

Kapitel 5

Beugung und Interferenz

Wir werden in diesem Kapitel das Gebiet der geometrischen Optik verlassen und uns mit Problemen befassen, bei denen die Welleneigenschaften des Lichts von Bedeutung sind. Ein wichtiges Phänomen, das nicht mit Hilfe der geometrischen Optik erklärt werden kann, ist dabei die *Beugung*. Dabei wird Licht beim Durchgang durch eine Blendenöffnung oder beim Passieren einer Kante aus nichttransparentem Material aus seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt und erscheint unter Winkeln, die nach der geometrischen Optik nicht möglich sind. Diese Abweichung von der geradlinigen Ausbreitung des Lichts wurde bereits im 17. Jahrhundert von **Francesco Grimaldi** genauer untersucht. Grimaldi bezeichnete den Effekt als *Diffraetio*.

In der Optik kommt es auch in zahlreichen Fällen zu einer Überlagerung von Wellen, die entweder von verschiedenen Quellen oder aber einer Einzelquelle stammen können. Die dann auftretenden Effekte werden Interferenzeffekte genannt und bilden die Grundlage für zahlreiche Anwendungen vor allem in der Festkörperphysik und der Kristallographie. Aus der Linearität der Wellengleichung (siehe Kapitel 2) folgt sofort, dass mit beliebigen Lösungen $\Psi_1(t)$ und $\Psi_2(t)$ auch beliebige Linearkombinationen $a\Psi_1 + b\Psi_2$ Lösungen der Wellengleichung sind. Um die Gesamtamplitude des Wellenfeldes an einem bestimmten Ort P zu einer bestimmten Zeit t zu erhalten, muss man die Amplituden aller sich im Punkt P überlagernden Teilwellen addieren (Superpositionsprinzip). Die Gesamtamplitude wird dabei sowohl von der Amplitude als auch der relativen Phase der Teilwellen bestimmt und ist im Allgemeinen sowohl orts- als auch zeitabhängig. Die Überlagerung von Teilwellen bezeichnet man als *Interferenz*.

Eine stationäre Interferenzstruktur kann man nur dann beobachten, wenn die sich an einem Ort überlagernden Teilwellen eine zeitlich und räumlich konstante Phasendifferenz haben. Man nennt die Teilwellen dann zeitlich und räumlich kohärent. Wir werden in diesem Kapitel zeitlich und räumlich vollkommen kohärente Teilwellen voraussetzen. Ein eingehende Diskussion des Kohärenzgrades von Lichtquellen folgt dann erst in Kapitel 6.

5.1 Beugungserscheinungen

Wie wir in Kapitel 1 bereits erwähnt haben, war die Wellentheorie des Lichts zunächst nicht allgemein akzeptiert. Dies lag vor allem daran, dass dem Licht offensichtliche Welleneigenschaften zu fehlen schienen. Es wurde z.B. nicht von einem Hindernis abgelenkt, wie dies bei Wasserwellen der Fall ist. Heute kennen wir aber den Grund für dieses Problem. Er liegt in der Größenordnung der beteiligten Wellenlängen begründet. Wasserwellen haben makroskopische Ausdehnung und wir erkennen, dass sie nur von Objekten in der gleichen Größenordnung gebeugt werden. Noch größere Hindernisse stoppen die Wasserwellen und es kommt nur an den Rändern dieser Objekte zu Beugungserscheinungen. Die Wellenlänge des Licht liegt dagegen im Bereich von 500 nm. Damit ist selbst ein Objekt in der Größenordnung von etwa $100\ \mu\text{m}$, das wir mit unserem Auge fast nicht mehr auflösen können, noch groß gegenüber der Wellenlänge und ausreichend groß, um die Wellenausbreitung zu stoppen. Es tritt aber in jedem Fall Beugung an den Rändern des Objekts auf, die wir unter Umständen beobachten können.

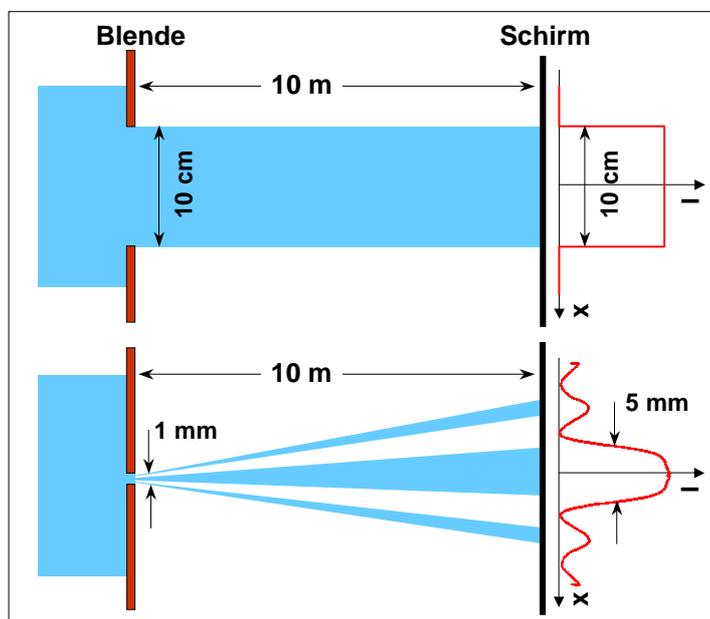


Abbildung 5.1: Gedankenexperiment zum Übergang von der geometrischen Optik zur Wellenoptik.

Wir wollen die Grenzen der geometrischen Optik und das Auftreten von Beugungserscheinungen anhand eines Gedankenexperiments verdeutlichen. Dazu betrachten wir einen parallelen Lichtstrahl, der durch eine 10 cm breite Blende tritt und hinter der Blende einen Lichtfleck mit etwa 10 cm Durchmesser erzeugt (siehe Abb. 5.1). Wir verringern nun den Blendendurchmesser und beobachten den Durchmesser des Lichtflecks. Zunächst nimmt dieser proportional zum Blendendurchmesser ab, bis man einen Blendendurchmesser von einigen Millimetern erreicht. Der Fleckdurchmesser nimmt dann nicht mehr weiter ab, sondern wird sogar größer. Wir erhalten auch keine rechteckförmige Helligkeitsverteilung hinter der Blende, wie dies bei großen Blendendurchmessern der Fall war, sondern die in Abb. 5.1b gezeigte Intensitätsverteilung, die eine Modulation aufweist. Wir lernen aus diesem Experiment, dass die Definition eines Lichtstrahl, wie wir sie in der geometrischen Optik verwendet haben, bereits ab einem Blendendurchmesser von einigen Millimetern nicht mehr sinnvoll ist. Die Ursache dafür liegt in der Wellennatur des Lichts, die zu einer Abweichung von einer geradlinigen Ausbreitung durch Beugung an der Blende und zu Intensitätsmodulationen durch Interferenz führt.

Qualitativ kann man dieses Phänomen wie folgt verstehen: Trifft Licht auf ein Hindernis, so ändert sich dabei die Amplitude und Phase eines Teils der Wellenfront. Hinter dem Hindernis interferieren die

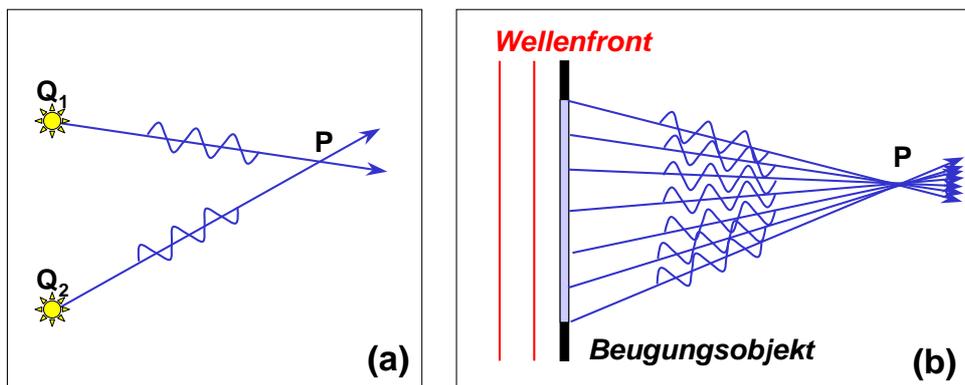


Abbildung 5.2: Zu den Begriffen Beugung und Interferenz: (a) Interferenz von zwei Wellen, die von den Quellen Q_1 und Q_2 auslaufen und sich am Ort P des Beobachters überlagern. (b) Beugung einer von einer weit entfernten Quelle kommenden Wellenfront an einem Beugungsobjekt. Die vielen, von den verschiedenen Punkten des Beugungsobjekts auslaufenden Wellen überlagern sich im Punkt P des Beobachters.

verschiedenen Abschnitte der Wellenfront, wobei sich verstärken oder sogar auslöschen können. Dadurch ergibt sich die als Beugungsmuster bekannte Verteilung der Energiedichte.

5.1.1 Interferenz und Beugung

Neben Beugungsphänomenen, die durch eine Einschränkung der Lichtausbreitung durch nicht-transparente Objekte zustande kommen, gibt es noch eine weitere Klasse von verwandten Phänomenen. Diese kommen durch die Überlagerung von räumlich getrennten Wellen zustande und werden *Interferenzphänomene* genannt. Beugung und Interferenz lassen sich nicht klar unterscheiden und verschiedene Lehrbücher verbinden unterschiedliche Bedeutungen mit beiden Begriffen. Wir wollen folgende Konvention benutzen:

Interferenz ist mit der geplanten Überlagerung von zwei oder mehreren getrennten Wellen verbunden, während Beugung automatisch bei der Begrenzung einer einzelnen Wellenfront durch ein Hindernis auftritt.

Man muss sich allerdings klar machen, dass man die Beugung einer einzelnen Wellenfront an einem Hindernis als die Interferenz von einer sehr großen Zahl von Teilwellen, die von den einzelnen Punkten des beugenden Hindernisses auslaufen, betrachten kann (siehe Abb. 5.2). Das heißt, bei Beugung handelt es sich um die Interferenz einer sehr großen Zahl von Teilwellen. Nach unserer obigen Konvention handelt es sich dagegen bei Interferenz um die Überlagerung einiger weniger Teilwellen.

Es wird uns im Folgenden nicht immer gelingen, diese oben gewählte Konvention für Beugung und Interferenz in aller Strenge beizubehalten. Zum Beispiel spricht man beim Gitter sowohl von Mehrstrahlinterferenz als auch von Beugung am Gitter.

Eine notwendige Bedingung für das Auftreten von Beugung und Interferenz ist die Kohärenz der sich überlagernden Teilwellen bzw. der von einem beugenden Objekt auslaufenden Sekundärwellen. Wir werden in diesem Kapitel annehmen, dass eine völlige Kohärenz der Teilwellen vorliegt. Eine genaue Diskussion des räumlichen und zeitlichen Kohärenzgrades von Lichtquellen wird in Kapitel 6 diskutiert.

5.1.2 Einführung in die Beugungstheorie

Die mathematische Formulierung der Beugungstheorie beinhaltet immer eine einlaufende, ungestörte Welle, deren Ausbreitung durch ein Hindernis (Maske, Blende, Kante) gestört wird. Das heißt, die Amplitude und/oder Phase der Welle wird lokal um einen bestimmten Betrag geändert. Der Beobachter misst nun an einem Ort oder einem Satz von Orten (z.B. auf einem Schirm) das durch die Superposition der einfallenden Welle mit anderen Feldern entstehende Wellenfeld. Dabei muss die Überlagerung den Maxwell-Gleichungen mit den dem Hindernis entsprechenden Randbedingungen genügen. Das so definierte Problem ist also ein typisches Randwertproblem, das im Prinzip mit den Maxwell'schen Gleichungen behandelt werden kann. Ein Beispiel dafür ist die Streuung von ebenen Wellen an perfekt leitenden Kugeln. Dieser Vorgang wird *Mie-Streuung* genannt.¹

Unglücklicherweise ist die Zahl der analytisch auf diese Weise lösbarer Probleme sehr begrenzt. Es müsste dazu nämlich nicht nur die Lichtquelle, sondern auch die Eigenschaften des Hindernisses (exakte Form und dielektrische Eigenschaften auf der Längenskala der Wellenlänge) und seine Rückwirkung auf die Feldverteilung der einlaufenden Welle bekannt sein. Deswegen lässt sich im Allgemeinen die Problemstellung nicht geschlossen lösen. Es wurde deshalb ein einfacherer, auf der Basis des *Huygens'schen Prinzips* beruhender Lösungsansatz entwickelt, der die meisten Probleme, wenn auch häufig nicht in quantitativer Weise, zufriedenstellend beschreibt. Der Ansatz geht davon aus, dass die Amplitude und die Phase einer elektromagnetischen Welle hinreichend genau durch eine skalare Größe beschrieben werden können, wobei Polarisierungseffekte vernachlässigt werden. Man berücksichtigt also anstelle des vektoriellen Feldes nur ein skalares Feld. Der Ansatz wird deshalb auch als *Näherung skalarer Wellen* bezeichnet. An dem Ort des Hindernisses wird dabei das Feld durch die ungestörte Welle beschrieben. Erst hinter dem Hindernis wird dann der Einfluss der Störung berücksichtigt. Eine Rückwirkung des gebeugten Lichts auf die Feldverteilung vor dem Hindernis wird deshalb nicht einbezogen. Diese Vorgehensweise lässt sich dadurch motivieren, dass Beugungserscheinungen in der Regel schwach sind und deshalb deren Rückwirkungen auf die Quelle vernachlässigt werden können. Den Ansatz skalarer Wellen, den man auch als *Fresnel-Kirchhoff'sche Beugungstheorie* bezeichnet, wollen wir nun im Folgenden näher erörtern.

¹siehe hierzu Abschnitt 2.5, eine ausführliche Diskussion der Mie-Streuung kann in **M. Born, E. Wolf: Principles of Optics**, Pergamon Press, Oxford (1980), gefunden werden.

5.2 Beugung – die Näherung skalarer Wellen

Die Berechnung skalarer Wellen sollte prinzipiell für jede Komponente der Vektor-Welle getrennt durchgeführt werden. In der Praxis ist dies aber meist nicht notwendig. Auf der anderen Seite können wir uns Randbedingungen vorstellen, unter denen die Polarisationsrichtung eine Rolle spielt. Ein Beispiel dafür ist ein Spalt in einem perfekt leitenden Metallblech. Nimmt man entsprechend dem Huygens'schen Prinzips jeden Punkt der Ebene des Blechs als Quelle für elektromagnetische Wellen, so sieht man folgendes:

- Punkte auf der Metallblende werden keine Strahlung aussenden, da hier aufgrund der perfekten Leitfähigkeit $\mathbf{E} = 0$ gilt.
- Punkte innerhalb des Spalts, die von den Rändern weit genug entfernt sind, werden beide Polarisationsrichtungen abstrahlen, da das \mathbf{E} -Feld in alle Raumrichtungen zeigen kann.
- Punkte am Rand des Spalts werden die Richtungen bevorzugen, bei denen \mathbf{E} senkrecht zu den Rändern ist. Der Grund dafür ist, dass sich \mathbf{E}_{\parallel} kontinuierlich von null im Metall auf einen endlichen Wert im Spalt ändern muss, während \mathbf{E}_{\perp} im Bereich der Oberfläche nicht stetig ist. Der Spalt erzeugt daher ein Beugungsmuster, das einer schmälere Breite entspricht, wenn das beleuchtende Licht parallel zu seiner Längsrichtung polarisiert ist. Da aber solche Effekte nur auf Bereich an den Spaltkanten in der Größenordnung der Wellenlänge begrenzt sind, werden sie nur für Objekte mit Strukturelementen in dieser Größenordnung bemerkbar.²

Wir werden im Folgenden einfach vergessen, dass das Licht aus zwei schwingenden Vektorfeldern besteht, und uns vorstellen, dass sich diese Schwingung durch eine einzelne komplexe, skalare Variable Ψ beschreiben lässt, die eine Frequenz ω und einen Wellenvektor \mathbf{k}_0 besitzt, der einen Betrag ω/c und die gleiche Richtung wie die sich ausbreitende Welle besitzt. Da Ψ ein komplexes skalares Feld darstellt, hat es sowohl eine Amplitude als auch eine Phase. Der zeitabhängige Phasenfaktor $\exp(-i\omega t)$ spielt aber in diesem Kapitel keine Rolle, da er in allen Rechnungen unverändert auftaucht. Wir werden ihn deshalb weglassen.

5.2.1 Erklärung der Beugung mit dem Huygens'schen Prinzip

Wir werden nun versuchen, intuitiv eine Beugungstheorie zu formulieren, die auf dem Huygens'schen Prinzip der Aussendung von skalaren Elementarwellen von den Punkten der beugenden Oberfläche beruht. Eine strengere Theorie, die allerdings immer noch auf skalaren Wellen beruht, wurde von **Kirchhoff** entwickelt und wird in Anhang 5.2.2 vorgestellt. Die meisten Bestandteile der Integralformulierung können aber bereits jetzt anschaulich abgeleitet werden.

Wir betrachten die in Abb. 5.3 dargestellte Anordnung und analysieren die an einem Punkt P beobachtete Amplitude, die von einer Welle herrührt, die von der Punktquelle Q ausgesendet wurde und von einer ebenen Blende \mathcal{R} gebeugt wurde. Wir nehmen an, dass, wenn ein infinitesimales Flächenelement dS am Ort S auf \mathcal{R} von einer Welle Ψ_1 angeregt wird, dieses Element als Quelle einer kohärenten Sekundärquelle der Stärke $f_S \Psi_1 dS$ dient. Die Funktion f_S wird *Transmissionsfunktion* von \mathcal{R} an der Stelle S genannt. Im einfachsten Fall ist $f_S = 0$ an den Stellen, wo die Blende undurchsichtig ist, und $f_S = 1$ an den durchsichtigen Stellen. Es können aber auch Zwischenwerte vorkommen und außerdem kann f komplex sein, wenn die Phase der einlaufenden Welle um einen bestimmten Betrag geändert wird. Wichtig ist die *Kohärenz der Reemission*. Die Phase der ausgesandten Welle muss eine feste Phasenbeziehung zu der einlaufenden Welle haben.

²Wir haben bereits im Abschnitt 3.3.1 kennengelernt, dass Drahtgitter mit Drahtabständen im Bereich der Wellenlänge des Lichts effektive Polarisatoren sind.

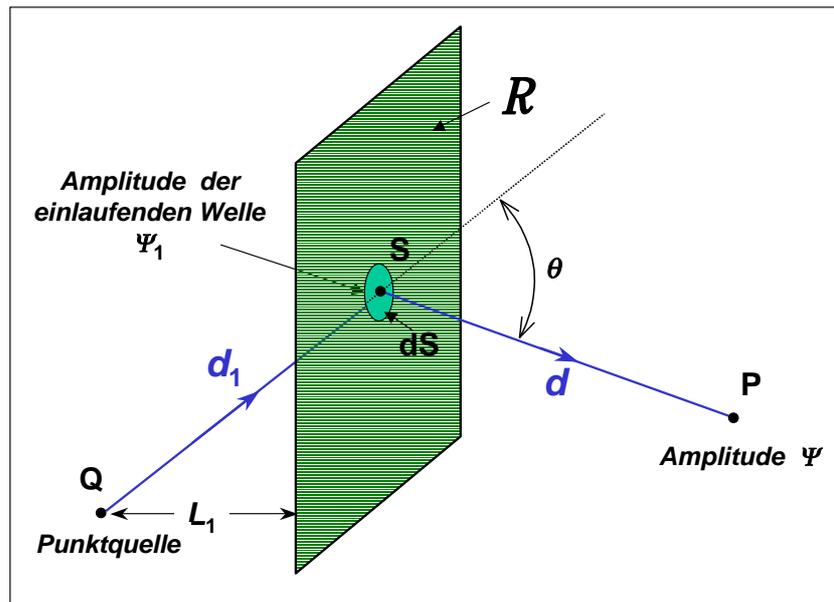


Abbildung 5.3: Zur Definition der Größen für das Beugungsintegral.

Die skalare Welle, die von der Punktquelle Q mit der Amplitude a_Q losläuft, kann als Kugelwelle (vergleiche Abschnitt 4.1.1)

$$\Psi_1 = \frac{a_Q}{d_1} \exp(ik_0 d_1) \quad (5.2.1)$$

geschrieben werden. Die Sekundärquelle mit der Stärke

$$a_S = f_S \Psi_1 dS \quad (5.2.2)$$

liefert den Beitrag

$$\begin{aligned} d\Psi_P &= \frac{f_S \Psi_1}{d} \exp(ik_0 d) dS \\ &= \frac{f_S a_Q}{d d_1} \exp[ik_0(d + d_1)] dS \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

zu Ψ_P , der am Punkt P empfangen wird. Die Gesamtamplitude, die am Punkt P detektiert wird, ist das Integral dieses Ausdrucks über die gesamte Fläche \mathcal{R} :

$$\Psi_P = a_Q \iint_{\mathcal{R}} \frac{f_S}{d d_1} \exp[ik_0(d + d_1)] dS . \quad (5.2.4)$$

Dieses Integral wird als *Beugungsintegral* bezeichnet. Die Größen f_s , d und d_1 sind hierbei alle Funktionen des Ortes S . Es wird in Abschnitt A.2 noch gezeigt werden, dass eigentlich noch ein *Neigungsfaktor* enthalten sein sollte, da die Stärke der sekundären Abstrahlung vom Winkel θ zwischen der einfallenden und der gestreuten Welle abhängt. Bei dem Huygens'schen Prinzip wird dieser Faktor als 1 in der Vorwärtsrichtung und als 0 in der Rückwärtsrichtung angenommen. Zusätzlich werden wir sehen, dass wir noch mit einem Faktor ik_0 multiplizieren müssen, um ein konsistentes Ergebnis zu erhalten.

Das Ergebnis (5.2.4) lässt sich mit dem **Fresnel-Huygens-Prinzip** zusammenfassen, das folgendes besagt:

Jeder Punkt des eines beugenden Objekts mit endlicher Transparenz bildet zu einem bestimmten Zeitpunkt eine Quelle sekundärer Elementarwellen, deren Frequenz mit derjenigen der Primärwelle übereinstimmt. In jedem nachfolgenden Punkt ist die Amplitude Ψ_P des optischen Feldes durch die Überlagerung sämtlicher Elementarwellen unter Berücksichtigung ihrer Amplituden und relativen Phasen gegeben.

Beispiel: Beugung am Spalt

Wir wollen uns anhand der Beugung am Spalt die Bedeutung des Beugungsintegrals (5.2.4) anschaulich klarmachen. Hierzu nehmen wir an, dass ebene Wellenfronten auf einen Spalt der Breite b treffen (siehe Abb. 5.4). Entsprechend dem Prinzip der Huygensschen Wellen können wir dann annehmen, dass von jedem Punkt des Spalts zur gleichen Zeit Huygenssche Elementarwellen gleicher Stärke loslaufen. Wir wollen nun überlegen, für welche Winkel θ sich die Huygenschen Wellen konstruktiv bzw. destruktiv überlagern. Hierzu betrachten wir zunächst den Wegunterschied $\Delta s_0 = b \sin \theta$ zwischen dem ersten und dem letzten Teilstrahl. Beträgt der Wegunterschied $\Delta s_0 = m \cdot \lambda$ ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$), so erhalten wir eine maximale Summenamplitude, da sich Wellenberge und -täler gerade addieren (konstruktive Interferenz). Beträgt der Wegunterschied dagegen $\Delta s_0 = \frac{2m+1}{2} \cdot \lambda$, so erhalten wir eine verschwindende Amplitude, da sich die Wellenberge und -täler gerade gegenseitig aufheben (destruktive Interferenz).

Wir können uns nun überlegen, für welche Richtung θ wir eine maximale bzw. verschwindende Gesamtamplitude erhalten. Hierzu müssen wir gemäß (5.2.4) über alle Teilamplituden aufsummieren. Damit wir eine verschwindende Gesamtamplitude erhalten, müssen wir also zu jedem Teilstrahl einen zweiten finden, der genau eine Weglängendifferenz von $\Delta s = \frac{2m+1}{2} \cdot \lambda$ besitzt. Um uns dies zu veranschaulichen, teilen wir das gesamte Lichtbündel in zwei Hälften. Wir erhalten dann für $\Delta s_0 = \lambda$ zu jedem Teilstrahl i aus der ersten Hälfte genau einen Teilstrahl k aus der zweiten Hälfte mit dem Wegunterschied $\Delta s = \lambda/2$, so dass sich alle diese Teilstrahlen durch destruktive Interferenz auslöschen. Für $\Delta s_0 = 2\lambda$ können wir das gesamte Lichtbündel in vier Teile aufteilen. Wir erhalten dann zu jedem Teilstrahl aus dem ersten Viertel wiederum genau einen Teilstrahl aus dem zweiten Viertel mit dem Wegunterschied $\Delta s = \lambda/2$. Das gleiche gilt für das dritte und vierte Viertel. Insgesamt sehen wir, dass wir verschwindenden Amplitude für $\Delta s_0 = m \cdot \lambda$ oder mit $\sin \theta = \Delta s_0/b$ für

$$\sin \theta_m^{\min} = \pm m \frac{\lambda}{b}$$

erhalten. Wir können die gleiche Überlegung für die Maxima machen. Für $\Delta s_0 = 0$ teilen wir das gesamte Lichtbündel gar nicht auf. Alle Teilstrahlen interferieren konstruktiv, wir erhalten das zentrale Beugungsmaximum. Für $\Delta s_0 = \frac{3}{2}\lambda$ teilen wir das gesamte Lichtbündel in drei Teile auf, von denen sich zwei durch destruktive Interferenz auslöschen, da wiederum jedem Teilstrahl i aus dem einen Drittel genau ein Teilstrahl k aus dem zweiten Drittel mit einem Wegunterschied $\Delta s = \lambda/2$ existiert. Das dritte Drittel

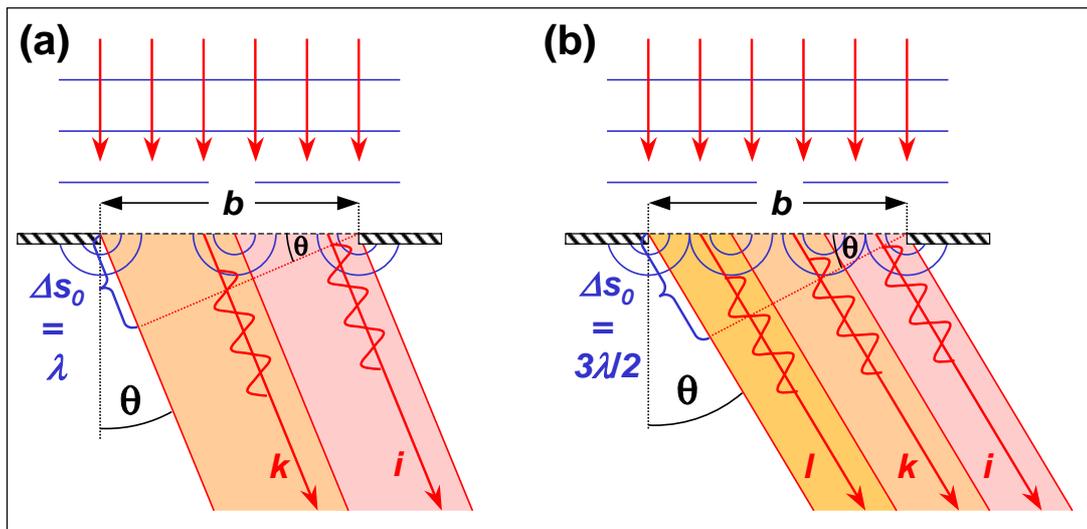


Abbildung 5.4: Zur anschaulichen Darstellung der Intensitätsminima (a) und Intensitätsmaxima (b) bei der Beugung am Spalt.

bleibt allerdings übrig und führt zum ersten Nebenmaximum. Insgesamt erhalten wir Nebenmaxima für $\Delta s_0 = \frac{2m+1}{2} \cdot \lambda$ oder mit $\sin \theta = \Delta s_0/b$ für

$$\sin \theta_m^{\max} = \pm \frac{2m+1}{2} \frac{\lambda}{b}.$$

Wir sehen, dass wir durch eine anschauliche geometrische Betrachtung die Richtungen ableiten können, für die wir bei der Beugung am Spalt maximale und minimale Intensität erwarten. Es ist allerdings bereits schwieriger, die komplette Winkelverteilung der Gesamtamplitude abzuleiten. Weitaus schwieriger wird die Situation dann, wenn die von den einzelnen Punkten eines Beugungsobjektes loslaufenden Elementarwellen keine konstante Amplitude haben oder das Beugungsobjekt eine komplizierte geometrische Form besitzt. In diesem Fall müssen wir das Beugungsintegral explizit lösen, was relativ schwierig sein kann und oft nur mit Hilfe numerischer Methoden möglich ist.

Es sei hier auch darauf hingewiesen, dass wir uns bei der obigen geometrischen Betrachtung nur auf parallele Strahlen beschränkt haben. Dies bedeutet, dass wir den Beobachtungspunkt ins Unendliche verlegt haben. Wir werden weiter unten sehen, dass diese Situation gerade dem Fall der Fraunhoferschen Beugung entspricht. Wir werden sehen, dass wir im Fall der Fraunhoferschen Beugung die genaue Winkelverteilung der Gesamtamplitude mit dem Formalismus der Fourier-Transformation berechnen können.

Eine Brücke zwischen Interferenz und Beugung können wir mit Hilfe von Abb. 5.5 herstellen. Hierzu nehmen wir an, dass entlang des Spalts N identische, kohärente Huygenssche Elementarwellen loslaufen. Um die Gesamtamplitude in eine bestimmte Richtung θ zu erhalten, müssen wir über alle N Teilwellen aufsummieren und erhalten

$$\begin{aligned} \Psi_P &= a_Q \{ e^{i(kr - \omega t)} + e^{i(k[r+\delta] - \omega t)} + e^{i(k[r+2\delta] - \omega t)} + \dots + e^{i(k[r+(N-1)\delta] - \omega t)} \} \\ &= a_Q e^{i(kr - \omega t)} \{ 1 + e^{i\delta} + e^{i2\delta} + \dots + e^{i(N-1)\delta} \}. \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Die geometrische Reihe in den geschweiften Klammern hat den Wert $(e^{iN\delta} - 1)/(e^{i\delta} - 1)$, was wir in der Form

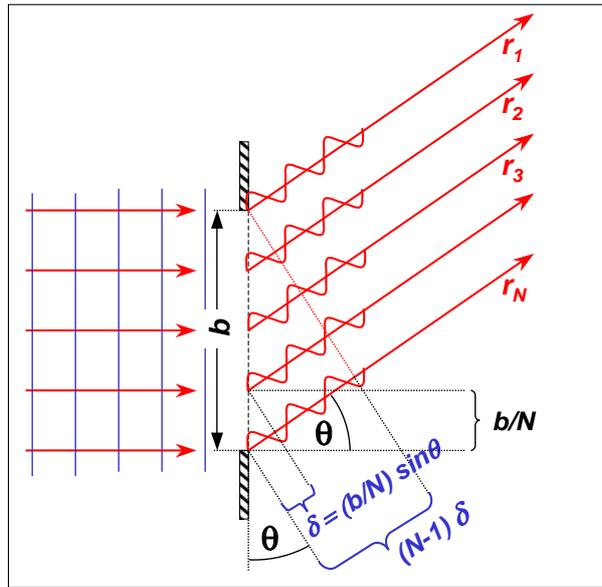


Abbildung 5.5: Zur Veranschaulichung des Zusammenhangs zwischen Beugung und Interferenz. Zur Diskussion der Beugung am Spalt wird angenommen, dass jeder Punkt des Spalts die Quelle phasenkohärenter Huygensscher Wellen gleicher Amplitude bildet.

$$\frac{e^{iN\delta/2} [e^{iN\delta/2} - e^{-iN\delta/2}]}{e^{i\delta/2} [e^{i\delta/2} - e^{-i\delta/2}]} = e^{i(N-1)\delta/2} \left(\frac{\sin N\delta/2}{\sin \delta/2} \right) \quad (5.2.6)$$

schreiben können. Für die Gesamtamplitude erhalten wir damit

$$\Psi_P = a_Q e^{-i\omega t} e^{i[kr+(N-1)\delta/2]} \left(\frac{\sin N\delta/2}{\sin \delta/2} \right). \quad (5.2.7)$$

Mit dem Abstand b/N zwischen zwei benachbarten Elementarwellen und $\delta = \frac{b}{N} \sin \theta$ können wir schreiben

$$\Psi_P = a_Q e^{-i\omega t} e^{i[kr+(N-1)b/2N]} \left(\frac{\sin[b \sin \theta/2]}{\sin[b \sin \theta/2N]} \right). \quad (5.2.8)$$

Lassen wir nun $N \rightarrow \infty$ gehen, d.h. den Abstand der Elementarwellen $b/N \rightarrow 0$, so können wir $\sin[b \sin \theta/2N]$ durch $[b \sin \theta/2N]$ ersetzen und $(N-1)b/2N \simeq b/2$ setzen. Damit erhalten wir

$$\Psi_P = a_Q e^{-i\omega t} e^{i[kr+b/2]} \frac{1}{N} \left(\frac{\sin[b \sin \theta/2]}{[b \sin \theta/2]} \right). \quad (5.2.9)$$

Wir werden die $\sin x/x$ Funktion noch ausführlich in Abschnitt 5.4.2 diskutieren. Es lässt sich aber leicht zeigen, dass diese Funktion Nullstellen und Maxima bei den oben angegebenen Winkeln θ_m^{\min} und θ_m^{\max} besitzt.

5.2.2 Vertiefungsthema: Das Fresnel-Kirchhoff-Beugungsintegral

Gustav Kirchhoff formulierte das im letzten Abschnitt diskutierte Beugungsproblem für eine skalare Welle in einer mathematisch strengeren Weise als Randwertproblem, was die Verwendung des oben benutzten Huygens'schen Prinzips im Nachhinein rechtfertigt. Da die Ableitung des Fresnel-Kirchhoff-Beugungsintegrals sehr formal und recht aufwändig ist,³ haben wir den Rechenweg in den Anhang A verlagert und geben hier nur das Endergebnis an (vergleiche hierzu Gleichung (A.14) und Abb. A2):

$$\Psi(0) = -\frac{ik_0 a_Q}{2\pi} \iint_{\mathcal{S}_1} \frac{f_S}{dd_1} \exp[ik_0(d+d_1)] \times \left(\frac{\cos\theta + \cos\theta_1}{2} \right) dS . \quad (5.2.10)$$

Das Huygens-Kirchhoff-Beugungsintegral stellt eine Rechtfertigung für den Ausdruck (5.2.4), den wir bereits oben bei der Analyse der Beugung auf der Basis des Huygens'schen Prinzips erhalten haben. Gleichung (5.2.10) enthält aber noch drei zusätzliche Informationen. Die erste ist die explizite Form $\frac{1}{2}(\cos\theta + \cos\theta_1)$ für den *Neigungsfaktor*, der in Abb. A3 dargestellt ist. Bei paraxialen Bedingungen ($\cos\theta \simeq \cos\theta_1 \simeq 1$) wird der Neigungsfaktor 1, wie es in (5.2.4) angenommen wurde. Der zweite interessante Punkt ist der Phasenfaktor $-i$, der dritte der Faktor $k_0/2\pi$, die beide eine physikalische Bedeutung haben (siehe hierzu Anhang A).

