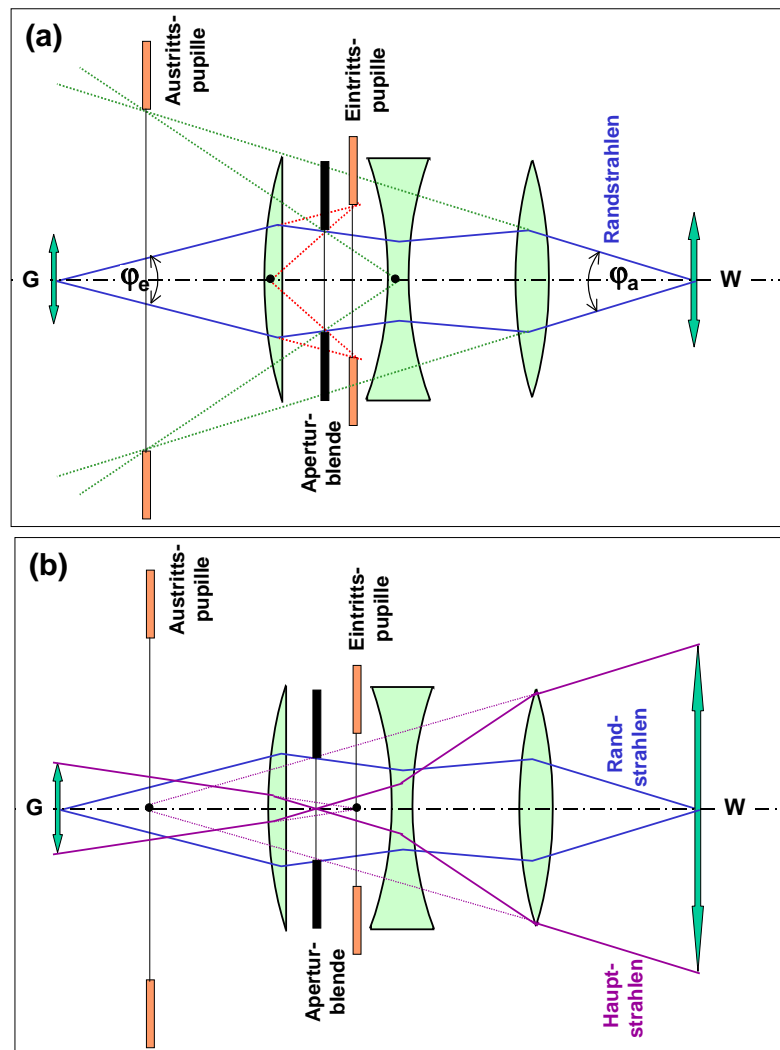


Abbildung 4.31: (a) Konstruktion der Pupillen für ein zusammengesetztes Linsensystem. Die Eintrittspupille ist das Bild der Aperturblende durch die plankonvexe Linse vom Objekt im Achsenpunkt aus gesehen. Die Austrittspupille ist das Bild der Aperturblende durch die konkave und konvexe Linsenkomination vom Bild im Achsenpunkt betrachtet. (b) Hauptstrahl eines achsenfernen Objektpunkts. Einlauf auf das Zentrum der Eintrittspupille, Austritt vom Zentrum der Austrittspupille.

### Design und Herstellung von Objektiven

Für optische Abbildungen hätte man gerne ein optisches System, das ein fehlerfreies Bild im gesamten sichtbaren Spektralbereich liefert und gleichzeitig eine große Eingangspupille  $D$  besitzt, damit bei schwacher Beleuchtung noch helle Bilder erzeugt werden können. Die Diskussion der Linsenfehler zeigte aber, dass dies Forderungen sind, die sich gegenseitig ausschließen, da das Ausmaß der monochromatischen Aberrationen in der Regel mit größer werdender Öffnung  $D$  anwächst. In der technischen Entwicklung wird nun versucht, gutes Auflösungsvermögen und hohe Lichtstärke dadurch zu erreichen, indem man ein optisches System aus mehreren Linsen aus unterschiedlichen Glassorten zusammensetzt. Dadurch lassen sich auch bei großer Öffnung die Abbildungsfehler in vernünftigen Grenzen halten. Für die Optimierungsvorgänge ist allerdings ein erheblicher Rechenaufwand notwendig. In der Vergangenheit war deshalb die Berechnung eines guten Objektivs häufig eine Lebensaufgabe. Aufgrund der heute zur Verfügung stehenden schnellen Computersysteme lässt sich mittlerweile das Design eines neuen Objektivs in kurzer Zeit durchführen. Moderne Hochleistungsobjektive bestehen oft aus mehr als 10



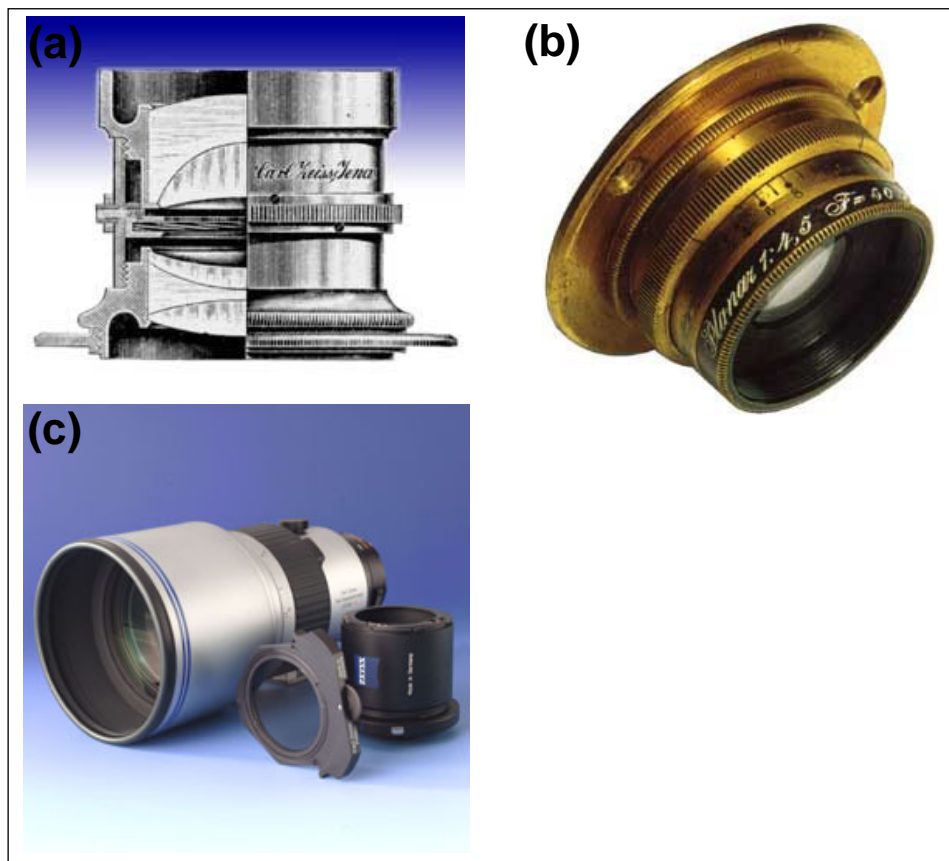


Abbildung 4.32: Historische Objektive der Firma Carl Zeiss: (a) Das bereits 1890 vorgestellte erste anastigmatische Objektiv, das später Anastigmat genannt wurde. (b) Das 1896 vorgestellte Objektiv "Planar". (c) Modernes Hochleistungs-Teleobjektiv (Zeiss Tele-Superachromat T\* 2,8/300)

Einzellinsen. Dadurch ergeben sich neben dem technischen Problem mit der Fassung und Relativpositionierung der Einzellinsen auch Probleme mit Reflexionen an den Einzeloberflächen. Dadurch wird die Transmission des Gesamtobjektivs reduziert und es treten störende Reflexe im Bild auf. Aus diesem Grund müssen Reflexionen an den Oberflächen durch präzise Antireflexbeschichtungen unterdrückt werden. Einen Teil der Probleme könnte man sich durch die Benutzung von asphärischen Oberflächen (so genannte Asphären) ersparen. Die Herstellungskosten von asphärischen Oberflächen sind jedoch so hoch, dass Asphären nur in teuren Spezialobjektiven Anwendung finden.

Bereits im Jahre 1886 erkannte **Carl Zeiss** die einzigartige Eignung von Calciumfluorid-Kristallen zur chromatischen Korrektur von Objektiven und erfand die apochromatische Korrektur. Auf dieser Basis entstehen bis heute anspruchsvolle Spitzen-Objektive für die Photographie. Im Bereich der Foto- und Filmobjektive blickt das Unternehmen Zeiss auf eine über hundertjährige Tradition zurück. So erfand **Paul Rudolph**, ein Kollege des Carl Zeiss Mitbegründers **Ernst Abbe**, bereits 1890 das erste anastigmatische Objektiv, das später Anastigmat genannt wurde (siehe Abb. 4.32a). Damit eröffnete Carl Zeiss eine neue Epoche in der Entwicklung von Fotoobjektiven. Noch im gleichen Jahr wurde das Zeiss Objektiv Protar und 1896 das Zeiss Objektiv Planar vorgestellt (siehe Abb. 4.32b). Mit diesen Errungenschaften gelang es, Objektive mit schon sehr guter Korrektur der Bildfehler und hervorragend guter Farbkorrektur herzustellen. Als Universalobjektiv eignete sich das erste Planar Objektiv aufgrund seines hohen Gewichtes sowie der wenig hohen Brillanz der Bilder (Streulicht) aber noch nicht. Man versuchte deshalb, das Objektiv Planar durch einen neuen Objektivtyp zu ersetzen, der mit weniger Grenzflächen auskam und trotzdem eine hervorragende Abbildungsgüte aufwies. Diese Eigenschaften hatte das Objektiv Tessar, das Paul Rudolph 1902 im Zeiss Werk berechnete. Mit einer relativen Öffnung von 1:6.3 und einem

Bildwinkel von mehr als  $50^\circ$  bot es eine bis dahin unerreichte, überragende Leistung. Abb. 4.32c zeigt das moderne Hochleistungs-Teleobjektiv Tele-Superachromat T\* 2,8/300, eines der lichtstärksten Teleobjektive im professionellen Mittelformat. Es bietet eine außerordentlich hohe optische Leistung. Zur Herstellung werden erhebliche Mengen optischen Glases verwendet, um einen entspannten Strahlenverlauf sicherzustellen. Mehrere Linsen sind aus Fluor-Kron-Glas mit anomaler Teildispersion gefertigt, um Farbkorrektur auf hohem Niveau zu erreichen und hohe Abbildungsleistung bei voller Öffnung zu gewährleisten. Wichtig für solche Hochleistungsobjektive ist auch eine hochwertige Mechanik, die feinfühlig arbeitet und frei von Umkehrspiel ist.

## 4.6 Optische Instrumente

Das Prinzip der optischen Abbildung von Gegenständen mit Hilfe von Linsen und Spiegeln haben wir im letzten Kapitel besprochen. Wir wollen nun einige einfache optische Instrumente vorstellen, die auch in unserem Alltagsleben von Bedeutung sind. Bei diesen Instrumenten wird meist eine Kombination von mehreren Linsen und Spiegeln eingesetzt. Wir werden uns zunächst mit denjenigen optischen Instrumenten beschäftigen, die ein reelles Bild eines Gesamtgegenstandes erzeugen.

### 4.6.1 Die photographische Kamera

Bei einer Kamera wird das Bild von beleuchteten oder selbstleuchtenden Gegenständen auf einer flachen Platte (Film, oder CCD-Halbleiterdetektor) aufgenommen (siehe Abb. 4.33). Als abbildendes Objektiv kann sowohl eine einfache Lochblende als auch ein kompliziertes Linsensystem dienen. Die Kamera muss im Wesentlichen zwei Hauptanforderungen erfüllen. Erstens muss sie ein scharfes Bild von dem Gegenstand mit einer bestimmten Bildgröße liefern und zweitens muss die Helligkeit des Bildes der Empfindlichkeit des Films angepasst sein. Dementsprechend besitzt eine Kamera verschiedene Funktionselemente (siehe Abb. 4.33).

Wir betrachten zunächst das Objektiv der Kamera. Für die normalen Anwendungen sollten Gegenstände in einer Entfernung  $\infty > g > 1$  m abgebildet werden. Für die typische Brennweite einer modernen Kamera,  $f = 50$  mm, erhält man dann eine Bildweite  $b$ , die zwischen  $b = f = 50$  mm und  $b = 52.6$  mm liegt. Um eine scharfe Abbildung zu erreichen, muss deshalb der Abstand  $b$  des Objektivs von der Filmebene verändert werden. Dabei muss man beachten, dass die auf den Kameras angegebenen Entfernungseinstellungen sich auf den Abstand  $x$  zwischen Objekt und Filmebene, d.h.  $x = b + g$ , beziehen. Die Größe des Bildes auf dem Film hängt von der verwendeten Brennweite ab. Die transversale Vergrößerung  $V_T = \mathcal{B}/\mathcal{G}$  einer Kamera wird für eine feste, große Gegenstandsweite  $g$  zu

$$|V_T| \simeq \frac{b}{g} \simeq \frac{f}{g}. \quad (4.6.1)$$

Das Bild eines entfernten Gegenstands, der unter dem Gesichtsfeldwinkel  $\varepsilon = \mathcal{G}/g$  beobachtet wird, besitzt somit in der Filmebene die Ausdehnung  $\mathcal{B} \simeq \varepsilon f$ . Durch die Brennweite des Objektivs kann also die Bildgröße dem verwendbaren Filmbereich ohne Änderung der Gegenstandsweite angepasst werden. Man verwendet kurzbrennweitige Weitwinkelobjektive für Übersichtsaufnahmen. Will man eine hohe Vergrößerung erreichen, so muss man ein Objektiv mit einer großen Brennweite verwenden. Um die Baulänge der Kamera klein zu halten, verwendet man Teleobjektive (siehe Abschnitt 4.3.3), bei denen die bildseitige Hauptebene weit vor dem Objektiv liegen kann. Bei vielen Anwendungen will man die Vergrößerung kontinuierlich variieren. Hierzu sind Zoom-Objektive notwendig, bei denen durch Verschieben eines Teils der Objektivlinse die Brennweite des Objektivs verändert und dadurch die Bildgröße eingestellt werden kann.

Zur Einstellung der Bildhelligkeit werden in der Kamera die Blende und der Verschluss eingesetzt. Da die Schwärzung des photographischen Films mit der absorbierten Energiedichte korreliert ist, hat man zur Schwärzungsvariation zwei Möglichkeiten. Man kann einerseits die Lichtintensität durch Verändern des Blendendurchmessers, andererseits durch Variation der Belichtungszeit über die Öffnungsdauer des Verschlusses steuern.

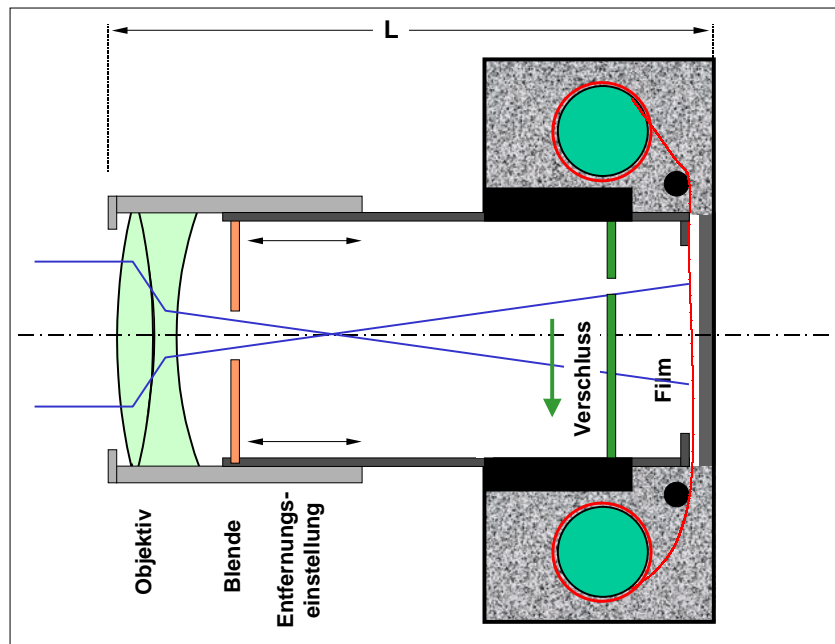


Abbildung 4.33: Schematischer Aufbau einer Kamera mit den wesentlichen Funktionselementen Objektiv, Blende, Verschluss und Film.

Mit einem optischen System kann man gemäß der Abbildungsgleichung für eine feste Bildweite nur Objekte in der dazu passenden Gegenstandsweite scharf abbilden. In der Praxis lässt sich diese Beschränkung auf eine einzige Gegenstandsweite aufweiten. Der Grund dafür liegt in der Tatsache begründet, dass der photographische Film oder der CCD-Detektor nur ein bestimmtes räumliches Auflösungsvermögen besitzen. Es gibt also einen minimalen Abstand  $\mathcal{R}_0$  zwischen zwei Bildpunkten. Bildpunkte mit kleineren Abständen können aufgrund der endlichen Auflösung des photographischen Films räumlich nicht mehr voneinander getrennt werden. Eine Unschärfe in der Abbildung, die anstelle eines Punktes ein Scheibchen mit einem Durchmesser  $Z \leq \mathcal{R}_0$  erzeugt, ist deshalb bedeutungslos. Aus dieser Tatsache lässt sich der so genannte *Schärfentiefenbereich*  $\Delta g$  ableiten (siehe hierzu Abb. 4.34).

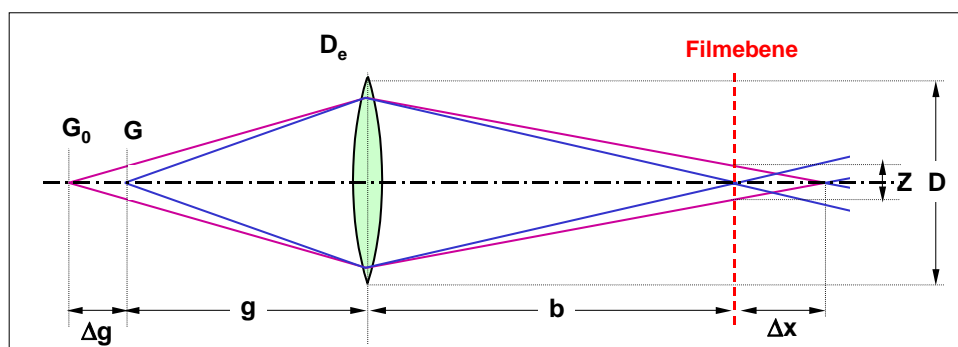


Abbildung 4.34: Schärfentiefe: Die endliche Auflösung  $Z$  des Bildmaterials erlaubt eine Änderung der Gegenstandsweite um  $\Delta g$ , ohne dass dadurch die Bildqualität verschlechtert wird.

Für einen Gegenstand im Abstand  $g$  vom Objektiv berechnet man den Durchmesser  $Z$  des Lichtbündels (Zerstreuungskreis) in der Filmebene, der vom Objektivblendendurchmesser  $D$  und vom Abstand  $\Delta x$  des idealen Bildes von der Filmebene abhängt zu

$$Z = \frac{D}{b} \Delta x . \quad (4.6.2)$$

Als Schärfentiefebereich bezeichnet man nun den Gegenstandsbereich  $\Delta g$ , für den  $Z \leq \mathcal{B}_0$  gilt. Er ist bei der Lochblende direkt mit dem Lochdurchmesser korreliert, d.h. er könnte bei beliebig kleinem Lochdurchmesser beliebig groß werden. Natürlich setzen sowohl die Welleneigenschaften des Lichts (Beugung) als auch die abnehmende Lichtstärke diesem Vorgehen Grenzen.