5.2.3 Fraunhofer- und Fresnel-Beugung

Wollen wir Beugungseffekte berechnen, so müssen wir (5.2.4) – oder genauer (5.2.10) – unter verschiedenen Randbedingungen integrieren, die realen Experimenten entsprechen. Wir werden nun eine Klassifizierung einführen, die die wesentlichen Prinzipien klarer herausstellt. Zuerst wollen wir Systeme betrachten, die von ebenen Wellen beleuchtet werden (vergleiche hierzu z.B. Abb. 5.4 und 5.5). Wir können das so realisieren, indem wir die Punktquelle sehr weit entfernt aufstellen und sehr hell machen. Wir machen also d_1 und a_Q sehr groß, halten aber ihr Verhältnis

$$\frac{a_Q}{d_1} = A \quad (5.2.11)$$

konstant. Wir betrachten nun die in Abb. 5.6 gezeigte Situation, bei der \mathcal{S}_1 mit der Ebene \mathcal{R} der Beugungsmaske übereinstimmt. Außerhalb des Bereichs ist $f_S = 0$. Um die Sache zu vereinfachen, lassen wir \mathcal{R} mit der Wellenfront der einlaufenden Welle übereinstimmen. Wir definieren nun den Ursprung O in der Ebene \mathcal{R} und die Symmetrieachse des Systems als \overline{OO} senkrecht zu \mathcal{R} . Kennzeichnen wir den Ort S durch den Vektor \mathbf{r} in der Ebene von \mathcal{R} , so kann man f_S durch $f_S(\mathbf{r})$ ersetzen. Aus (5.2.10) ergibt sich dann, wenn man den Neigungsfaktor vernachlässigt und $d_1 = L_1 = \text{const}$ setzt,

$$\Psi_P = \frac{k_0 A}{2\pi i} \exp(ik_0 L_1) \iint_{\mathcal{R}} \frac{f(\mathbf{r})}{d} \exp[ik_0 d] d^2 r . \quad (5.2.12)$$

³Es sei bereits jetzt darauf hingewiesen, dass die Kirchhoffsche Theorie auch nur eine Näherung darstellt, die streng nur für hinreichend kleine Wellenlängen (die Abmessung der beugenden Öffnung muss groß gegenüber der Wellenlänge sein) gilt. Die genaue Beschreibung des Problems ist allerdings so schwierig, dass mathematisch exakte Lösungen nur für ganz wenige Spezialfälle bekannt sind. Die Kirchhoffsche Theorie leistet auf jeden Fall sehr gute Dienste, obwohl sie von der skalaren Wellengleichung ausgeht und somit nicht beachtet, dass Licht ein transversales Vektorfeld ist.

Hierbei ist L_1 der senkrechte Abstand von Q zu \mathcal{R} . Der Faktor $\exp(ik_0L_1)$ ist über die ganze Ebene \mathcal{R} konstant und wird im Folgenden mit in A einbezogen. Die am Ort P beobachtete Intensität ist

$$I_P = |\Psi|^2 = \Psi\Psi^* . \quad (5.2.13)$$

Wir wollen zunächst eine qualitative Diskussion führen. Dazu überlegen wir, was passiert, wenn wir die Beobachtungsebene \mathcal{P} von der Ebene \mathcal{R} des beugenden Objekts wegbewegen. Ist \mathcal{P} in unmittelbarer Nähe von \mathcal{R} , so werden wir in der Beobachtungsebene nach wie vor (bis auf leichte Streifenbildung am Rand) ein klares Bild des beugenden Objekts wahrnehmen. Bewegt man nun \mathcal{P} von \mathcal{R} weg, so wird das Bild immer undeutlicher und von zusätzlichen Strukturen überlagert, bleibt aber nach wie vor erkennbar. Dieser Bereich wird als der Bereich der *Fresnel-* oder *Nahfeldbeugung* bezeichnet. Bewegt man die Beobachtungsebene sehr weit weg, so dehnt sich das Streifenmuster immer weiter aus und das wahrgenommene Bild ähnelt dem beugenden Objekt nicht mehr. Das wahrgenommene Bild ändert sich nun auch nicht mehr, wenn man den Abstand weiter vergrößert. Dieser Bereich wird als der Bereich der *Fraunhofer-* oder *Fernfeldbeugung* bezeichnet. Der wesentliche Unterschied zwischen Nah- und Fernbereich liegt darin begründet, dass wir im Nahbereich die Krümmung der Wellenfronten der vom Beugungsobjekt auslaufenden Elementarwellen berücksichtigen müssen, während wir im Fernbereich die Wellenfronten bereits über die gesamte Ausdehnung des Beugungsobjekts als eben betrachten können.⁴ Wir werden weiter unten zeigen, dass dies gleichbedeutend damit ist, dass im Fernbereich die Weglängenunterschiede der einzelnen Elementarwellen als lineare Funktion der Koordinaten (x, y) eines Punktes S in der Ebene des Beugungsobjekts angeben lassen.

Die Einteilung von Beugungseffekten in die Kategorie *Fresnel-* und *Fraunhofer-Beugung* hängt also davon ab, wie sich die Phase k_0d der Elementarwellen bei der Bewegung des Punktes S auf der Ebene \mathcal{R} ändert. Dabei spielen drei Faktoren eine Rolle: (i) der Abstand d zwischen dem Punkt S und dem Ort P des Beobachters, (ii) die Bereiche von \mathcal{R} , in denen $f(\mathbf{r})$ von null verschieden ist, d.h. die Größe des transmittierenden Bereichs der Blende und (iii) die Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k_0$.

Wir nehmen folgende Einteilung vor:

- **Fraunhofer-Beugung:** k_0d hängt linear von \mathbf{r} ab.
- **Fresnel-Beugung:** die Variation von k_0d hat nichtlineare Anteile vergleichbar mit π .

Wir können diese Klassifikation quantitativ formulieren, wenn wir einen Kreis mit Radius ρ definieren, der gerade alle transmittierenden Bereiche von \mathcal{R} einschließt (siehe Abb. 5.6). Wir betrachten nun die Beugung in der Ebene \mathcal{P} senkrecht zur Achse in einer Entfernung L von der Blende. An einem Punkt P in dieser Ebene mit einem Abstandsvektor \mathbf{p} von der Achse wird die Phase k_0d der Welle von \mathbf{r} zu⁵

$$\begin{aligned} k_0d &= k_0(L^2 + |\mathbf{r} - \mathbf{p}|^2)^{1/2} \\ &\simeq k_0L + \frac{1}{2}k_0L^{-1}(r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + p^2) + \dots \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

⁴Die Annahme ebener Wellenfronten ist gleichbedeutend damit, dass wir für alle Teilstrahlen wohldefinierte Beugungswinkel θ gegenüber der Richtung des einfallenden Lichts angeben können. Diese Situation ist z.B. in Abb. 5.4 und 5.5 realisiert, wo wir parallel gebeugte Strahlen angenommen haben. Dies ist gleichbedeutend damit, dass wir die Beobachtungsebene ins Unendliche verschoben haben.

⁵Wir verwenden hier die Reihenentwicklung $(1+x)^{1/2} \simeq 1+x/2$.

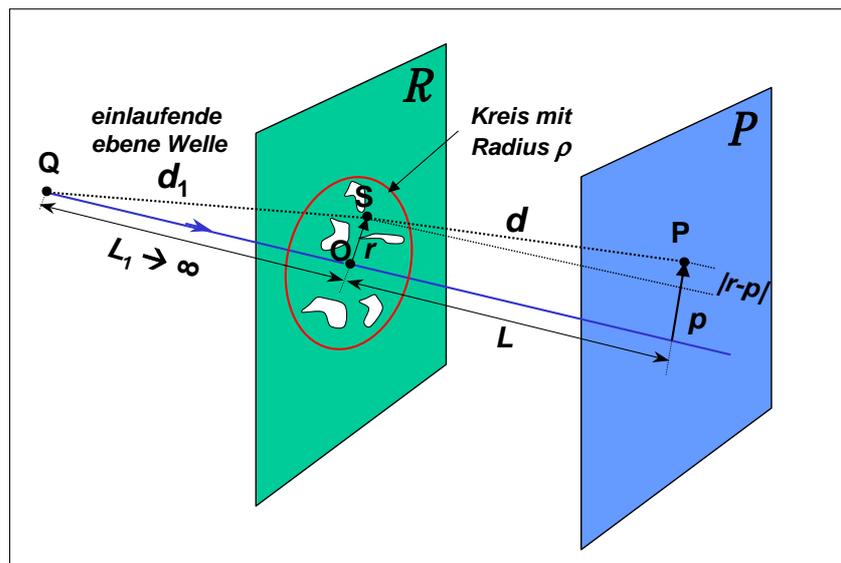


Abbildung 5.6: Schemazeichnung zur Darstellung der Größen zur Beugungsberechnung.

Hierbei haben wir angenommen, dass r und p klein im Vergleich zu L sind. Der Ausdruck enthält einen

- konstanten Term $k_0(L + \frac{p^2}{2L})$,
- einen Term $k_0 \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}/L$, der linear in r ist,
- und einen quadratischen Term $\frac{1}{2}k_0 r^2/L$.

Da der größte Wert von r , der zur Streuung beiträgt, durch ρ gegeben ist, haben wir für den quadratischen Term einen Maximalwert $\frac{1}{2}k_0 \rho^2/L$. Damit können wir die Klassifizierung in Fresnel- und Fraunhofer-Beugung davon abhängig machen, ob der Term $\frac{1}{2}k_0 \rho^2/L$ viel größer oder kleiner als π ist. In Wellenlängen ausgedrückt ergibt sich:

Fresnel-Beugung:	$\rho^2 \geq \lambda L$	(5.2.15)
Fraunhofer-Beugung:	$\rho^2 \ll \lambda L$	(5.2.16)

Wenn man beispielsweise eine Lochblende mit einem Durchmesser von 2 mm mit Licht der Wellenlänge 500 nm beleuchtet, wird man Fresnel'sche Beugung in Entfernungen unterhalb von 2 m beobachten, Fraunhofer-Beugung in größeren Entfernungen. Berechnet man die Beugungsmuster, so wird man sehen, dass der Übergang von einem Beugungstyp zum anderen fließend ist.

Es sei hier angemerkt, dass bei einer Beleuchtung mit einer Punktquelle in der endlichen Entfernung L_1 Gleichung (5.2.14) leicht angepasst werden kann. Die Phase am Punkt P ist dann

$$\begin{aligned}
 k_0(d_1 + d) &= k_0 \left[(L^2 + r^2)^{1/2} + (L^2 + |\mathbf{r} - \mathbf{p}|^2)^{1/2} \right] \\
 &\simeq k_0(L + L_1) + \frac{k_0 r^2}{2}(L^{-1} + L_1^{-1}) + \frac{k_0 p^2}{2L} - \frac{k_0}{L} \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + \dots
 \end{aligned} \tag{5.2.17}$$

Eine ähnliche Unterscheidung zwischen Fresnel- und Fraunhofer-Beugung lässt sich dann durch Ersetzen von L durch $1/(L^{-1} + L_1^{-1})$ treffen.

5.2.4 Experimentelle Beobachtung von Beugungserscheinungen

Beide Typen von Beugung können experimentell gut beobachtet werden, wenn man eine Punktquelle benutzt, die monochromatisches Licht mit kohärenten Wellenfronten aussendet (z.B. Laser). Bei Verwendung einer Punktquelle ist es wichtig, sicherzustellen, dass sie wirklich klein genug ist, um wirklich *Kugelwellen* auszusenden. Das heißt, dass die von verschiedenen Punkten der Quelle mit endlicher Ausdehnung q ausgehenden Kugelwellen sich mit einer Genauigkeit von mindestens $\lambda/4$ an jedem transmittierenden Punkt von \mathcal{R} (also einem Kreis mit Radius ρ) überlagern müssen. Die Bedingung dafür lautet

$$\frac{q\rho}{L_1} < \frac{\lambda}{4} . \quad (5.2.18)$$

Wir werden später sehen, dass dies gerade bedeutet, dass die abgestrahlte Welle über die transmittierende Fläche kohärent sein muss.

Für unser obiges Beispiel der 2 mm Lochblende muss daher die Quelle bei einem Abstand $L_1 = 1$ m eine Ausdehnung kleiner 0.1 mm besitzen. Für eine Entfernung von 1 km reicht bereits eine Straßenlaterne von 10 cm Durchmesser aus.

Um Fresnel'sche Beugungsmuster zu beobachten, muss man nur einen Schirm in der nötigen Entfernung L aufstellen. Bei der Fraunhofer'schen Beugung muss man den in r quadratischen Term genügend klein machen. Eine Möglichkeit hierfür ist, einfach L und L_1 sehr groß zu machen, d.h. die beleuchtende Lichtquelle und der Beobachtungspunkt liegen sehr weit vom beugenden Objekt entfernt. In der Praxis führt aber die Beobachtung im Unendlichen zu einer sehr kleinen Lichtintensität und unhandlichen Ausdehnungen der Experimente. Man kann auch die Wahl $L = -L_1$ treffen, indem man eine Linse dazu benutzt, um den Schirm in einer zur Quelle konjugierten Ebene abzubilden. Schauen wir z.B. direkt in die Quelle, so ist die Netzhaut in einer zur Quelle konjugierten Ebene. Bringt man nun das Beugungsobjekt irgendwo in den Lichtweg ein (üblicherweise nahe an der Pupille), kann man Fraunhofer-Beugung beobachten. Defokussiert man das Auge, verwandelt sich das Fraunhofer-Muster in ein Fresnel'sches Beugungsmuster. Für mehr quantitative Untersuchungen verwendet man eine Punktquelle, die mit einer Linse einen parallelen Strahl ergibt oder, äquivalent dazu, einen aufgeweiteten Laserstrahl. Beide Methoden entsprechen einem unendlichen Wert von L_1 . Das Fraunhofer'sche Muster ist dann auf einem Schirm mit unendlichem L zu beobachten oder einfacher in der Brennebene einer Sammellinse, die zu unendlichem L konjugiert ist.

5.3 Fresnel-Beugung

Wir werden in den folgenden Abschnitten kurz die *Fresnel-Beugung* an einigen Beispielen diskutieren. Die Fraunhofer-Beugung und ihre Anwendungen werden dann in Kapitel 5.4 eingehender diskutiert, da sie als analytische Methode viel wichtiger ist. Aber auch die Fresnel-Beugung hat einige Anwendungen und war historisch betrachtet von entscheidender Bedeutung für die Etablierung der Wellentheorie des Lichtes.

Das zugrundeliegende Integral, das es auszuwerten gilt, ist (5.2.12):

$$\Psi_P = \frac{k_0 A}{2\pi i} \iint_{\mathcal{R}} \frac{f(\mathbf{r})}{d} \exp[ik_0 d] d^2 r . \quad (5.3.1)$$

Für eine beliebige Situation kann dieses Integral natürlich numerisch ausgewertet werden, von den numerischen Methoden erhält man allerdings wenig Information über die physikalischen Hintergründe. Wir wollen deshalb hier einerseits mit Problemen beschäftigen, die axiale Symmetrie besitzen. Für solche Systeme kann das Integral für Punkte auf der Achse analytisch gelöst werden. Andererseits wollen wir Systeme mit Translationssymmetrie betrachten, die man mit Hilfe von graphischen Methoden behandeln kann.

Für kleine Blenden ($\rho \ll L$) und Punkte auf der Achse ($\mathbf{p} = 0$) können wir d im Exponenten von (5.3.1) wie in Abschnitt 5.2.3 mit Hilfe des *binomischen Satzes* entwickeln. Unter dem Bruchstrich haben unter diesen Bedingungen kleine Veränderungen von d wenig Einfluss, weswegen man sie vernachlässigt und dafür L einsetzt:

$$\begin{aligned} \Psi_P &= \frac{k_0 A}{2\pi i} \iint_{\mathcal{R}} \frac{f(\mathbf{r})}{L} \exp\left[ik_0 \left(L + \frac{r^2}{2L}\right)\right] d^2 r \\ &= \frac{k_0 A}{2\pi i L} \exp(ik_0 L) \iint_{\mathcal{R}} f(\mathbf{r}) \exp\left(ik_0 \frac{r^2}{2L}\right) d^2 r . \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Der Phasenfaktor $\exp(ik_0 L)$ kann nun in A mit einbezogen werden.

5.3.1 Radialsymmetrische Probleme

In einem axialsymmetrischen System kann der Wert von Ψ auf der Symmetrieachse durch direkte Integration von (5.3.2) bestimmt werden. Für eine solche Blende kann $f(r)$ als $g(r^2) = g(s)$ geschrieben werden, wobei $s \equiv r^2$ gesetzt wird. Das Flächenelement wird dann in Abhängigkeit von s geschrieben als

$$d^2 r = 2\pi r dr = \pi ds \quad (5.3.3)$$

und das Integral (5.3.2) wird zu

Augustin Jean Fresnel (1788 - 1827):

Augustin Jean Fresnel wurde am 10. Mai 1788 in Broglie bei Bernay in der Normandie geboren. Der junge Fresnel tat sich mit dem Lesen und Schreiben schwer. Dagegen setzte sich die mathematische Begabung früh durch. Im Jahre 1801 besuchte der 13jährige Fresnel die Zentralschule in Caen. Drei Jahre später wurde er Student an der École Polytechnique in Paris von 1804 bis 1806. Dominique Francois Arago, der ebenfalls am Polytechnikum studierte wurde Fresnels Weggefährte bei seinen Forschungen. Im Anschluss an das Polytechnikum besuchte Fresnel die École des Ponts et Chaussées und erwarb den Ingenieursgrad. Als Weg- und Wasserbaufachmann trat er mit 20 Jahren in den Staatsdienst und verbrachte die nächsten Jahre auf verschiedenen Baustellen in der Provinz. In seiner Freizeit befasste er sich mit Physik. Seine experimentellen und theoretischen Untersuchungen umfassten neben der Beugung die Interferenz, die Polarisation, die Doppelbrechung und die Abberation des Lichts.

Seine erste Untersuchung La diffraction de la lumière (die Beugung des Lichts) legte Fresnel am 15.10.1815 der Academie des Sciences vor. Bei der Durchführung seiner Interferenzversuche benutzte er verschiedene Techniken, wovon zwei besonders erwähnenswert sind. Zum einen der Spiegelversuch (zusammen mit Arago 1816) und zum anderen der Versuch mit dem Biprisma (1819). Fresnel erfand ein Glasprisma zur Erzeugung zirkular polarisierten Lichts, sowie die aus Glasringen aufgebauten Ring- und Gürtellinsen (Fresnel-Linsen) für Leuchttürme und Scheinwerfer von Schiffen und Fahrzeugen. Die erste Linse dieser Bauart wurde in den Cordouan-Leuchtturm eingebaut und ersetzte die Hohlspiegel, welche in der salzhaltigen Meeresluft meist rasch erblindeten. Fresnels Arbeiten über die Mitführung des Lichts durch bewegte Körper (Strömungen) haben ein neues Teilgebiet der Optik geschaffen. Der Fresnelsche Mitführungskoeffizient bezeichnet den Bruchteil der Lichtgeschwindigkeit, mit dem sich Licht in bewegten Körpern (Strömungen) fortpflanzt. Armand Fizeau bestätigte Fresnels Arbeiten 1851 mit Versuchen an strömendem Wasser. Fresnel erkrankte 1824 an Bluthusten und verstarb am 14. July 1827 in Ville-Àvray bei Paris.



$$\Psi_P = \frac{k_0 A}{2iL} \iint_0^\infty g(s) \exp\left(\frac{ik_0 s}{2L}\right) ds . \quad (5.3.4)$$

Dieses Integral sieht nach einer Fourier-Transformation aus, obwohl die Integration von 0 (und nicht von $-\infty$) nach ∞ läuft, was allerdings für die physikalische Situation vernachlässigbar ist. Leider gibt es für Punkte außerhalb der Symmetrieachse keine solche Lösungen.

Die Fresnelschen Zonen

Liegt P auf der Symmetrieachse, so können wir die Integration in (5.3.4) auch in ringförmige Scheiben unterteilen und zwar so, dass für die m -te Kreisscheibe der Abstand von dieser Kreisscheibe zum Punkt P im Intervall zwischen $L + (m-1) \cdot \lambda/2$ und $L + m \cdot \lambda/2$ liegt. Man bezeichnet diese Kreisscheiben als *Fresnel-Zonen* (siehe Abb. 5.7). Für die Radien $R_m = \sqrt{S_m}$ der Fresnelschen Zonen gilt bei Annahme von ebenen Wellenfronten (die Quelle befindet sich sehr weit entfernt)

$$\begin{aligned} R_m^2 = S_m &= \left(L + m \cdot \frac{\lambda}{2}\right)^2 - L^2 & m = 1, 2, 3, \dots \\ &= mL\lambda + m^2 \frac{\lambda^2}{4} . \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

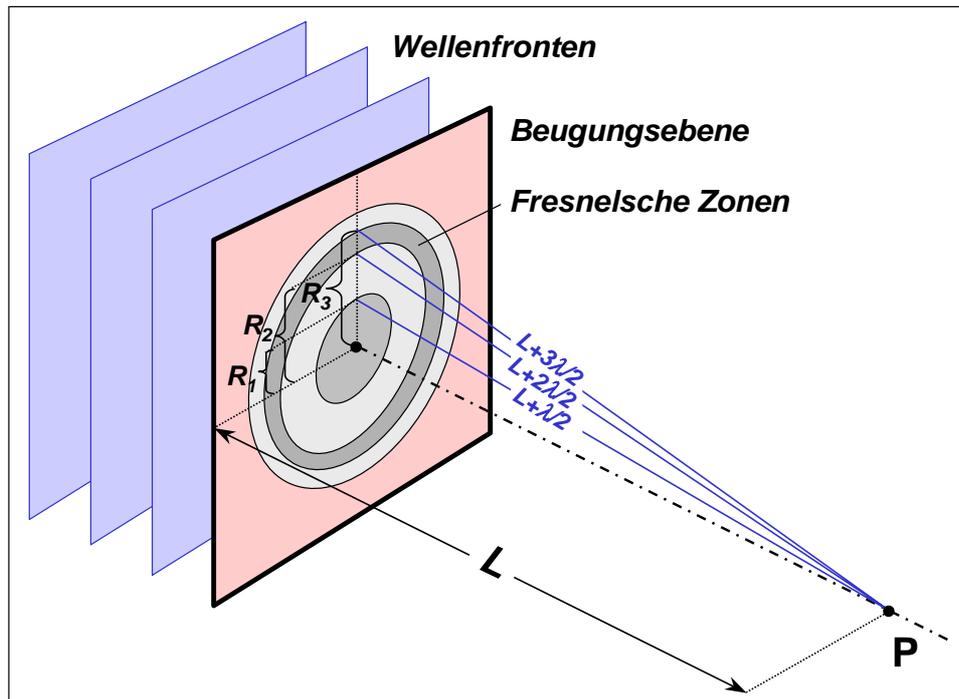


Abbildung 5.7: Zur Veranschaulichung der Fresnelschen Zonen: Ebene Wellen fallen auf die Beugungsebene. Die aufeinander folgenden Zonen tragen zur Gesamtamplitude am Punkt P mit unterschiedlichem Vorzeichen bei.

Da üblicherweise $L \gg \lambda$, kann in der Regel der zweite Teil auf der rechten Seite vernachlässigt werden, sofern m nicht extrem groß wird. Folglich ist

$$R_m^2 = S_m = mL\lambda, \quad (5.3.6)$$

das heißt, die Radien sind proportional zur Wurzel ihrer Nummer. Für $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ (He-Ne-Laser) erhält man für einen Abstand $L = 1.58 \text{ m}$ den Radius $R_1 = 1 \text{ mm}$ für die erste Fresnel-Zone.

Die Breite

$$\Delta R_m = R_{m+1} - R_m = \sqrt{L\lambda} (\sqrt{m+1} - \sqrt{m}) \quad (5.3.7)$$

nimmt mit wachsendem m ab. Die Zonenfläche

$$A_m = \pi(R_{m+1}^2 - R_m^2) = \pi L\lambda \quad (5.3.8)$$

bleibt dagegen konstant.

Man kann zeigen, dass die Beiträge der einzelnen Fresnel-Zonen ihr Vorzeichen von Zone zu Zone wechseln. Dies ist anschaulich klar, da sich der Laufweg von den Zonen zum Beobachtungspunkt P mit m um jeweils $\lambda/2$ ändert, so dass sich die Phasen der Beiträge aufeinanderfolgender Zonen jeweils um π unterscheiden. Die Beiträge aufeinanderfolgender Zonen überlagern sich also destruktiv.

Wir möchten nun einige wichtige Beispiele der Fresnel-Beugung betrachten:

Die Lochblende

Für eine runde Lochblende mit Radius R gilt $g(s) = 1$ für $s < R^2$. Das Integral wird dann zu

$$\begin{aligned}\Psi_P &= \frac{k_0 A}{2iL} \iint_0^{R^2} \exp\left(\frac{ik_0 s}{2L}\right) ds \\ &= -A [\exp(ik_0 R^2/2L) - 1] .\end{aligned}\quad (5.3.9)$$

Die beobachtete Intensität ist somit

$$|\Psi_P|^2 = 2A^2 [1 - \cos(k_0 R^2/2L)] . \quad (5.3.10)$$

Wenn sich also der Beobachter entlang der Symmetrieachse bewegt, ändert sich die Intensität im Zentrum des Beugungsmusters periodisch mit $1/L$ zwischen null und der vierfachen Einfallintensität A^2 . Dieses Ergebnis ist auf den ersten Blick sehr erstaunlich: Die absorbierende Lochblende erhöht die Intensität in P gegenüber der Anordnung ohne Schirm. Der anschauliche Grund dafür ist der, dass die Lochblende bei geeignetem Durchmesser gerade die destruktiven Interferenz der anderen Fresnel-Zonen verhindert.

Die runde Scheibe

Für eine runde Scheibe mit Radius R gilt $g(s) = 1$ für $s > R^2$. Das Integral wird dann zu

$$\begin{aligned}\Psi_P &= \frac{k_0 A}{2iL} \iint_{R^2}^{\infty} \exp\left(\frac{ik_0 s}{2L}\right) ds \\ &= -A [\exp(i\infty) - \exp(ik_0 R^2/2L)] .\end{aligned}\quad (5.3.11)$$

Die Exponentialfunktion $\exp(i\infty)$ kann aus folgendem Grund null gesetzt werden: Wir haben den Faktor $1/d$ in (5.3.1) durch $1/L$ ersetzt. Diese Näherung wird für den Grenzfall $s \rightarrow \infty$ ungültig, wobei es jetzt $1/d \rightarrow 0$ ermöglicht, diesen Term zu vernachlässigen. Daher gilt für die Intensität

$$|\Psi|^2 = A^2 \quad (5.3.12)$$

für alle Werte von R . Dieses überraschende Ergebnis, dass es immer einen hellen Fleck (*Poisson-Fleck*) in der Mitte des Beugungsmusters einer runden Scheibe gibt, war das Argument, das schließlich die

Gegner der Wellentheorie des Lichts überzeugte. Aus diesem Grund war die Fresnel-Beugung für die historische Entwicklung der Optik von zentraler Bedeutung.⁶

Anschaulich kann man sich die Entstehung des Poisson-Fleck so vorstellen, dass sich die Elementarwellen, die sich jenseits des Umfangs des Scheibchens ausbreiten, sich phasengleich auf der Symmetrieachse treffen und dadurch einen hellen Fleck erzeugen. Fall eine Scheibe mit relativ großem Durchmesser verwendet wird, ist wichtig, dass der Rand der Scheibe sehr glatt ist, da die Fresnelschen Zonen mit wachsendem Radius immer schmaler werden (siehe nächster Abschnitt). Unregelmäßigkeiten des Scheibenrandes in der Größenordnung der Dicke der betreffenden Fresnelschen Zone würden dann die Entstehung des hellen Flecks verhindern.

Die Zonenplatte

Für lange Zeit war die Zonenplatte (siehe Abb. 5.8) kaum mehr als ein physikalisches Spielzeug, mit dem sich die Fresnel-Beugung schön demonstrieren ließ. Ihre Bedeutung hat allerdings dadurch stark zugenommen, dass sie ein einfaches Modell zum Verständnis der *Holographie* darstellt. Seit kurzem wird sie auch in der *Röntgenmikroskopie* verwendet. Wir werden nämlich sehen, dass wir mit Hilfe der Zonenplatte abbildende Linsen konstruieren können. Für Röntgenlicht ist dies sehr interessant, da man in diesem Wellenlängenbereich z.B. keine Glas- oder Quarzlinsen verwenden kann, weil diese Materialien (wie andere Materialien auch) Röntgenstrahlen absorbieren und einen Brechungsindex sehr nahe bei eins haben.

Zonenplatten realisiert man mit abwechselnd schwarzen und weißen Ringen (siehe Abb. 5.8), wobei weiß bzw. schwarz bedeutet, dass die Transmission dieses Bereichs hoch (ideal gleich eins) bzw. niedrig (ideal gleich null) ist. Die Radien der einzelnen Ringe entsprechen den Radien der Fresnelschen Zonen $R_m^2 = m\lambda L = mR_1^2$, wobei R_1 der Radius der 1. Fresnelschen Zone ist (siehe Abb. 5.9). Damit wird $g(s)$ eine periodische Funktion mit der Periode $2R_1^2$ für ganzzahliges $m \geq 0$:

$$\begin{aligned} g(s) &= 1 & [2mR_1^2 < s < (2m+1)R_1^2] \\ g(s) &= 0 & [(2m+1)R_1^2 < s < (2m+2)R_1^2] \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

Der Ausdruck (5.3.13) beschreibt eine Rechteckfunktion und wir können (den Integranden in 5.3.4) nach Harmonischen entwickeln. Das Ergebnis besteht aus Delta-Funktionen mit den Werten

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{k_0 A}{2im\pi L} \quad (5.3.14)$$

⁶Im Jahr 1818 nahm Fresnel an einem von der Académie Française ausgerichteten Wettbewerb teil. Seine Arbeit zur Beugungstheorie wurde nach einigen Diskussionen mit dem ersten Preis ausgezeichnet. Die Jury bestand aus mehreren berühmten Wissenschaftlern: Pierre Laplace, Jean B. Biot, Siméon D. Poisson, Dominique F. Arago und Joseph Gay-Lussac. Poisson war ein starker Verfechter der Teilchennatur des Lichts und entsprechend ein kategorischer Gegner der von Fresnel verwendeten Wellenbeschreibung. Er zog aus der Arbeit Fresnels eine anscheinend völlig unsinnige Folgerung. Er zeigte, dass man gemäß der Fresnelschen Theorie im Mittelpunkt des Schattens eines kreisförmigen Hindernisses einen hellen Fleck beobachten sollte. In Poissons Augen führte diese Folgerung Fresnels Theorie ad absurdum. Die überraschende Vorhersage, die von Poisson abgeleitet wurde, um die Wellentheorie des Lichts zu widerlegen, wurde jedoch von Arago sofort experimentell bestätigt. Der helle Fleck wird deshalb heute oft Poissons Fleck genannt. Er wurde allerdings bereits fast 100 Jahre vorher im Jahr 1723 von Maraldi beobachtet, dessen Arbeit aber unbeachtet blieb (siehe z.B. J. E. Harvey, J. L. Forgan, *The spot of Arago: New Relevance for an old phenomenon*, Am J. Phys. **52**, 243 (1984)).

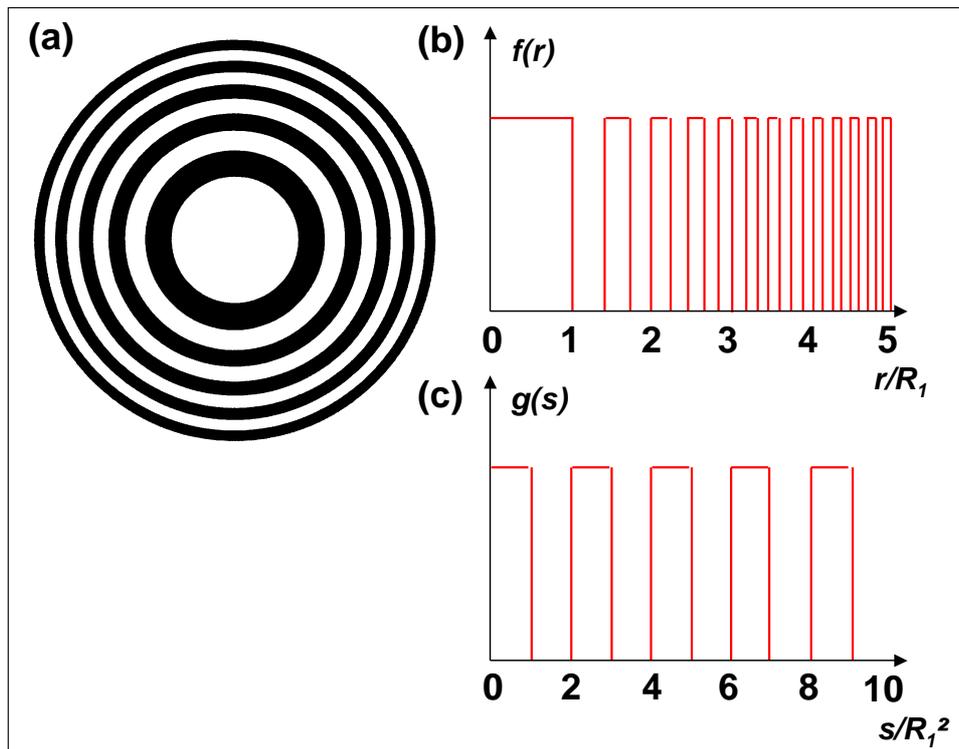


Abbildung 5.8: (a) Zonenplatte, (b) $f(r)$ und (c) $g(s)$ für eine Zonenplatte, wobei $s = r^2$.

für ungerades m an diskreten Stellen von L , wobei L die Gleichung

$$\frac{k_0}{L} = \frac{2\pi}{R_1^2} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{L} = \frac{\lambda}{R_1^2} \quad (5.3.15)$$

erfüllen muss. Wir finden daher bei diesen Werten von L eine Reihe von *Brennpunkten*, an denen Licht konzentriert wird. Setzt man L aus (5.3.15) in den Ausdruck für die Amplituden (5.3.14) ein, sieht man, dass diese alle gleich groß sind. Dies ist ein spezielles Ergebnis, das aus der Zerlegung einer Rechteckfunktion in ihre Harmonischen resultiert (vergleiche hierzu Anhang B). Es gilt nicht für andere Funktionen.

Eine Zonenplatte kann in ähnlicher Weise wie eine Linse verwendet werden. Konzentrieren wir uns auf eine bestimmte Beugungsordnung, beispielsweise auf $m = 1$, so können wir aus Abschnitt 5.2.3 sehen, dass bei Beleuchtung mit einer Punktquelle in der Entfernung L_1 sich die Bildposition so verschiebt, dass die Gleichung

$$\frac{1}{L} + \frac{1}{L_1} = \frac{2\pi}{k_0 R_1^2} = \frac{\lambda}{R_1^2} \quad (5.3.16)$$

erfüllt wird. Sie entspricht der Abbildung einer Linse mit der Brennweite $f = L = R_1^2/\lambda$. Offensichtlich leidet die Abbildung unter starken chromatischen Aberrationen, da die Brennweite von der Wellenlänge abhängt. Solche Linsen werden heute in der Röntgenmikroskopie verwendet.

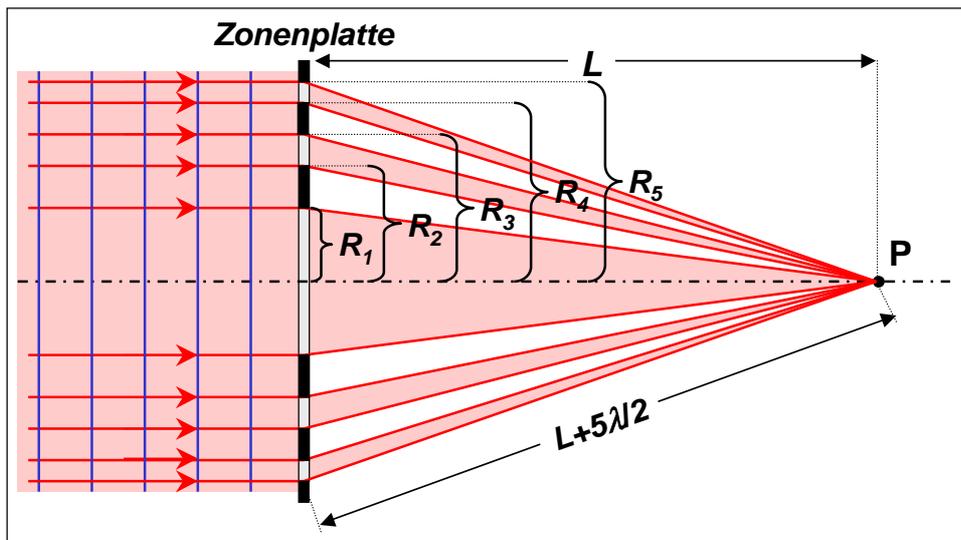


Abbildung 5.9: Zur Veranschaulichung der Wirkung einer Fresnelschen Zonenplatte.