Mit Hilfe der longitudinalen Vergrößerung  $V_L = -f^2/(g-f)^2$  erhält man  $\Delta x = |V_L| \Delta g$  und damit aus (4.6.2)

$$\Delta g \leq \frac{b \mathcal{B}_0}{D |V_L|} = \frac{b \mathcal{B}_0}{D} \frac{g^2 - 2gf + f^2}{f^2} \quad (4.6.3)$$

$$\frac{\Delta g}{g} \simeq \mathcal{B}_0 \frac{g}{fD} = \frac{\mathcal{B}_0 g}{f^2} F \quad \text{für } g \gg f; \text{ und } f \simeq b . \quad (4.6.4)$$

Man sieht, dass die relative Schärfentiefe  $\Delta g/g$  mit wachsender Gegenstandsweite  $g$  und Blendenzahl  $F = f/D$  zunimmt, mit wachsender Objektivbrennweite allerdings stark abnimmt. Um einen möglichst großen Schärfentiefebereich zu erhalten, muss man also bei gegebenen  $f$  und  $g$  die Blende schließen. Dies führt allerdings zu einem Helligkeitsverlust und damit zu längeren Belichtungszeiten.

Benutzt man einen Film mit einer Korngröße von  $25 \mu\text{m}$  ( $\mathcal{B}_0 = 25 \mu\text{m}$ ), so kann man für  $F = 4$ ,  $g = 5 \text{ m}$  und  $f = 50 \text{ mm}$  den Schärfentiefebereich zu  $\Delta g/g \simeq 0.2$  oder  $\Delta g \simeq 1 \text{ m}$  berechnen. Werden keine hohen Anforderungen an eine Abbildung gestellt, so kann man bei Kameras mit kurzer Brennweite ( $f \leq 35 \text{ mm}$ ) auf eine Entfernungseinstellung verzichten, solange man sie bei Blendenzahlen  $F \geq 5.6$  und für große Entfernungen  $g \geq 2 \text{ m}$  betreibt. Man spricht hierbei von Fixfokus-Objektiven.

## Kameraobjektive

Das photographische Objektiv muss eine Reihe von Bedingungen erfüllen. Zunächst muss es sphärisch und chromatisch korrigiert sein, es darf keinen Astigmatismus besitzen und muss ein vollkommen ebene Bild ohne Verzeichnung liefern. Es wird weiter verlangt, dass der Bildwinkel nicht zu klein ist. Er beträgt bei normalen Objektiven etwa 40 bis 60° und erreicht bei Weitwinkelobjektiven Werte bis 100°. Zu diesen Forderungen kommt noch hinzu, dass ein Objektiv möglichst lichtstark sein soll, um kurze Belichtungszeiten zu ermöglichen. Diese Forderungen können nicht mit einer einzelnen Linse realisiert werden. Moderne Objektive bestehen deshalb aus mehreren (bis zu 10) teilweise miteinander verkiteten Linsen. Als Beispiel ist in Abb. 4.35 ein unsymmetrischer Anastigmat nach dem Triplettsystem mit verkitteter Hinterlinse gezeigt, wie er sich z.B. in dem bekannten Zeiss-Tessar-Objektiv oder in dem Leitz-Elmar-Objektiv befindet.

### 4.6.2 Das Auge

Wir alle betrachten unsere Welt durch ein optisches System, das im Prinzip einer optischen Kamera mit nachgeschalteter intelligenter Bildverarbeitung entspricht. Das menschliche Auge muss zwei Aufgaben erfüllen. Zum einen soll es eine möglichst perfekte optische Abbildung unserer Umgebung ermöglichen,

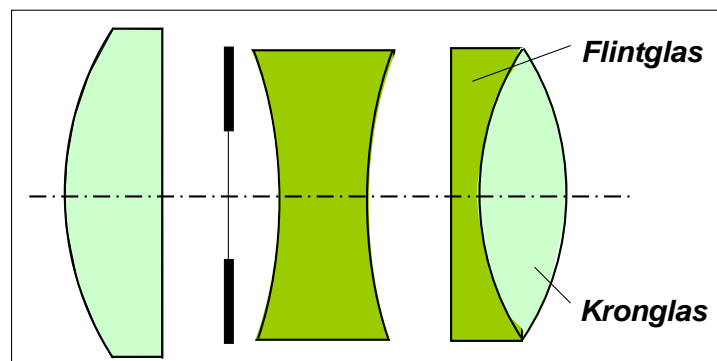


Abbildung 4.35: Unsymmetrischer Anastigmat nach dem Triplettsystem.

zum anderen muss es in der Lage sein, die Helligkeitsinformation aufzunehmen, vorzuverarbeiten und an das Gehirn weiterzugeben. Die Behandlung dieses Gesamtvorgangs ist sehr komplex und immer noch Bestandteil aktueller Forschung. Als “optisches Instrument”, etwa im Vergleich mit einer Kamera, ist das menschliche Auge als sehr schlecht zu beurteilen. Seine hervorragenden Eigenschaften erhält der Sehsinn durch die Verarbeitung der gewonnenen Eindrücke im Gehirn. Das Gehirn steuert das Auge und ermöglicht seine erstaunliche Anpassungsfähigkeit (z.B. Veränderung der Pupillenöffnung zur Helligkeitsanpassung, Anpassung der Brennweite der Augenlinse zur Entfernungseinstellung). Das räumliche Sehen und die Entfernungsmessung wird durch das Vorhandensein zweier Augen erleichtert. Für viele Tiere ist das Sehen im weiten Umkreis allerdings wichtiger, ihre Augen befinden sich deshalb seitlich am Kopf. Wenn diese Tiere räumlich sehen wollen, müssen sie ihren Kopf bewegen, um einen Gegenstand aus verschiedenen Blickwinkeln zu betrachten.

Wir wollen hier nur eine sehr vereinfachte Darstellung des menschlichen Sehens geben und wollen uns dabei auf das Auge als optisches System konzentrieren. Abb. 4.36 zeigt den schematischen Aufbau des menschlichen Auges. Das Auge ist im hinteren Teil von der lichtundurchlässigen Lederhaut umgeben. Licht gelangt nur durch die Hornhaut in das Auge und wird von einem optischen System, das aus der Hornhaut ( $n = 1.368$ ), dem Kammerwasser vor der Linse ( $n = 1.336$ ) und der Kristalllinse ( $n = 1.37 - 1.42$ ) besteht, auf die lichtempfindliche Netzhaut (Retina) abgebildet. Der Raum zwischen Linse und Retina ist mit dem Glaskörper ( $n = 1.336$ ) ausgefüllt. Das Auge besitzt deshalb unterschiedliche Brennweiten vor dem Auge  $f_{\text{vorne}}$  und hinter dem Auge  $f_{\text{hinten}}$ . Dies ist im Gegensatz zu den bisher besprochenen optischen Systemen, wo immer das gleiche Medium vor und hinter dem optischen System angenommen wurde.

Da der Raum hinter der Hornhaut optisch dicht ist, bringt die konvexe Hornhaut mit ihrer Grenzfläche zu Luft den wesentlichen Teil der Brechkraft auf. Die eigentliche Linse des Auges dient zu *Akkommodation* oder Brennweitenregulierung, die mit Hilfe der Ciliar-Muskeln erfolgt. Sie sorgt dafür, dass das Bild für verschiedene Gegenstandsweiten auf der Netzhaut zu liegen kommt. Dies ist notwendig, da im Gegensatz zur Kamera beim Auge der Abstand zwischen Linse und Netzhaut/Filmebene fest ist. Bei der Akkommodation erfolgt eine Variation der Augenbrennweite  $f_{\text{vorne}}$  zwischen etwa 14 und 17 mm. Das entspannte Auge (emmetrope Auge) besitzt die größte Brennweite, so dass damit unendlich weit entfernte Gegenstände scharf gesehen werden. Unter Berücksichtigung der Akkommodation erstreckt sich der Bereich scharfen Sehens von etwa 15 cm bis unendlich. Ohne Anstrengung kann man dabei bis zu einer Gegenstandsweite  $S_0$  sehen. Für technische Anwendungen wird diese *konventionelle Sehweite* mit  $S_0 = 25$  cm definiert. Bei der Kristalllinse handelt es sich um ein System, das Brechung durch inhomogene Verteilung des Brechungsindex durchführt (GRIN-Linse). Solche Linsen werden auch technisch eingesetzt. Die Akkommodation erfolgt über die Verformung der GRIN-Linse.

Die Helligkeitsregulierung im Auge erfolgt über die Iris, die als Blende mit variablem Durchmesser unmittelbar vor der Linse liegt. Der Durchmesser der Iris kann innerhalb von nur einer Sekunde zwischen

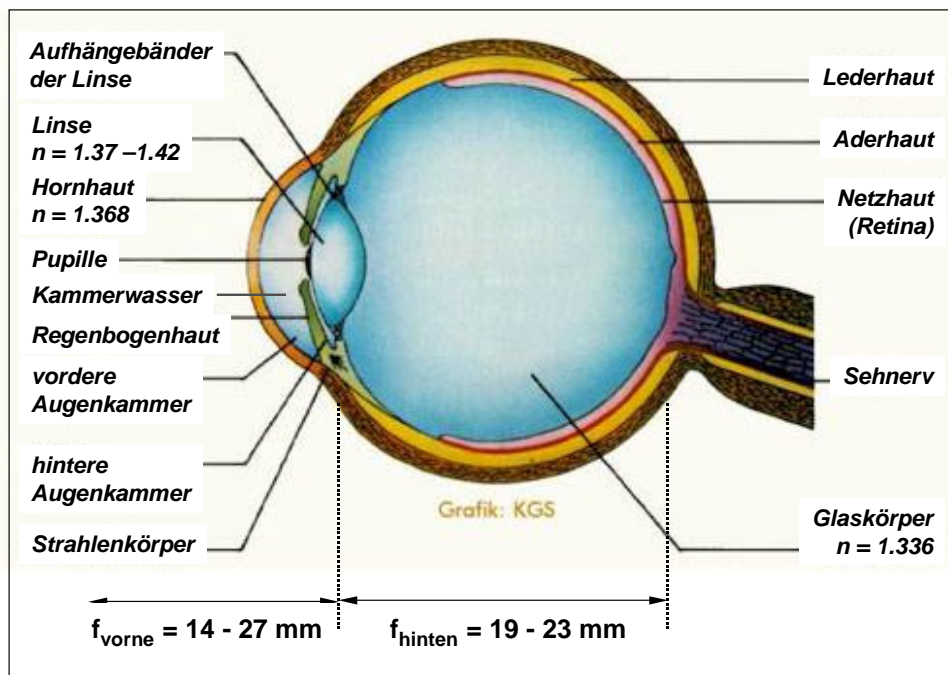


Abbildung 4.36: Schematischer Aufbau des menschlichen Auges.

etwa 1.5 mm und 8 mm variiert werden. Über einen längeren Zeitraum kann die Helligkeitsempfindlichkeit des Auges durch die Anpassung der physiologischen Empfindlichkeit der Retina erfolgen (auf Zeitskala von etwa 30 Minuten). Das Auge ist deshalb kein guter absoluter Helligkeitsmesser. Relative Helligkeitsunterschiede können aber mit sehr hoher Genauigkeit festgestellt werden. Interessant ist, dass das menschliche Auge bezüglich der wahrgenommenen Lichtintensität einen riesigen dynamischen Bereich von 15 Größenordnungen abdeckt, d.h. die kleinste wahrgenommene Intensität ist um  $10^5$  mal kleiner als die maximal verträgliche Intensität. Dieser Dynamikbereich des Auges ist größer als der aller bekannten technischen Instrumente. Die kleinste vom Auge zu detektierende Lichtintensität entspricht nur etwa 30 Photonen pro Sekunde und Sehzelle. Dies entspricht einer mittleren Strahlungsleistung von nur etwa  $1.5 \times 10^{-17}$  Watt.

Die Qualität der optischen Abbildung kann durch verschiedene Arten der Fehlsichtigkeit verringert werden (siehe hierzu Abb. 4.37). Weit verbreitet sind die Fälle der Kurz- und Weitsichtigkeit (*Myopie* und *Hyperopie*), bei denen die Brennweite des optischen Systems nicht der Augenzahl angepasst ist. Bei Kurzsichtigen ist das Auge zu lang (d.h. der Brennpunkt liegt vor der Retina), bei Weitsichtigen dagegen zu kurz (d.h. der Brennpunkt liegt hinter der Retina). Die Korrektur dieser Fehler ist durch Zerstreuungsbzw. Sammellinsen möglich. Dabei ist jedoch zu beachten, dass die korrigierende Linse etwa im Abstand  $f_{\text{vorne}}$  vor dem Auge angebracht ist ( $d = f_{\text{vorne}}$ ). Dadurch bleibt nach (vergleiche Abschnitt 4.2.4)

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} = \frac{1}{f_L} + \frac{1}{f_{\text{vorne}}} - \frac{f_{\text{vorne}}}{f_{\text{vorne}} f_L} = \frac{1}{f_{\text{vorne}}} \quad (4.6.5)$$

$$h_1 = \frac{fd}{f_{\text{vorne}}} \quad h_2 = -\frac{fd}{f_L} \quad (4.6.6)$$

die Brennweite des Gesamtsystems gleich  $f_{\text{vorne}}$ , die Lage der bildseitigen Hauptebene (und damit die des Bildes) wird allerdings verschoben und dadurch die Bildschärfe ohne Änderung der Bildgröße korrigiert

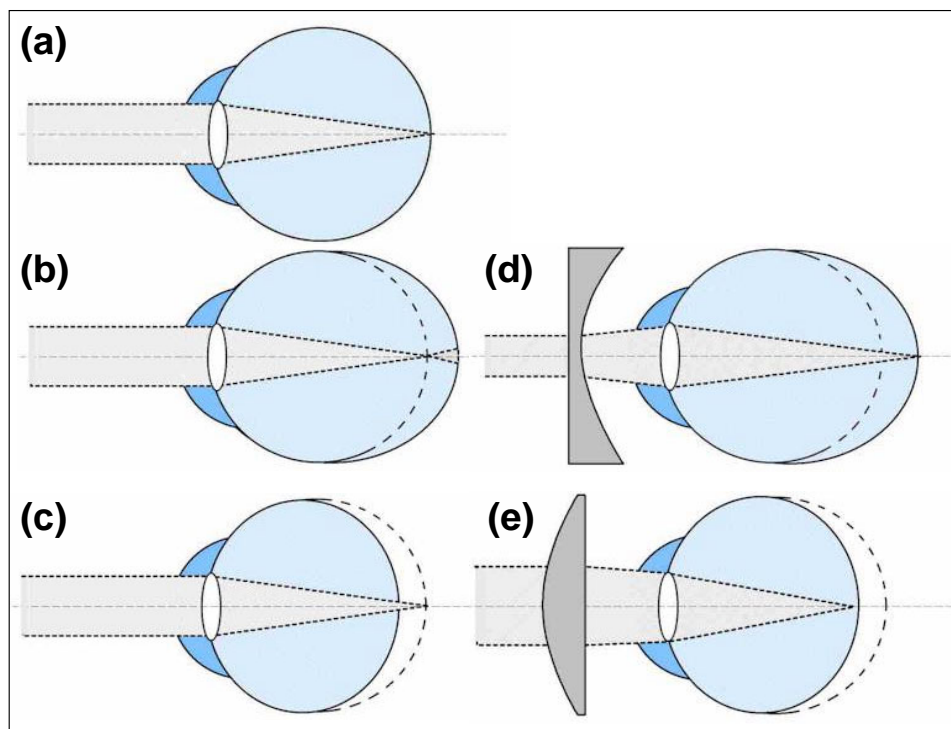


Abbildung 4.37: Normalsichtiges (emmetropisches) (a), kurzsichtiges (ametropisches) (b), weitsichtiges (hypermetropisches) (c), durch Konkavlinse korrigiertes kurzsichtiges (d) und durch Konvexlinse korrigiertes weitsichtiges (e) Auge.

(eine Änderung der Bildgröße könnte das stereoskopische Sehen stark beeinträchtigen). Eine weitere Fehlsichtigkeit ist das Alterssehen. Hier wird die Akkommodationsfähigkeit des Auges durch nachlassende Elastizität der Kristalllinse reduziert. Die Brennweite des Auges kann dann nicht mehr ausreichend verkleinert werden. Der kleinste Abstand, für den gerade noch eine scharfe Abbildung erfolgt, wird größer als  $S_0$ . Eine Korrektur kann über eine Lesebrille mit Sammellinsen erfolgen.

Im menschlichen Auge werden auch achsenferne Strahlen abgebildet. Untersucht man die Qualität der optischen Abbildung, so stellt man fest, dass nur achsennahe Strahlen mit guter Qualität abgebildet werden. Die subjektive Empfindung einer scharfen Abbildung über einen großen Sehwinkel kommt nur durch die spezielle Art des menschlichen Sehens zustande. Durch eine schnelle Bewegung des Auges werden verschiedene Bereiche des gesamten erfassten Gegenstands in den zentralen Bereich des Blickfeldes gebracht und das so erhaltene scharfe Teilbild im Gehirn in das Gesamtbild aufgenommen. Dieser Art des Sehvorgangs ist auch die Retina angepasst. Nur im zentralen Bereich des Sehfeldes, in der *Fovea* oder im *gelben Fleck* sind die lichtempfindlichen, farbtauglichen Zäpfchen in sehr hoher Dichte ( $160\,000/\text{mm}^2$ ) angeordnet. Nach außen hin nimmt die Dichte der Zäpfchen stark ab. Der Bereich des scharfen Sehens ist also nur in einem kleinen Gesichtswinkel möglich, der etwa dem entspricht, unter dem wir den Vollmond sehen. Der Abstand der Zapfen auf der Netzhaut beträgt etwa  $0.004\text{ mm}$ . Man kann diesen Wert in einen Grenzwinkel von etwa einer Bogenminute zwischen zwei Strahlen umrechnen, die durch das Zentrum des optischen Systems des Auges laufen. Diesen Winkel erhält man, wenn die Strahlen von zwei um  $0.2\text{ mm}$  entfernten Punkten im Abstand von einem Meter vor dem Auge loslaufen. Diese Punkte sieht das Auge dann gerade nicht mehr getrennt. Man nennt den Winkel von  $1$  den *physiologischen Grenzwinkel* des Auges. Dem reziproken Wert desselben ist die so genannte *Sehschärfe* des Auges proportional. Die Sehschärfe wird üblicherweise durch Probetafel mit Buchstaben und Zahlen bestimmt, deren einzelne Striche gerade so dick sind, dass sie in einer bestimmte Entfernung dem physiologischen Grenzwinkel entsprechen.



### 4.6.3 Vergrößernde optische Instrumente

Die von uns subjektiv wahrgenommene Größe eines Gegenstandes wird durch den Gesichtsfeldwinkel  $\varepsilon$  bestimmt unter dem ein Gegenstand von einem Beobachter wahrgenommen wird. Dieser Sehwinkel hängt natürlich von der Gegenstandsweite ab. Es gibt prinzipiell zwei Gründe, warum wir Instrumente brauchen, um den Sehwinkel zu vergrößern:

1. Das betrachtete Objekt liegt in einer Entfernung, die aus irgendwelchen Gründen vorgegeben ist (z.B. Mond, Sterne). Falls wir uns also diesem Objekt nicht nähern können, müssen wir den Sehwinkel vergrößern, um benachbarte Gegenstände in der Ferne aufzulösen zu können. In diesem Fall ist die sinnvolle Definition der Vergrößerung

$$V = \frac{\text{Sehwinkel mit Instrument}}{\text{Sehwinkel ohne Instrument}} = \frac{\varepsilon_I}{\varepsilon_0} . \quad (4.6.7)$$

2. Der zweite Fall tritt ein, wenn man die Gegenstandsweite beliebig verringern kann (z.B. Beobachtung eines kleinen Insekts). Wir haben hier nun das Problem, den Nahpunkt des Auges zu überwinden (begrenzte Akkomodationsfähigkeit des Auges), wenn es darum geht, sehr kleine Strukturen aufzulösen. Hier zählt als entsprechende Referenz der Sehwinkel des unbewaffneten Auges, der im Abstand der konventionellen Sehweite  $S_0 = 25 \text{ cm}$  auftritt. Da von der Größe des Sehwinkels die Größe des auf der Netzhaut entworfenen Bildes abhängt, haben Gegenstände in verschiedenem Abstand vom Auge für uns die gleiche Größe, wenn wir sie unter dem gleichen Sehwinkel wahrnehmen. Die Vergrößerung ist in diesem Fall durch

$$V = \frac{\text{Sehwinkel mit Instrument}}{\text{Sehwinkel im Abstand } S_0} = \frac{\varepsilon_I}{\varepsilon_0} . \quad (4.6.8)$$

Lupe, Mikroskop und Fernrohr bewirken in erster Linie eine Vergrößerung des Sehwinkels. Wir werden deshalb die Vergrößerungszahl dieser Instrumente als Verhältnis der Sehwinkel mit und ohne Instrument angeben.