Die Wirkung der Fresnelschen Zonenplatte kann anschaulich mit Hilfe der Fresnelschen Zonen verstanden werden. Wir haben oben gesehen, dass das Vorzeichen der einzelnen Beiträge der Fresnelschen Zonen zur Gesamtamplitude am Ort P von Zone zu Zone wechselt. Deshalb überlagern sich die Beiträge benachbarter Fresnelscher Zonen destruktiv. Um dies zu vermeiden, blendet man mit Hilfe der Zonenplatte einfach alle Beiträge mit negativen (oder positiven) Vorzeichen aus. Aus Abb. 5.9 folgt für den Radius der m -ten Fresnel-Zone

$$R_m = (L + m \cdot \lambda/2)^2 - L^2 = Lm\lambda + m^2\lambda^2/4.$$

Wegen $L \gg m\lambda$ erhalten wir

$$R_m = \sqrt{mL\lambda} \quad \text{oder} \quad \frac{R_m^2}{m} = L\lambda = R_1^2$$

bzw. mit $k_0 = 2\pi/\lambda$

$$\frac{k_0}{L} = \frac{2\pi m}{R_m^2} = \frac{2\pi}{R_1^2}.$$

Dieser Ausdruck entspricht der Bedingung (5.3.15).

Beleuchtet man die Zonenplatte mit ebenen Wellen, so unterscheiden sich die Wege der Teilwellen aller offenen Zonen um $2 \cdot \lambda/2 = \lambda$. Das heißt, alle Sekundärwellen kommen im Punkt P in Phase an und überlagern sich konstruktiv. Die Beiträge aus den Zonen, die zu destruktiver Interferenz führen würden, sind durch die Zonenplatte ausgeblendet. Wir erhalten somit am Punkt P einen Brennpunkt für die einfallende ebene Welle und die Brennweite beträgt

$$f = L = \frac{R_1^2}{\lambda}.$$

Das heißt, die Brennweite der Fresnelschen Zonenplatte wird durch den Radius der ersten Fresnel-Zone und durch die Wellenlänge λ bestimmt.

5.3.2 Vertiefungsthema: Fresnel-Beugung durch lineare Systeme

Es gibt keine einfache analytische Methode, das Beugungsintegral (5.3.2) für Systeme ohne axiale Symmetrie auszuwerten. Es müssen deshalb entweder numerische oder graphische Methoden entwickelt werden. Letztere ermöglichen uns einige Einblicke in die dahinterliegende Physik der *Fresnel'schen Beugungsmuster*. Wir werden daher ihre Anwendung bei der Behandlung linearer Systeme kurz diskutieren. In kartesischen Koordinaten ausgedrückt wird (5.3.2) zu

$$\Psi_P = \frac{k_0 A}{2\pi i L} \iint_{\mathcal{R}} f(x, y) \exp\left[\frac{ik_0}{2L}(x^2 + y^2)\right] dx dy . \quad (5.3.17)$$

In diesem Abschnitt werden wir uns nur mit Systemen beschäftigen, bei denen $f(x, y)$ in ein Produkt aus zwei Funktionen $f(x, y) = g(x)h(y)$ aufgespalten werden kann, so dass man

$$\Psi_P = \frac{k_0 A}{2\pi i L} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp\left[\frac{ik_0}{2L}x^2\right] dx \int_{-\infty}^{\infty} h(y) \exp\left[\frac{ik_0}{2L}y^2\right] dy \quad (5.3.18)$$

schreiben kann.

Graphische Auswertung durch Amplituden-Phasen-Diagramme

Integrale der Form

$$\Psi = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \exp[i\phi(x)] dx \quad (5.3.19)$$

können durch Zeichnen eines *Amplitude-Phasen-Diagramms* in der komplexen Ebene ausgewertet werden. Wir stellen dabei

$$d\Psi = f(x) \exp[i\phi(x)] dx \quad (5.3.20)$$

als Vektor in der komplexen Ebene dar, der eine Länge $f(x)$ hat und einen Winkel $\phi(x)$ mit der reellen Achse einschließt. Der Wert von Ψ ist dann die Vektorsumme aller Infinitesimalelemente $d\Psi$, die durch den Vektor, der die Enden x_1 und x_2 der aus den Infinitesimalelementen gebildeten Kurve von Anfang bis zum Ende verbindet, beschrieben wird. Eine solche Kurve wird *Amplituden-Phasen-Diagramm* oder auch *Vibrationskurve* genannt. Die Länge des Vektors von x_1 nach x_2 gibt die Amplitude von Ψ und der Winkel zur $\text{Re}(\Psi)$ -Achse den Phasenwinkel an. Da sich beim Überschreiten einer Fresnelschen Zone der Phasenwinkel um genau π ändert, erhält man beim Überschreiten einer Zone gerade eine halbe Windung

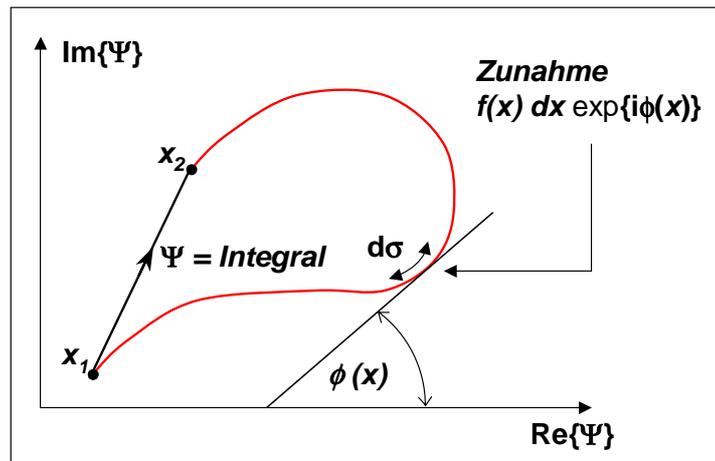


Abbildung 5.10: Auftragung des Integrals $\int_{x_1}^{x_2} f(x) \exp[i\phi(x)] dx$ in der komplexen Ebene.

(Phasenänderung von π) der Vibrationskurve. Für jede weitere Fresnel-Zone schreitet die Vibrationskurve um eine halbe Windung fort. Die Amplitude nimmt dabei gewöhnlich ab, so dass man eine Spirale erhält.

Das eigentliche Problem liegt nun darin, die Form der Kurve, die schematisch in Abb. 5.10 gezeigt ist, zu berechnen. Wenn wir uns ein Stück $\delta\sigma$ entlang der Kurve bewegen, wird sich als Ergebnis der Winkel ϕ um $\delta\phi$ ändern. Die Steigung ist dann offensichtlich im Grenzwert

$$\kappa = \frac{\delta\phi}{\delta\sigma} \rightarrow \frac{d\phi}{d\sigma} . \quad (5.3.21)$$

Wenn wir die Funktion $\kappa(\sigma)$ kennen, können wir die komplette Kurve aufzeichnen. Nun ist aber $d\sigma = f(x)dx$, weswegen die Kurve in Abhängigkeit von σ und

$$\kappa = \frac{1}{f(x)} \frac{d\phi}{dx} \quad (5.3.22)$$

beschrieben werden kann.

Beugung am Spalt

Wir betrachten eine langen Spalt, der in der Ebene \mathcal{R} zwischen x_1 und x_2 liegt. Es gilt $g(x) = 1$ zwischen x_1 und x_2 und $g(x) = 0$ sonst. Außerdem gilt überall $h(y) = 1$. Das Integral für Ψ ergibt dann die Amplitude und Phase der Anregung an der Stelle P , die gegenüber der Stelle $(x, y) = (0, 0)$ liegt (siehe Abb. 5.11). Um das gesamte Beugungsmuster aufzubauen, muss man die Berechnung für zahlreiche Punkte P , die Punkten des Spalts gegenüberliegen, wiederholen. Dazu variiert man x_1 und x_2 so, dass $(x_1 - x_2)$ konstant bleibt. Das Integral wird dann zu

$$\Psi_P = \frac{k_0 A}{2\pi i L} \int_{x_1}^{x_2} \exp\left[\frac{ik_0}{2L} x^2\right] dx \int_{-\infty}^{\infty} h(y) \exp\left[\frac{ik_0}{2L} y^2\right] dy . \quad (5.3.23)$$

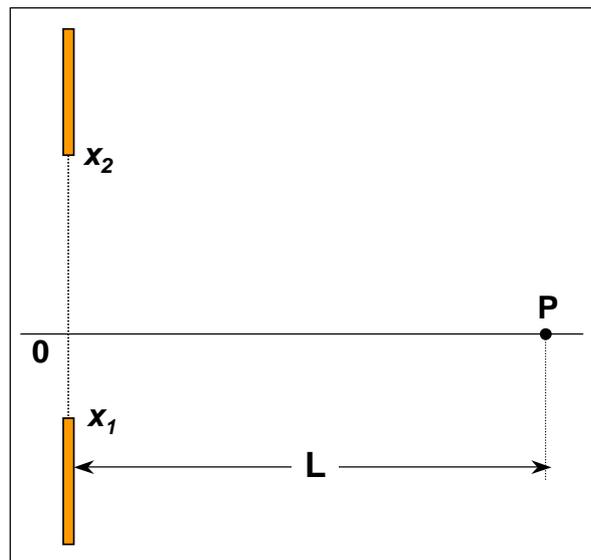


Abbildung 5.11: Schematische Darstellung der Situation bei der Beugung am Spalt zur Definition der Größen bei der Fresnel-Beugung.

Wir betrachten zunächst das erste Integral von (5.3.23). Seine Amplitude und Phase sind durch den Vektor zwischen den Punkten x_1 und x_2 auf der Kurve definiert, so dass

$$\sigma = \int_0^x dx = x \quad (5.3.24)$$

$$\kappa = \frac{d\phi}{dx} = \frac{k_0 x}{L} \equiv \beta^2 x . \quad (5.3.25)$$

Damit wird x zum Abstand vom Ursprung, gemessen entlang der Kurve, und die Krümmung an dieser Stelle ist $\beta^2 x$. Man kann die Kurve mit Hilfe von dimensionslosen Parametern beschreiben:

$$X = \beta x, \quad K = \beta^{-1} \kappa . \quad (5.3.26)$$

Die Kurve, die (5.3.24) und (5.3.25) erfüllt, wird *Cornu-Spirale*⁷ genannt und wird durch die einfache Gleichung

$$K = X \quad (5.3.27)$$

definiert. Sie ist in Abb. 5.12a gezeigt.⁸ Ihre Krümmung wächst linear mit dem entlang der Kurve gemessenen Abstand vom Ursprung an. Um das Beugungsmuster des Spalts zu berechnen, nehmen wir eine

⁷Marie Alfred Cornu (1841 - 1902), Professor an der École Polytechnique in Paris. Er fand als erster eine elegante geometrische Darstellung der Fresnelschen Integrale.

⁸Bei der Cornu-Spirale ist die x -Achse durch $\int_0^X \cos(t^2/2) dt$ und die y -Achse durch $\int_0^X \sin(t^2/2) dt$ gegeben.

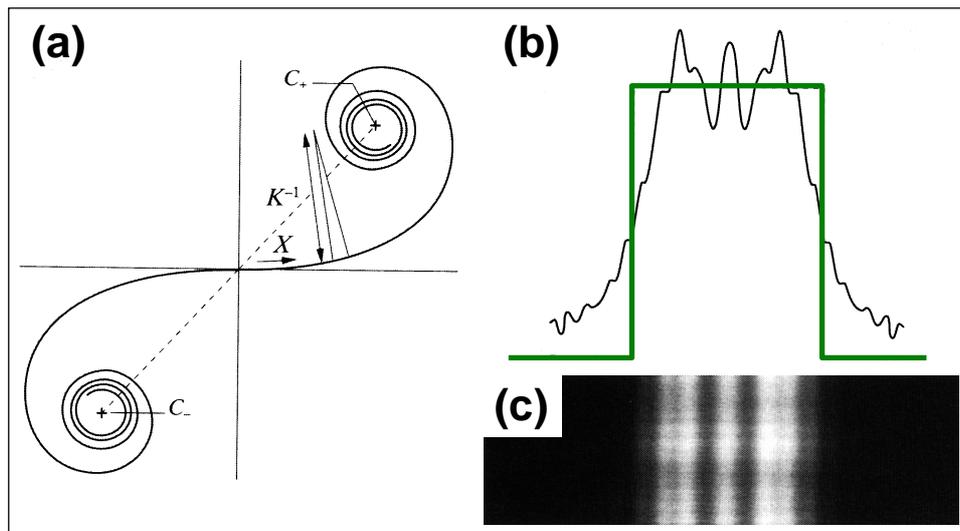


Abbildung 5.12: (a) Die Cornu-Spirale. (b) Amplitude des Fresnel'schen Beugungsmusters, berechnet für eine Schlitzblende der Breite 0.9 mm mit den Parametern $L = 20 \text{ cm}$, $L_1 = 28 \text{ cm}$ und $\lambda = 600 \text{ nm}$. Die dicke Linie stellt den geometrischen Schatten dar. (c) Photographie des Beugungsmusters.

Anzahl von Werten von X_1 und X_2 , so dass $(X_1 - X_2)/\beta$ der Breite des Spaltes entspricht, und messen die vektorielle Länge zwischen den entsprechenden Punkten X_1 und X_2 auf der Spirale. Dies ergibt die Amplitude und Phase von Ψ im Punkt P , der $x = 0$ gegenüberliegt.

Wir werden sehen, dass die Beugungsmuster eine feine Strukturierung zeigen, wenn sowohl X_1 als auch X_2 in den "Hörnern" der Spirale liegen, d.h. wenn $(X_1 - X_2)$ ungefähr 10 oder größer ist. Als Beispiel zeigt Abb. 5.12b ein für $(X_1 - X_2) = 8.5$ berechnetes Beugungsmuster. Verwendet man Licht der Wellenlänge 600 nm ergibt sich aus (5.3.25) $(x_1 - x_2)^2/L \simeq 7 \mu\text{m}$, was einem Spalt der Breite 2.7 mm in einer Entfernung von 1 m entspricht.

Wir müssen jetzt auch das y -Integral in (5.3.23) betrachten. Für dieses Integral ergibt die Cornu-Spirale den Vektor $C_+C_- = (2\pi iL/k_0)^{1/2}$, der einen Winkel von 45° zur reellen Achse im Diagramm hat. Diese Phase ist natürlich nicht zu beobachten. Es ist aber befriedigend, bestätigt zu finden, dass das Beugungsmuster einer unendlichen ausgedehnten Blendenöffnung, für die die Integrationsbereiche sowohl in x als auch in y -Richtung nicht begrenzt sind, die Form

$$\Psi_P = \frac{k_0 A}{2\pi i L} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{ik_0}{2L}x^2\right] dx \int_{-\infty}^{\infty} h(y) \exp\left[\frac{ik_0}{2L}y^2\right] dy = A \quad (5.3.28)$$

besitzt, was man von einer ungestörten Welle erwarten würde (A enthält hierbei bereits den Phasenfaktor $\exp[ik_0(L + L_1)]$).

Beugung an der Kante

Abb. 5.13a zeigt, dass für große Werte von X die Cornu-Spirale fast kreisförmig wird und zwar mit einem Radius $|X|^{-1}$, der bei der Annäherung an die Grenzen C_+ und C_- sehr langsam gegen null konvergiert. Das Beugungsbild einer geraden Kante, die im Prinzip einer Blendenöffnung entspricht, die von einem bestimmten Wert von X nach unendlich ausgedehnt ist, ist in Abb. 5.13b gezeigt. Dabei verbindet der

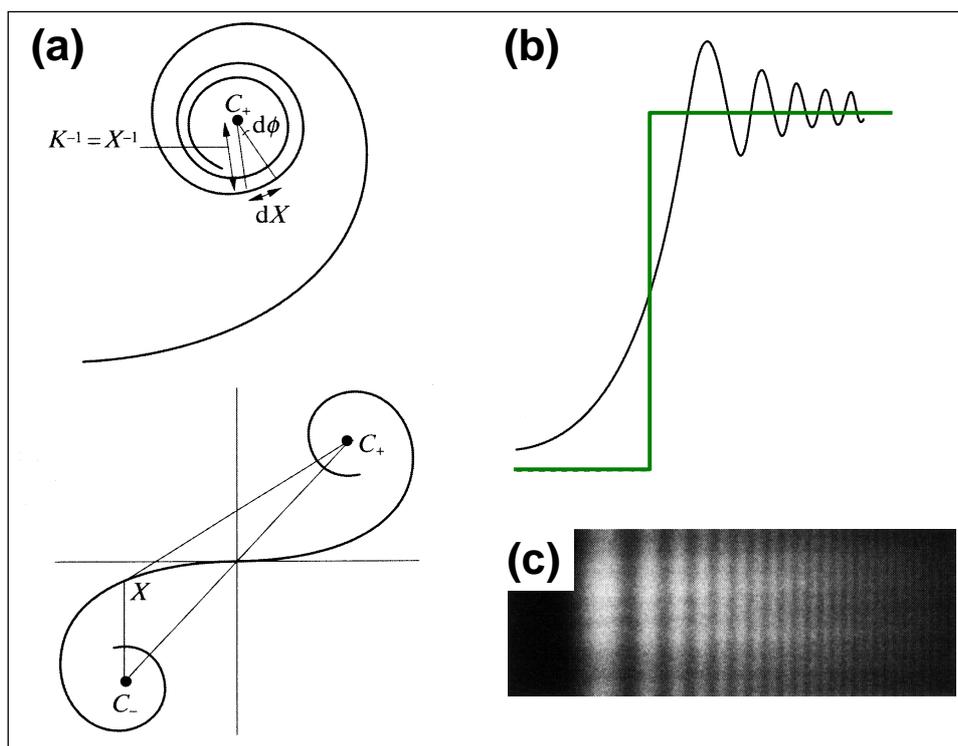


Abbildung 5.13: (a) Konstruktion der Cornu-Spirale für die Kantenwelle in der Schattenregion (oben) und in der beleuchteten Region (unten). (b) Intensität des Fresnel’schen Beugungsmusters, die dicke Linie stellt den geometrischen Schatten dar. (c) Photographie des Beugungsmusters.

Vektor, der $\Psi(x)$ darstellt, den Punkt X mit C_+ . Ist X positiv, so dass $X = 0$ im geometrischen Schatten liegt, dreht der Vektor einfach um C_+ , wird aber dabei kontinuierlich kürzer und die Phase wächst monoton an, wenn $X \rightarrow \infty$ (siehe Abb. 5.13a):

$$\frac{d\phi}{dX} = K = X . \tag{5.3.29}$$

Dies ist mit einer von einer Linienquelle ausgesandten Lichtquelle identisch, da die Phasenbeziehung für eine solche Welle durch

$$\Psi_P = \exp \left[ik_0(x^2 + L^2)^{1/2} \right] = \exp[i\phi(x)] \tag{5.3.30}$$

gegeben ist. Nach der Entwicklung des Exponenten für $x \ll L$ erhält man

$$\frac{d\phi}{dx} \simeq \frac{k_0 x}{L} \quad \text{oder} \quad \frac{d\phi}{dX} \simeq X . \tag{5.3.31}$$

Die Amplitude von Ψ ist dabei fast unabhängig von X . Da deshalb die Amplituden- und Phasenvariationen im Schattenbereich praktisch mit denen einer Lichtquelle identisch sind, erscheint die Kante als

helle Linie. Dies ist als die Konstruktion einer *Kantenwelle* bekannt. Bis weit in den hellen Bereich des Beugungsmusters kann eine analoge Analyse verwendet werden. Das Erscheinungsbild ist das einer gleichmäßigen Beleuchtung (C_+C_-) und wiederum einer hellen Kante. Interferenz zwischen diesen beiden Wellen, der ebenen und der divergierenden, zylindersymmetrischen Kantenwelle führt zu hellen und dunklen Bändern, deren Abstand und Kontrast abnimmt, wenn $X \rightarrow \infty$.

5.4 Fraunhofer-Beugung

Wir haben in Abschnitt 5.2.3 bereits den Unterschied zwischen *Fresnel*- und *Fraunhofer-Beugung* besprochen. Dabei haben wir gezeigt, dass die Fraunhofer-Beugung durch eine *lineare Veränderung der Phase* während des Beugungsvorganges an einem Hindernis charakterisiert ist. In der Praxis kann man allerdings solche linearen Phasenänderungen nur unter bestimmten Voraussetzungen erreichen, wie z.B. durch die Beleuchtung des Objekts mit parallelem Licht. Aus diesem Grund muss man sowohl für die Erzeugung als auch für die Beobachtung der resultierenden Beugungsmuster Linsen verwenden. Dies ist gleichwertig zu der Aussage, dass *die Fraunhofer-Beugung einen Grenzfall der Fresnel'schen Beugung darstellt, bei dem sowohl Lichtquelle als auch Beobachter unendlich weit vom Beugungsobjekt entfernt sind.*

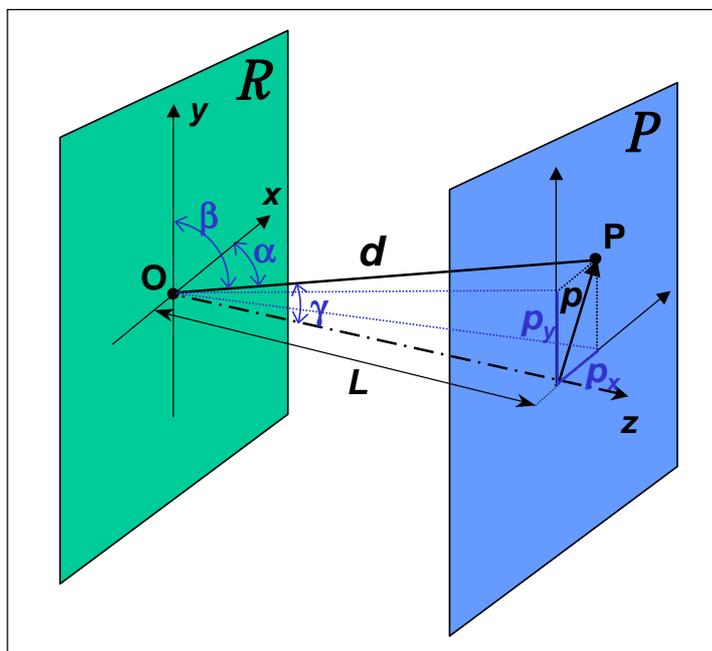


Abbildung 5.14: Zur Definition der Winkel und Richtungen bei der Fraunhofer-Beugung. Der Abstand der Beugungsebene \mathcal{R} (Koordinaten $\mathbf{r} = (x, y)$) und der Beobachtungsebene \mathcal{P} (Koordinaten $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$) beträgt L . Der Abstand zwischen dem Ursprung der Beugungsebene und dem Beobachtungspunkt P beträgt d .

Wir haben bereits in (5.2.17) gezeigt, dass der optische Weg von einer Punktquelle Q auf der optischen Achse zum Punkt P in der Beobachtungsebene \mathcal{P} durch einen beliebigen Punkt S in der Ebene \mathcal{R} des Beugungsobjekts (vergleiche hierzu Abb. 5.6 und Abb. 5.14) sich als

$$\overline{QSP} = (d_1 + d) \simeq (L + L_1) + \frac{r^2}{2}(L^{-1} + L_1^{-1}) + \frac{p^2}{2L} - \frac{1}{L}\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + \dots \tag{5.4.1}$$

schreiben lässt. Hierbei befinden sich S am Ort $\mathbf{r} = (x, y)$ und P am Ort $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ in ihren jeweiligen Ebenen \mathcal{R} und \mathcal{P} , die Koordinatenursprünge liegen jeweils auf der optischen Achse. Wir können nun P durch die Richtungskosinus $(l, m, n) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ der Strecke \overline{OP} definieren, die den Ursprung in der Objektebene mit P verbindet.⁹ Für den Fall, dass $p \ll L$, können wir wegen $\cos \alpha = p_x/d$ und

⁹Die Richtung der Strecke \overline{OP} wird durch einen Einheitsvektor festgelegt, dessen Koordinaten die Kosinus der Winkel sind, die von der gegebenen Richtung und den positiven Richtungen der Koordinatenachsen gebildet werden, Man spricht von den Richtungskosinus.

$\cos \beta = p_y/d$ mit der Näherung $d \simeq L$ die Ortskoordinate \mathbf{p} des Beobachtungspunkts P als $\mathbf{p} = (Ll, Lm)$ schreiben: Damit folgt

$$\begin{aligned} \overline{QSP} &\simeq (L + L_1) + \frac{r^2}{2}(L^{-1} + L_1^{-1}) + \frac{1}{2}L(l^2 + m^2) - xl - ym \\ &\simeq L + L_1 - xl - ym + \dots \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

folgt. Alle Terme zweiter und höherer Ordnung haben wir dabei vernachlässigt. Es ist diese *lineare Abhängigkeit* von x und y , auf der die enorme Bedeutung der Fraunhofer'schen Beugung beruht.

Wie wir bereits in Abschnitt 5.2.4 betont haben, können die experimentellen Bedingungen leicht so vorgegeben werden, dass man die Terme zweiter und höherer Ordnung vernachlässigen kann. Eine Möglichkeit hierfür ist, einfach L und L_1 sehr groß zu machen, d.h. die beleuchtende Lichtquelle und der Beobachtungspunkt liegen sehr weit vom beugenden Objekt entfernt. In der Praxis würde aber die Beobachtung im Unendlichen zu einer sehr kleinen Lichtintensität und unhandlichen Ausdehnungen der Experimente führen. Deshalb benutzt man zur Beobachtung der Beugungsfigur hinter dem beugenden Objekt eine Sammellinse der Brennweite f und beobachtet in der Brennebene der Linse (siehe Abb. 5.15). Dadurch geht $L \rightarrow \infty$. Gebeugte Lichtbündel mit einem speziellen Paar von Richtungskosinussen (l, m) werden dann in der Brennebene auf den Punkt $(X, Y) = (lf, mf)$ abgebildet. Dabei werden paraxiale Strahlen angenommen. Bei der Beleuchtung der Blendenöffnung wird sinnvollerweise ebenfalls eine Linse L' eingesetzt. Dadurch wird $L_1 \rightarrow \infty$. Für Demonstrationszwecke benutzt man heute aber meist einen Laser zur Beleuchtung, der praktisch paralleles Licht und große Lichtintensität liefert. Man kann dann auch noch in großem Beobachtungsabstand genügend hohe Intensitäten beobachten und somit auch meist auf die Beobachtungslinse verzichten.

Die in Abb. 5.15 gezeigte Anordnung stellt praktisch ein *optisches Diffraktometer* dar. Man kann durch Einbringen unterschiedlicher Beugungsobjekte in der Ebene \mathcal{R} in der Brennebene der Linse L die dazugehörige Beugungsfigur beobachten. Solche Systeme wurden zuerst als analoge Computer zur Lösung von Problemen der Röntgenbeugung entwickelt, die meistens Fraunhofer-Beugung beinhalten.

5.4.1 Fraunhofer-Beugung und Fourier-Transformation

Wir betrachten die in Abb. 5.16 gezeigte Anordnung. Das einfallende Licht ist hier eine ebene Welle parallel zur optischen Achse (Ausbreitung entlang der z -Achse, senkrechter Lichteinfall¹⁰) und die Beobachtung findet in der Brennebene der zweiten Linse statt. Das Beugungsobjekt befindet sich an der Stelle $z = 0$ und besitzt die *Amplitudentransmissionsfunktion* $f(x, y)$. Das gebeugte Licht wird von einer Linse der Brennweite f gesammelt, die sich in der Ebene $z = U$ befindet. Alle Lichtwellen, die das Beugungsobjekt unter demselben Winkel verlassen, werden von der Linse in einen Punkt der Brennebene fokussiert. In der Abbildung sind z.B. XB , OA und YC parallel und werden alle in P abgebildet. Die Amplitude des Lichts in P ist deshalb die Summe der Amplituden an den Punkten X , O und Y usw., jeweils mit dem passenden Phasenfaktor $\exp(ik_0 \overline{XBP})$ usw.. Hierbei steht \overline{XBP} für den optischen Weg von X nach P über B , wobei der Weg durch die Linse mit einbezogen ist.

Nun ist die Amplitude am Punkt $X = (x, y)$ in der Ebene $z = 0$ einfach die Amplitude der einfallenden Welle (diese setzen wir der Einfachheit halber gleich eins) multipliziert mit der Transmissionsfunktion $f(x, y)$. Um den optischen Weg \overline{XBP} zu berechnen, verwenden wir das Fermat'sche Prinzip, das besagt,

¹⁰Wir werden im Folgenden nur den Fall senkrechten Lichteinfalls diskutieren, für den Fall schrägen Lichteinfalls kann die geführte Diskussion relativ leicht angepasst werden, was hier aber nicht diskutiert werden soll.

Joseph von Fraunhofer (1786 1826):

Fraunhofers Lebenslauf ließ zu Beginn keinen außergewöhnlichen Erfolg erwarten. Geboren im Jahr 1787, hatte er schon im Alter von zwölf Jahren beide Eltern verloren. Für den ursprünglich vorgesehene Beruf des Drechslers war er körperlich zu schwach; so trat er - wie sein Vater - eine Lehre als Glaser an. Sein Lehrherr Philipp Anton Weichselgartner erlaubte jedoch nicht, dass der wissbegierige junge Fraunhofer die Feiertagsschule besuchte und Bücher las.

Erst ein Schicksalsschlag brachte die Wendung. Als Weichselgartners Haus 1801 einstürzte, konnte Fraunhofer nach einigen Stunden unverletzt geborgen werden. Dabei kam er in Kontakt mit Kurfürst Max IV. Joseph und mit dem Unternehmer Joseph von Utzschneider. Auf diese Weise in der Öffentlichkeit bekannt geworden, wuchsen Fraunhofers

Möglichkeiten der persönlichen Entwicklung beträchtlich. Fortan durfte er die Schule besuchen, erhielt Unterricht in der Kunst des Linsenschleifens und wurde schließlich als Optiker an die Werkstatt des renommierten Erfinders und Konstrukteurs Georg von Reichenbach empfohlen, an der Utzschneider beteiligt war. Fraunhofers Begabung und Zielstrebigkeit wurden bald offenkundig. So beriefen ihn Reichenbach und Utzschneider bereits im Alter von 22 Jahren zum verantwortlichen Leiter der zum Betrieb gehörenden Glashütte in Benediktbeuern. Die Entwicklung neuer Glassorten, entscheidende Verbesserungen bei der Glasherstellung und die Perfektionierung des optischen Instrumentenbaus führten zu eindrucksvollen Ergebnissen. Fraunhofer setzte standardisierte Herstellungsmethoden durch, erweiterte die Produktpalette der Werkstatt erheblich und vergrößerte damit auch deren wirtschaftlichen Erfolg. Der Betrieb stellte nun Fernrohre, Ferngläser, Mikroskope, Lupen und astronomische Fernrohre in einer bis dato unerreichten Qualität her. Fraunhofers Instrumente wurden in ganz Europa vertrieben und eingesetzt.

Nicht zuletzt für die eigene wissenschaftliche Arbeit erwiesen sich die von Fraunhofer selbst entwickelten Instrumente als unentbehrliche Voraussetzung. Sein Spektrometer

erlaubte ihm die genaue Untersuchung des Sonnenlichts und anderer Lichtquellen; selbstgefertigte optische Gitter machten es möglich, das Phänomen der Lichtbeugung zu untersuchen und in seiner Auswirkung auf den Bau optischer Instrumente zu beschreiben.

Die konkurrenzlos guten Instrumente und seine wissenschaftlichen Leistungen brachten Fraunhofer national und international großen Ruhm und viele Ehrungen ein. Bedeutende Wissenschaftler und Politiker der damaligen Zeit besuchten ihn an seiner Wirkungsstätte. Dazu gehörten z. B. der Physiker Carl Friedrich Gauß, der bayerische König Max I. Joseph und wahrscheinlich auch der russische Zar, Alexander I.

Sein wissenschaftliches Renommee führte dazu, dass Fraunhofer gegen den anfänglichen Widerstand etablierter Forscher als Vollmitglied in die Akademie der Wissenschaften aufgenommen wurde. Der bayerische König ernannte ihn schließlich zum Ritter des Civilverdienstordens und erhob ihn damit in den Adelsstand. Joseph von Fraunhofer starb 1826, im Alter von 39 Jahren, an Lungentuberkulose.



dass alle optischen Wege von verschiedenen Punkten auf einer Wellenfront zu dem Brennpunkt gleich sind. Die Richtungen von XB , OA , ... wird durch die Richtungskosinusse (l, m, n) gegeben. Damit ist die dazu senkrechte Wellenfront durch O , die in P fokussiert wird, die Ebene

$$lx + my + nz = 0. \quad (5.4.3)$$

Die optischen Wege von dieser Wellenfront nach P , d.h. \overline{OAP} und \overline{ZBP} , sind gleich. Nun ist ZX die Projektion von OX auf den Strahl XB , was durch die Komponente des Vektors $(x, y, 0)$ in der Richtung (l, m, n) ausgedrückt werden kann:

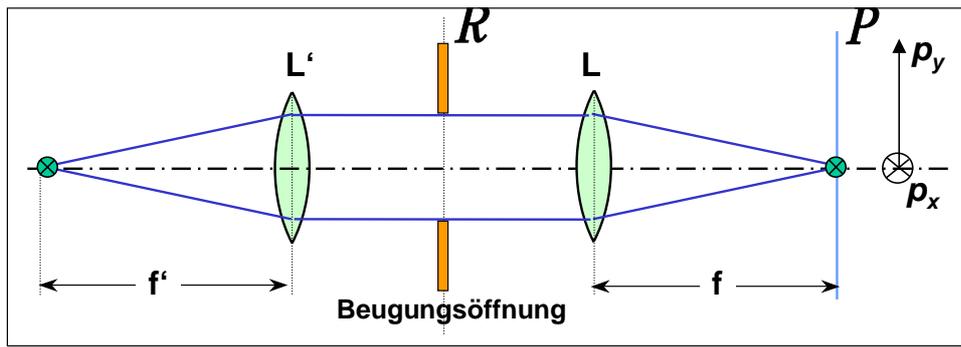


Abbildung 5.15: Anordnung zur Beobachtung der Fraunhofer'schen Beugung: Man beobachtet in der Brennebene der Linse L , während sich die Beleuchtungsquelle in der Brennebene von L' befindet.

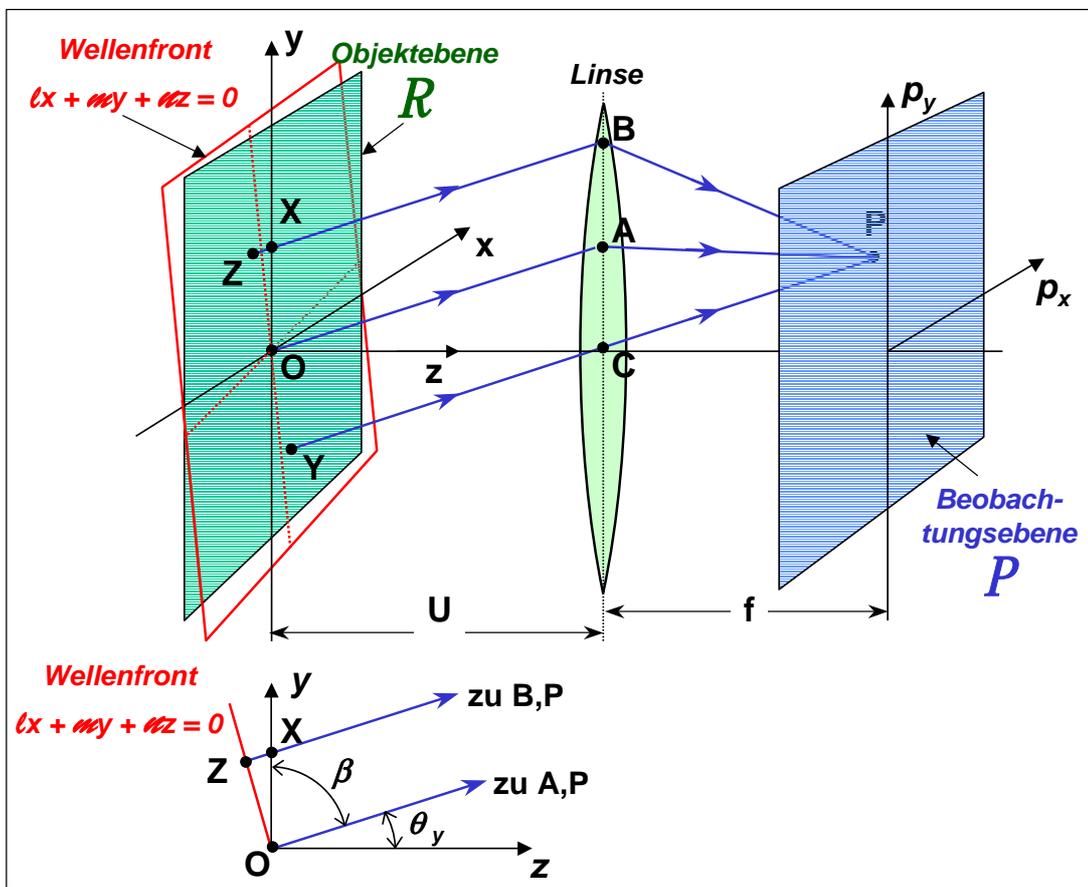


Abbildung 5.16: Zur Definition der Größen bei der Fraunhofer-Beugung an einem zweidimensionalen Objekt

$$ZX = lx + my \quad (5.4.4)$$

Daraus folgt

$$\overline{XBP} = \overline{OAP} - lx - my \quad (5.4.5)$$

Die Gesamtamplitude in P kann durch Integration von $f(x,y)\exp(ik_0\overline{XBP})$ über das Beugungsobjekt berechnet werden:

$$\Psi_P = \exp(ik_0\overline{OAP}) \iint f(x,y) \exp[-ik_0(lx + my)] dx dy . \quad (5.4.6)$$

Wir können $u \equiv lk_0$ und $v \equiv mk_0$ dazu verwenden, die Position von P zu beschreiben, und erhalten

$$\Psi(u,v) = \exp(ik_0\overline{OAP}) \iint f(x,y) \exp[-i(ux + vy)] dx dy . \quad (5.4.7)$$

Wir erhalten somit folgendes wichtige Ergebnis:

Das Beugungsmuster der Fraunhofer-Beugung ist durch die zweidimensionale Fourier-Transformierte der Transmissionsfunktion $f(x,y)$ des Beugungsobjekts gegeben.

Eine ausführliche Diskussion der Fourier-Transformation wird in Anhang B gegeben.

Die Koordinaten (u,v) können auch mit den Beugungswinkeln $\theta_x = 90^\circ - \alpha$ und $\theta_y = 90^\circ - \beta$ zwischen dem Vektor (l,m,n) und den vertikalen bzw. horizontalen Ebenen, die die Koordinatenachsen enthalten (zy - bzw. zx -Ebene), verknüpft werden. Es ist $l = \cos \alpha = \sin \theta_x$ und $m = \cos \beta = \sin \theta_y$ und es gilt damit

$$u = k_0 \sin \theta_x, \quad v = k_0 \sin \theta_y . \quad (5.4.8)$$

Die Koordinaten (p_x, p_y) von P können mit (u,v) verbunden werden, wenn die Details der Linse bekannt sind. Im Rahmen der Gauß'schen Näherung gilt $n \simeq 1$ und damit

$$p_x = fl/n \simeq uf/k_0 \quad p_y = fm/n \simeq vf/k_0 . \quad (5.4.9)$$

Beobachten wir ein Beugungsmuster oder photographieren wir es, messen wir die Intensität $|\Psi(u,v)|^2$. Der genaue Wert von \overline{OAP} , d.h. der Phasenfaktor, ist deshalb unwesentlich. Obwohl es einige Experimente gibt, bei denen der Phasenfaktor wichtig ist (siehe nächster Abschnitt), ist es üblich, diesen zu vernachlässigen und anstelle von (5.4.7) zu schreiben:

$$\Psi(u,v) = \iint f(x,y) \exp[-i(ux + vy)] dx dy . \quad (5.4.10)$$

Fraunhofer-Beugungsmuster – Phaseninformation

Die Intensität des Beugungsmusters ist insoweit unabhängig von der Position des Beugungsobjekts relativ zur Linse, als dass die Entfernung OC nur den Phasenfaktor \overline{OAP} beeinflusst. Für einige Anwendungen ist es dagegen von Bedeutung, auch die Phase des Beugungsmusters zu kennen, z.B. wenn die gebeugte Welle mit einer phasenkohärenten Welle überlagert werden soll. Dies ist zum Beispiel bei der *Holographie* der Fall.

Der Phasenfaktor $\exp(\overline{OAP})$ ist vollkommen unabhängig von $f(x,y)$, da er durch die Geometrie des optischen Systems bestimmt wird. Er ist für den Spezialfall, für den $f(x,y) = \delta(x)\delta(y)$ gilt, besonders leicht zu berechnen. Diese Funktion stellt eine punktförmige Lochblende in der Beugungsmaske an der Stelle O dar. Mit Hilfe von (5.4.7) lässt sich das Beugungsmuster zu

$$\begin{aligned}\Psi(u,v) &= \exp(ik_0\overline{OAP}) \int \delta(x) \exp(-iux) dx \int \delta(y) \exp(-ivy) dy \\ &= \exp(ik_0\overline{OAP}) .\end{aligned}\quad (5.4.11)$$

Die eigentliche Aufgabe der Linse in dem betrachteten System ist es, das Licht, das durch die Lochblende fällt, zu bündeln. Der Spezialfall, bei dem die Blende in der vorderen Brennebene der Linse ($OC = f$) liegt, ist hierbei von besonderem Interesse. Dann wird die Welle, die die Linse verlässt, eine ebene Welle sein

$$\Psi(u,v) = \exp(ik_0\overline{OAP}) = \text{const} . \quad (5.4.12)$$

Aus diesem Grund stellt das Fraunhofer'sche Beugungsmuster die vollständige, komplexe Fouriertransformierte von $f(x,y)$ dar, wenn sich das Beugungsobjekt in der vorderen Brennebene der Linse befindet. Für alle anderen Positionen des Beugungsobjekts ist zwar die Intensität des Musters diejenige der Fouriertransformierten, nicht aber die Phase.

5.4.2 Beugung am Spalt

Wir betrachten jetzt einen Spalt der Breite b , der durch die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leq b/2 \\ 0 & \text{für } |x| > b/2 \end{cases} \quad (5.4.13)$$

charakterisiert ist und in y -Richtung unendlich ausgedehnt ist. Die Funktion $f(x,y)$ lässt sich sehr leicht in ein Produkt von Funktionen von x und y zerlegen, wobei letztere eine konstante ist, die den Wert 1 besitzt. Wir erhalten somit für die *Beugung am langen Spalt*

$$\begin{aligned}\Psi(u, v) &= \int_{-b/2}^{b/2} \exp(-iux) dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ivy) dy \\ &= b \frac{\sin(bu/2)}{bu/2} \delta(v) .\end{aligned}\quad (5.4.14)$$

Hierbei haben wir die bekannten Ausdrücke für die Integrale benutzt, die in jedem Mathematik-Handbuch gefunden werden können. Das erste Integral stellt dabei die Fouriertransformierte der Rechteckfunktion dar, die in Abb. 5.17 gezeigt ist. Das zweite Integral stellt die Fourier-Transformierte der Eins-Funktion dar, welche die Delta-Funktion ergibt.¹¹ Die Intensität des Fraunhofer'schen Beugungsmusters entlang der Achse $v = 0$ beträgt

$$I(u, 0) = |\Psi(u, 0)|^2 = b^2 \left(\frac{\sin(bu/2)}{bu/2} \right)^2 \quad (5.4.15)$$

Der Verlauf der Intensität folgt also der wohlbekannteren Funktion $(\sin x/x)^2$, die in Abb. 5.17 gezeigt ist. Man beobachtet im Zentrum ($u = 0$) das intensivste Maximum. Danach folgt zu beiden Seiten hin eine Abfolge von Maxima und Minima, deren Intensität sehr schnell abklingt. Der physikalische Grund für diese Intensitätsminima liegt darin begründet, dass gebeugtes Licht von verschiedenen Bereichen des Spaltes gerade destruktiv interferiert.

Die Nullstellen der Funktion $I(u, 0)$ liegen bei den Nullstellen von $\sin(bu/2)$ mit $u \neq 0$. Mit $u = k_0 \sin \theta_x = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta_x$ erhält man somit für die Lage der Minima bei der Beugung am Spalt

$$\begin{aligned}\sin \frac{bu}{2} &= \sin \left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta_x^{\min} \right) = 0 \\ \sin \theta_x^{\min} &= \pm \frac{n\lambda}{b} \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots .\end{aligned}\quad (5.4.16)$$

Es ist bemerkenswert, dass sich die Lage benachbarter Minima gerade um λ/b unterscheiden. Lediglich die Minima links und rechts vom zentralen Maximum sind doppelt so weit, also $2\lambda/b$ voneinander entfernt. Die volle Halbwertsbreite des Hauptmaximums erhält man zu etwa $0.9\lambda/b$. Bei sehr kleinen Spaltbreiten $b < \lambda$ treten keine Minima mehr auf, der Spalt dient dann als Linienquelle, da die Spaltbreite so klein ist, dass keine Bereiche mehr existieren, die destruktiv miteinander interferieren können.

Nebenmaxima der gebeugten Intensität treten immer dann auf, wenn $\tan(bu/2) = bu/2$. Die Lage der Maxima der gebeugten Intensität bei der Beugung am Spalt ist somit

$$\begin{aligned}\sin \theta_x^{\max} &= \pm 1.43 \frac{\lambda}{b}, \pm 2.46 \frac{\lambda}{b}, \dots \\ \frac{I(\theta_x^{\max})}{I(0)} &= 0.047, 0.017, \dots .\end{aligned}\quad (5.4.17)$$

Für höhere Ordnungen lässt sich die Lage der Nebenmaxima einfach angeben, man erhält $\sin \theta_x^{\max, n} = \pm \frac{2n+1}{2} \frac{\lambda}{b}$.

¹¹Die Strahlen werden in v -Richtung durch den unendlich langen Spalt nicht gebeugt. Die parallelen Strahlen werden durch die Linse alle auf die optische Achse ($v = 0$) fokussiert.

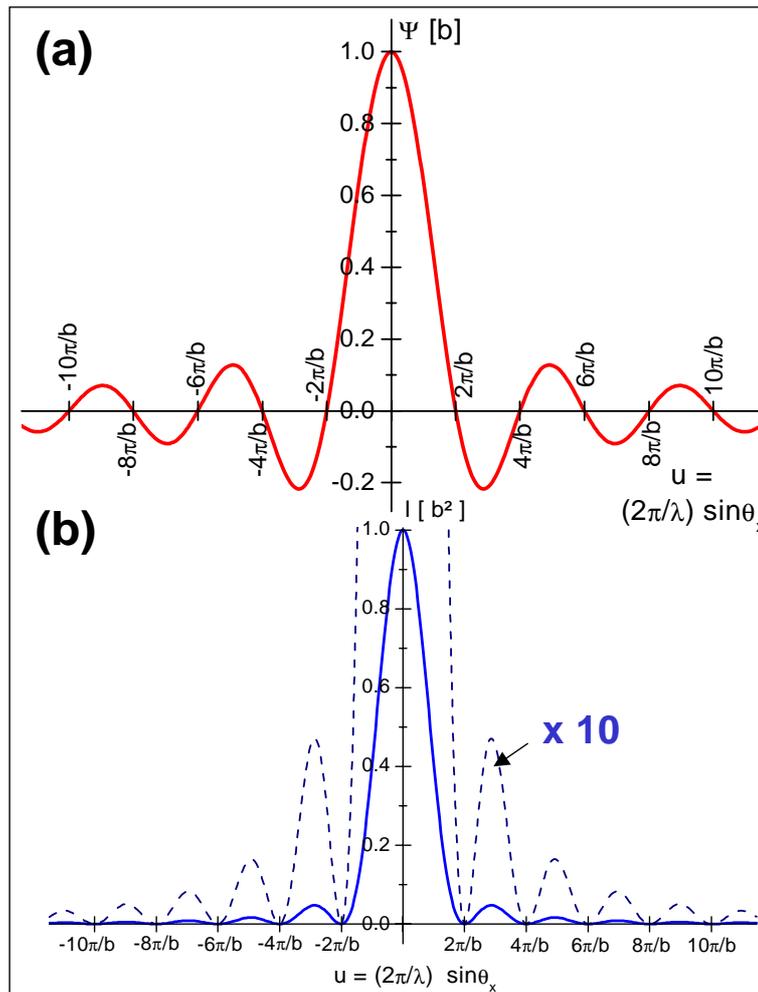


Abbildung 5.17: (a) Darstellung der Funktion $\sin(bu/2)/(bu/2)$ und (b) des Intensitätsverlaufs bei der Beugung an einem langen Spalt der Breite b .

5.4.3 Vertiefungsthema: Beugung am unscharfem Spalt

Wir nehmen nun an, dass die Transmissionsfunktion über die gesamte Spaltbreite nicht gleich eins ist, sondern an den Rändern des Spalts kontinuierlich auf null absinkt. Wir haben also einen Spalt der Breite b , aber mit "unscharfen" Rändern. Modellieren wir die Transmissionsfunktion mit einer Dreiecksfunktion

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 - |x|/b & \text{für } |x| \leq b \\ 0 & \text{für } |x| > b \end{cases}, \quad (5.4.18)$$

so erhalten wir einen Spalt mit einer effektiven Breite $\int f(x)dx/f_{\max} = b$, die gleich der Spaltbreite des scharfen Spalts aus dem vorangegangenen Abschnitt entspricht. Durch partielle Integration erhalten wir

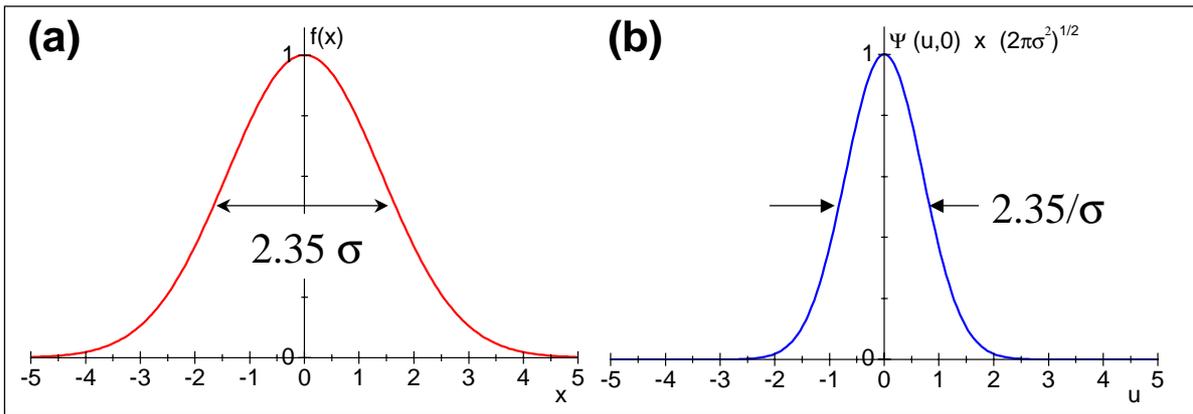


Abbildung 5.18: Gauß-Funktion (a) und ihre Fourier-Transformierte (b).

$$\begin{aligned}
 \Psi(u, v) &= \left[\frac{1}{b} \int_0^b (b-x) \exp(-iux) dx + \frac{1}{b} \int_{-b}^0 (b+x) \exp(-iux) dx \right] \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ivy) dy \\
 &= b \left(\frac{\sin(bu/2)}{bu/2} \right)^2 \delta(v) . \tag{5.4.19}
 \end{aligned}$$

Die Form von $\Psi(u,0)$ ist die gleiche wie die in Abb. 5.17b gezeigte Abhängigkeit. Die Funktion ist überall positiv und hat Nullstellen bei

$$\sin \theta_x^{\min} = \pm \frac{n\lambda}{b} \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots \tag{5.4.20}$$

Die Positionen dieser Nullstellen sind exakt die gleichen wie beim scharfen Spalt. Da die effektiven Breiten gleich angenommen wurden, ist dies nicht überraschend. Allerdings sind die Nebenmaxima deutlich reduziert. Ihre Intensitäten sind nun proportional zu $(2n + 1)^{-4}$.

Eine weitere Glättung führt zu einer weiteren Unterdrückung der Seitenbänder. Eine besonders glatte Kurve ist die *Gauß-Funktion* $f(x) = \exp(-x^2/2\sigma^2)$, für die man

$$\begin{aligned}
 \Psi(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2/2\sigma^2) \exp(-iux) dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ivy) dy \\
 &= \sqrt{2\pi\sigma^2} \exp \left[-u^2 \left(\frac{\sigma^2}{2} \right) \right] \delta(v) \tag{5.4.21}
 \end{aligned}$$

erhält. Da die Fourier-Transformierte der Gauß-Funktion wiederum eine Gauß-Funktion ist, besitzt die Funktion $\Psi(u,0)$ keinerlei Seitenbänder.

Die volle Breite der Gauss-Kurve bei halbem Maximalwert (FWHM: Full Width at Half Maximum) erhält man zu

$$\text{FWHM} = 2 \cdot \sqrt{2 \ln 2} \sigma = \sqrt{8 \ln 2} \sigma = 2.35 \sigma \tag{5.4.22}$$

Entsprechend ergibt sich für die Fourier-Transformierte $\text{FWHM} = 2.35 \cdot \sigma$.

5.4.4 Beugung an phasenschiebendem Objekt

Wir betrachten nun ein Objekt, das Licht nicht absorbiert und dadurch die Amplitude des Lichts konstant lässt, aber bei der Transmission seine Phase beeinflusst. Jedes Fensterglas wird sich z.B. so verhalten: es ist durchsichtig, aber seine Dicke ist nicht konstant, wodurch Licht, das an unterschiedlichen Stellen das Glas durchläuft, unterschiedliche Phasenschiebungen erfährt. Ist der Brechungsindex des Glases n , so ist der Unterschied in der Länge des optischen Weges zwischen zwei Wegen mit den Glasdicken d_1 und d_2 gerade $(n-1)(d_1-d_2)$. Dadurch ist eine ebene Wellenfront, die auf der einen Seite des Glases einläuft, auf der anderen Seite des Glases keine ebene Welle mehr. Da wir Wellen verschiedener Phase aber gleicher Amplitude durch komplexe Amplituden mit gleichem Vorfaktor darstellen können, können wir dieses *Phasenobjekt* durch eine komplexe Transmissionsfunktion $f(x,y)$ mit konstantem Vorfaktor darstellen. Betrachten wir z.B. ein dünnes Prisma mit einer Dicke $d = \alpha x$ an der Stelle x , so erhalten wir:

$$f(x,y) = \exp[ik_0(n-1)d] = \exp[ik_0(n-1)\alpha x] \quad (5.4.23)$$

Nehmen wir ferner an, dass das Prisma in x - und y -Richtung unendlich ausgedehnt ist, so hat das zu $f(x,y)$ gehörige Beugungsmuster die Form

$$\begin{aligned} \Psi(u,v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ik_0(n-1)\alpha x] \exp(-iux) dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ivy) dy \\ &= \delta[u - (n-1)k_0\alpha] \delta(v) . \end{aligned} \quad (5.4.24)$$

Die gebeugte Welle breitet sich daher in eine Richtung aus, die durch

$$\boxed{u = k_0(n-1)\alpha, \quad v = 0} \quad (5.4.25)$$

gegeben ist. Setzt man $u = k_0 \sin \theta_x$ in diese Gleichung ein, erhält man $\theta_x = (n-1)\alpha$ für kleine θ_x . Das Licht bleibt daher in eine Ausbreitungsrichtung konzentriert, wird aber von der Einfallrichtung um einen konstanten Winkel abgelenkt, wie wir es mit Hilfe der geometrischen Optik bereits hergeleitet haben.

5.4.5 Beugung an einer Rechteckblende

Wir verwenden nun einen Spalt mit endlicher Breite b und Höhe h in y -Richtung. Die Kanten des Spalts sollen parallel zur x - und y -Richtung sein. Die beiden Beugungsintegrale haben damit unabhängige Integrationsgrenzen und (5.4.10) kann als

$$\Psi(u,v) = \int_{-b/2}^{b/2} \exp(-iux) dx \int_{-h/2}^{h/2} \exp(-ivy) dy . \quad (5.4.26)$$

geschrieben werden. Hierbei haben wir angenommen, dass die Transmissionsfunktion $f(x,y)$ über die gesamte Blende gleich eins ist. Da wir den Ursprung in das Zentrum der Blende gelegt haben, erhalten wir eine gerade Funktion, die eine reelle Fourier-Transformierte besitzt. Wir erhalten

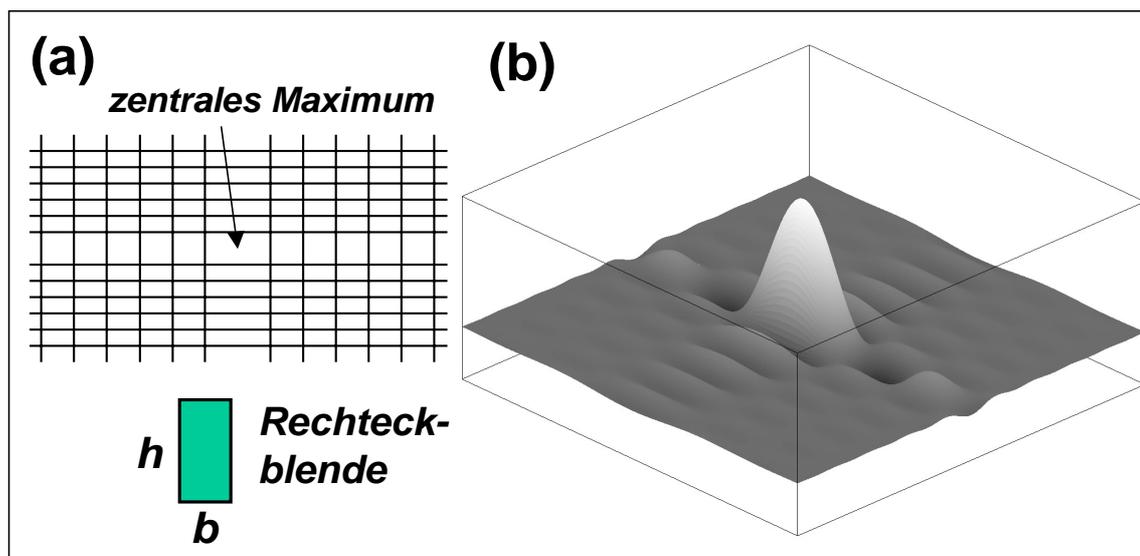


Abbildung 5.19: (a) Linien verschwindender Intensität im Beugungsmuster der gezeigten Rechteckblende, (b) berechnete Beugungsamplitude für eine Rechteckblende mit $h = 3b$.

$$\Psi(u, v) = b h \frac{\sin(bu/2)}{bu/2} \frac{\sin(hv/2)}{hv/2}, \quad (5.4.27)$$

wobei jeder Faktor auf die gleiche Weise abgeleitet wurde wie beim unendlich ausgedehnten Spalt. Das Beugungsmuster hat Nullstellen an den Orten, an denen ub und vh von null verschiedene, ganzzahlige Vielfache von 2π sind. Sie liegen also auf Geraden parallel zu den Kanten der Blende und sind durch

$$\begin{aligned} \sin \theta_x^{\min} &= \pm \frac{n_1 \lambda}{b} \quad \text{für } n_1 = 1, 2, 3, \dots \\ \text{und } \sin \theta_y^{\min} &= \pm \frac{n_2 \lambda}{h} \quad \text{für } n_2 = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (5.4.28)$$

gegeben. Das zentrale Maximum wird eingegrenzt durch die Geraden mit $n_1 = \pm 1$ und $n_2 = \pm 1$, die ein Rechteck bilden, dessen Abmessungen umgekehrt proportional zu den Abmessungen der beugenden Blende sind (siehe Abb. 5.19).

5.4.6 Beugung an einer Lochblende

In vielen Fällen von praktischer Bedeutung treten kreisförmige Blenden auf. Diese Blenden, die z.B. in Fernrohren oder Mikroskopen auftreten, führen ebenfalls zu Beugungserscheinungen, die, wie wir später noch sehen werden, für das Auflösungsvermögen dieser Geräte bedeutend sind. Die mathematische Behandlung der Beugung an einer kreisförmigen Blende mit Radius R führt uns auf die *Besselfunktion*. Qualitativ erhält man den vom Spalt her bekannten Intensitätsverlauf, der jetzt allerdings aufgrund der rotationssymmetrischen Blende auf ein rotationssymmetrisches Beugungsbild führt.

Zur mathematischen Beschreibung führen wir Polarkoordinaten (ρ, θ) ein, um Punkte auf der Blende und im Beugungsmuster zu beschreiben. Sind (ρ, θ) die Polarkoordinaten für die Blende, so gilt:

$$x = \rho \cos \theta \quad \text{und} \quad y = \rho \sin \theta. \quad (5.4.29)$$

Analog gilt für (ξ, ϕ) als Koordinaten für das Beugungsmuster

$$u = \xi \cos \phi \quad \text{und} \quad v = \xi \sin \phi . \quad (5.4.30)$$

Damit wird (5.4.10) zu

$$\begin{aligned} \Psi(u, v) &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \exp[-i(\rho \xi \cos \phi \cos \theta + \rho \xi \sin \phi \sin \theta)] \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \exp[-i\rho \xi \cos(\theta - \phi)] \rho d\rho d\theta . \end{aligned} \quad (5.4.31)$$

Dieses Integral kann mit Hilfe von Bessel-Funktionen gelöst werden und ergibt

$$\Psi(\xi, \phi) = \frac{2\pi R J_1(\xi R)}{\xi} = \pi R^2 \left[\frac{2J_1(\xi R)}{\xi R} \right] , \quad (5.4.32)$$

Das Beugungsmuster ist rotationssymmetrisch, $\Psi(\xi, \phi)$ hängt wie erwartet nicht von ϕ ab.

Wir betrachten nun die Form der Funktion $J_1(x)/x$. $J_1(x)$ ist zwar für $x = 0$ null, allerdings besitzt $J_1(x)/x$ genauso wie $\sin x/x$ für $x = 0$ einen endlichen Wert, nämlich eins. Sie nimmt dann mit zunehmendem x zuerst ab, wird negativ und oszilliert dann um null, wobei die Oszillationsamplitude mit zunehmendem x abnimmt. Mit zunehmendem x nimmt auch die Oszillationsperiode langsam ab und nähert sich für große x einem konstanten Wert (siehe Abb. 5.20). Für die Nullstellen erhält man

$$\sin \theta^{\min} \simeq 1.22 \frac{\lambda}{2R}, 2.23 \frac{\lambda}{2R}, \dots, (n + 1/4) \frac{\lambda}{2R} . \quad (5.4.33)$$

Das zentrale Maximum des Beugungsbildes ist als *Airy-Scheibe* bekannt und reicht bis zur ersten Nullstelle bei $\xi R = 3.83$ bzw. $\sin \theta = \xi/k_0 = \frac{3.83\lambda}{2\pi R} = 1.22\lambda/2R$. Wie man aufgrund der Eigenschaften von Fourier-Transformierten erwartet, ist der Radius der Airy-Scheibe umgekehrt proportional zum Radius der Lochblende.

Wir wollen nun kurz eine einfachere Ableitung der Größe der Airy-Scheibe diskutieren, da die Ableitung mit Hilfe der Bessel-Funktionen wenig zum physikalischen Verständnis beiträgt. Dabei benutzen wir die in den Abschnitten 5.4.2 und 5.4.3 gemachten Überlegungen. Nehmen wir an, dass wir eine Funktion $f(x, y)$ mit einem Beugungsmuster $\Psi(u, v)$ haben. Entlang der $v = 0$ Achse haben wir dann

$$\begin{aligned} \Psi(u, 0) &= \iint f(x, y) \exp(-iux) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right] \exp(-iux) dx . \end{aligned} \quad (5.4.34)$$

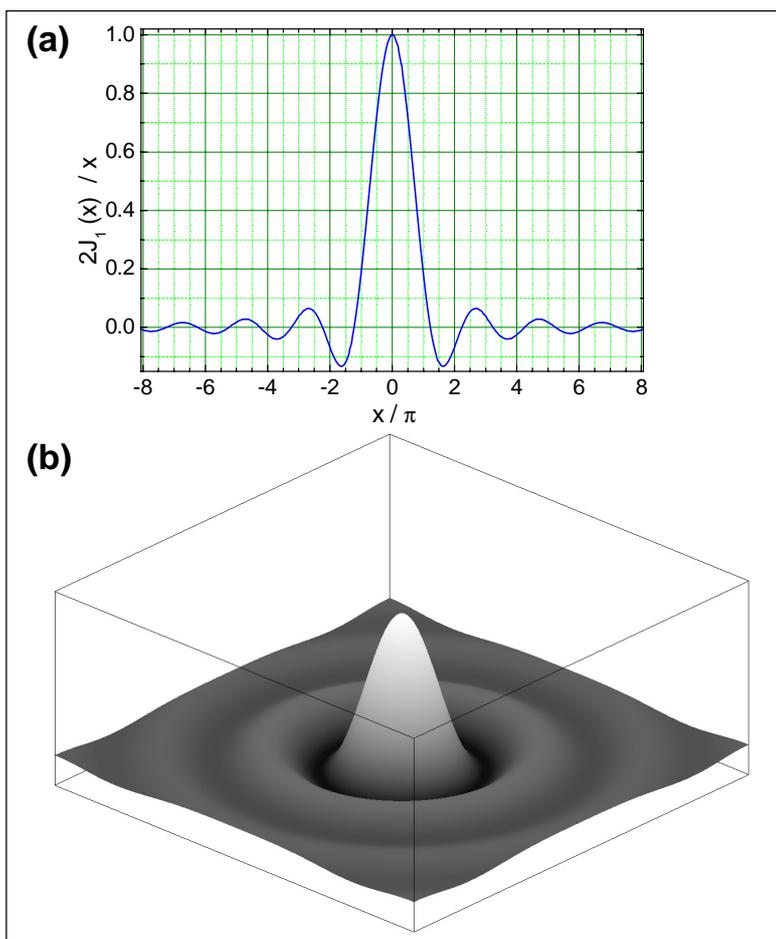


Abbildung 5.20: (a) Die Funktion $J_1(x)/x$, die die radiale Verteilung der Amplitude des Beugungsmusteres einer Lochblende beschreibt. (b) Berechnete Beugungsamplitude.

Dies bedeutet, dass der axiale Wert $\Psi(u, 0)$ die Fourier-Transformierte des Integrals $\int f(x, y) dy$ ist. Für eine kreisförmige Scheibe ist dieses Integral eine ellipsenförmige Funktion (siehe Abb. 5.21). Bei der Diskussion des ‘‘unscharfen’’ Spalts (Abschnitt 5.4.3) haben wir gesehen, dass die Nullstellen der Fourier-Transformierten einer Dreiecksfunktion denen eines Spalts entsprechen, wenn die effektiven Breiten gleich sind. Verwenden wir hier die gleiche Argumentation, können wir einen Spalt mit Breite b konstruieren, der die gleiche Höhe und Fläche wie der Halbkreis hat. Die Bedingung hierfür ist $\frac{\pi}{2}R \cdot 2R = b \cdot 2R$ oder $b = \pi R/2$. Das dazugehörige Beugungsmuster entlang der u -Achse ist dann

$$\Psi(u, 0) = b \frac{\sin(\pi u R/4)}{\pi u R/4}, \tag{5.4.35}$$

welches seine erste Nullstelle bei $uR = 4$ besitzt. Dies stimmt relativ gut mit dem exakten Wert $uR = 3.83$ überein, den wir mit der Bessel-Funktion erhalten haben.

Auflösungsbeschränkung durch Beugung

Das astronomische Fernrohr ist, wie in Abschnitt 4.6.3 beschrieben wurde, afokal, d.h es wandelt paralleles Licht unendlich weit entfernter Objekte wieder in parallele Strahlenbündel um. Die Fraunhofer’sche

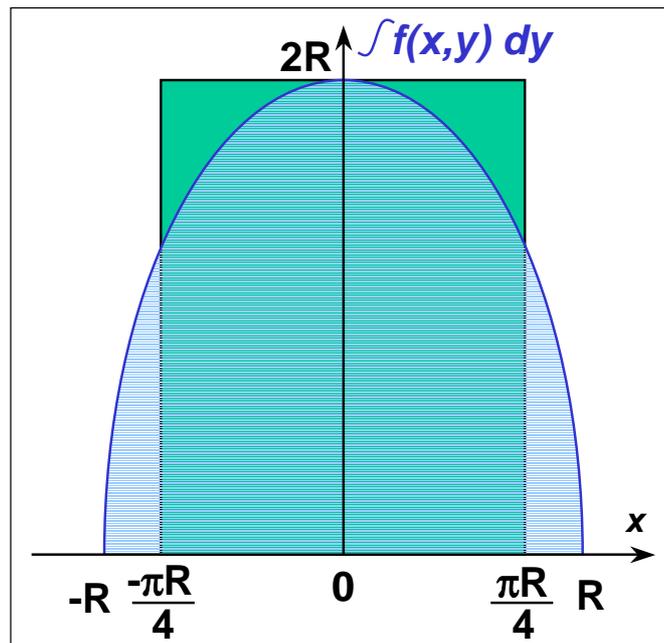


Abbildung 5.21: Kreis und Rechteck gleicher Fläche.

Beugungstheorie ist deshalb ideal auf dieses optische System anwendbar. Entsprechend (5.4.33) erzeugt jede Linsenöffnung vom Durchmesser $D = 2R$ einen Beugungsfleck in der Beobachtungsebene, dem eine Winkelausdehnung von $\sin \theta^{\min} = 1.22\lambda/D$ entspricht. Nehmen wir nun an, dass wir mit einem Fernrohr zwei astronomische Objekte beobachten, die vom Auge unter dem Winkel θ^{\min} wahrgenommen werden. Dann entspricht das Bild dieser Objekte der Überlagerung der jeweiligen Beugungsbilder. Das Maximum des Flecks von Objekt eins, wird im Minimum des Flecks von Objekt 2 zu liegen kommen. Nach Rayleigh bezeichnen wir die beiden Objekte als vom Fernrohr gerade noch auflösbar. Ähnliche Überlegungen lassen sich für das Mikroskop anstellen (eine genaue Diskussion folgt in Kapitel 7). Wie wir später noch im Detail zeigen werden, kann das Auflösungsvermögen optischer Instrumente nicht beliebig erhöht werden. Zwar könnte man theoretisch sehr große optische Bauteile heranziehen, jedoch weisen diese dann entsprechende Abbildungsfehler auf. Die Beugungsbeschränkung ist vor allen für die Radioastronomie wegen der hier auftretenden großen Wellenlängen ein Problem.