#### Die Lupe

Die *Lupe* – oder in ihrer etwas vornehmeren Form, das *Okular* – ist das einfachste optische Instrument und seine Funktion sollte klar verstanden werden. Bei der Lupe handelt es sich um eine Sammellinse mit kleiner Brennweite  $f_L$ . Die Aufgabe der Lupe ist es, von einem Objekt innerhalb der konventionellen Sehweite ein virtuelles Bild in größerer Entfernung, oft im Unendlichen, zu erzeugen. Dies ist in Abb. 4.38 verdeutlicht. Wie bereits erwähnt, ist für die Lupe oder jedes andere optische Instrument, das ein virtuelles Bild erzeugt, die Vergrößerung des Sehwinkels die geeignete Größe zur Beschreibung und weniger die transversale Vergrößerung, also das Verhältnis von Bild- zu Objektgröße.

Normalerweise befindet sich die Lupe nahe am Auge und man wählt den Abstand zwischen Lupe und Gegenstand etwa gleich der Lupenbrennweite  $f_L$ . In diesem Fall breiten sich die vom Punkt eines Gegenstands kommenden Lichtstrahlen nach der Lupe fast parallel aus und können mit dem entspannten Auge wahrgenommen werden. Die Winkelvergrößerung, die sich dabei erzielen lässt, kann man anhand

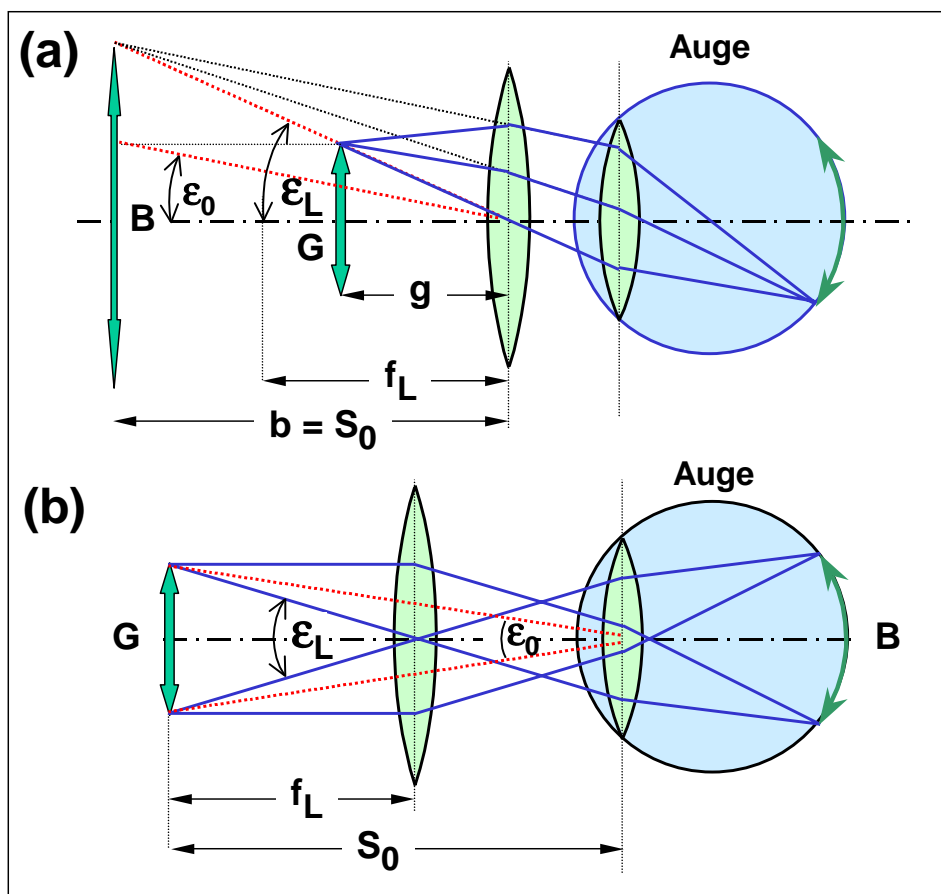


Abbildung 4.38: Strahlengang einer Lupe: (a) Das Objekt liegt innerhalb der Brennweite der Lupe, wodurch ein virtuelles Bild erzeugt wird. (b) Das Objekt befindet sich in der Brennebene der Linse. Dadurch werden die von einem Objektpunkt kommenden Strahlen hinter der Lupe parallel. Das virtuelle Bild liegt dann im Unendlichen und kann mit dem entspannten Auge betrachtet werden.

von Abb. 4.38a berechnen. Mit  $\tan \epsilon_L \simeq \epsilon_L = \mathcal{G}/2g$  und  $\tan \epsilon_0 \simeq \epsilon_0 = \mathcal{G}/2b$  erhält man für die Winkelvergrößerung

$$V_{\text{Lupe}} = \frac{\epsilon_L}{\epsilon_0} = -\frac{b}{g} \quad (4.6.9)$$

und mit  $1/g + 1/b = 1/f_L$  erhält man<sup>27</sup>

$$V_{\text{Lupe}} = -\frac{b}{f_L} - 1. \quad (4.6.10)$$

Nun bringt man beim normalen Gebrauch der Lupe das Bild in eine Entfernung  $b$ , die der konventionellen Sehweite  $S_0$  entspricht (der Abstand zwischen Lupe und Auge soll hier vernachlässigt werden). Dann erhält man für die Normalvergrößerung der Lupe

<sup>27</sup>Nach unserer Vorzeichenkonvention ist  $b$  hier negativ. Daraus folgt, dass die Vergrößerung größer als 1 ist, aber in Rahmen der vereinbarten Vorzeichenkonvention negativ, weil das Bild aufrecht ist.

$$V_{\text{Lupe}} = -\frac{S_0}{f_L} - 1 \quad (4.6.11)$$

Üblicherweise ist  $S_0 \gg f_L$  und man erhält

$$V_{\text{Lupe}} \simeq -\frac{S_0}{f_L} \quad (4.6.12)$$

Eine Sammellinse von  $f_L = 5 \text{ cm}$  liefert somit nach (4.6.11) eine etwa 6-fache Vergrößerung.

Will man bei der Benutzung einer Lupe mit völlig entspanntem Auge arbeiten, so muss man den Gegenstand in die Brennebene der Lupe bringen (siehe Abb. 4.38b). Dann treten die von einem Punkt des Gegenstands kommenden Strahlenbündel als Parallelstrahlen ins Auge. Der Gegenstand wird mit der Lupe unter dem Sehwinkel  $\varepsilon_L = \mathcal{G}/f_L$  beobachtet, während für das unbewaffnete Auge  $\varepsilon_0 \simeq \mathcal{G}/S_0$  gilt. Damit ergibt sich sofort die Lupenvergrößerung zu  $V_{\text{Lupe}} = \frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_0} = \frac{S_0}{f_L}$ .

### Das Fernrohr

Das Fernrohr dient dazu, sehr weit entfernte Gegenstände unter einem größeren Sehwinkel erscheinen zu lassen und dem Auge ein helleres Bild zuzuführen. Es wandelt ein Bündel paralleler Strahlen, die unter dem Winkel  $\varepsilon_0$  zur optischen Achse einfallen, in ein zweites Bündel um, das einen Winkel  $\varepsilon_F$  zur Achse hat. Das Verhältnis dieser Winkel wird als Winkelvergrößerung bezeichnet. Wir betrachten das in Abb. 4.39 gezeigte einfache System aus 2 Komponenten. In diesem Fall wird von einem Objektiv großer Brennweite ein verkleinertes, auf dem Kopf stehendes reelles Bild des weit entfernten Gegenstands erzeugt. Dieses Bild liegt praktisch in der Brennebene des Objektivs. Beim *astronomischen (Kepler'schen) Fernrohr*<sup>28</sup> beobachtet man dieses Zwischenbild mit einem Okular. Aus dem in Abb. 4.39 gezeigten Strahlengang lässt sich die Winkelvergrößerung direkt zu

$$V_{\text{Fernrohr}} = \frac{\varepsilon_F}{\varepsilon_0} = \frac{f_{\text{Objektiv}}}{f_{\text{Okular}}} \quad (4.6.13)$$

bestimmen. Die Vergrößerung nimmt also mit wachsender Brennweite des Objektivs und abnehmender Brennweite des Okulars zu.

Für terrestrische Anwendungen ist das Kepler'sche Fernrohr nicht geeignet, da es eine große Baulänge  $f_{\text{Objektiv}} + f_{\text{Okular}}$  benötigt und ein invertiertes Bild liefert. Für astronomische Anwendungen spielt das allerdings keine Rolle (daher auch der Name astronomisches Fernrohr). Beide Probleme werden bei einem Prismenfernrohr durch eine Faltung des Strahlengangs mit Hilfe von  $90^\circ$  Prismen gelöst.<sup>29</sup> Ein typisches Prismenglas erreicht so bei einer 8-fachen Vergrößerung eine Baulänge von ca. 12 cm.

Eine andere Möglichkeit, ein korrektes Bild zu erhalten, bietet das *terrestrische* oder *Galilei'sche Fernrohr*, das bereits vor Galilei im Jahr 1608 von **Lippershey** eingeführt wurde. Hier wird statt der Sammellinse des Okulars eine negative Linse der Brennweite  $f_{\text{Okular}} < 0$  vor das reelle Bild des Objektivs

<sup>28</sup>J. Kepler, 1611

<sup>29</sup>Zum Beispiel wird in der von J. Porro (1848) erstmals angegebenen Anordnung eine viermalige Totalreflexion an zwei rechtwinkligen Prismen zur Umkehr des Bildes verwendet.