5.4.7 Überlagerung von Beugungsmustern

Die additive Eigenschaft der Fourier-Transformation ermöglicht es, Beugungsmuster von komplexen Objekten herzuleiten, wenn diese sich als algebraische Summe von einfacheren Objekten schreiben lässt. Die getrennten Komponenten des Objekts müssen dazu bezüglich eines gemeinsamen Ursprungs ausgedrückt werden. Die Transformierte erhält man dann durch separate Addition der Real- und Imaginärteile der Transformaten der Einzelkomponenten. Dieser Prozess ist besonders einfach, wenn die Komponenten punktsymmetrisch bezüglich eines gemeinsamen Zentrums sind. In diesem Fall sind all ihre Transformaten rein reell.

So ist es z.B. möglich, das Beugungsmuster dreier Spalte dadurch abzuleiten, dass man das Beugungsmuster der beiden äußeren zu dem des inneren addiert. Das Beugungsmuster von vier Spalten mit gleichem Abstand voneinander kann man durch Aufteilen in zwei Paare vereinfachen, wobei ein Paar den dreifachen Spaltabstand des anderen besitzt.

Ein undurchsichtiges Objekt kann dadurch behandelt werden, dass man seine Transformierte als negativ ansetzt. So kann man beispielsweise einen undurchsichtigen rechteckigen Rahmen als Differenz von

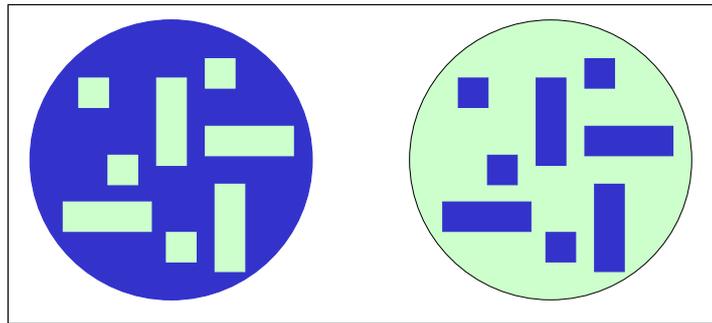


Abbildung 5.22: Komplementäre Beugungsobjekte zur Demonstration des Babinet'schen Prinzips.

zwei Rechtecken mit gleichem Schwerpunkt aber unterschiedlicher Größe definieren. In gleicher Weise kann man das Beugungsmuster eines kreisförmigen Rings als Differenz der Muster zweier konzentrischer Kreisscheiben mit unterschiedlichem Durchmesser ausdrücken.

5.4.8 Das Babinet'sche Prinzip

Verwendet man den Beugungsaufbau, der in Abb. 5.15 gezeigt ist, so erhält man ohne beugendes Objekt in der Beobachtungsebene (d.h. in der Brennebene der Linse L) eine ungestörte Feldverteilung $\Psi_0(u, v)$. Bei Verwendung einer Punktquelle wird man nur am Koordinatenursprung Helligkeit erwarten, an allen anderen Punkten gilt $\Psi(u, v) = 0$.

Wir betrachten jetzt zwei *komplementäre Beugungsobjekte* B_1 und B_2 , die so gestaltet sind, dass die transparenten Bereiche des einen gerade den opaken Bereichen des anderen Objekts entsprechen (siehe hierzu Abb. 5.22). Das *Babinet'sche Prinzip* besagt nun, dass das Beugungsmuster dieser beiden Objekte genau gleich ist, bis auf einen kleinen Bereich um den Mittelpunkt. Dieses Theorem kann allgemein mit Hilfe der *skalaren Beugungstheorie* bewiesen werden. Wir nehmen für die Beugungsmuster der komplementären Objekte, die mit dem gleichen Lichtstrahl beleuchtet werden, die Werte Ψ_1 und Ψ_2 an. Wie wir oben diskutiert haben, kann die Beugungsfunktion für eine Kombination von Beugungsobjekten durch Addition ihrer einzelnen Funktionen (diese können komplex sein) erhalten werden. Wenn wir Ψ_1 und Ψ_2 addieren, sollten wir deshalb die Beugungsfunktion eines ungestörten Strahls erhalten. Ist dieser kreisförmig, ergibt die Summe von Ψ_1 und Ψ_2 die Airy-Scheibe, die einen kleinen Bereich in der Mitte der Scheibe bedeckt. Der Rest ist dunkel. Das heißt, die Beträge von Ψ_1 und Ψ_2 müssen bis auf einen kleinen Bereich in der Mitte des Musters gleich sein, die Phasen müssen dagegen um π verschoben sein. Die Intensitätsfunktionen $|\Psi_i|^2$ sind daher identisch und es gilt $\Psi_1(u, v) = -\Psi_2(u, v)$ und $|\Psi_1|^2 = |\Psi_2|^2$.

Der experimentelle Nachweis des Babinet'schen Prinzips ist vor allem wegen des starken zentralen Maximums nicht einfach. Ist der ungestörte Strahl sehr stark, ist das Maximum sehr stark und dominiert das Beugungsmuster des im wesentlichen durchsichtigen Beugungsobjekts. Um in Experimenten ein überzeugendes Ergebnis zu erhalten, muss man folgende Grundregeln berücksichtigen:

- Die Kanten des ungestörten Strahls sollten unscharf sein. Damit werden die äußeren Bestandteile der Fourier-Transformierten unterdrückt (siehe Abschnitt 5.4.3).
- Die transparenten und opaken Regionen des Beugungsobjekts sollten jeweils etwa die Hälfte der Gesamtfläche einnehmen, um ein deutliches Beugungsmuster zu erhalten.
- Die Beugungsobjekte sollten zahlreiche kleine Details aufzeigen, um ein helles Beugungsbild weit außerhalb des zentralen Maximums zu liefern.

5.5 Interferenz

Wir haben bisher Effekte behandelt die sich auf die Veränderung einer einzelnen Wellenfront durch ein Beugungsobjekt bezogen haben. Wir wollen nun Situationen betrachten, bei denen zwei oder mehrere Wellenfronten miteinander wechselwirken. Die dabei auftretenden Effekte werden *Interferenz* genannt. Wir werden in diesem Abschnitt hauptsächlich Interferenzphänomene diskutieren, die aus der Überlagerung von Wellenfronten resultieren, die von identischen Beugungsobjekten ausgehen. Wir werden uns dabei auf ein- und zweidimensionale Objekte beschränken. Die dreidimensionale Interferenz wird dann erst in Abschnitt 5.6 behandelt.

Bei der Beschreibung von Interferenzeffekten an Objekten, die aus mehreren identischen Einzelobjekten bestehen (z.B. mehrere identische Spalte) werden wir uns das Prinzip der Faltung zunutze machen. Zwei gleiche, parallel orientierte Spalte können wir z.B. als die Faltung eines einzelnen Spaltes mit einem Paar von Delta-Funktionen, die jeweils im Zentrum der Einzelspalte liegen, ausdrücken (zur Definition der Faltung siehe Anhang B, Abschnitt B.5). Wir werden ferner das *Faltungstheorem* benutzen. Allgemein besagt das Faltungstheorem der Fourier-Transformation Folgendes: Die Fourier-Transformierte der Faltung (bezeichnet mit dem Symbol \otimes) zweier Funktionen f und g ist gleich dem Produkt der Fourier-Transformierten $\text{FT}(f)$ und $\text{FT}(g)$ dieser Funktionen (vergleiche hierzu Anhang B.5, Gleichung (B.71)):

$$\boxed{\text{FT}(f \otimes g) = \text{FT}(f) \cdot \text{FT}(g) .} \quad (5.5.1)$$

Bezogen auf das Beispiel des Doppelspalts bedeutet dies, dass das Interferenzmuster durch das Produkt des Beugungsmusters eines Einzelspaltes mit dem eines Paares von Delta-Funktionen gegeben ist. Dadurch können wir das Interferenzproblem in zwei Teile aufspalten, nämlich in die Ableitung der Fourier-Transformierten eines einzelnen Spaltes und der eines Satzes von Delta-Funktionen. Die Transformierte des Spaltes bezeichnen wir dabei als *Beugungsfunktion* und die der Delta-Funktionen als *Interferenzfunktion*. Das vollständige Beugungsmuster ist das Produkt dieser beiden Funktionen.

5.5.1 Interferenzmuster eines Doppelspaltes

Wir betrachten einen Doppelspalt, der aus der Anordnung zweier langer Spalte der Breite b entsteht, die parallel zueinander verlaufen und einen Abstand a besitzen (siehe Abb. 5.23a). Die Transmissionsfunktion f_{DS} eines Doppelspaltes können wir als Faltung der Transmissionsfunktion eines einfachen Spaltes mit einem Paar von Delta-Funktionen, die an den Orten der Einzelspalte, z.B. bei $-a/2$ und $a/2$, liegen, beschreiben. Es gilt also

$$\begin{aligned} f_{\text{DS}}(x) &= [\delta(x - a/2) + \delta(x + a/2)] \otimes f_{\text{Spalt}}(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\text{Spalt}}(x - x') [\delta(x' - a/2) + \delta(x' + a/2)] dx' \\ &= f_{\text{Spalt}}(x - a/2) + f_{\text{Spalt}}(x + a/2) , \end{aligned} \quad (5.5.2)$$

wobei f_{Spalt} durch (5.4.13) gegeben ist. Damit erhalten wir

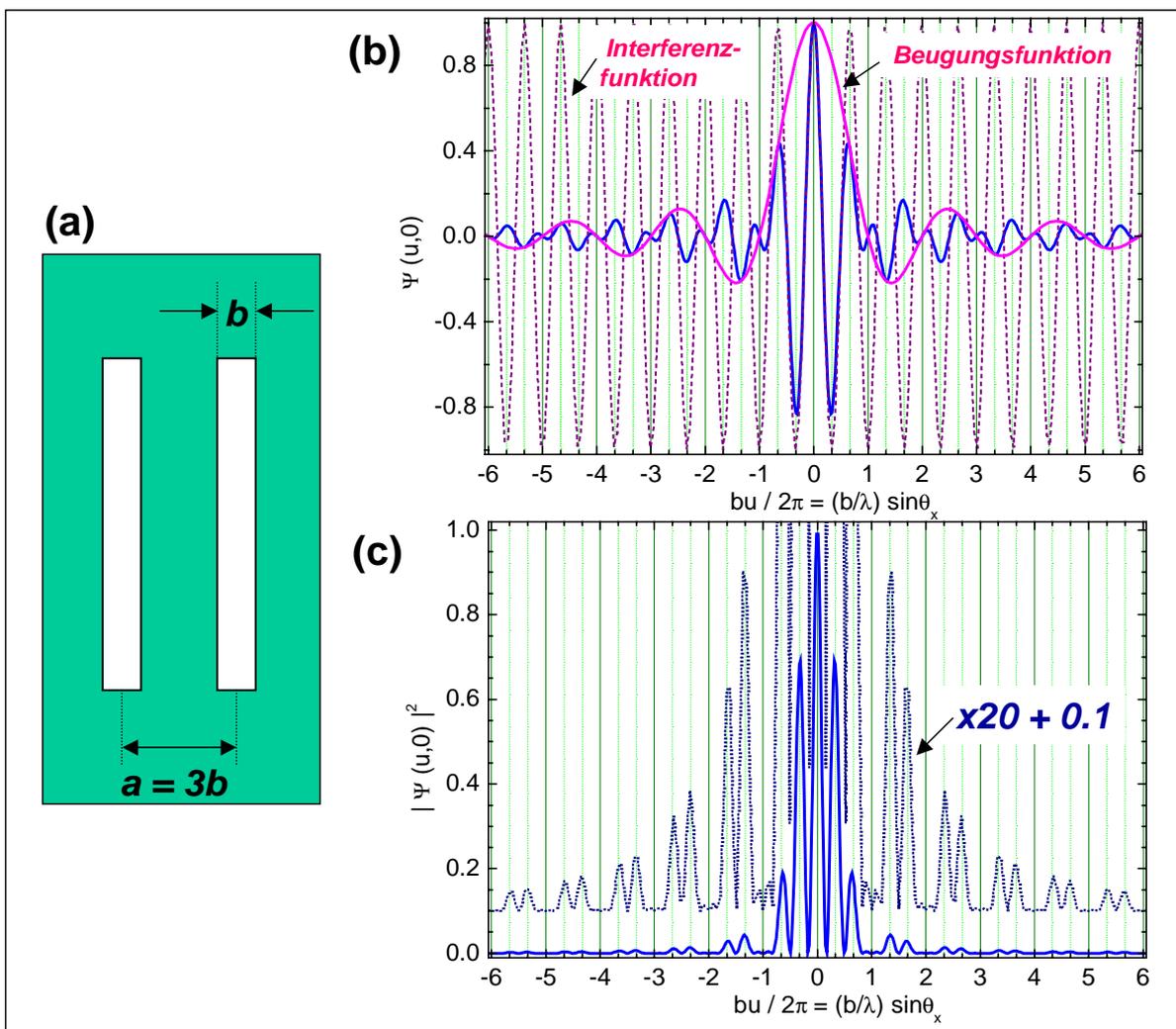


Abbildung 5.23: (a) Geometrie des Doppelspalts, (b) Amplitude des Beugungsmusters als Produkt der Beugungsfunktion und der Interferenzfunktion (gestrichelt), sowie (c) Intensitätverlauf für einen Spaltabstand $a = 3b$.

$$\begin{aligned}
 \Psi(u,0) &\propto \text{FT}[f_{\text{DS}}(x)] = \text{FT}[\delta(x - a/2) + \delta(x + a/2)] \cdot \text{FT}[f_{\text{Spalt}}(x)] \\
 &\propto [\exp(ia/2) + \exp(-ia/2)] \frac{\sin(bu/2)}{bu/2} \\
 &= 2 \cos(ua/2) \frac{\sin(bu/2)}{bu/2} .
 \end{aligned} \tag{5.5.3}$$

Für die Intensität des Beugungsbildes erhalten wir man somit bei der Beugung am Doppelspalt

$$\boxed{\frac{I_{\text{DS}}(u)}{I_{\text{DS}}(0)} = \cos^2(ua/2) \frac{\sin^2(bu/2)}{(bu/2)^2} .} \tag{5.5.4}$$

Wir sehen, dass bei Beleuchtung mit ebenen Wellen das Beugungsbild eines Doppelspalts dem eines Einzelspalts multipliziert mit der Kosinusfunktion $\cos^2(ba/2)$ ist. Machen wir den Spaltabstand

größer als die Spaltbreite, so ergibt dies eine hochfrequente Modulation des Beugungsbildes (siehe hierzu Abb. 5.23).

Die Kosinusfunktion $2 \cos(ua/2)$ wird als *Young'sche Beugungsmuster* bezeichnet und bei der Diskussion der Interferometrie noch näher diskutiert. Die Nullstellen dieser Funktion treten bei Werten von θ auf, die durch

$$\frac{ua}{2} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (5.5.5)$$

gegeben sind. Da $u = k_o \sin \theta = (2\pi/\lambda) \sin \theta$ ergibt sich daraus

$$\Delta s = a \sin \theta = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (5.5.6)$$

Hierbei ist Δs die optische Weglängendifferenz der beiden Teilwellen durch die beiden Spalte. Für destruktive Interferenz $\Delta s = \pm(m + \frac{1}{2})\lambda$, für konstruktive Interferenz $\Delta s = \pm m \lambda$ gelten.

Bei der Behandlung des Beugungsmusters des Doppelspaltes haben wir das Faltungstheorem der Fourier-Transformation angewendet. Die Transmissionsfunktion f_{DS} des Doppelspaltes ergibt sich als Faltung der Transmissionsfunktion des f_{Spalt} des Einzelspaltes mit der Funktion $h(x)$ von zwei Delta-Funktionen bei

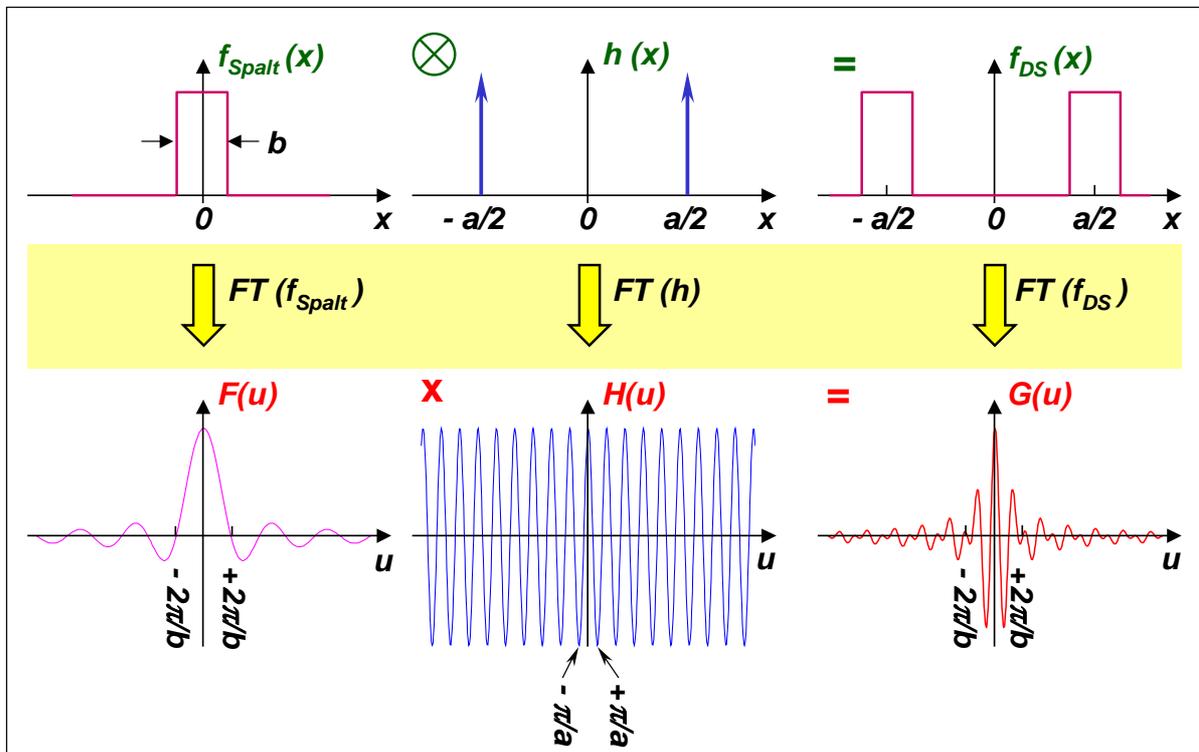


Abbildung 5.24: Zur Erläuterung des Faltungstheorems.

$x = -a/2$ und $x = a/2$. Die Fourier-Transformierte von f_{DS} ergibt sich somit als Produkt der Fourier-Transformierten von f_{Spalt} und h . Dies ist in Abb. 5.24 nochmals veranschaulicht.

In Anbetracht der relativ einfachen Transmissionsfunktion des Doppelspaltes hätte man das Beugungsmuster auch anders ableiten können. Die formale Behandlung mit Hilfe des Faltungstheorems wird aber bei der Betrachtung komplexerer Doppelbeugungsobjekte verständlich. Das Beugungsbild der Doppelanordnung kann dann als Multiplikation des komplexen Beugungsbildes des Einzelobjektes mit einer Kosinusfunktion in Analogie zu (5.5.3) verstanden werden. Es gibt aber gute Gründe für die Verwendung diesen Ansatzes. Erstens haben wir so das komplette Profil des Beugungsmusters erhalten und nicht nur eines für die räumliche Anordnung der Spalte. Zweitens konnten wir dadurch zeigen, dass die Faltungsmethode für ein einfaches Beispiel ein korrektes Ergebnis liefert. Schließlich haben wir drittens die Grundlage für die Behandlung komplexerer Systeme gelegt, die wir in den nächsten Abschnitten diskutieren.

5.5.2 Vertiefungsthema: Interferenzmuster zweier kreisförmiger Lochblenden

Als Beispiel betrachten wir jetzt zwei kreisförmige Lochblenden mit Radius R mit einem Abstand a . Die Transmissionsfunktion dieser Anordnung ist durch $f(x, y) = [\delta(x - a/2)\delta(y) + \delta(x + a/2)\delta(y)] \otimes f_{\text{Lochblende}}(x, y)$ gegeben. Das Beugungsmuster ergibt sich aus der Multiplikation des Beugungsmusters einer Lochblende (vergleiche (5.4.32)) mit der Interferenzfunktion $2 \cos(ua/2)$ der beiden Delta-Funktionen $\delta(x - a/2)$ und $\delta(x + a/2)$ zu

$$\Psi_{\text{DL}}(\xi, \phi) = 2 \cos(ua/2) \pi R^2 \left[\frac{2J_1(\xi R)}{\xi R} \right], \quad (5.5.7)$$

Vertiefungsthema: Interferenzmuster zweier paralleler Blenden beliebiger Form

Wenn wir ein Paar identischer Blenden mit gleicher räumlicher Orientierung betrachten, können wir sie wie oben diskutiert als die Faltung einer Einzelblende mit einem Paar von Delta-Funktionen interpretieren. Das Beugungsmuster ist damit das Produkt des Beugungsmusters der Einzelblende und der Interferenzfunktion, die aus einem Satz von Streifen mit kosinusförmigem Intensitätsverlauf besteht. Diese Argumentation gilt für einen Satz von Blenden mit beliebiger Form. Dies ist eines der zentralen Ergebnisse der Beugungstheorie.

5.5.3 Interferenzmuster eines periodischen Gitters

Wir betrachten jetzt ein Beugungsgitter, das aus N langen Spalten besteht, die einen konstanten Abstand a haben sollen. Den Abstand a bezeichnet man in diesem Fall als die Gitterkonstante. Die Transmissionsfunktion des Gitters kann durch $f(x) = f_{\text{Gitter}}(x) \otimes f_{\text{Spalt}}(x)$ ausgedrückt werden, wobei f_{Gitter} durch eine Summe von δ -Funktionen gegeben ist, die die Positionen der einzelnen Gitterspalte angeben. Wir wollen uns zunächst nicht um den Beitrag zum Beugungsmuster, der von der Beugung am Einzelspalt herrührt, kümmern. Dessen Einfluss kann, wie oben gezeigt wurde, einfach durch Multiplikation mit der entsprechenden Beugungsfunktion berücksichtigt werden. Uns interessiert jetzt der Beitrag durch die periodische Wiederholung der Einzelspalte oder, anders ausgedrückt, die Beugung an N sehr schmalen

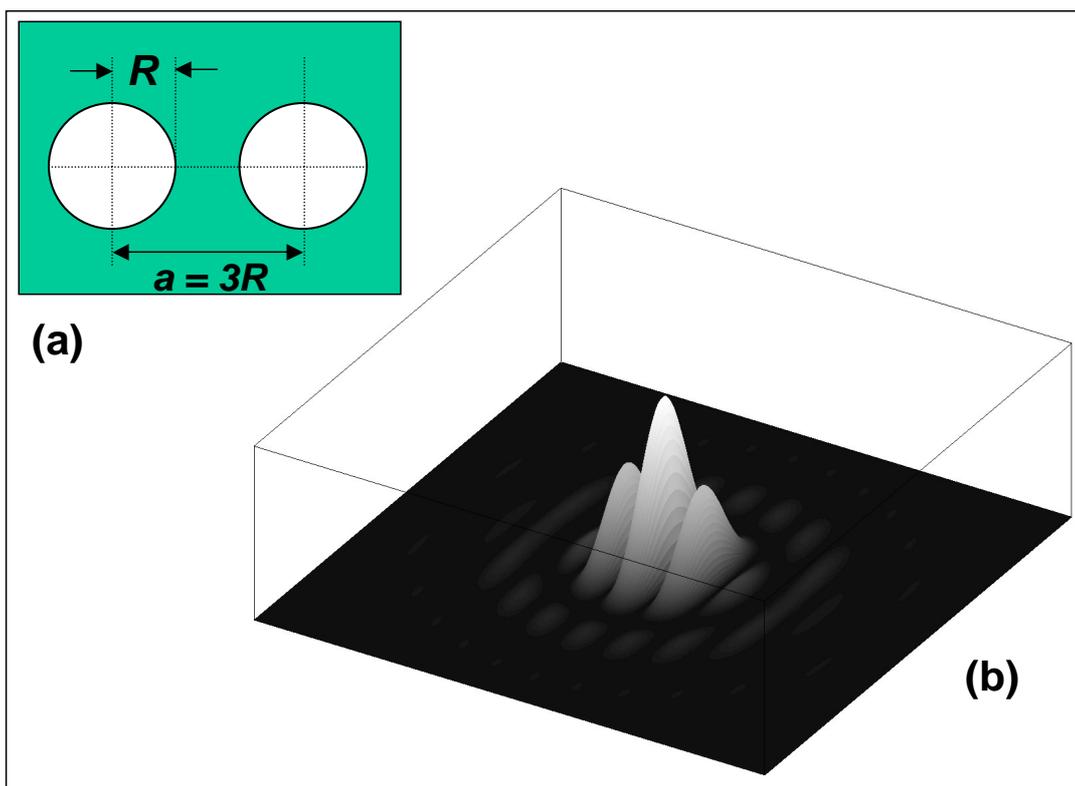


Abbildung 5.25: (a) Geometrie des Doppellochblende und (b) Fraunhofer-Beugungsmuster der Anordnung für einen Blendenabstand $a = 3R$.

Spalten. Wie bereits oben gemacht, werden wir den Beitrag der periodischen Anordnung zur Transmissionsfunktion f_{Gitter} durch Delta-Funktionen darstellen. Für N Spalte erhalten wir die Funktion f_{Gitter} zu

$$f_{\text{Gitter}} = \sum_{n=-N/2}^{N/2} \delta(x - na) . \quad (5.5.8)$$

Die Fourier-Transformierte von f_{Gitter} , die proportional zum gebeugten Feld ist, wird damit

$$\Psi_{\text{Gitter}}(u) = \sum_{m=-N/2}^{N/2} \exp(-iuma) = \sum_{m=-N/2}^{N/2} [\exp(-iua)]^m . \quad (5.5.9)$$

Für $N \rightarrow \infty$ ist diese Summe (vergleiche hierzu Anhang B.3, Gleichung (B.40))

$$\Psi_{\text{Gitter}}(u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(u - \frac{2\pi m}{a}\right) . \quad (5.5.10)$$

Hierbei wird der Index m *Beugungsordnung* genannt. Ist N endlich, ist die Summe der geometrischen Reihe in (5.5.9)¹²

$$\Psi_{\text{Gitter}}(u) = \frac{1 - \exp(-iuNa)}{1 - \exp(-iua)} . \quad (5.5.11)$$

Die Intensität ist gegeben durch

$$I_{\text{Gitter}} = |\Psi_{\text{Gitter}}(u)|^2 = \frac{\sin^2(uNa/2)}{\sin^2(ua/2)} , \quad (5.5.12)$$

Dieser Ausdruck ist in Abb. 5.26 für $N = 6$ dargestellt. Man erhält Nullstellen für die Nullstellen des Zählers, außer an den Stellen, an denen auch der Nenner null wird. Dort ist der Funktionswert N^2 . Nimmt die Zahl der Blenden zu, so nimmt die Zahl der Nullstellen ebenfalls zu. Die Maxima der Intensität N^2 – Hauptmaxima genannt – sind dann sehr stark hervorgehoben im Vergleich zu den schwachen Nebenmaxima, von denen es genau $n - 2$ zwischen den Hauptmaxima gibt. Tatsächlich approximieren die Hauptmaxima die Delta-Funktionen in (5.5.10), nämlich $\delta(u - 2m\pi/a)$.

Die Bedingung für das Auftreten der Hauptmaxima ist $ua/2 = m\pi$. Da bei senkrechtem Lichteinfall $u = (2\pi/\lambda) \sin \theta$, erhalten wir

$$\Delta s = a \sin \theta = \pm m \lambda \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots . \quad (5.5.13)$$

Hierbei ist Δs der Laufwegunterschied von Teilwellen, die von benachbarten Gitterspalten ausgehen (siehe Abb. 5.27). Dies ist die wohlbekannt *Bragg-Bedingung* für die Beugung an einem Gitter. Die einzelnen Hauptmaxima heißen *Beugungsmaxima m -ter Ordnung*. Wegen $\sin \theta \leq 1$ ist für senkrechten Lichteinfall die maximale Beugungsordnung m_{max} durch

$$m_{\text{max}} = \frac{a}{\lambda} \quad (5.5.14)$$

gegeben.

Die Bedeutung von (5.5.13) ist anhand von Abb. 5.27 veranschaulicht. Der Gangunterschied zwischen zwei an benachbarten Gitterspalten um einen Winkel θ gebeugten Wellen beträgt gerade $a \sin \theta$. Konstruktive Interferenz aller gebeugten Strahlen tritt nun genau dann auf, wenn der Gangunterschied der benachbarten Strahlen gerade einem ganzzahligen Vielfachen der Wellenlänge λ entspricht. Damit erhalten wir $a \sin \theta = m\lambda$, also genau die Bragg-Bedingung (5.5.13). Das Entstehen der Nebenmaxima kann man sich so erklären, dass die Bedingung der konstruktiven Interferenz nicht mehr zwischen allen Strahlen erfüllt ist, sondern nur mit einem kleinen Anteil, z.B. für jeden 3. Strahl. Die dazwischen liegenden Strahlen führen dann aber zu destruktiver Interferenz, weshalb die Nebenmaxima wesentlich niedriger sind.

¹²Für die Summe einer fallenden geometrischen Reihe gilt $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, wobei im betrachteten Fall $a_1 = 1$ und $q = \exp(-iua)$ ist.

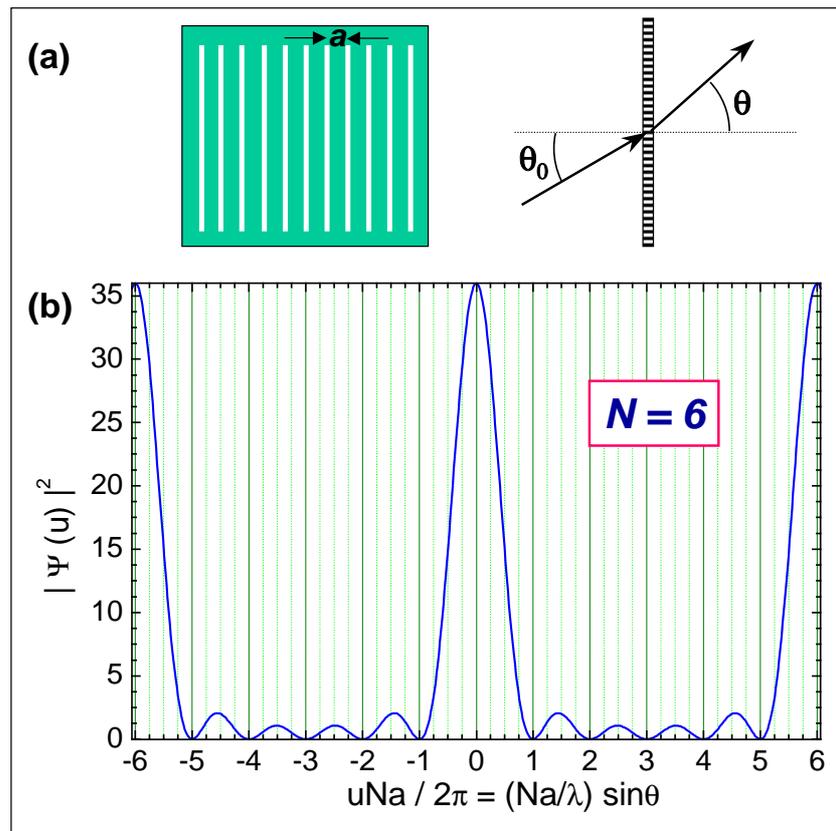


Abbildung 5.26: (a) Skizze zur Geometrie des Gitters und zur Definition des Einfallswinkels θ_0 und des Transmissionswinkels θ . (b) Intensitätsverlauf des gebeugten Lichts für ein Gitter mit $N = 6$ Gitterstreifen.

Bei schrägem Lichteinfall, d.h. für Licht einfallend unter dem Winkel θ_0 bezüglich der Achse (siehe Abb. 5.26), wird

$$u = \frac{2\pi}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_0) . \quad (5.5.15)$$

Da $\sin \theta_0$ und $\sin \theta$ zwischen -1 und 1 liegen, ist der maximal beobachtbare Wert von u gleich $4\pi/\lambda$. Daraus folgt, obwohl (5.5.12) für alle m definiert ist, dass die Beugungsbedingung für das Auftreten der Hauptmaxima bei der Beugung am Gitter allgemein

$$\Delta s = a (\sin \theta - \sin \theta_0) = \pm m \lambda \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.5.16)$$

lautet, wobei für ein gegebenes θ_0 gilt: $(-1 - \sin \theta_0)a/\lambda \leq m \leq (1 - \sin \theta_0)a/\lambda$.

Zwischen den Hauptmaxima bei $(\sin \theta - \sin \theta_0) = \pm m\lambda/a$ treten $(N - 1)$ Nullstellen der gebeugten Intensität für diejenigen Werte von $(\sin \theta - \sin \theta_0)$ auf, an denen nur der Zähler von (5.5.12) Nullstellen aufweist. Damit ergibt sich die Bedingung für die Nullstellen der Beugungsintensität zu

$$\Delta s = a (\sin \theta - \sin \theta_0) = \pm m \lambda \pm \frac{n}{N} \lambda \quad \text{mit } m = 0, 1, 2, 3, \dots \text{ und } n = 1, 2, \dots, N - 1 . \quad (5.5.17)$$

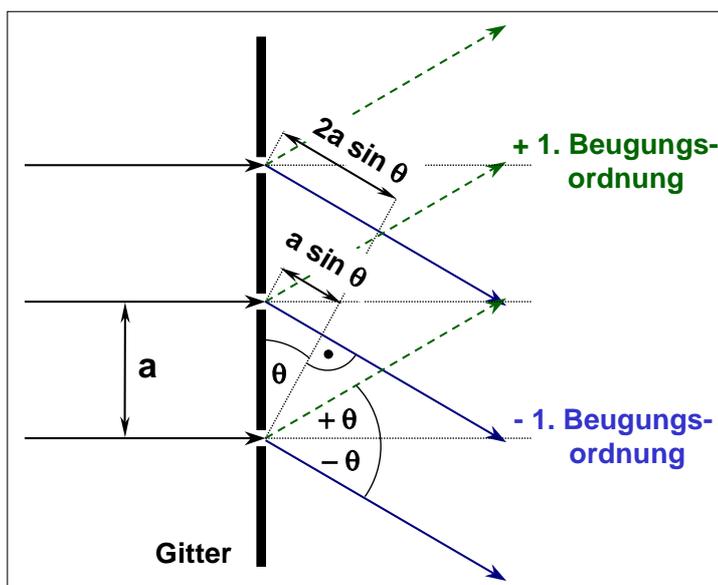


Abbildung 5.27: Zur Veranschaulichung der Entstehung der Hauptmaxima bei der Beugung am Gitter durch konstruktive Interferenz der von den verschiedenen Spalten auslaufenden Elementarwellen.

Zwischen den Hauptmaxima liegen $(N - 2)$ Nebenmaxima, die im Vergleich zu den Hauptmaxima eine wesentlich geringere Intensität aufweisen. Sie liegen in der Nähe der Stellen von $(\sin \theta - \sin \theta_0)$, bei denen der Zähler Maxima aufweist. Damit ergibt sich die Bedingung für das Auftreten der Nebenmaxima zu

$$\Delta s = a (\sin \theta - \sin \theta_0) \simeq \pm m \lambda \pm \frac{2n+1}{N} \lambda$$

mit $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ und $n = 1, 2, \dots, N-2$. (5.5.18)

Der Wert der Intensität der Nebenmaximas liegt etwa um den Faktor $1/N^2$ unter dem der Hauptmaximas.

Für praktische Anwendungen ist von Interesse, wie breit (volle Breite FWHM bei halber Höhe) ein Hauptmaximum ist. Aus Gleichung (5.5.12) erhält man für $I(\text{FWHM}/2) = I(0)/2$ die Beziehung

$$\sin \left(N \frac{k_0 a \text{FWHM}}{2} \right) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{k_0 a \text{FWHM}}{2} . \quad (5.5.19)$$

Daraus berechnet sich die volle Breite eines Hauptmaximums zu

$$\text{FWHM} \simeq 2.78 \frac{\lambda}{a\pi N} \simeq 0.885 \frac{\lambda}{aN} . \quad (5.5.20)$$

Man sieht daraus, dass die volle Breite eines Hauptmaximums nur etwa 12% kleiner ist als der Abstand vom Hauptmaximum zum ersten Minimum. Die Breite des Hauptmaximums ist seinerseits proportional zur Zahl N der ausgeleuchteten Gitterstriche oder zur ausgeleuchteten Gitterbreite Na . Die Größe FWHM ist wichtig für die Anwendung in Gitterspektrometern, die weiter unten noch eingehender diskutiert werden.

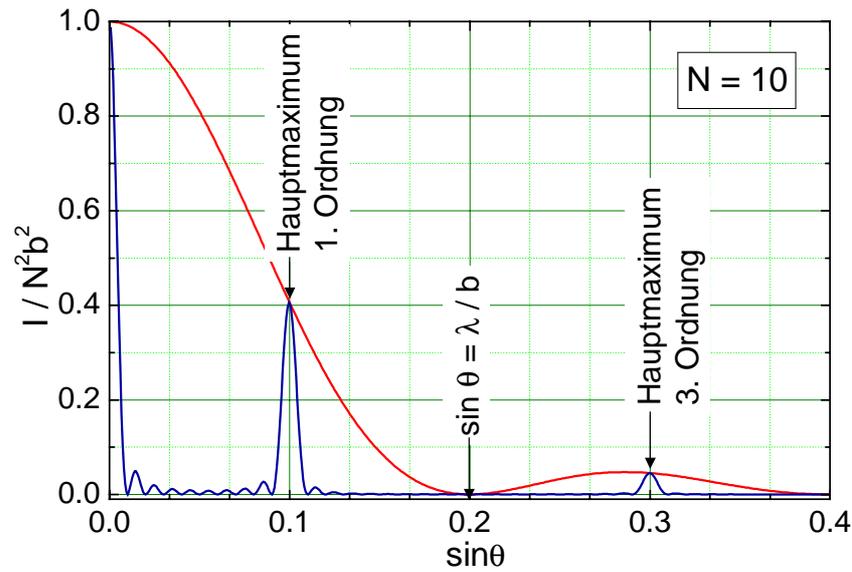


Abbildung 5.28: Intensitätsverlauf des gebeugten Lichts für ein Gitter mit $N = 10$, $a/\lambda = 10$ und einer Spaltbreite $b/a = 0.5$. In die zweite Interferenzordnung gelangt wegen des Minimums der Beugungsfunktion des Spalts keine Intensität.

Reales Beugungsgitter

Für ein reales Beugungsgitter müssen wir die Transmissionsfunktion $b(x)$ der einzelnen Spalte berücksichtigen. Die gesamte Transmissionsfunktion des realen Gitters ergibt sich dann zu

$$f(x) = b(x) \otimes \sum_{n=-N/2}^{N/2} \delta(x - na), \quad (5.5.21)$$

wobei N wiederum die Gesamtzahl der Gitterspalte ist. Das Beugungsmuster erhält man als Produkt der Fourier-Transformierten des Gitters mit derjenigen des Spalts. Wir erhalten

$$I(\theta) = N^2 \frac{\sin^2(\pi \frac{Na}{\lambda} \sin \theta)}{\sin^2(\pi \frac{a}{\lambda} \sin \theta)} \cdot b^2 \frac{\sin^2(\pi \frac{b}{\lambda} \sin \theta)}{(\pi \frac{b}{\lambda} \sin \theta)^2}. \quad (5.5.22)$$

Das Ergebnis ist in Abb. 5.28 für $N = 10$, $a/\lambda = 10$ und $b/a = 0.5$ gezeigt. Wichtig ist, dass mit zunehmender Spaltbreite die Größe der möglichen Beugungswinkel, bei denen noch merkliche Intensität auftritt, abnimmt. Die Spaltbreite sollte deshalb möglichst klein sein. Eine Verringerung der Spaltbreite führt aber gleichzeitig zu einer Abnahme der durchgelassenen Lichtmenge. Dieser Sachverhalt wird uns in Abschnitt 5.7.2 noch einmal im Zusammenhang mit der Effizienz von Beugungsgittern beschäftigen.

Für $N \rightarrow \infty$ ist die Transformierte der Summation durch (5.5.10) gegeben und man erhält

$$\Psi(u) = B(u) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(u - \frac{2\pi m}{a}), \quad (5.5.23)$$

Die Amplituden der verschiedenen Beugungsordnungen sind durch die Transformaten $B(U)$ der einzelnen Blenden gegeben.

Ein endliches Gitter (alle realen Gitter sind natürlich endlich) erhält man durch Aufsummieren von (5.5.21) bis zu einem endlichen Wert N . Dies lässt sich bequem dadurch ausdrücken, dass man die unendliche Summe mit einer "Fensterfunktion" $\text{rect}(x/Na)$ der Länge Na multipliziert, die nur N Deltafunktionen "hindurchlässt". Damit wird das Gitter durch

$$f(x) = b(x) \otimes \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-na) \cdot \text{rect}(x/Na) \right], \quad (5.5.24)$$

beschrieben. Wichtig ist hier die Reihenfolge der Rechenoperationen; es ist für die Darstellung einer endlichen Reihenfolge von Spalten wichtig, zuerst die Produktbildung auszuführen und danach die Faltung (Faltung und Multiplikation sind nicht kommutativ!).

Das Beugungsmuster zu (5.5.24) ist

$$\Psi(u) = B(u) \cdot \left[\sum \delta \left(u - \frac{2\pi m}{a} \right) \otimes \frac{\sin(uNa/2)}{uNa/2} \right]. \quad (5.5.25)$$

Man sieht, dass es für große N wohldefinierte Beugungsordnungen, wie sie durch (5.5.16) definiert sind, gibt. Jede von ihnen hat aber ein $\sin x/x$ Profil. Dieses hat die Breite (Abstand zwischen dem Maximum und dem ersten Minimum) $\Delta u = 2\pi/Na$, was $(1/N)$ des Abstandes zwischen den Beugungsordnungen entspricht.

5.5.4 Vertiefungsthema: Zweidimensionale Interferenz

In den bisherigen Beispielen zu periodischen Gittern haben wir uns nur mit Beugungsobjekten befasst, die in einer Richtung (v -Richtung) unendlich ausgedehnt waren. Die Transmissionsfunktion besaß also nur in u -Richtung eine Modulation. Entsprechend hatte das Beugungsmuster ebenfalls nur in u -Richtung ein Muster (siehe z.B. Abb. 5.29a). Analog besitzt ein Gitter, dessen Modulation nur entlang der v -Richtung ist, ein Beugungsmuster mit einer Struktur entlang dieser Richtung (siehe Abb. 5.29b). Wir betrachten jetzt zweidimensionale Gitterstrukturen, die sowohl in u - als auch in v -Richtung eine periodische Modulation besitzen. Man erhält dann eine zweidimensionale Anordnung von Hauptmaxima (siehe Abb. 5.29c).

Das Kreuzgitter

Für ein zweidimensionales Kreuzgitter mit Gitterperiode a_u und a_v in u und v -Richtung ergibt sich die Lage der Hauptmaxima durch zwei Gittergleichungen für die beiden Koordinaten:

$$a_u (\sin \theta_x - \sin \theta_{x0}) = \pm m_u \lambda \quad m_u = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.5.26)$$

$$a_v (\sin \theta_y - \sin \theta_{y0}) = \pm m_v \lambda \quad m_v = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.5.27)$$

Jedes Maximum der Beugung ist durch ein Zahlenpaar (m_u, m_v) charakterisiert. Verwenden wir noch die Definition der Richtungskosinusse für den einfallenden und den gebeugten Strahl und ihren Zusammenhang mit den Wellenvektoren k bzw. k_0 (vergleiche (5.4.8)), so lässt sich (5.5.26) und (5.5.27) schreiben als

$$k_x - k_{x0} = \frac{2\pi m_u}{a_u} \quad (5.5.28)$$

$$k_y - k_{y0} = \frac{2\pi m_v}{a_v} . \quad (5.5.29)$$

Aus diesen Gleichungen sieht man, dass die Änderung der Wellenvektoren bei der Streuung an einem zweidimensionalen Gitter durch ein Punktgitter beschrieben wird. Die Punkte dieses Gitters sind durch die ganzen Zahlen a_u und a_v bestimmt, die Kantenlängen des Gitters sind $2\pi/a_u$ und $2\pi/a_v$. Die z -Komponente des Wellenvektors stellt sich gemäß der Beziehung $k = 2\pi/\lambda$ ein. Für genügend kleine Wellenlängen kann man (5.5.28) und (5.5.29) immer erfüllen und erhält die entsprechende Beugungsfigur.

Anstelle des einfachen Kreuzgitters kann man auch eine periodische, zweidimensionale Anordnung von anderen Objekten, wie z.B. Lochblenden, verwenden. Vom Faltungstheorem der Fourier-Transformation lernen wir wiederum, dass das Beugungsbild dem Produkt der Fourier-Transformierten des Punktgitters und dem des Einzelobjekts entspricht. Im Beugungsbild liefert deshalb die Lage der Hauptmaxima die Information über die räumliche Wiederholung des Objekts, die Intensitäten der Hauptmaxima geben dann die Information über die Form der periodisch angeordneten, beugenden Objekte wieder.

Das reziproke Gitter in zwei Dimensionen

Wir wollen jetzt das Konzept des reziproken Gitters einführen. Dazu nehmen wir an, dass die Positionen von Lochblenden in einem zweidimensionalen, unendlich ausgedehnten periodischen Gitter durch zwei gegebene Gittervektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} definiert werden, so dass

$$f(x, y) = \sum_{h, k=-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{r} - h\mathbf{a} - k\mathbf{b}) . \quad (5.5.30)$$

Damit wird an jeden Punkt des periodischen Gitters, dessen Elementarzelle ein Parallelogramm mit den Seiten \mathbf{a} und \mathbf{b} ist, eine Delta-Funktion gesetzt.¹³

Die Fourier-Transformierte von (5.5.30) ist, wenn man \mathbf{u} für den Vektor (u, v) einsetzt, gegeben durch

$$\Psi(u, v) = \sum_{h, k=-\infty}^{\infty} \exp[-i\mathbf{u} \cdot (h\mathbf{a} + k\mathbf{b})] . \quad (5.5.31)$$

¹³Für ein gegebenes Gitter gibt es verschiedene Möglichkeiten, \mathbf{a} und \mathbf{b} zu wählen. Normalerweise sind aber ein oder zwei davon die offensichtlich einfachste Wahl.

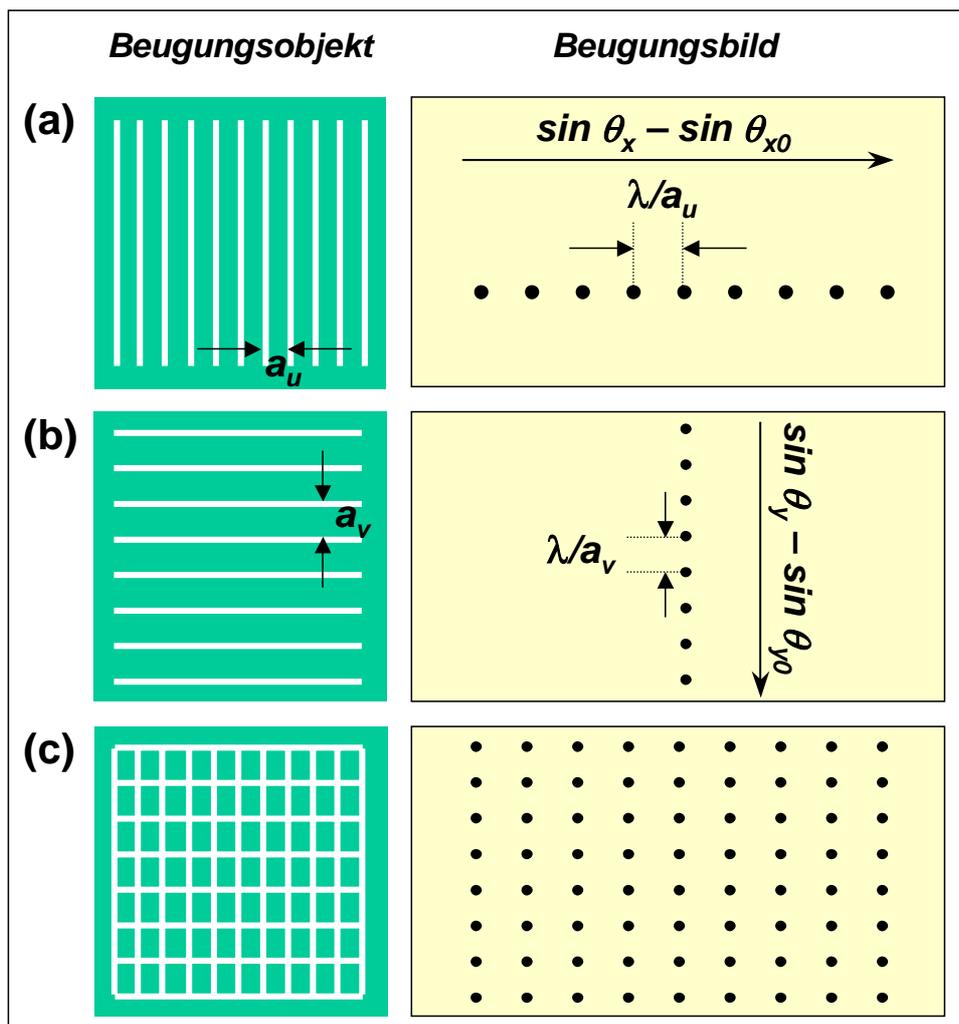


Abbildung 5.29: Zur Veranschaulichung der Beugung am Kreuzgitter. Sind die beugenden Strukturen nur in u - (a) oder nur in v -Richtung (b) moduliert, so erhält man entsprechende eindimensionale Beugungsbilder. Bei einer Kombination beider Strukturen, d.h. für ein Kreuzgitter, (c) ergibt sich ein Beugungsmuster mit einer regelmäßigen zweidimensionalen Punktanordnung.

Dieser Ausdruck kann deutlich vereinfacht werden, wenn man zwei neue Vektoren \mathbf{a}^* und \mathbf{b}^* in der Ebene von \mathbf{u} einführt, so dass

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^* &= 1, & \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^* &= 1, \\
 \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{b}^* \cdot \mathbf{a} = 0 & \text{d.h. } \mathbf{a}^* \perp \mathbf{b} \text{ und } \mathbf{b}^* \perp \mathbf{a} .
 \end{aligned}
 \tag{5.5.32}$$

Die Vektoren \mathbf{a}^* und \mathbf{b}^* sind nicht parallel und somit kann \mathbf{u} als Linearkombination der beiden ausgedrückt werden

$$\mathbf{u} = (\mathbf{h}^* \mathbf{a}^* + \mathbf{k}^* \mathbf{b}^*) 2\pi ,
 \tag{5.5.33}$$

wobei \mathbf{h}^* und \mathbf{k}^* einfach beliebige Zahlen darstellen. Damit wird aus (5.5.31)

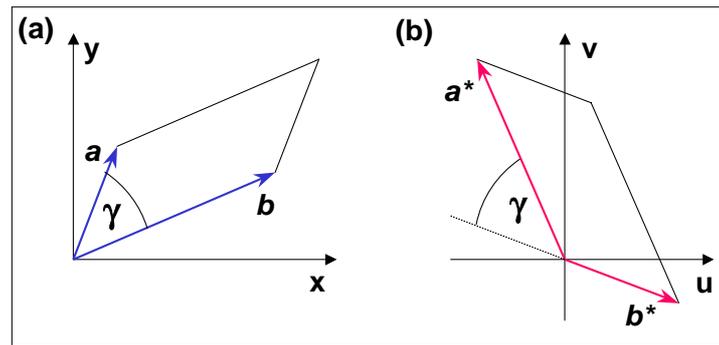


Abbildung 5.30: Zum Zusammenhang zwischen Raumgittervektoren (a) und Vektoren des reziproken Gitters (b). Es ist jeweils die zweidimensionale Einheitszelle dargestellt.

$$\begin{aligned}
 \Psi(u, v) &= \sum_{h, k=-\infty}^{\infty} \exp[-2\pi i(hh^* \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{a} + kk^* \mathbf{b}^* \cdot \mathbf{b})] \\
 &= \sum \exp[-2\pi i(hh^* + kk^*)] . \quad (5.5.34)
 \end{aligned}$$

Die Summe ist für allgemeine h^* und k^* normalerweise klein, da sie eine unendliche Summe aus komplexen Zahlen mit einem Betrag von eins darstellt, die sich im Wesentlichen gegenseitig aufheben. Sind dagegen h^* und k^* ganze Zahlen, so ist jeder Term gleich eins und $\Psi(u, v)$ wird unendlich. Daher ist $\Psi(u, v)$ ein Gitter von Delta-Funktionen auf dem Gitter, das durch die Gittervektoren \mathbf{a}^* und \mathbf{b}^* definiert wird. Dieses Gitter ist das *reziproke Gitter*.

Die Vektoren \mathbf{a}^* und \mathbf{b}^* sind leicht zu identifizieren (siehe hierzu Abb.5.30). Ist der Winkel zwischen \mathbf{a} und \mathbf{b} gleich γ , dann definieren die Beziehungen $\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{a} = 1$ und $\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{b} = 0$ den Vektor \mathbf{a}^* als den Vektor, der senkrecht auf \mathbf{b} steht und eine Länge $(a \sin \gamma)^{-1}$ hat. Analog dazu ist \mathbf{b}^* senkrecht zu \mathbf{a} und hat die Länge $(b \sin \gamma)^{-1}$. Die Vektoren \mathbf{a}^* und \mathbf{b}^* heißen *reziproke Gittervektoren*. Der Name reziprokes Gitter kommt daher, dass die Dimensionen des reziproken Gitters in einem reziproken Verhältnis zu denen des normalen Raumgitters stehen. Reduzieren wir z.B. \mathbf{a} und \mathbf{b} um einen konstanten Faktor, dehnt sich das reziproke Gitter um diesen Faktor aus.

5.6 Vertiefungsthema: Dreidimensionale Interferenz

Fraunhofer-Beugung an dreidimensionalen Objekten hat zahlreiche Anwendungen, die wichtigste ist sicherlich die *Beugung an einem Kristall*. Sie stellt dabei nicht nur eine gewöhnliche Erweiterung der ein- und zweidimensionalen Fälle in die dritte Dimension dar, den die bisher entwickelte Theorie beschrieb das Beugungsmuster im Wesentlichen als Lösung eines Randwertproblems, in dem die auf das Objekt fallende Welle sich gemäß dem Huygens'schen Prinzip weiterbewegt, wie es durch die Kirchhoff-Huygens-Theorie beschrieben wird. Ist das Beugungsobjekt dreidimensional, so kann es vorkommen, dass die Randbedingungen überbestimmt sind und ein Beugungsmuster nicht existiert. Wir werden in der Tat sehen, dass die Fourier-Transformation alleine das Beugungsmuster nicht beschreiben kann. Es muss vielmehr eine weitere Bedingung, die durch die Konstruktion der *Ewald-Kugel* beschrieben wird, erfüllt sein, die uns sagt, welche Teile der Fourier-Transformation zum Beugungsmuster beitragen.

5.6.1 Kristalle und Faltungen

Kristalle stellen dreidimensionale Beugungsgitter dar. Sie beugen Wellen mit passender Wellenlänge wie z.B. Materiewellen aus Neutronen, Elektronen, oder Atomen sowie Röntgenstrahlen. Da die grundlegenden Prinzipien nicht von der Art der verwendeten Wellen abhängen, werden wir unsere Diskussion auf die Beugung von Röntgenstrahlen konzentrieren. Die Theorie hierfür wurde ursprünglich von **Max von Laue** für den Fall der schwachen Streuung ausgearbeitet. Schwache Streuung bedeutet hierbei, dass eine Welle, die innerhalb des Kristalls einmal gestreut wurde, mit verschwindender Wahrscheinlichkeit ein zweites mal gestreut wird.

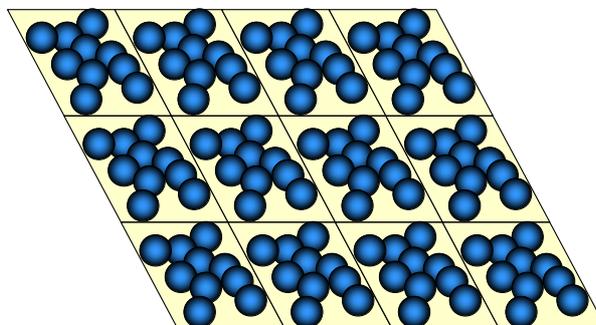


Abbildung 5.31: Zweidimensionale Darstellung eines Kristallgitters.

Ein Kristall besteht im Prinzip aus einer Ansammlung von Atomen. Aus Gründen der Einfachheit wollen wir annehmen, dass es nur eine Sorte identischer Atome gibt. Da Röntgenstrahlen nur an der Elektronenhülle der Atome gestreut werden, kann vom Gesichtspunkt der Röntgenbeugung aus ein Kristall als ein Satz von Atompositionen (charakterisiert durch Delta-Funktionen) betrachtet werden, der mit der Elektronendichtefunktion eines einzelnen Atom gefaltet ist. Die Positionen der Atome wiederholen sich auf einem Gitter. Das bedeutet, dass sich eine kleine Gruppe von Atomen, die so genannte *Elementarzelle*, periodisch in drei Dimensionen wiederholt. Dadurch können wir einen Kristall als eine Faltung der Elementarzelle mit den Gitterpositionen darstellen (zur Faltung siehe Anhang B.5). Insgesamt können wir die Transmissionsfunktion eines unendlich ausgedehnten Kristalls zu

$$f_{\text{Kristall}} = f_{\text{Gitter}} \otimes f_{\text{Zelle}} \otimes f_{\text{Atom}}$$

angeben. Hierbei gibt f_{Gitter} die Position der Einheitszellen im Kristallgitter (δ -Funktionen), f_{Zelle} die Position der Atome in der Einheitszelle (δ -Funktionen) und f_{Atom} die Transmissionsfunktion der einzelnen

Atome in der Zelle an (Elektronendichte bei Röntgenstrahlen). Die Beugungsfunktion des Kristalls ergibt sich als das Produkt der Fourier-Transformierten dieser drei Funktionen. Diese Idee ist in Abb. 5.31 für den zweidimensionalen Fall skizziert. Diese Vorgehensweise würde zu einem unendlich ausgedehnten Kristall führen. Wir schränken deshalb seine Ausdehnung ein, indem wir die Faltung mit einer Funktion multiplizieren, die die Kristallränder repräsentiert.

Aus dem *Faltungssatz* (siehe (B.71) in Anhang B.5) können wir folgern, dass die Transformierte der Elektronendichtefunktion als Faltung der Transformierten der Begrenzungsfunktion mit dem Produkt von drei anderen Transformierten ausgedrückt werden kann, nämlich die des Atom, die des Satzes der Delta-Funktionen, die die Atompositionen in der Einheitszelle repräsentieren, und die des Kristallgitters. Dies ist eine vollständige Beschreibung der Theorie der Röntgenbeugung. Was wir jetzt noch brauchen sind kleinere Details, die aber leicht ganze Lehrbücher füllen, da die einzelnen Teilaspekte oft sehr komplex sind. Wir werden uns im Folgenden nur mit den wesentlichen Aspekten befassen. Wir werden die Beugung am Kristallgitter diskutieren und uns um die Bestimmung der Positionen der einzelnen Atome innerhalb einer Elementarzelle kümmern.

5.6.2 Beugung an einem dreidimensionalen Gitter

Wir wollen nun das Beugungsmuster diskutieren, das durch ein *dreidimensionales Gitter* von Delta-Funktionen erzeugt wird. Wir nehmen dazu eine einlaufende Welle mit Wellenvektor \mathbf{k}_0 an, die in eine Welle mit Wellenvektor \mathbf{k} gebeugt wird. Aus Gründen der Energieerhaltung (elastische Streuung) müssen die einlaufende und die gebeugte Welle die gleiche Frequenz haben. Wegen $\omega = ck$ müssen die Beträge von \mathbf{k}_0 und \mathbf{k} gleich sein:

$$|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}_0|. \quad (5.6.1)$$

Alternativ kann man die Formulierung benutzen, dass beide Wellen die gleiche Zeitabhängigkeit $\exp(-i\omega_0 t)$ besitzen müssen. Diese Bedingung kann geometrisch dadurch dargestellt werden, dass \mathbf{k}_0 und \mathbf{k} Radiusvektoren einer Kugel sein müssen, die *Ewald-Kugel*, *Reflexionskugel* oder *Beobachtungskugel* heißt (siehe Abb.5.32). Eine Beugungsordnung, die die obige Bedingung erfüllt, heißt *Bragg-Reflex*.¹⁴

Wir berechnen nun die Amplitude der in Richtung \mathbf{k} gebeugten Welle. Die Delta-Funktion am Gitterpunkt \mathbf{r}' wirkt als Sekundärquelle mit einer Stärke, die proportional zu der einfallenden Welle an diesem Punkt

$$\Psi_s = \exp[i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}')] \quad (5.6.2)$$

ist. Die Proportionalitätskonstante setzen wir hier aus Gründen der Einfachheit gleich eins. Diese Quelle streut nun eine Welle in Richtung \mathbf{k} , die wir als

$$\Psi(\mathbf{k}) = \exp(i[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \phi]) \quad (5.6.3)$$

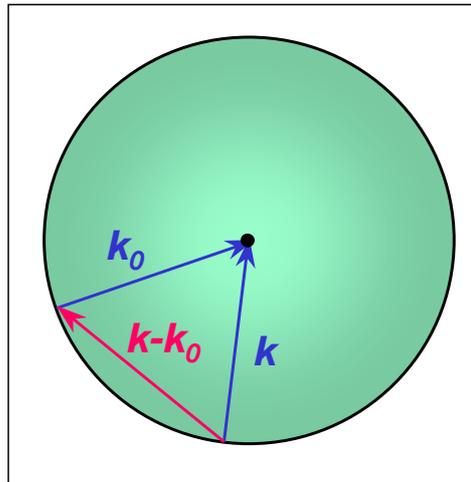


Abbildung 5.32: Ewald-Kugel.

schreiben können. Hierbei stellt ϕ eine bislang beliebige Phase dar. Diese Welle geht wie (5.6.2) von \mathbf{r} aus, so dass gelten muss

$$\exp[i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}')] = \exp(i[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') + \phi]) . \quad (5.6.4)$$

Daraus folgt

$$\phi = (\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}' \quad (5.6.5)$$

sowie

$$\Psi(\mathbf{k}) = \exp(i[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + (\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}']) . \quad (5.6.6)$$

Der vollständig gebeugte Strahl mit Wellenvektor \mathbf{k} kann daher durch Summation von (5.6.6) über alle möglichen \mathbf{r}' des Gitters aus Delta-Funktionen mit den Gittervektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} erhalten werden. Nach Abschnitt 5.5.4 erhalten wir

$$f(\mathbf{r}') = \sum_{h,k,l=-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{r} - h\mathbf{a} - k\mathbf{b} - l\mathbf{c}) \quad h,k,l \text{ ganzzahlig} , \quad (5.6.7)$$

was sich zu der Summe

¹⁴Benannt nach W. L. Bragg, der 1912 die Idee der Reflexion von Röntgenstrahlen an Kristallebenen einführte.

$$\Psi(\mathbf{k}) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \sum_{h,k,l=-\infty}^{\infty} \exp(i[(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot (h\mathbf{a} + k\mathbf{b} + l\mathbf{c})]) \quad (5.6.8)$$

vereinfachen lässt. In gleicher Weise wie in Abschnitt 5.5.4 können wir sehen, dass die Summe offensichtlich Null ist, außer wenn die Phasen aller Terme Vielfache von 2π sind, das heißt, wenn

$$(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot (h\mathbf{a} + k\mathbf{b} + l\mathbf{c}) = 2\pi s, \quad s \text{ ganzzahlig} . \quad (5.6.9)$$

Eine triviale Lösung dieser Gleichung ist

$$(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) = 0, \quad s = 0 , \quad (5.6.10)$$

die ebenfalls (5.6.1) erfüllt. Es gibt aber noch eine Vielzahl anderer Lösungen

5.6.3 Das reziproke Gitter in drei Dimensionen

Die weiteren Lösungen von (5.6.9) können mit Hilfe der Konstruktion des reziproken Gitters abgeleitet werden. Die Vektoren $\mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ zwischen den Punkten des reziproken Gitters werden reziproke Gittervektoren genannt und sind ebenfalls Lösungen von (5.6.9). Im dreidimensionalen Fall definieren wir die Einheitsvektoren des reziproken Gitters \mathbf{a}^* , \mathbf{b}^* und \mathbf{c}^* in Bezug auf die Gittervektoren des realen Gitters durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^* &= \frac{1}{V} \mathbf{b} \times \mathbf{c} \\ \mathbf{b}^* &= \frac{1}{V} \mathbf{c} \times \mathbf{a} \\ \mathbf{c}^* &= \frac{1}{V} \mathbf{a} \times \mathbf{b} , \end{aligned} \quad (5.6.11)$$

wobei $V = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ das Volumen der Einheitszelle im Ortsraum ist. Daraus folgt nun, dass für den Fall, dass $(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)/2\pi$ als Summe von ganzzahligen Vielfachen von \mathbf{a}^* , \mathbf{b}^* und \mathbf{c}^* geschrieben werden kann, die Summation in (5.6.8) divergiert, in jedem anderen Fall aber verschwindet. Das heißt, die Bestimmungsgleichung für das dreidimensionale reziproke Gitter aus Delta-Funktionen kann als

$$\begin{aligned} (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)/2\pi &= h^*\mathbf{a}^* + k^*\mathbf{b}^* + l^*\mathbf{c}^*, & h^*, k^*, l^* \text{ ganzzahlig} \\ \text{oder} & \mathbf{k} - \mathbf{k}_0 = \mathbf{G} \end{aligned} \quad (5.6.12)$$

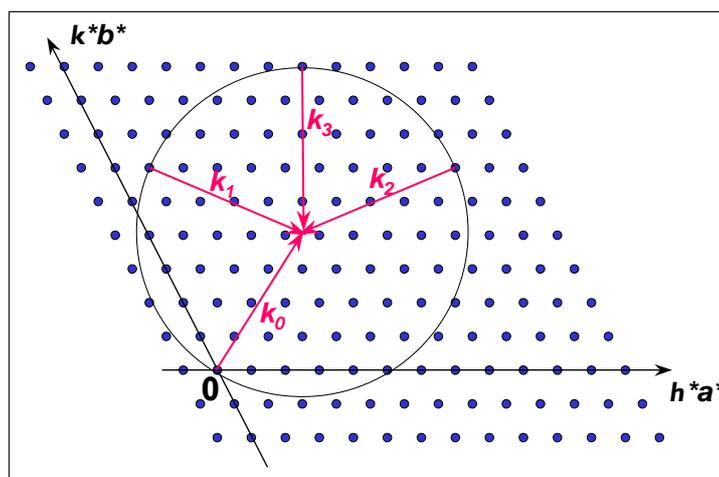


Abbildung 5.33: Zweidimensionale Darstellung des Schnitts der Ewald-Kugel mit dem reziproken Gitter. Eingezeichnet ist der einfallende Strahl \mathbf{k}_0 und drei gestreute Strahlen \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 und \mathbf{k}_3 .

geschrieben werden, wobei \mathbf{G} ein reziproker Gittervektor ist.

Das beobachtete Beugungsmuster besteht aus Strahlen, die sowohl (5.6.1) als auch (5.6.12) erfüllen. Diese beiden Bedingungen werden geometrisch durch die Ewald-Kugel und das reziproke Gitter dargestellt. Man kann daher die Ewald-Kugel und das reziproke Gitter übereinander zeichnen und nach Schnittpunkten suchen. Dies ist in Abb. 5.33 beispielhaft für ein zweidimensionales System gezeigt. Die Ewald-Kugel geht durch den Ursprung des reziproken Gitters (da $\mathbf{k} - \mathbf{k}_0 = 0$ ein Punkt auf ihr ist) und ihr Ursprung ist durch den Endpunkt des Vektors \mathbf{k}_0 bestimmt. Mathematisch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel mit einem Satz von diskreten Punkten exakt schneidet, vernachlässigbar klein. Da aber in der Realität weder ein völlig paralleler Strahl noch eine exakt monochromatische Quelle existieren, kommt es trotzdem zur Beugung an einem Kristall

In der Praxis werden verschiedene Typen von Beugungsexperimenten durchgeführt, die sich in der Art unterscheiden, wie (5.6.12) erfüllt wird. Um (5.6.12) zu erfüllen, kann man entweder die Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k_0$ oder die Richtung zwischen einfallendem Röntgenlicht und den Gitterebenen variieren.

- **Das Laue Verfahren:**

Beim Laue Verfahren verwendet man einen fest eingebauten, orientierten Einkristall und beleuchtet ihn längs einer bestimmten Kristallachse mit polychromatischem Röntgenlicht. Beim Laue-Verfahren wird also mit variabler Wellenlänge gearbeitet, wodurch man eine schnelle Übersicht des Beugungsbildes erhält. Insbesondere eignet sich das Verfahren gut zur Orientierung von Kristallen und zur Bestimmung der Symmetrieeigenschaften. Für eine detaillierte Analyse der Kristallstruktur ist das Laue Verfahren nicht geeignet.

- **Das Debye-Scherrer Verfahren:**

Bei diesem Verfahren benutzt man monochromatisches Röntgenlicht und bestrahlt damit eine pulverförmige Probe. Da in der Pulverprobe in der Regel eine gleichmäßige Verteilung der Kristallite vorliegt, bietet man praktisch alle möglichen Einfallswinkel an. Deshalb gibt es immer Kristallite, die die Bedingung (5.6.12) erfüllen. Die entsprechenden Reflexe liegen auf Kegeln um die Achse des einfallenden Röntgenstrahls. Das Debye-Scherrer Verfahren eignet sich allerdings nur für Kristalle mit einer kleinen Zahl von Atomen pro Einheitszelle.

- **Das Drehkristallverfahren:**

Für die Analyse komplizierter Kristalle wird meist das Drehkristallverfahren angewendet. Dabei

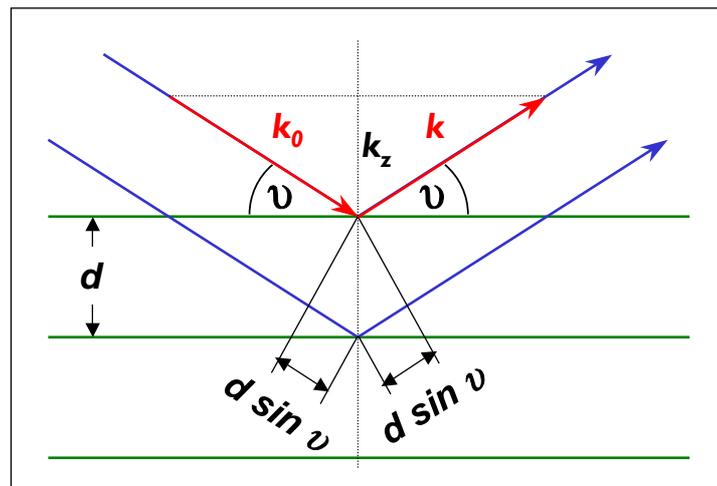


Abbildung 5.34: Bragg-Reflexion von Röntgenlicht an benachbarten Netzebenen eines Kristalls.

beleuchtet man einen Kristall mit monochromatischem Licht und dreht ihn. Man detektiert gleichzeitig mit einem Detektor oder einer Photoplatte die auftretenden Reflexe. Aus einer Serie von mehreren Drehaufnahmen erhält man dann das reziproke Gitter und die Informationen über die Kristallstruktur.