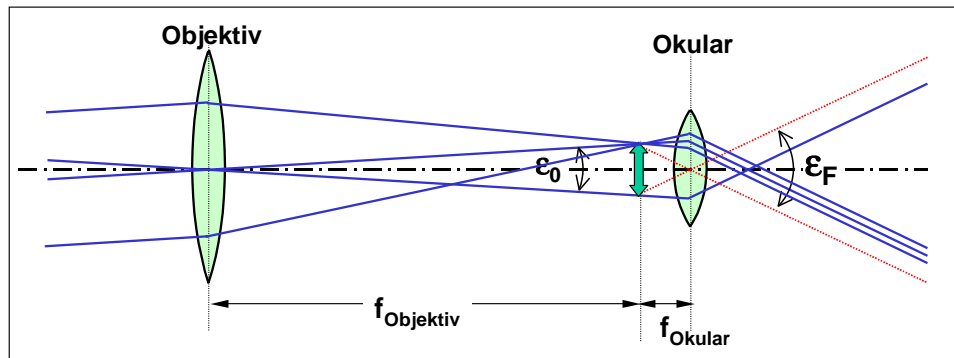


Abbildung 4.39: Strahlengang in einem astronomischen (Kepler'schen) Fernrohr.

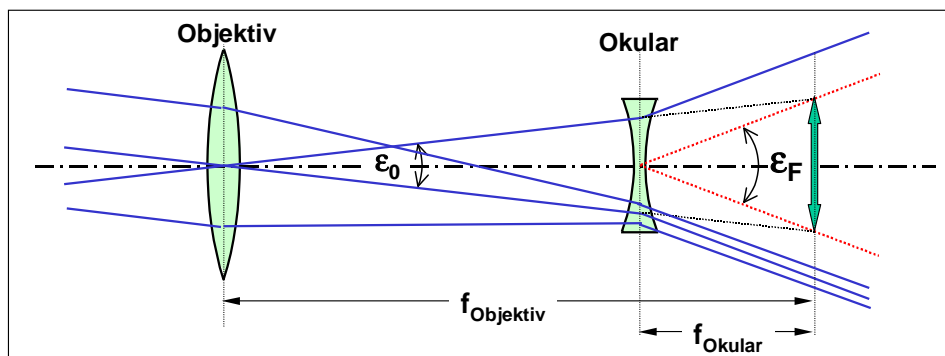


Abbildung 4.40: Strahlengang in einem terrestrischen Fernrohr.

eingebraucht. Ist der Abstand der negativen Linse von der Bildebene gerade, wie in Abb. 4.40 gezeigt ist, gleich  $|f_{\text{Okular}}|$  so kann mit entspanntem Auge ein aufrechtstehendes Bild unter dem Sehwinkel

$$\varepsilon_F = \varepsilon_0 \frac{f_{\text{Objektiv}}}{|f_{\text{Okular}}|} \quad (4.6.14)$$

beobachtet werden.

Um die Lichtstärke eines Fernrohrs zu diskutieren, betrachten wir die Ein- und Austrittspupillen. Für praktisch alle Fälle ist die Eintrittspupille durch den Durchmesser  $D_e$  des Objektivs bestimmt. Einfache geometrische Betrachtungen wie z.B. beim parallelen Strahlengang (siehe Abb. 4.41 zeigen, dass  $D_a/D_e = f_{\text{Okular}}/f_{\text{Objektiv}}$  gilt und der Durchmesser der Austrittspupille gegeben ist durch

$$D_a = D_e \frac{f_{\text{Okular}}}{f_{\text{Objektiv}}} = \frac{D_e}{V_{\text{Fernrohr}}} \quad (4.6.15)$$

Man sieht, dass ein Fernrohr den Durchmesser eines Lichtbündels verändert. Es kann deshalb auch zur Strahleinengung verwendet werden. Dabei ist zu beachten, dass eine mögliche Winkeldivergenz  $\vartheta$  des Bündels entsprechend  $V_{\text{Fernrohr}}$  vergrößert wird. Nach (4.6.15) wächst der Energiefluss quadratisch mit der Vergrößerung an. Betrachtet man ein flächenhaftes Objekt, so wächst sowohl der Energiefluss als

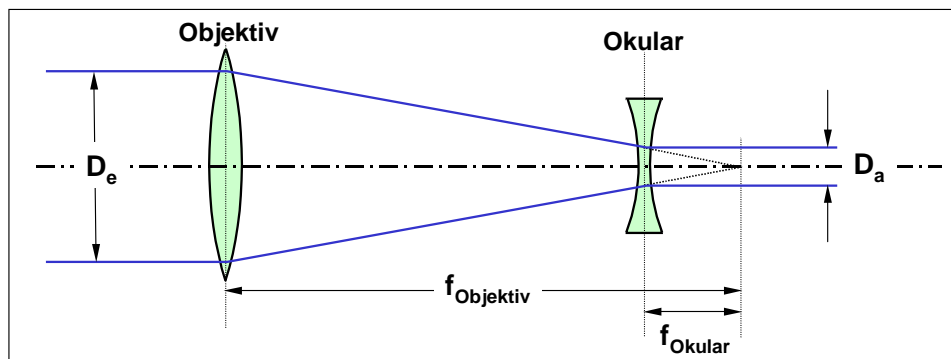


Abbildung 4.41: Änderung des Bündelquerschnitts beim Durchgang durch ein Fernrohr: Die Vergrößerung des Fernrohrs bewirkt eine Verkleinerung des Austrittspupille im Vergleich zur Eintrittspupille zu  $D_a = D_e/V$ .

auch die Fläche des Bildes proportional zu  $V^2$  an. Die Flächenhelligkeit bleibt deshalb unverändert. Für ein punktförmiges Objekt (z.B. einen weit entfernten Stern) nimmt der Lichtfluss allerdings proportional zu  $V^2$  zu, ohne dass eine entsprechende Bildvergrößerung berücksichtigt werden muss. Das Bild des Punktes gewinnt somit proportional zu  $V^2$  an Helligkeit, während der Hintergrund gleich hell bleibt. Für Fernrohre mit sehr großer Eingangspupille von z.B. 5 m und kleiner Austrittspupille von nur einigen mm kann man somit Helligkeitsüberhöhungen von einer Million erreichen und deshalb auch sehr lichtschwache Sterne beobachten. Der Vorteil von Teleskopen mit großer Öffnung liegt also nicht nur in der Vergrößerung sondern im Gewinn an Lichtstärke und Auflösungsvermögen.

Für die Beobachtung lichtschwacher Objekte in der Astronomie sind Fernrohre mit großer Eingangspupille, d.h. großen Objektivdurchmessern notwendig. Ein zweiter Grund für große Objektivdurchmesser  $D$  ist die Tatsache, dass das theoretische Auflösungsvermögen durch Beugung gegeben ist. Es wird später gezeigt werden, dass die theoretisch mögliche Auflösung eines Fernrohrs durch  $\varepsilon = 1.22\lambda/D$  gegeben ist. Folglich wird das Auflösungsvermögen besser, wenn man große Objektivdurchmesser verwendet. In der Praxis will man deshalb Objektivdurchmesser von mehreren Metern benutzen. Die dabei einzusetzenden Linsen benötigen aber große Linsenstärken, was mit erheblichen herstellungstechnischen Problemen verbunden ist (Homogenität und Transparenz, thermische Spannungen beim Abkühlen des Glases etc.). Ferner macht das erhebliche Gewicht der Linse große Probleme bei der mechanischen Handhabung (Verformung durch Eigengewicht). Letztendlich wird auch die Korrektur von Linsenfehlern (z.B. chromatischer Fehler) schwierig. Aus diesen Gründen werden in der Praxis Spiegelteleskope verwendet, bei denen das Objektiv von einem Spiegel passender Oberflächenform gebildet wird. Das Okular zur visuellen oder photographischen Beobachtung wird dann über geeignete Sekundärspiegel beleuchtet. In Abb. 4.42 sind einige charakteristische Anordnungen gezeigt. Bei diesen Fernrohrtypen (Cassegrain, Newton, Gregory) wird das vom Primärspiegel reflektierte Licht durch einen Sekundärspiegel, der im Strahlengang des einfallenden Lichts steht, zum Beobachter reflektiert. Die dabei auftretende Abdeckung eines Teils des einfallenden Lichtbündels verschlechtert die Abbildung nicht und reduziert die Lichtstärke des Fernrohrs nicht wesentlich.

Bei der Herstellung von großen Spiegelteleskopen ist allerdings auch ein erheblicher technischer Aufwand für die Herstellung und den Betrieb notwendig. Zum Beispiel ist es extrem schwierig, die tonnenschweren Spiegel mit der Präzision von wenigen Winkelsekunden zu positionieren und der scheinbaren Sternenbewegung nachzuführen. Bei der Herstellung der Spiegel treten ab Durchmessern von wenigen Metern gravierende Probleme auf, die eine Herstellung von größeren Spiegeln nicht erlaubt. Das zur Zeit leistungsfähigste Teleskop, das *Hale-Teleskop*, steht auf dem Mount Palomar (USA). Es besitzt einen Primärspiegel von 5 m Durchmesser und einer Brennweite von 16.8 m (siehe Abb. 4.43). Eine ausreichende Stabilität des Spiegels wird nur durch eine ausreichende Dicke erreicht. Dies hat zur Folge, dass