Die Bragg-Bedingung

Die Untersuchung von Kristallen mit Hilfe von Röntgen-, Elektronen- oder Neutronen-Streuung wird im Detail im Rahmen der Festkörperphysik diskutiert. Wir wollen hier zum Abschluss noch eine vereinfachte Beschreibung der Beugung an Kristallen im Zusammenhang mit der Bragg-Reflexion vorstellen. Dazu gehen wir davon aus, dass die Atome in Kristallen in Ebenen, den so genannten Netzebenen, angeordnet sind. Trifft nun Röntgenlicht auf diese Ebenen, so tritt eine intensive Reflexion nur dann auf, wenn der Gangunterschied zwischen den an den einzelnen Netzebenen reflektierten Strahlen ein ganzzahliges Vielfaches von λ beträgt und dadurch eine konstruktive Interferenz auftritt. Aus Abb. 5.34 folgt, dass bei einem Abstand d der Netzebenen und einem Einfallswinkel ϑ zwischen Röntgenstrahl und Netzebene konstruktive Interferenz dann auftritt, wenn

$$2d \sin \vartheta = m \lambda \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (5.6.13)$$

gilt. Diese Gleichung nennt man *Bragg-Beziehung* und lässt sich natürlich aus (5.6.12) ableiten. Da bei der Reflexion die Projektion k_z von \mathbf{k} senkrecht zur Netzebene gerade ihr Vorzeichen ändert, gilt $\mathbf{k} - \mathbf{k}_0 = -2k_z = 2k \sin \vartheta = 2(2\pi/\lambda) \sin \vartheta = G_z = 2\pi m/d$. Die Bragg-Bedingung wird häufig eingesetzt, um durch Reflexion von spektral breitbandigem Röntgenlicht an einem perfekten Einkristall eine spezielle Wellenlänge, für die die Bragg-Bedingung erfüllt ist, zu selektieren. Ebenso lassen sich mit Hilfe von Einkristallen Röntgenspektrometer hoher Auflösung konstruieren.

Beugung am Kristall

Eine wichtige Aufgabe bei der Analyse von Kristallstrukturen mit Hilfe von Röntgen-, Elektronen- oder Neutronenbeugung ist es, neben der Bestimmung des Kristallgitters auch die Anordnung der Atome der auf den Gitterpunkten angeordneten Einheitszelle zu bestimmen. Diese folgt aus der Variation der

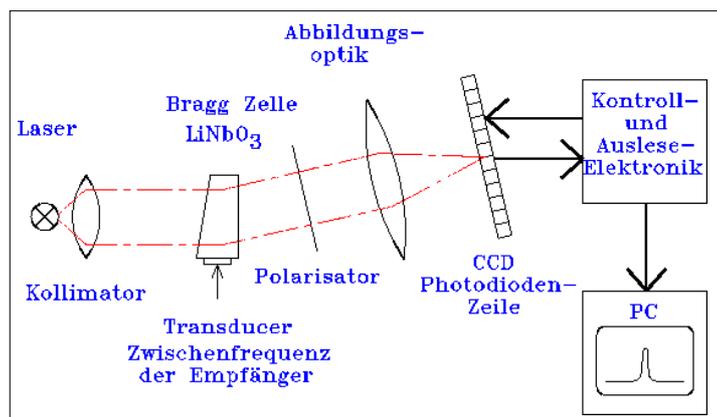


Abbildung 5.35: Funktionsprinzip eines akustooptischen Spektrometers zur Analyse des Zwischenfrequenzsignals eines Heterodynempfängers in der Radioastronomie (Quelle: I. Physikalisches Institut, Universität zu Köln).

Intensitäten der einzelnen Beugungsreflexe, die aus der Multiplikation des reziproken Gitters mit der Transformierten der Atompositionen innerhalb einer Einheitszelle resultiert. Die Analyse der Intensitäten ist im Allgemeinen nicht einfach. Insbesondere kann man nur für die Röntgen- und Neutronenbeugung annehmen, dass keine Mehrfachstreuungen im Kristall stattfinden. Dies ist bei der Elektronenbeugung aufgrund der starken Wechselwirkung der Elektronen mit den Elektronenwolken der Atome nicht der Fall. Dies führt zu komplizierten Korrekturen, die die quantitative Analyse von Beugungsmustern sehr schwierig machen.

5.6.4 Der akustooptische Effekt

Beeinflusst man ein homogenes Medium mit einer akustischen Welle, so wird die Dichte und damit der Brechungsindex des Mediums räumlich moduliert. Die Modulation stellt meist eine eindimensionale, kosinusförmige Modulation des Brechungsindex dar:

$$n(\mathbf{r}) = n_0 + A \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \Omega t) . \quad (5.6.14)$$

Solche Modulationen können z.B. durch Ultraschallwellen oder akustische Oberflächenwellen erzeugt werden. Bestrahlt man ein solches Medium mit Licht, so gilt üblicherweise $2\pi/q \gg \lambda$, so dass sich das Medium wie ein dreidimensionales Phasengitter mit der Periode $2\pi/q$ verhält. Ferner ist die Schallgeschwindigkeit klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit, $v_s \ll c$, so dass das Licht das Phasengitter als stationäre Modulation sieht. Da die einfallende Lichtwelle sowohl gebeugt als auch gebrochen wird, ist die exakte Lösung der Streuung von Licht an dem akustisch modulierten Medium schwierig und soll hier nicht behandelt werden.

Eine interessante Anwendung von schallmodulierten Medien sind Akustooptische Spektrometer. Hierbei wird mit einem piezoelektrischen Transducer mit einem zu analysierenden Hochfrequenzsignal eine akustische Welle in einem Kristall erzeugt. Diese Welle moduliert den Brechungsindex und erzeugt ein Phasengitter. Der Kristall wird mit einem kollimierten Laserstrahl von der Seite beleuchtet. Die Winkeldispersion des gebeugten Lichts ergibt dann ein Bild des Spektrums des Hochfrequenzsignals, welches mit einem CCD-Detektor aufgenommen werden kann. Jedem Ort kann dabei eine bestimmte Frequenz

zugeordnet werden und mit der sich an einem bestimmten Ort befindenen CCD-Zelle kann die Intensität, also die Intensität der Frequenzkomponente bestimmt werden. Man kann damit eine sehr schnelle Fourieranalyse von hochfrequenten Signalen erzielen. Dieses Verfahren wird z.B. in der Radioastronomie eingesetzt, um das Zwischenfrequenzsignal eines Heterodynempfängers spektral zu analysiert (siehe Abb. 5.35).

5.7 Interferometrie

Wir wollen in diesem Abschnitt das Themengebiet *Interferometrie* behandeln. Darunter versteht man die Anwendung von Interferenzphänomenen zu messtechnischen Zwecken. Einige der genauesten Messungen sowohl von räumlichen Dimensionen als auch von Frequenzen sind mit interferometrischen Methoden durchgeführt worden, wobei Wellen unterschiedlicher Art (elektromagnetische, akustische, Materiewellen) verwendet wurden. Die Vielfalt von interferometrischen Methoden und Instrumenten ist heute sehr groß, so dass wir hier nur einen kleinen Ausschnitt abdecken können.

Die Entdeckung von Interferenzeffekten durch **Young**¹⁵ ermöglichte es ihm, das erste interferometrische Experiment durchzuführen, nämlich die *Bestimmung der Wellenlänge des Lichts*. Ganz allgemein ist Interferenz möglich zwischen Wellen, die einen von Null verschiedenen Grad gegenseitiger Kohärenz besitzen und auch von verschiedenen Quellen ausgehen können. Das Thema Kohärenz von Lichtquellen werden wir erst später behandeln (siehe Kapitel 6). Wir nehmen im Folgenden einfach an, dass die interferierenden Wellen entweder vollkommen kohärent oder vollkommen inkohärent sind. Im Falle der vollen Kohärenz gibt es eine feste Phasenbeziehung zwischen den Wellen und man kann dann zeitlich stationäre Interferenzeffekte beobachten.

Überlagert man kohärente Wellen, so muss man ihre komplexen Amplituden addieren. Um ihre Intensität zu berechnen muss man das Betragsquadrat dieser Summe bilden. Bei inkohärenten Wellen berechnen wir dagegen zuerst die Amplitudenquadrate und addieren diese dann auf. Wir betrachten hierzu als Beispiel zwei identische Punktlichtquellen,¹⁶ die sich auf der x -Achse bei x_0 und $-x_0$ befinden, und berechnen die Intensität bei $x = 0$:

$$\begin{aligned}\Psi(0) &= \Psi_1(0) + \Psi_2(0) = \frac{a_Q}{x_0} \exp[i(kx_0 - \omega t)] + \frac{a_Q}{x_0} \exp[i(kx_0 - \omega t)] \\ \text{kohärent: } |\Psi(0)|^2 &= |\Psi_1(0) + \Psi_2(0)|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + 2\text{Re}(\Psi_1\Psi_2^*) = 4 \left(\frac{a_Q}{x_0}\right)^2 \\ \text{inkohärent: } |\Psi(0)|^2 &= |\Psi_1(0)|^2 + |\Psi_2(0)|^2 = 2 \left(\frac{a_Q}{x_0}\right)^2.\end{aligned}\quad (5.7.1)$$

Bei der Überlagerung der kohärenten Wellen erhält man bei $x = 0$ die Gesamtintensität $4|\Psi|^2$, wogegen sie für inkohärente Teilwellen nur $2|\Psi|^2$ beträgt.

Für eine genauere Betrachtung müssen wir die ortsabhängige Phasendifferenz $\Delta\phi$ zwischen den sich überlagernden Teilwellen berücksichtigen. Mit

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \Psi_1(x) + \Psi_2(x) \\ &= \frac{a_Q}{x+x_0} \exp[i(k(x+x_0) - \omega t) - \phi_1] + \frac{a_Q}{x_0-x} \exp[i(k(x_0-x) - \omega t) - \phi_2]\end{aligned}\quad (5.7.2)$$

erhält man

¹⁵1801 erzeugt Young (1773 - 1829) seine Beugungsmuster am Doppelspalt, ein einfaches Experiment, dessen Ergebnisse nicht anzuzweifeln waren. 1815 erarbeitete Fresnel eine theoretische Beschreibung. 1821 erzeugte dann Fraunhofer die ersten Beugungsmuster mit parallelem Licht, deren theoretische Beschreibung wesentlich einfacher war.

¹⁶Die kugelsymmetrischen Wellen, die von einer Punktlichtquelle am Ort \mathbf{r}_0 auslaufen, können durch $\Psi_{\text{Kugel}} = \frac{a_Q}{|\mathbf{r}|} \exp[i(\mathbf{k}|\mathbf{r}| - \omega t)]$ beschrieben werden, wobei $|\mathbf{r}| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$.

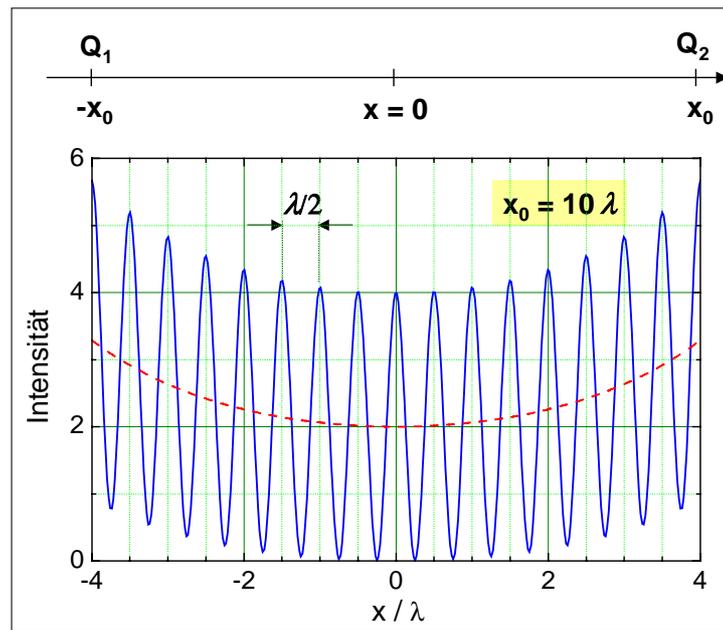


Abbildung 5.36: Interferenzerscheinung bei der Überlagerung von zwei kohärenten Punktquellen Q_1 und Q_2 an den Stellen $-x_0$ und x_0 . Die gestrichelte Kurve ergibt sich bei der Überlagerung von zwei inkohärenten Teilwellen.

$$\begin{aligned}
 |\Psi(x)|^2 &= |\Psi_1(x) + \Psi_2(x)|^2 \\
 &= \Psi_1^* \Psi_1 + \Psi_2^* \Psi_2 + \Psi_1^* \Psi_2 + \Psi_1 \Psi_2^* = \Psi_1^* \Psi_1 + \Psi_2^* \Psi_2 + 2\operatorname{Re}(\Psi_1^* \Psi_2) \\
 &= \left(\frac{a_Q}{x+x_0}\right)^2 + \left(\frac{a_Q}{x_0-x}\right)^2 + \left(\frac{2a_Q^2}{x_0^2-x^2}\right) \operatorname{Re}[\exp(i[k(2x) + \phi_2 - \phi_1])] \\
 &= \left(\frac{a_Q}{x+x_0}\right)^2 + \left(\frac{a_Q}{x_0-x}\right)^2 + \left(\frac{2a_Q^2}{x_0^2-x^2}\right) \cos(2kx + \Delta\varphi) . \tag{5.7.3}
 \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet man den \cos -Term als Interferenzterm. Die Abhängigkeit (5.7.3) ist in Abb. 5.36 gezeigt. Bei kohärenten Teilwellen ist die Phasendifferenz $\phi_2 - \phi_1$ zwischen den beiden Teilwellen zeitlich konstant, so dass der letzte Term in (5.7.3) zur zeitlich über viele Schwingungsperioden gemittelten Intensität beiträgt. Die relative Phasenlage der beiden Teilwellen ist durch $\Delta\varphi = k(x_1 - x_2) + \phi_2 - \phi_1$ gegeben. Bei $x = 0$ ist $x_1 = x_2$ und damit $\Delta\varphi = \phi_2 - \phi_1$. In unserem Beispiel in Abb. 5.36 haben wir $\Delta\varphi = \phi_2 - \phi_1 = 0$ angenommen. Bewegt man sich um Δx von $x = 0$ weg, so haben die beiden Wellen dort einen Phasenunterschied $\Delta\varphi = k2\Delta x = 2\Delta x \cdot 2\pi/\lambda$. Das heißt, bei $\Delta x = \lambda/4$ ergibt sich gerade eine Phasenschiebung von π und es kommt zur Auslöschung der sich kohärent überlagernden Wellen. In unserem Beispiel ist die Auslöschung nicht vollkommen, da die Amplituden der von den Punktquellen ausgehenden Wellen nur bei $x = 0$ gleich sind. Bei weiterer Vergrößerung von Δx treten weitere Maxima und Minima in regelmäßigen Abständen von $\lambda/2$ auf.

Bei inkohärenten Teilwellen variiert $\phi_2 - \phi_1$ zeitlich, wodurch der zeitliche Mittelwert der Exponentialfunktion null wird und die Gesamtintensität sich zu $|\Psi(x)|^2 = |\Psi_1(x)|^2 + |\Psi_2(x)|^2 = \left(\frac{a_Q}{x+x_0}\right)^2 + \left(\frac{a_Q}{x_0-x}\right)^2$ ergibt. Dies ist als gestrichelte Kurve in Abb. 5.36 gezeigt. Eine mehr quantitative Analyse der Kohärenz von Lichtquellen wird in Kapitel 6 gegeben.

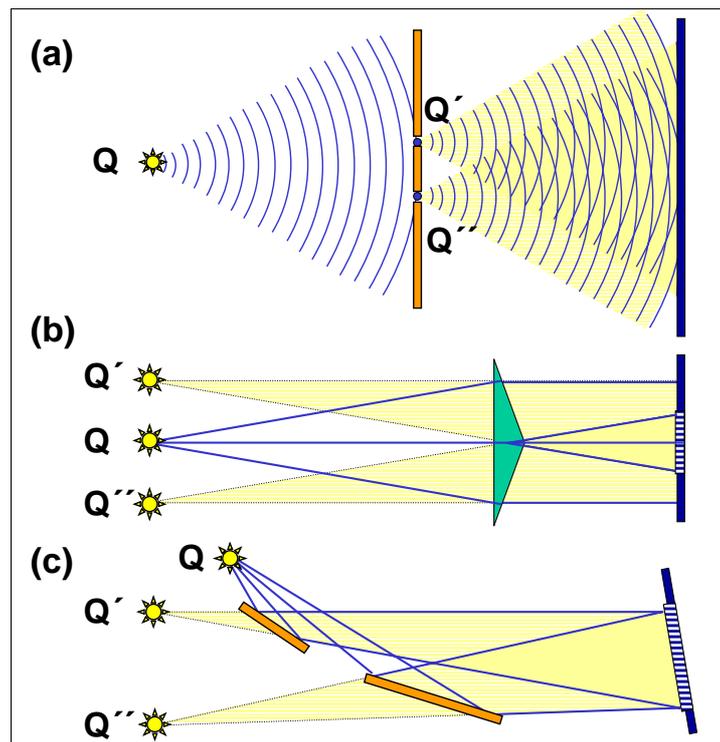


Abbildung 5.37: Interferometrie durch Aufspalten der Wellenfront. Gezeigt sind der Young'sche Doppelspalt (a), das Fresnel'sche Biprisma (b) und der Fresnel'sche Doppelspiegel (c).

Es stellt sich nun die Frage, warum man die ausgeprägten Interferenzerscheinungen, wie wir sie eben diskutiert haben, im Allgemeinen nicht beobachtet. Die Ursache dafür liegt in der hohen Frequenz des Lichts und in der kurzen Zeit, über die herkömmliche Lichtquellen elektromagnetische Wellen mit definierter Phase emittieren können. Die Notwendigkeit der Kohärenz der interferierenden Wellen macht für die Beobachtung von Interferenzeffekten bei optischen Frequenzen eine Einzelquelle notwendig. Die unterschiedlichen Methoden, einen einfallenden Strahl zu teilen und die verschiedenen Teilstrahlen anschließend wieder interferieren zu lassen, nachdem sie das zu messende System durchlaufen haben, machen die unterschiedlichen Klassen von Interferometern aus.

5.7.1 Interferometrie durch Aufspalten der Wellenfront

In Abb. 5.37 sind Interferometeranordnungen gezeigt, bei denen die interferierenden Lichtbündel dadurch erzeugt werden, dass unterschiedliche Anteile der Wellenfront zur Interferenz gebracht werden. Beim **Young'schen** Interferometer (Abb. 5.37a) werden die beiden Spaltöffnungen von einer Punktquelle oder einer entsprechend räumlich kohärenten Flächenquelle beleuchtet. Das Beleuchtungslicht der beiden Spalte stammt also von unterschiedlichen Stellen der primären Wellenfront. Die beiden Spalte dienen somit als kohärente Lichtquellen in einem Abstand a und erzeugen die in Abschnitt 5.5.1 diskutierten Streifenmuster. Durch Einbringen spezieller optischer Komponenten vor die Spaltöffnungen lassen sich dann verschiedene Interferenzexperimente durchführen. Das Young'sche Interferometer besitzt zwar einen einfachen Aufbau, erlaubt aber wegen der notwendigen schmalen Spaltbreiten nur lichtschwache Interferenzfiguren.

Beim **Fresnel'schen** Biprisma (Abb. 5.37b) oder beim **Fresnel'schen** Doppelspiegel (Abb. 5.37c) werden relativ breite Bereiche der Wellenfront zur Überlagerung gebracht und so lichtstarke Interferenzen erzeugt. Durch die Ablenkung des Lichts an den beiden Prismen oder den beiden Spiegeln werden die Lichtquel-

len verdoppelt. Der Schirm wird so beleuchtet, als käme das Licht von zwei zueinander kohärenten Lichtquellen Q' und Q'' .

Zweistrahlinterferometrie

Durch die Beobachtung von Interferenzmustern lässt sich die Wellenlänge des Lichts bestimmen. Obwohl das Young'sche Beugungsexperiment dabei keine hohe Messgenauigkeit zulässt, wollen wir exemplarisch analysieren, wie hoch die Messgenauigkeit bei diesem Experiment ist. Die Transmissionsfunktion der Spalte wollen wir durch zwei Delta-Funktionen, die einen Abstand a haben sollen, charakterisiert. Wir haben bereits gezeigt, dass das entsprechende Fraunhofer'sche Beugungsmuster für diese Transmissionsfunktion durch

$$\Psi(u) = 2 \cos(ua/2) \quad (5.7.4)$$

gegeben ist. Mit $u = k_0 \sin \theta$ erhält man

$$\begin{aligned} \Psi(\sin \theta) &= 2 \cos\left(\frac{k_0 a}{2} \sin \theta\right) \\ I = |\Psi(\sin \theta)|^2 &= 4 \cos^2\left(\frac{k_0 a}{2} \sin \theta\right) = 2 [1 + \cos(k_0 a \sin \theta)] . \end{aligned} \quad (5.7.5)$$

Wir sehen, dass wir maximale Intensität für

$$\begin{aligned} \frac{k_0 a}{2} \sin \theta &= m \pi \\ \text{oder} \quad \Delta s = a \sin \theta &= m \frac{2\pi}{k_0} = m \lambda \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (5.7.6)$$

erhalten. Analog dazu erhalten wir minimale Intensität für

$$\begin{aligned} \frac{k_0 a}{2} \sin \theta &= \frac{2m+1}{2} \pi \dots \\ \text{oder} \quad \Delta s = a \sin \theta &= \frac{2m+1}{2} \frac{2\pi}{k_0} = \frac{2m+1}{2} \lambda \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (5.7.7)$$

Hierbei ist Δs der Laufwegunterschied der beiden Teilwellen (vergleiche Abb. 5.27).

Wir wollen nun eine Quelle betrachten, die zwei Wellen mit unterschiedlichen Wellenzahlen k_1 und k_2 aussendet. Die zu diesen Wellenvektoren gehörigen Wellen addieren sich inkohärent, womit man unter der Annahme von zwei gleich hellen Quellen

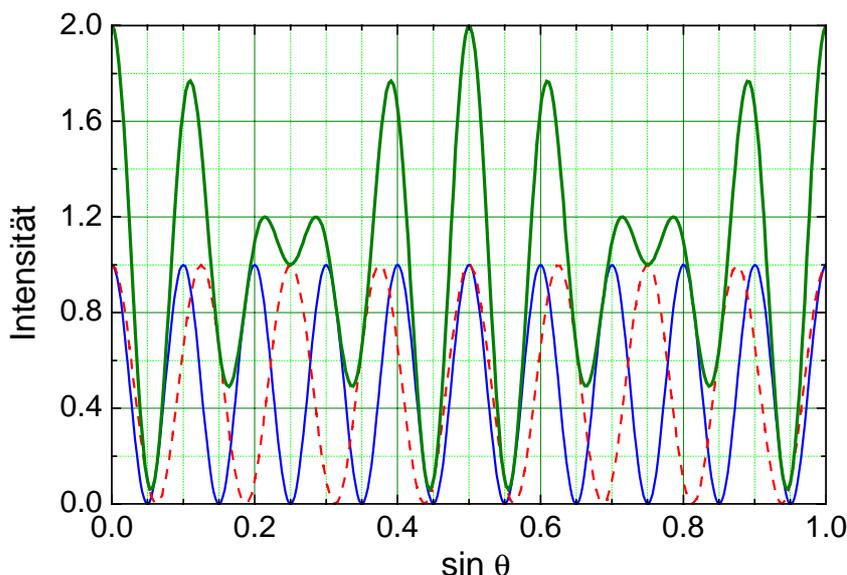


Abbildung 5.38: Zur Veranschaulichung der Zweistrahlinterferenz bei Verwendung einer Quelle, die zwei Wellen mit unterschiedlichen Wellenzahlen k_1 und k_2 aussendet. In der Abbildung wurde $k_1 a = 16\pi$ oder $a \lambda_1 = 8$ (rot, gestrichelt) und $k_2 a = 20\pi$ oder $a \lambda_2 = 10$ (blau) verwendet. Die Summenfunktion (grün) zeigt eine Schwebung, die aufgrund der unterschiedlichen Wellenzahlen zustande kommt. Um die beiden Wellenzahlen auflösen zu können, muss mindestens eine solche Schwebung im Intervall $0 \leq \sin \theta \leq 90^\circ$ auftreten.

$$I = 4 \left[\cos^2 \left(\frac{k_1 a}{2} \sin \theta \right) + \cos^2 \left(\frac{k_2 a}{2} \sin \theta \right) \right] \tag{5.7.8}$$

erhält. Die Gesamtintensität ergibt sich, wie in Abb. 5.38 gezeigt ist, somit aus der Summe von zwei \cos^2 -Funktionen. Die beiden Sätze von Beugungsmustern der Form \cos^2 sind außer Phase, was zu einer gleichmäßigen von θ unabhängigen Intensität führt, wenn die Bedingung

$$\frac{k_1 a}{2} \sin \theta - \frac{k_2 a}{2} \sin \theta = (2m + 1) \frac{\pi}{2} \tag{5.7.9}$$

erfüllt ist, wobei m eine ganze Zahl ist. Das Kriterium für die Auflösung einer einzelnen Wellenlänge ist intuitiv dadurch gegeben, dass die Bedingung (5.7.9) mindestens einmal für einen Beobachtungswinkel von $\theta < 90^\circ$ erfüllt wird. Dies ist der Fall, wenn

$$k_1 - k_2 = \frac{\pi}{a \sin \theta} > \pi/a \tag{5.7.10}$$

ist. Für $k_1 \simeq k_2$ lässt sich dieses Kriterium in Wellenlängen λ wie folgt ausdrücken:

$$\boxed{\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} > \frac{\lambda}{2a}} \tag{5.7.11}$$

Hierbei ist $\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$. Diese Bedingung wird *Auflösungsgrenze* genannt. Der inverse Ausdruck $\lambda/\Delta\lambda$ heißt *Auflösungsvermögen*. Ist $a = 1$ mm und $\lambda = 500$ nm, so wird ein Auflösungsvermögen bis zu 4000 erreicht. Enthält die Quelle allerdings mehr als zwei Wellenlängen, so wird das Beugungsmuster kompliziert und es ist keine so einfache Interpretation mehr möglich. Es werden dann kompliziertere Techniken, wie z.B. die Fourier-Spektroskopie (siehe Abschnitt 5.7.3), benötigt. Unsere jetzige Abhandlung enthält aber die vollständige Physik der so genannten *Zweistrahlinterferometrie*.

5.7.2 Beugungsgitter

Eine bedeutende Verbesserung im Auflösungsvermögen wird durch den Übergang von dem eben besprochenen Zweispaltsystem zu einem *Beugungsgitter* erreicht (siehe Abb. 5.39). Ein Beugungsgitter ist eine eindimensionale Anordnung von Blenden (z.B. schmalen Spalten oder Spiegeln). Wir haben in Abschnitt 5.5.3 gesehen, dass das Beugungsmuster einer solchen Anordnung eine periodische Anordnung von Delta-Funktionen ist, deren Stärke durch die genaue Form und Größe der einzelnen Blenden gegeben ist. Die Positionen der Delta-Funktionen werden nur durch die Gitterperiode a bestimmt und mit (5.5.16) lässt sich die Bedingung für das Auftreten von Intensitätsmaxima schreiben als

$$u = k_0(\sin \theta - \sin \theta_0) = u_m = \pm m \frac{2\pi}{a}$$

oder $\Delta s = a \sin \theta = \pm m \lambda \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$. (5.7.12)

Hierbei ist m die Beugungsordnung und Δs der Laufwegunterschied von Teilwellen benachbarter Gitterspalte (vergleiche Abb. 5.27). Da $k_0 = 2\pi/\lambda$ in der Definition von u enthalten ist, ist wie in Abb. 5.39 gezeigt der Beugungswinkel wellenlängenabhängig. Diese Abhängigkeit macht Beugungsgitter zu wichtigen Instrumenten in der Spektroskopie, man nennt sie *Gitterspektrometer*. Wir werden sie im Folgenden im Rahmen der skalaren Näherung diskutieren.

Wir wollen an dieser Stelle deutlich machen, dass Beugungserscheinungen nicht nur beim Durchgang eines Lichtbündels durch eine begrenzende Öffnung auftreten, sondern auch bei der Reflexion an einer spiegelnden Fläche. So erhält man z.B. durch Reflexion an einer spiegelnden Kreisfläche im reflektierten Licht ein Beugungsmuster, das völlig dem im durch eine Öffnung gleicher Form transmittierten Licht entspricht. Wir werden weiter unten sehen, dass Reflexionsgitter gegenüber Transmissionsgittern Vorteile hinsichtlich der Beugungseffizienz besitzen.

Herstellung von Beugungsgittern

Die ersten Gitter wurden durch Ritzen von feinen Linien in Glas oder Metall mittels einer Diamantspitze hergestellt. **Rowland** verwendete z.B. ein genaues Gewinde, um die Diamantspitze lateral zu verschieben, um einen wohldefinierten Abstand zwischen den einzelnen Linien zu erhalten. Diese Herstellungsmethode erfordert aber komplizierte Maschinen, da man während des Ritzens thermische Ausdehnungseffekte oder Veränderungen der Diamantspitze vermeiden muss.

In den letzten Jahren haben sich die Herstellungsverfahren für Gitter stark verändert. Gitter wurden z.B. dadurch hergestellt, indem man zuerst in eine Zylinderoberfläche ein sehr feines Gewinde geschnitten hat. Der Zylinder wird dann anschließend mit einem Kunststoff beschichtet, der dadurch einen genauen Abdruck des Gewindes enthält. Der Kunststoff wird schließlich abgewickelt und stellt ein überraschend genaues Gitter dar, das sich auf diese Weise sehr billig herstellen lässt.

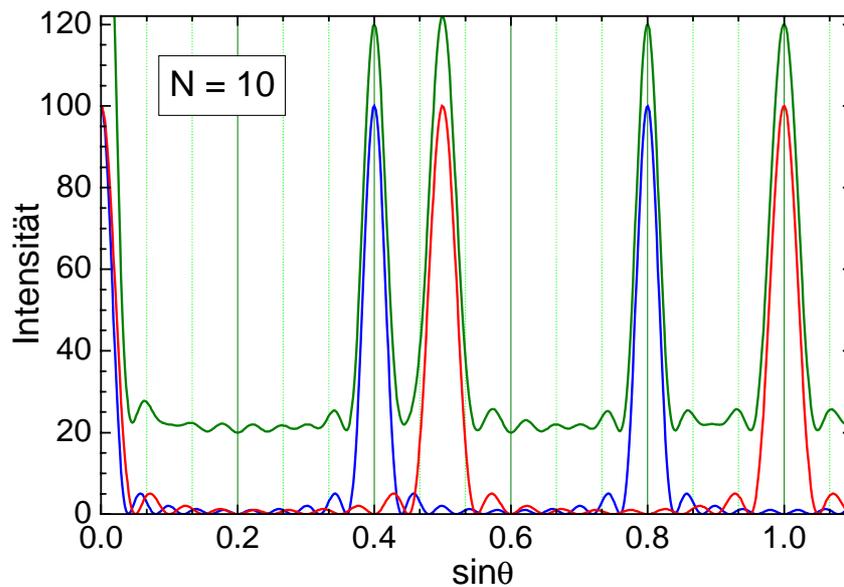


Abbildung 5.39: Zur Veranschaulichung der Mehrstrahlinterferenz an einem Gitter. Gezeigt sind die Beugungsmuster für ein Gitter mit $N = 10$ Spalten für zwei unterschiedliche Wellenlängen $a/\lambda_1 = 1$ (rot) und $a/\lambda_2 = 1.25$ (blau). Der gewählte Wellenlängenunterschied entspricht dem von Abb. 5.38. Man erkennt, dass im Gegensatz zur Zweistrahlinterferenz in der Gesamtintensität (grün) die Beugungsmuster der beiden unterschiedlichen Wellenlängen deutlich erkennbar sind. Die Gesamtintensität ist aus Gründen der Übersichtlichkeit um 20 nach oben verschoben.

Wichtiger ist allerdings die Herstellung *holographischer Gitter*. Wie wir später sehen werden, sind Hologramme im Wesentlichen komplizierte Beugungsgitter, sie können aber auch so entworfen werden, dass sie einfache Beugungsgitter darstellen. Die Entwicklung von hochwertigen Photolithographie-Techniken, wie sie heute in der Halbleitertechnologie eingesetzt werden, hat es ermöglicht, ein sehr feines Interferenzmuster zwischen zwei ebenen Wellen in einen Photolack zu belichten, wodurch mit einer einzigen Belichtung ein Gitter erzeugt wird, das tausende von feinen Linien enthält. Verwendet man z.B. zwei kohärente ebene Wellen, die von einem Laser mit der Wellenlänge 500 nm erzeugt werden und unter einem Winkel von $2\alpha = 60^\circ$ interferieren, so erzeugen diese ein Young'sches Beugungsmuster mit einem Linienabstand von $\lambda/2 \sin \alpha = 500$ nm. Da die Laser-Linien sehr scharf sind, ist die Zahl der Linien sehr groß und es können Gitter mit einer Länge von mehreren Zentimetern mit einer Belichtung erzeugt werden. Bei dieser Herstellungsmethode werden Fehler in dem Abstand benachbarter Linien, wie sie bei mechanischen Herstellungsverfahren unvermeidbar sind, umgangen.

Ein weiterer Vorteil der holographischen Gitter besteht darin, dass der Linienabstand in einer geplanten Art und Weise ungleichmäßig gemacht werden kann, um dadurch bekannte Abbildungsfehler von optischen Systemen auszugleichen. So kann z.B. ein selbstfokussierendes Gitter dadurch erzeugt werden, indem man als Ursprung für das Gitter die Interferenz von zwei Kugelwellen verwendet.

Gitterspektrometer

Die in Gitterspektrometern eingesetzten Beugungsgitter sind meist *Reflexionsgitter*, die entweder durch Ritzen einer optisch ebenen Oberfläche oder durch Holographie erzeugt werden. Bei letzteren wird dabei der Photolack in den belichteten Gebieten wegentwickelt und die freigelegte Oberfläche angeätzt. Die Bedeutung der Reflexionsgitter kommt daher, dass sie einen hohen Lichtdurchsatz bei Abwesenheit von Farbfehlern ermöglichen und dass sie generell *Phasengitter* sind, deren Effizienz, wie weiter unten gezeigt wird, sowohl in der Theorie als auch in der Praxis deutlich höher liegt als bei *Transmissionsgittern*.

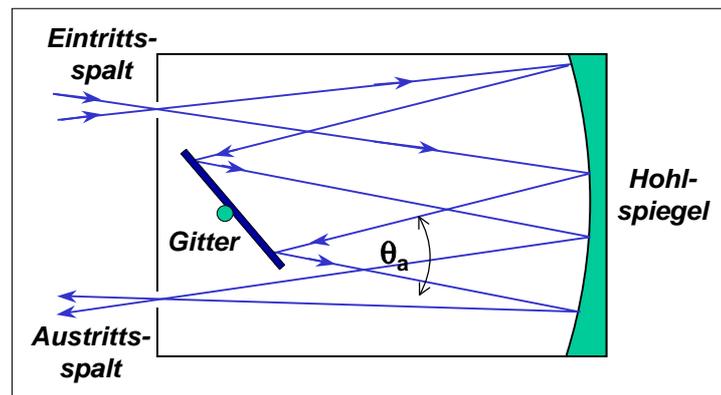


Abbildung 5.40: Typischer Aufbau eines Gitterspektrometers mit Reflexionsgitter und abbildendem Hohlspiegel (Ebert-Monochromator).