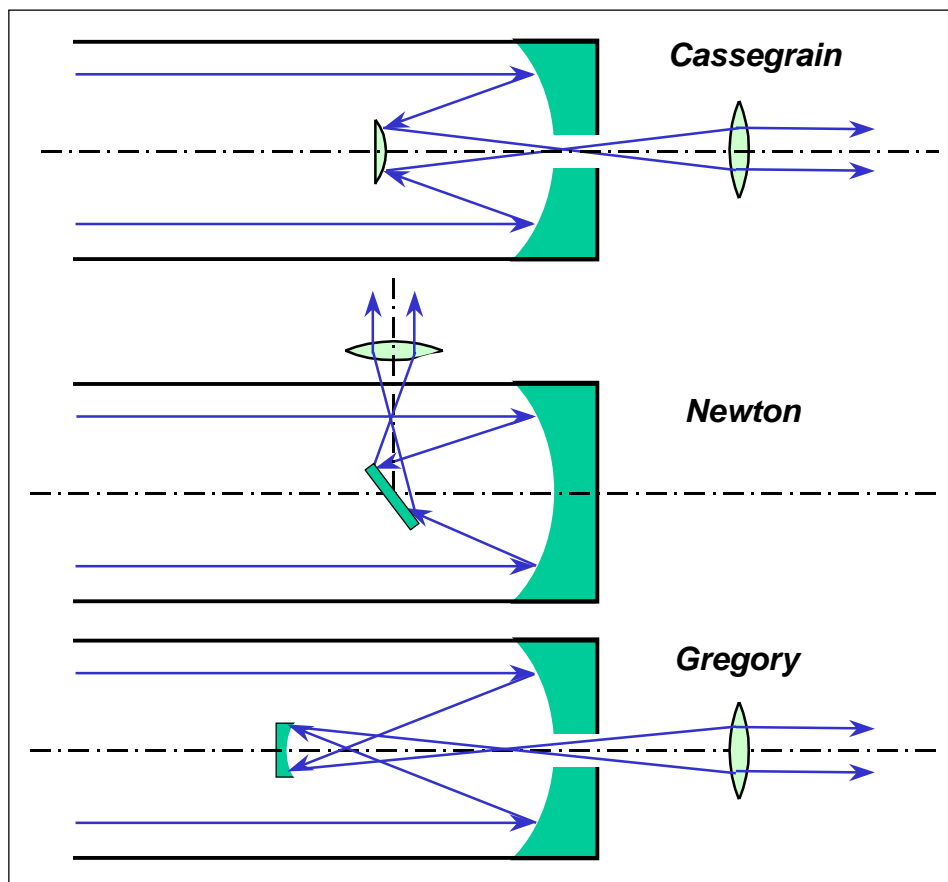


Abbildung 4.42: Schematische Darstellung verschiedener Typen von astronomischen Spiegelteleskopen. Die Entwicklung dieser Typen erfolgte bereits im 17. Jahrhundert (Gregory: 1611, Cassegrain: 1671, Newton: 1671).

der Spiegel ein Gewicht von über 20 Tonnen besitzt. Allein der Abkühlvorgang des Glases dauerte über ein Jahr, der Polierprozess sogar mehrere Jahre. Mit diesem Spiegel war man an die Grenzen des technisch Machbaren gestoßen. Die theoretisch erwartete Auflösung konnte mit diesem Teleskop nicht mehr erreicht werden.

Für die Herstellung großer Teleskopspiegel werden heute andere Wege beschritten. Ein gangbarer Weg ist die Benutzung von wabenförmigen Tragestrukturen, die einen nur wenige Zentimeter dicken Spiegel stützen. Dadurch erhält man eine immense Gewichtsersparnis. Ein weiterer Ansatz ist die Benutzung von segmentierten Spiegeln, die aus einer großen Zahl von kleinen Einzelementen zusammengesetzt sind. Dabei werden die Einzelemente mit Hilfe von Stellelementen aktiv positioniert. Dadurch ergeben sich große, justierbare Gesamtspiegelflächen. Mit dieser Methode lassen sich sehr große Spiegel kostengünstig herstellen (z.B. Keck Teleskop, USA). Diese Geräte erreichen allerdings nur ein begrenztes Auflösungsvermögen. Als dritte Methode ist die *aktive Optik* zu nennen. Hierbei wird ein dünner, nur etwa 20 cm dicker Meniskus-Spiegel durch eine Vielzahl von Stellelementen unterstützt, mit denen der Spiegel verbogen werden kann. Dadurch lassen sich bei einem noch handhabbaren Gewicht des Primärspiegels ideale Abbildungseigenschaften auch bei sehr großen Spiegeln erreichen. Das European Southern Observatory (ESO) hat mit diesem Verfahren ein 3.6 m Teleskop entwickelt, das ein Auflösungsvermögen von unter 0.3 Winkelsekunden in der Praxis erreicht. Mit gleicher Technik wird das *Very Large Telescope* (VLT) beim Paranal Observatory (Atacama, Chile) mit vier 8.2 m Spiegeln erstellt, die interferometrisch gekoppelt werden, um extreme Auflösungen von wenigen 0.001 Winkelsekunden zu erzielen (siehe Abb. 4.44).



Abbildung 4.43: Das Hale Teleskope auf dem Mount Palomar bei San Diego, USA.

Sehr störend wirken sich Einflüsse der Erdatmosphäre aus. Um diese zu umgehen, kann man Teleskope in eine Erdumlaufbahn bringen (z.B. Hubble-Teleskop, Spiegeldurchmesser 2.4 m). Mit solchen Space-Telescopes lassen sich scharfe Aufnahmen auch in Wellenlängenbereichen erreichen, in denen die Erdatmosphäre stark absorbiert. Allerdings sind die Kosten sehr hoch. Um die Einflüsse der Erdatmosphäre zu minimieren, wählt man für den Standort von Teleskopen Gegenden mit günstigen metrologischen Bedingungen und Beobachtungsorte in großen Höhen. In jüngster Zeit verwendet man auch elegante Steuermethoden, um die Einflüsse der Erdatmosphäre zu korrigieren. Ein Beispiel dafür ist die *adaptive Optik*. Dabei handelt es sich um ein Korrekturverfahren, das Verformungen der Wellenfronten durch Inhomogenitäten der Erdatmosphäre mittels Nachregeln der verwendeten Optik eliminiert. Die dazu erforderlichen Regelzeiten liegen im msec-Bereich, weshalb nicht die großen Massen des Spiegels nachgeregelt werden können. Als Korrekturlement wird vielmehr ein in den Strahlengang gebrachter kleiner Korrekturspiegel verwendet. Als Regelsignal wird das Bild einer sehr hellen Punktquelle (z.B. Stern) im Gesichtsfeld des Teleskops verwendet. Da jedoch das Gesichtsfeld eines Teleskops relativ klein ist, lässt sich damit nur ein kleiner Teil des Himmels mit höchster Auflösung beobachten. Um von den hellen Punktquellen unabhängig zu werden, versucht man mit leistungsfähigen Lasern einen Lichtpunkt in die obere Atmosphäre zu projizieren. Das von dort zurückgestreute Licht (z.B. durch Rayleigh Streuung) erlaubt es, diesen "künstlichen Stern" zur Bildkorrektur zu verwenden.

### Das Mikroskop

Das Mikroskop stellt im Prinzip eine verbesserte Version der Lupe dar. Es hat die Aufgabe, ein sehr kleines, mit dem unbewaffneten Auge nicht mehr wahrnehmbares Objekt in der konventionellen Sehweite dem Auge unter einem stark vergrößerten Schwinkel darzustellen. Das Mikroskop wurde im 17. Jahrhundert durch **Zaccharias Janssen** erfunden. Es besteht aus einer Kombination von zwei Linsensystemen (jeweils Sammellinsen), einem kurzbrennweitigem Objektiv und einem Okular (siehe Abb. 4.45a). Der Abstand der beiden Linsensysteme ist größer als die Summe ihrer Brennweiten. Das kurzbrennweitige Objektiv mit Brennweite  $f_{ob}$  erzeugt ein reelles vergrößertes Bild eines Gegenstands, das dann mit einem Okular der Brennweite  $f_{ok}$  beobachtet wird. Die Vergrößerung durch das Objektiv berechnet man mit der Abbildungsgleichung zu

### 9-Zoll-Refraktor im Deutschen Museum:

Die Abbildung zeigt einen von Fraunhofer (siehe Seite 219 zum Lebenslauf von Fraunhofer) konstruierten 9-Zoll-Refraktor, der im Deutschen Museum in München ausgestellt ist. Seine genauen Kenntnisse über das Brechungsverhalten und die Farbdispersion einzelner Glasarten halfen Fraunhofer, ungewöhnlich große achromatische Fernrohre zu konstruieren. So entstand eine neue Generation astronomischer Refraktoren. Sie verfügten über Linsendurchmesser und Abbildungsleistungen, die bis dato als nicht realisierbar galten. Die Qualität der Fernrohre blieb noch viele Jahrzehnte nach ihrer Herstellung unübertroffen und ermöglichte grundlegende Entdeckungen in der Astronomie. So gelang es dem Astronomen und Mathematiker Friedrich Wilhelm Bessel mit Hilfe des Fraunhoferschen Heliometers 1838 erstmals, eine Fixstern-Parallaxe zu bestimmen. Fraunhofers berühmtestes Werk ist der paralaktische Refraktor für die kaiserlich-russische Sternwarte in Dorpat. Mit dem baugleichen 9-Zoll-Refraktor, der heute im Deutschen Museum steht, gelang es dem Astronomen Johann Gottfried Galle 1846, den Planeten Neptun zu entdecken.



$$|V_{\text{Objektiv}}| = \frac{b}{g} = b \left( \frac{1}{f_{\text{ob}}} - \frac{1}{b} \right) = \frac{b - f_{\text{ob}}}{f_{\text{ob}}} = \frac{t}{f_{\text{ob}}} . \quad (4.6.16)$$

Dabei haben wir  $b - f_{\text{ob}}$  zur optischen *Tubuslänge*  $t$  zusammengefasst.<sup>30</sup> Berücksichtigt man noch das Okular gemäß Gleichung (4.6.12), so erhält man die Gesamtvergrößerung eines Mikroskops zu

$$|V_{\text{Mikroskop}}| = V_{\text{Objektiv}} \cdot V_{\text{Okular}} = \frac{t S_0}{f_{\text{ob}} f_{\text{ok}}} . \quad (4.6.17)$$

Die Vergrößerung des Mikroskops ist also direkt proportional der konventionellen Sehweite des Beobachters und der optischen Tubuslänge und umgekehrt proportional dem Produkt der beiden Brennweiten. Für sehr kurzbrennweitige Objektive erhält man somit die höchste Vergrößerung. In diesem Fall gilt  $g \simeq f_{\text{ob}}$ , das heißt, das Objekt liegt im Abstand  $f_{\text{ob}}$  vor dem Objektiv. In der Mikroskopie werden Objektive bis zu einer 100-fachen Vergrößerung verwendet. In Kombination mit einem 10-fach vergrößernden Okular erreicht man dann eine nominelle Vergrößerung von 1000-fach.

<sup>30</sup>Allgemein ist die optische Tubuslänge der Abstand der hinteren Brennebene des Objektivs von der vorderen Brennweite des Okulars. Üblicherweise verwendet man bei Mikroskopen eine Tubuslänge von  $t = 160$  mm.



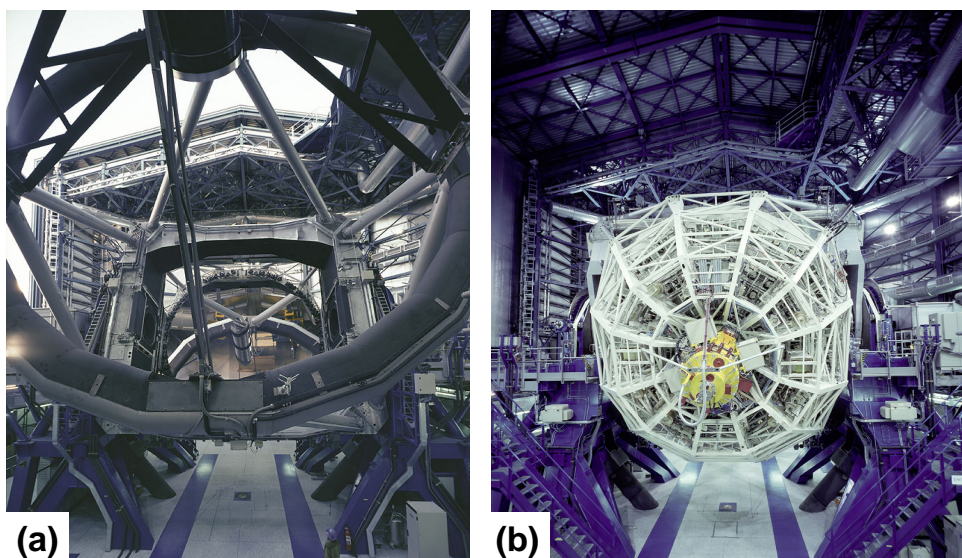


Abbildung 4.44: Eines der vier großen Spiegelteleskope (Kuyen) des Very Large Telescope (VLT) am Paranal Observatory in Chile: (a) gegen den Horizont gekippt, (b) Ansicht der Spiegelzellen von der Rückseite.

Hohe Vergrößerungen erfordern komplexe Linsensysteme, die für spezielle Anwendungen (z.B. Dicke eines Deckglases, Brechungsindex des Mediums zwischen Objekt und Objektiv) korrigiert sein müssen. Die Grenzen der Vergrößerung eines Mikroskops sind allerdings nicht durch die Abbildungsgleichungen

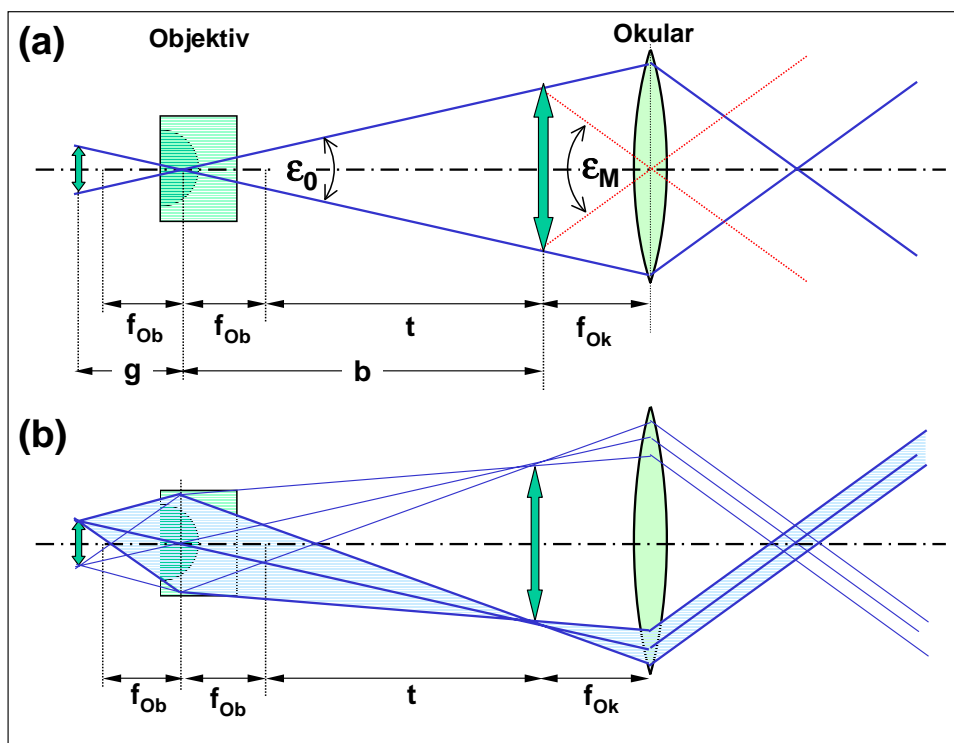


Abbildung 4.45: Mikroskop: (a) Ein sich nahe der Brennebene des Objektivs befindlicher Gegenstand wird durch das Objektiv vergrößert abgebildet. Dieses Bild wird mit dem Okular (Lupe) betrachtet, wobei angenommen wurde, dass sich das Bild in der Brennebene des Okulars befindet. (b) Strahlengang in einem Mikroskop.

oder die Korrektur der Linsen gegeben, sondern durch die Anwendbarkeit der geometrischen Optik. Wir werden später sehen, dass Beugungseffekte die Auflösung des Mikroskops auf die Größenordnung der Wellenlänge des verwendeten Lichts beschränken. Kommt also die Dimension des betrachteten Objekts in die Größenordnung der Wellenlänge des sichtbaren Lichts, so kann eine nominale Steigerung der Vergrößerung keine neue Information bringen. Deshalb ist die Maximalvergrößerung eines Mikroskops üblicherweise auf 1000-fach beschränkt.

Moderne Mikroskope benutzen Objektive, die aus mehreren Linsen bestehen, da sich nur so die verschiedenen Abbildungsfehler beseitigen lassen. *Achromate* sind Objektive, bei denen die Schnittweiten von Rot und Blau übereinstimmen. Bei *Apochromaten* stimmen die Schnittweiten von rot, grün und blau überein. Bei *Planobjektiven* ist die Bildfeldwölbung unterdrückt. Sie sind wichtig für photographische Aufnahmen des Mikroskopbildes. Erstrebenswert sind also Apochromate, die zugleich Planobjektive sind. Zur Kennzeichnung der Objektive dient die bildseitige Brennweite und die *numerische Apertur*, die durch das Produkt aus Brechzahl  $n$  (meistens  $n = 1$ , Luft) und dem Sinus des halben Öffnungswinkels  $\vartheta$  gegeben ist. Mit Hilfe der bildseitigen Brennweite lässt sich bei bekannter Tubuslänge sofort die Mikroskopvergrößerung berechnen. Die numerische Apertur bestimmt, wie wir später noch sehen werden, die durch Beugungseffekte begrenzte Auflösung eines Mikroskops und sollte möglichst groß sein. In der Praxis werden Werte bis zu etwa 0.95 verwendet. Die numerische Apertur ist auch ein Maß für das in das Mikroskop eintretende Licht und damit die Bildhelligkeit. Sie sollte auch aus diesem Grund möglichst groß sein.

## Zusammenfassung

- Die Ausbreitung von Licht kann im Rahmen der geometrischen Optik beschrieben mit Lichtstrahlen werden, wenn Beugungseffekte vernachlässigbar sind.
- Die geradlinige Ausbreitung von Lichtstrahlen in homogenen Medien folgt aus dem Fermatschen Prinzip.
- Bei einer idealen optischen Abbildung werden alle von einem Objektpunkt ausgehenden Strahlen in einem Bildpunkt zusammengeführt. Bei einer realen optischen Abbildung werden die Strahlen in einem endlichen Volumen um den idealen Bildpunkt zusammengeführt.
- Die Abbildungsgleichung einer dünnen Linse lautet

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

wobei  $g$  die Gegenstandsweite,  $b$  die Bildweite und  $f$  die Brennweite ist.

- Die Brechkräfte  $D_i = 1/f_i$  benachbarter dünner Linsen addieren sich:

$$D = \sum_i D_i.$$

- Das Verhältnis von Bildgröße zu Gegenstandsgröße wird laterale Vergrößerung  $V_T$  genannt. Für eine dünne Linse gilt

$$V_T = \frac{f}{f - g}.$$

- Die Abbildung durch dicke Linsen lässt sich durch die Einführung von Hauptebenen auf die Abbildung durch dünne Linsen zurückführen.
- Alle abbildenden Systeme außer einem planaren Spiegel besitzen Abbildungsfehler, die in axialsymmetrischen Abbildungssystemen für achsennahe Strahlen (paraxiale Näherung) vernachlässigt werden können.
- Die wichtigsten Linsenfehler sind chromatische Aberration, sphärische Aberration, Koma, Astigmatismus, Bildfeldwölbung und Verzeichnung.
- Optische Systeme bestehen üblicherweise aus mehr oder weniger komplexen Linsensystemen, die eine Variation von Linsenabständen und Brennweiten zulassen und damit eine große Flexibilität der Abbildung erlauben.
- In der paraxialen Näherung lässt sich die Abbildung mit Hilfe von Matrizen darstellen. Die Abbildung durch ein System von abbildenden Elementen wird durch das Produkt der Matrizen der Einzelelemente beschrieben.
- Begrenzungen in optischen Systemen werden Aperturen  $D$  genannt. Das von einem Achsenpunkt in der Objektebene aus gesehene Bild einer Apertur wird Eintrittspupille  $D_e$ , das von einem Achsenpunkt in der Gegenstandsebene aus gesehene Bild einer Apertur Austrittspupille  $D_a$  genannt.
- Die Schärfentiefe einer Kamera nimmt proportional zur Blendenzahl  $F = f/D$  zu und mit wachsender Brennweite  $f$  des Objektivs proportional zu  $1/f^2$  ab.

- Die Vergrößerung einer Lupe beträgt

$$|V_{\text{Lupe}}| = \frac{S_0}{f_{\text{Lupe}}} + 1,$$

wobei  $S_0 = 25$  cm die konventionelle Sehweite des menschlichen Auges ist.

- Die Winkelvergrößerung eines (Keplerschen) Fernrohrs beträgt

$$V_{\text{Fernrohr}} = \frac{f_{\text{Objektiv}}}{f_{\text{Okular}}}.$$

- Die Vergrößerung eines Mikroskops beträgt

$$|V_{\text{Mikroskop}}| = \frac{t \cdot S_0}{f_{\text{Objektiv}} \cdot f_{\text{Okular}}}.$$

Hierbei ist  $t = b - f_{\text{Objektiv}}$  die Tubuslänge.