Abb. 5.40 zeigt den typischen Aufbau eines Gitterspektrometers. In einem lichtundurchlässigen Kasten befindet sich ein großer Hohlspiegel mit einer Brennweite f . Durch diesen Hohlspiegel wird Licht, das vom Eintrittsspalt kommt, parallelisiert und auf das Gitter gelenkt. Das unter dem Ablenkwinkel θ gebeugte Licht fällt wieder auf den Hohlspiegel und wird von dort auf den Austrittsspalt abgebildet. Durch die feste Anordnung von Spalten und Hohlspiegel kann nur Licht, das unter dem Winkel θ abgelenkt wurde, das Spektrometer verlassen. Bei vorgegebenem Gitterabstand und Beugungswinkel θ wird nur genau eine Wellenlänge durchgelassen.

Auflösungsvermögen

Beim Einsatz von Beugungsgittern in Spektrometern ist die entscheidende Aufgabe, die Wellenlänge von Spektrallinien zu messen. Kennen wir den Abstand a der Gitterlinien, so können wir (5.7.12) dazu benutzen, die Wellenlängen absolut zu bestimmen. Wichtig ist, welche Wellenlängenunterschiede von dem Gitterspektrometer noch aufgelöst werden können. Wir werden im Folgenden zeigen, dass das *Auflösungsvermögen* von Gitterspektrometern durch die endliche Länge des Gitters gegeben ist.

Wir gehen in unserer Diskussion von den in Abschnitt 5.5.3 hergeleiteten Ausdrücken aus. Wir haben dort gesehen, dass das Beugungsmuster einer endlichen Zahl N von Blenden mit konstantem Abstand a sowohl Haupt- als auch Nebenmaxima besaß. Im Fall von N Spalten gibt es $N - 1$ Nullstellen der Intensität zwischen den Hauptmaxima. Sind im einfallenden Licht zwei Wellenlängen vertreten, so werden sich ihre Intensitätsfunktionen addieren (siehe hierzu Abb. 5.39). Wir müssen nun die Bedingung dafür ableiten, dass die zu verschiedenen Wellenlängen gehörenden Hauptmaxima noch deutlich als Doppellinie im Gesamtspektrum zu erkennen sind. Wir müssen deshalb die exakte Form der Interferenzfunktion im Detail betrachten. Aus (5.5.12) wissen wir, dass die auf eins normierte Interferenzfunktion an der Stelle $u = k \sin \theta$ durch

$$I_{\text{Gitter}}(u) = \frac{1}{N^2} \frac{\sin^2(uNa/2)}{\sin^2(ua/2)}. \quad (5.7.13)$$

gegeben ist. Diese Funktion hat Hauptmaxima mit $I(u) = 1$ an den Stellen

$$\begin{aligned} u = k_0 \sin \theta &= \pm m \frac{2\pi}{a} \\ \text{oder} \quad \Delta s = a \sin \theta &= \pm m \lambda \quad \text{mit } m = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (5.7.14)$$

und Nullstellen bei

$$\begin{aligned} u = k_0 \sin \theta &= \pm (m + n/N) \frac{2\pi}{a} \\ \text{mit } m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \text{und } n = 1, 2, 3, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (5.7.15)$$

Zwischen den Nullstellen gibt es $N - 2$ Nebenmaxima. Sind nun die Intensitäten der beiden einfallenden Wellenlängen gleich, so ist ihre kombinierte Intensität die in Abb. 5.41 gezeigte Summe zweier Funktionen der Gestalt von (5.7.13).

Ein sinnvolles Auflösungskriterium ist von **Rayleigh** vorgeschlagen worden. Danach werden zwei Wellenlängen aufgelöst, wenn das Hauptmaximum der ersten Intensitätsfunktion mit der Nullstelle $n = 1$ der anderen übereinstimmt. Benutzen wir dieses *Rayleigh-Kriterium*, so finden wir mit Hilfe von (5.7.15), dass die erste Nullstelle vom Hauptmaximum um $\Delta u = 2\pi/Na$ entfernt ist. Gemäß der Definition von u können wir schreiben:

$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{\Delta k}{k} = -\frac{\Delta \lambda}{\lambda} \quad (5.7.16)$$

Das Auflösungsvermögen ist definiert als $\lambda/\Delta\lambda_{\min}$ und beträgt für die m -te Ordnung

$$\boxed{\frac{\lambda}{\Delta\lambda_{\min}} = \frac{uNa}{2\pi} = mN} \quad (5.7.17)$$

Wir sehen, dass das erreichbare Auflösungsvermögen nicht nur vom Linienabstand abhängt. Verwendet man ein groberes Gitter, kann nämlich eine höhere Beugungsordnung verwendet werden und das Auflösungsvermögen kann genauso gut sein wie bei einem feinen Gitter. Ist L die Gesamtlänge des Gitters, so ist $a = L/N$ und das Auflösungsvermögen lässt sich als

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda_{\min}} = \frac{u}{\Delta u} = \frac{\frac{2\pi}{\lambda}(\sin \theta - \sin \theta_0)}{\frac{2\pi}{Na}} = \frac{L}{\lambda}(\sin \theta - \sin \theta_0) \quad (5.7.18)$$

Bei gegebenem Beugungswinkel θ und Einfallswinkel θ_0 hängt das Auflösungsvermögen also nur von der Gesamtlänge des Gitters ab. Das größte Auflösungsvermögen wird bei $\theta_0 \rightarrow \pi/2$ und $\theta \rightarrow -\pi/2$ erreicht:

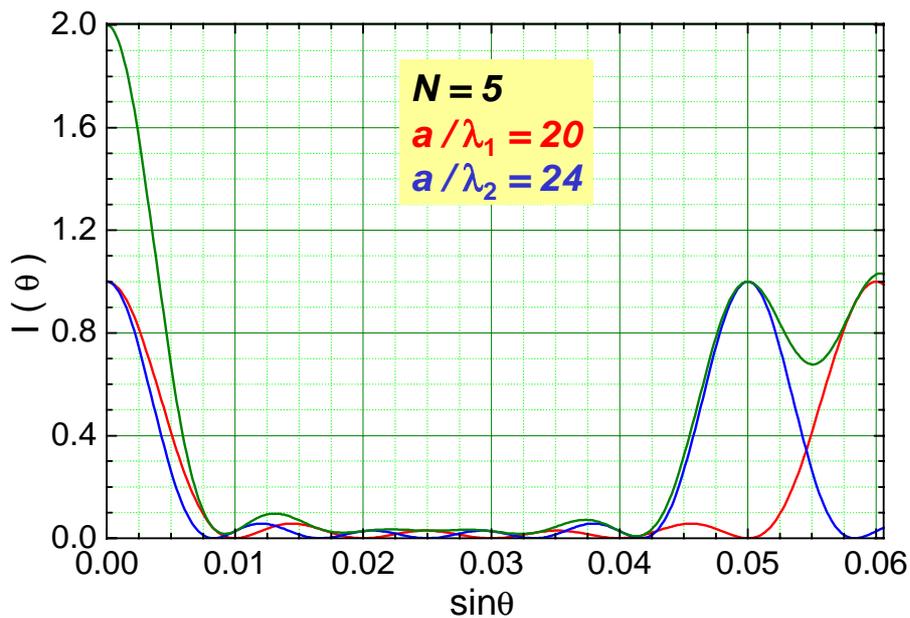


Abbildung 5.41: Die Addition der Beugungsgitterfunktionen für zwei unterschiedliche Wellenlängen zur Verdeutlichung des Rayleigh-Kriteriums für das Wellenlängenauflösungsvermögen. (Parameter: $N = 5$, $a/\lambda_1 = 20$ und $a/\lambda_2 = 24$).

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda_{\min}} \rightarrow 2 \frac{L}{\lambda} . \quad (5.7.19)$$

Beugungsgitter sollten also so lang wie möglich gemacht werden. Theoretisch könnten wir einfach ein Paar von Spalten nehmen und diese sehr weit voneinander entfernen, damit L groß wird. Dies funktioniert aber so nicht, da dadurch das zur Verfügung stehende Licht nur sehr schlecht ausgenutzt würde. Nach (5.7.19) sollte ein Beugungsgitter der Länge $L = 5$ cm bei $\lambda = 500$ nm ein theoretisches Auflösungsvermögen von 2×10^5 erreichen. In der Praxis haben allerdings Beugungsgitter in der Regel immer ein wesentlich unter dem theoretischen Wert liegendes Auflösungsvermögen. Dies liegt an unvermeidbaren Herstellungsfehlern der Gitter.

Beugungseffizienz

Bisher haben wir meist nur die Interferenzfunktion von Beugungsgittern betrachtet, die die Fourier-Transformierte eines Satzes von Delta-Funktionen ist, der die Positionen der Beugungsobjekte darstellt. Die Interferenzfunktion muss aber noch mit der Beugungsfunktion multipliziert werden, die die Fourier-Transformierte eines einzelnen Beugungsobjektes ist (siehe Abb. 5.28 in Abschnitt 5.5.3).

Wir betrachten zunächst ein *Amplitudentransmissionsgitter*, bei dem die einzelnen Beugungsobjekte Spalte mit einer Breite b sind. Die Beugungsfunktion ist dann die Fourier-Transformierte eines solchen Spaltes¹⁷

$$\Psi(u) = b \frac{\sin(bu/2)}{bu/2} = b \frac{\sin(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta} . \quad (5.7.20)$$

¹⁷Mit $u = k \sin \theta = (2\pi/\lambda) \sin \theta$.

Für die m -te Beugungsordnung des Gitters gilt $u_m = 2\pi m/a$ oder $a \sin \theta = m\lambda$. Für die erste Ordnung tritt bei einer Variation von b der maximale Wert von $\Psi(u)$ bei einer Spaltbreite von $b = a/2$ auf, d.h. die optimale Spaltbreite ist der halbe Spaltabstand. Aber auch bei diesem optimalen Spaltabstand ist die Effizienz des Beugungsgitters noch sehr klein. Hierzu betrachten wir die Lichtleistung P_m der verschiedenen Beugungsordnungen, die proportional zu $|\Psi(u_m)|^2$ ist. Man erhält für $b = a/2$ (vergleiche hierzu Abb. 5.28)

$$P_0 \propto a^2/4, \quad P_{\pm 1} \propto a^2/\pi^2, \quad P_{\pm 2} = 0, \quad \dots \quad (5.7.21)$$

Die Proportionalitätskonstante kann durch Gleichsetzen von $b = a$ gefunden werden, wobei das Gitter dann vollkommen transparent ist und dadurch $P'_0 \propto b^2 = a^2$ und $P'_i = 0$ für $i \geq 1$ gilt. Man definiert nun die *Beugungseffizienz* als den Bruchteil des einfallenden Lichts, der in die stärkste, von null verschiedene Ordnung gebeugt wird. Wir sehen, dass, selbst wenn die Beugungseffizienz durch die Wahl von $b = a/2$ optimiert wird, nur ein maximaler Wert von $P_1/P'_0 \simeq 10\%$ erreicht werden kann.¹⁸ Der Weg hin zu höheren Effizienzen führt zur Benutzung von Phasengittern.

Vertiefungsthema: Blaze-Gitter

Rayleigh kam auf die Idee, Effekte von Beugung oder Reflexion mit der Interferenz zu kombinieren, um dadurch *Phasengitter* zu erzeugen, die einen Großteil der Intensität in bestimmte Beugungsordnungen konzentrieren und dadurch zu hohen Effizienzen führen. Das Prinzip ist in Abb. 5.42 gezeigt. Jedes Element des Gitters ist in der Form eines Prismas ausgelegt, dessen Winkel so gewählt ist, dass die erzeugte Ablenkung dem Winkel einer bestimmten Beugungsordnung entspricht. Entsprechendes gilt für das *Reflexionsgitter*, bei dem jedes Element ein kleiner Spiegel ist.

Um ein Gitter zu ritzen, benutzt man anstelle eines beliebig gespitzten Diamanten einen speziellen Kristallschnitt, der optisch ebene Flächen in einem beliebigen Winkel erzeugen kann. Das Gitter ist dann "geblazed" und man nennt so hergestellte Gitter *Blaze-Gitter*. Es ist wichtig anzumerken, dass Blaze-Gitter für eine bestimmte Wellenlänge und Beugungsordnung optimiert sind. Das bedeutet, dass die erreichbaren hohen Effizienzen nur für einen kleinen Wellenlängenbereich gelten.

Wir wollen das Blaze-Gitter mit Hilfe der skalaren Wellentheorie unter Benutzung des Faltungssatzes diskutieren. Wir nehmen an, dass eine ebene Wellenfront, die senkrecht auf das Beugungsgitter einfällt (wir wollen uns nur auf diesen Spezialfall beschränken), um den Winkel θ gebeugt wird. Für ein Reflexionsgitter ist bei senkrechtem Lichteinfall $\beta = 2\alpha$ nur durch die Geometrie des Gitters bestimmt. Für ein Transmissionsgitter kann β auch wellenlängenabhängig sein. Wir wollen uns hier nur mit dem Fall eines Reflexionsgitters befassen. Analog zu Abschnitt 5.4.4 können wir eine einzelne Facette des Beugungsgitters durch eine Phasenfunktion der Form $\exp(ik_0 x \sin \beta)$ beschreiben. Die dazugehörige komplexe Transmissionsfunktion einer Facette mit Breite b ist $g(x) = \text{rect}(x/b) \exp(ik_0 x \sin \beta)$. Das vollständige Gitter wird dann durch die Transmissionsfunktion

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \otimes \sum \delta(x - na) \\ &= [\text{rect}(x/b) \exp(ik_0 x \sin \beta)] \otimes \sum \delta(x - ma) \end{aligned} \quad (5.7.22)$$

¹⁸Aus Abb. 5.28 ist ersichtlich, dass für $b = a/2$ das Hauptmaximum 1. Ordnung noch etwa 40% der Intensität des Hauptmaximums 0. Ordnung besitzt. Normieren wir dies auf die Intensität P'_0 , so müssen wir wegen $b = a/2$ noch durch 4 teilen und erhalten somit $P_1/P'_0 \simeq 10\%$.

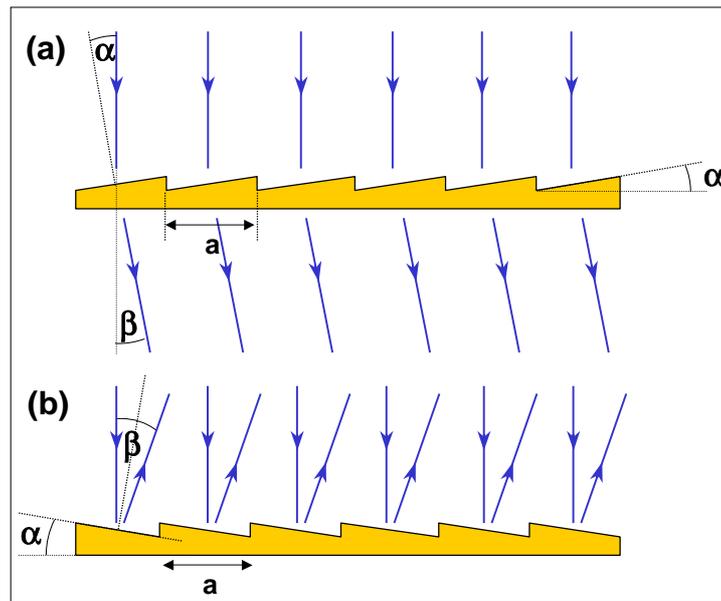


Abbildung 5.42: (a) Blaze-Transmissionsgitter. Der Winkel β muss die Bedingungen $m\lambda = a \sin \beta$ (Blaze-Bedingung) und $\beta = (n-1)\alpha$ (n =Brechungsindex) erfüllen. (b) Blaze-Reflexionsgitter. Hier muss β die Bedingungen $m\lambda = a \sin \theta$ und $\theta = 2\alpha$ erfüllen.

beschrieben. Die Fourier-Transformierte dieser Transmissionsfunktion ist

$$\begin{aligned}
 F(u) &= \left[\delta(u - k_0 \sin \beta) \otimes \frac{\sin(ub/2)}{ub/2} \right] \sum \delta(u - 2\pi m/a) \\
 &= \frac{\sin[b(u - k_0 \sin \beta)/2]}{[b(u - k_0 \sin \beta)/2]} \sum \delta(u - 2\pi m/a) .
 \end{aligned} \tag{5.7.23}$$

Diese Funktion ist in Abb. 5.43a dargestellt. Man sieht, dass das Maximum der Einhüllenden ($\sin x/x$ -Funktion (Beugungsfunktion), das den Wert von u bzw. $\sin \theta$ (da $u = k_0 \sin \theta$) angibt, unter dem die größte Intensität beobachtet werden kann, vom Ursprung zum Wert $k_0 \sin \beta$ verschoben ist.

Die maximale Intensität der Produktfunktion aus der Beugungsfunktion und der Interferenzfunktion des Gitters erhält man genau dann, wenn das Maximum der Beugungsfunktion mit einem Hauptmaximum der Interferenzfunktion zusammenfällt. Die Maxima der Interferenzfunktion treten für $u = k_0 \sin \theta = 2\pi m_i/a$ auf. Das heißt, aus dem Zusammenfallen der Maxima erhalten wir die Bedingung $k_0 \sin \beta = 2\pi m_i/a$ oder $a \sin \beta = m_i \lambda$ (Blaze-Bedingung). Man sieht, dass man den Winkel β dazu verwenden kann, die Intensität einer bestimmten Ordnung m_i für eine gegebene Wellenzahl k_0 bzw. Wellenlänge λ_0 , die so genannte *Blaze-Wellenlänge*, zu maximieren.

Wir wollen nun die *Beugungseffizienz* berechnen. Die Intensität der m -ten Ordnung ist bei der Blaze-Wellenlänge gegeben durch $|F(2\pi m/a)|^2$. Mit der Blaze-Bedingung $k_0 \sin \beta = 2\pi m_i/a$ und der Bedingung $k_0 \sin \theta = 2\pi m/a$ für das Auftreten der Hauptmaxima folgt aus (5.7.23) für das Maximum m -ter Ordnung im Idealfall vollständiger Reflexion (oder Transmission)

$$I_m = \frac{\sin^2 \left[\frac{b\pi}{a} (m - m_i) \right]}{\left[\frac{b\pi}{a} (m - m_i) \right]^2} . \tag{5.7.24}$$

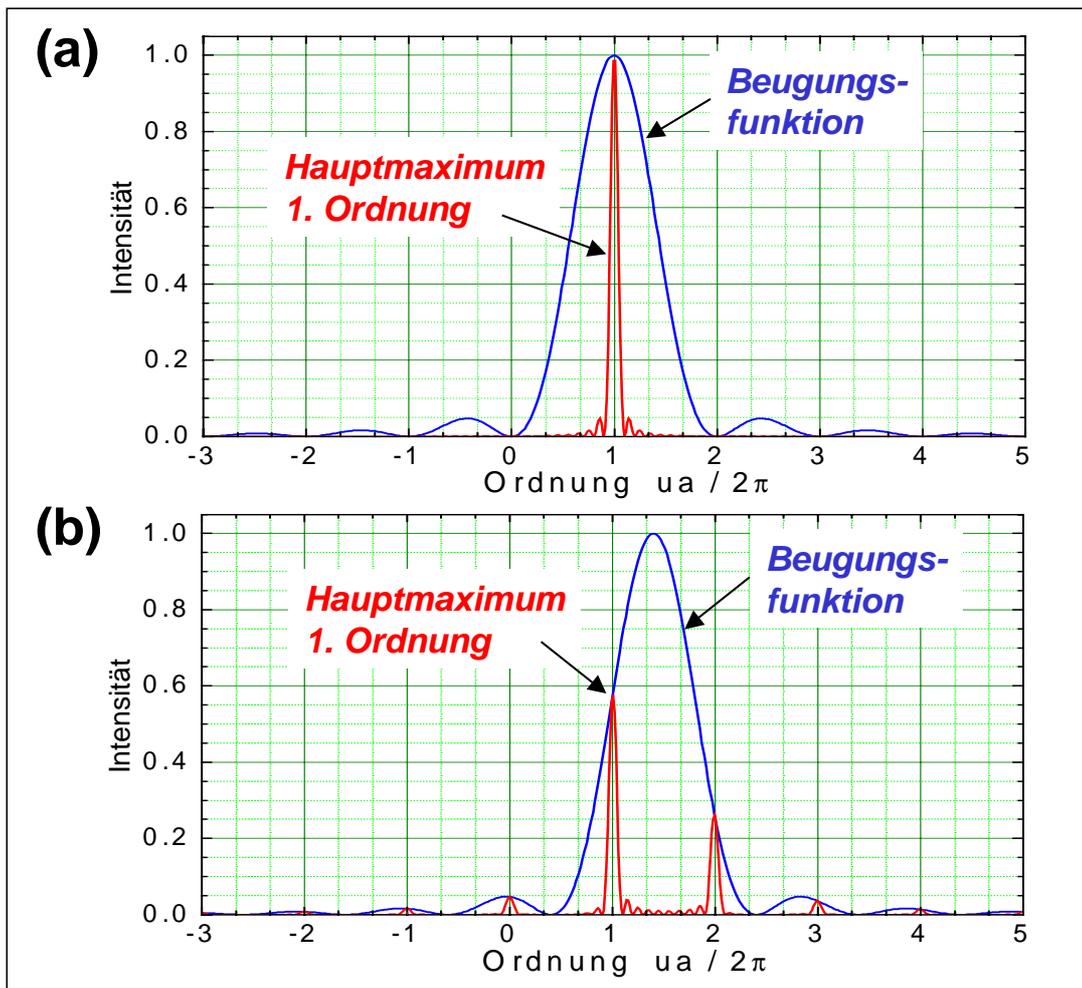


Abbildung 5.43: Verlauf der Beugungsintensität eines Blaze-Gitters ($N = 10$). Die Einhüllende zeigt jeweils nur die Beugungsfunktion. (a) Beugungsintensität bei der Wellenlänge, auf die das Gitter abgestimmt wurde. Das Hauptmaximum 1. Ordnung fällt genau mit dem Maximum der Beugungsfunktion zusammen. (b) Beugungsintensität bei einer leicht verschobenen Wellenlänge. Die erste Ordnung dominiert hier, aber die anderen Ordnungen erscheinen schwach im Beugungsbild.

Da $b = a$ folgt dann $I_m = 0$ für alle Ordnungen außer $m = m_i$. Die Effizienz der m_i -ten Beugungsordnung ist somit 100%. In der Praxis lassen sich allerdings Gitter mit $b = a$ nur schwer herstellen, es gibt üblicherweise unbeleuchtete Bereiche an den Rändern der Facetten. Dadurch wird $b < a$ und die Ordnungen $m \neq m_i$ haben eine von null verschiedene Intensität, was sich in einer Verringerung der Effizienz widerspiegelt.

Für die Wellenzahl $k_1 \neq k_0$ ist die Phasenfunktion $\exp(ik_1 \sin \beta)$ und damit

$$F(u) = \frac{\sin[b(u - k_1 \sin \beta)/2]}{[b(u - k_1 \sin \beta)/2]} \sum \delta(u - 2\pi m/a) . \quad (5.7.25)$$

Damit erhält man für die Intensität I_m

$$I_m = \frac{\sin^2 \left[\frac{b\pi}{a} \left(m - m_i \frac{k_1}{k_0} \right) \right]}{\left[\frac{b\pi}{a} \left(m - m_i \frac{k_1}{k_0} \right) \right]^2}. \quad (5.7.26)$$

Hierbei haben wir die Blaze-Bedingung $k_0 \sin \beta = 2\pi m_i / a$ dazu benutzt, $\sin \beta$ als Funktion von k_0 auszudrücken. Der entsprechende Kurvenverlauf ist in Abb. 5.43b gezeigt. Die Beugungseffizienz ist jetzt nicht mehr 100%, kann aber immer noch sehr hoch sein, wenn $k_0 \sim k_1$. Für praktische Anwendungen wird der Winkel β so gewählt, dass für die Mitte λ_m des zu untersuchenden Wellenlängenbereichs $\Delta\lambda$ die Richtung des reflektierten Lichts mit der Richtung zusammenfällt, unter der das Interferenzmaximum m -ter Ordnung auftritt.

5.7.3 Interferometrie durch Aufspalten der Wellenamplitude

Wir haben bis jetzt Interferometeranordnungen diskutiert, die auf der Aufspaltung der Wellenfront basierten. Eine zweite Klasse von Interferometern erzeugt die interferierenden Lichtbündel durch Aufspalten der Wellenamplitude mit Hilfe von teilreflektierenden Spiegeln. Für Messzwecke werden heute üblicherweise Laser als Lichtquellen für solche Interferometer verwendet. Nur wenn Bildgebung als Teil der Interferometrie verlangt wird (z.B. in der Interferenzmikroskopie), werden monochromatische Lichtquellen den Lasern vorgezogen.

Jamin- und Mach-Zehnder Interferometer

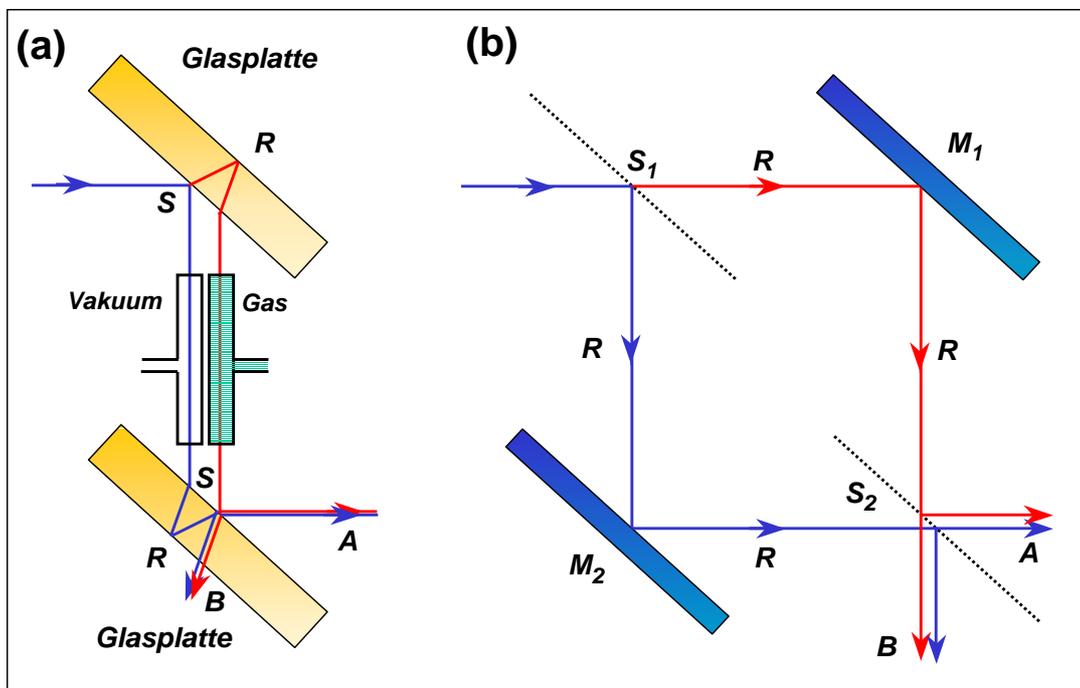


Abbildung 5.44: (a) Jamin-Interferometer: An der Fläche R wird das Licht vollständig, an der Fläche S zur Hälfte reflektiert. Die Interferenz ist an den Ausgängen A und B zu messen. (b) Mach-Zehnder Interferometer: M_1 und M_2 sind Spiegel, S_1 und S_2 sind Strahlteiler, die zu 50% reflektieren.

Diese Interferometer verwenden Teilreflexion an einem Strahlteiler, um zwei getrennte kohärente Lichtbündel zu erzeugen, die an einem zweiten Strahlteiler wieder zusammengeführt werden. Die

Längen der optischen Wege können miteinander verglichen werden, wobei sehr kleine Differenzen detektiert werden können. Die Ausführung nach **Jamin** (siehe Abb. 5.44) ist sehr stabil gegenüber mechanischen Störungen. Sie ist allerdings durch die nahe nebeneinander verlaufenden Teilstrahlen wenig flexibel. Beim **Mach-Zehnder Interferometer** ist eine größere Strahlseparation möglich. Beide Interferometer können mit Hilfe einer weißen Lichtquelle so eingestellt werden, dass der Wegunterschied zwischen beiden Teilstrahlen null beträgt. Weißes Licht verwendet man deshalb, da dessen Kohärenzlänge (siehe Kapitel 6) extrem kurz ist und deshalb die Nullstellung exakt bestimmt werden kann.

Eine typische Anwendung ist die Messung von Brechungsindizes von Gasen. Dazu bringt man in beide Teilstrahlen Glasröhren der Länge L , wobei eine evakuiert ist und die zweite mit dem zu untersuchenden Gas gefüllt ist. Der Unterschied im optischen Weg δl ermöglicht die Messung der Brechungsindizes:

$$\delta l = (n - 1) \cdot L . \quad (5.7.27)$$

Mit guten Interferometern kann man $\delta l / \lambda \sim 10^{-3}$ detektieren. Damit ergibt sich eine Messgenauigkeit von $\delta n = \pm 10^{-3} \lambda / L$ für den Brechungsindex. Bei $L = 5 \text{ cm}$ und $\lambda = 500 \text{ nm}$ erhält man damit eine Messgenauigkeit $\delta n = \pm 10^{-8}$.

Michelson-Interferometer

Michelson-Interferometer erzeugen nicht nur Teilstrahlen, die weit voneinander getrennt sind, sondern auch noch senkrecht zueinander verlaufen. Diese Eigenschaften machen sie zu sehr flexiblen Instrumenten. Das Grundprinzip eines Michelson-Interferometers ist in Abb. 5.45 gezeigt. Licht fällt auf einen halbdurchlässigen Spiegel S und wird dort teilweise reflektiert sowie teilweise transmittiert. Die beiden Strahlen werden an den beiden Spiegeln M_1 und M_2 reflektiert und treffen wieder auf den halbdurchlässigen Spiegel. Das entstehende Interferenzmuster kann an den Punkten A oder B beobachtet werden. Da Strahlen, die vom Spiegel M_2 reflektiert werden, beim Beobachtungspunkt A dreimal das Medium von Spiegel S durchlaufen müssen, während entsprechende Strahlen vom Spiegel M_1 dies nur einmal tun, wird ein zusätzliches Medium P in den Strahlengang eingebracht, um die optischen Wege anzugleichen. Diese Glasplatte wird auch deswegen benötigt, da Glas ein dispergierendes Medium ist und man nur dann für alle Wellenlängen den gleichen optischen Weg erhält, wenn die gleiche Dicke an Glas in beiden Teilwegen durchquert wird. Die Kompensation P muss deshalb die gleiche Dicke und den gleichen Winkel haben wie der Spiegel S . Bei der Nullstellung des Michelson-Interferometers tritt destruktive Interferenz für alle Wellenlängen auf. Der dabei vorliegende Phasenunterschied von π rührt daher, dass ein Strahlbündel an der Außenseite und das andere an der Innenseite des Spiegels reflektiert wird, wobei für die entsprechenden Reflexionskoeffizienten $\bar{r} = -r$ gilt (vergleiche Abschnitt 2.6).

Die vom Interferometer transmittierte Intensität (gemessen am Detektor) lässt sich als Funktion der Wegdifferenz Δs berechnen. Mit der einlaufenden Welle $\mathbf{E}_e = \mathbf{A}_e \cos(kx - \omega t)$ und den Reflexions- und Transmissionskoeffizienten r und t des Strahlteilers gilt für die Amplitude der ersten Teilwelle (blau)⁹

$$\mathbf{E}_1 = -rt\mathbf{A}_e \cos(\varphi_1 - \omega t) = rt\mathbf{A}_e \cos(\pi + \varphi_1 - \omega t),$$

wobei die Phase $\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}s_1$ vom durchlaufenen optischen Weg s abhängt. Für die zweite Teilwelle (rot) erhalten wir

⁹Das Minuszeichen resultiert aus der Reflexion am optisch dichteren Medium, bei der ein Phasensprung von π auftritt.

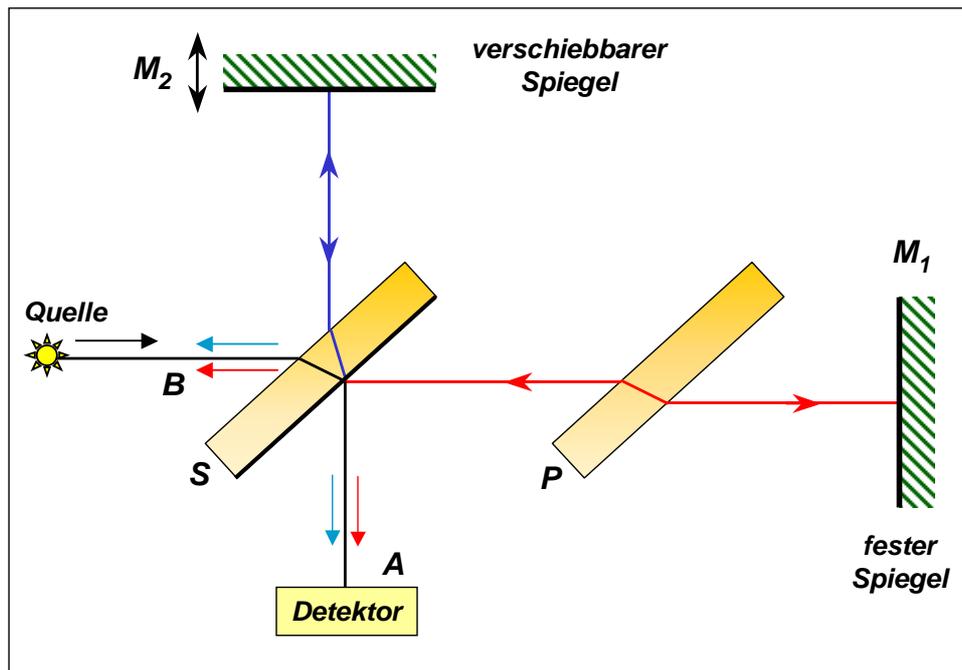


Abbildung 5.45: Michelson-Interferometer: P ist eine Kompensationsplatte, das austretende Licht kann an den Positionen A oder B beobachtet werden.

$$\mathbf{E}_2 = rt\mathbf{A}_e \cos(\varphi_2 - \omega t)$$

mit $\varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda}s_2$. Die am Detektor beobachtete Intensität erhält man durch die kohärente Überlagerung der beiden Teilwellen zu

$$I = c\epsilon_0 |\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2|^2 = c\epsilon_0 r^2 t^2 A_e^2 [\cos(\pi + \varphi_1 - \omega t) + \cos(\varphi_2 - \omega t)]^2.$$

Der Detektor registriert nur die zeitgemittelte Intensität. Nach Zeitmittelung der Ausdrucks in eckigen Klammern erhält man²⁰

$$\bar{I} = r^2 t^2 c\epsilon_0 A_e^2 [1 + \cos(\pi + \varphi_1 - \varphi_2)] = r^2 t^2 c\epsilon_0 A_e^2 [1 + \cos(\pi + \frac{2\pi}{\lambda}\Delta s)].$$

Bei gleichem durchlaufenen optischen Weg ist die Laufwegdifferenz $\Delta s = \frac{\lambda}{2\pi}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ und man erhält ein Minimum der Intensität wegen der zusätzlichen Phasenschiebung von π bei der Reflexion an der Grenzfläche zum optisch dünneren Medium. Üblicherweise verwendet man $r^2 = t^2 \simeq 1/2$, so dass der Vorfaktor $\frac{1}{4}c\epsilon_0 A_e^2$ der Hälfte der zeitgemittelten Intensität der einlaufenden Welle beträgt.

Ein endlicher Weglängenunterschied Δs resultiert in einer endlichen Differenz

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta s.$$

Ein Michelson-Interferometer kann dazu benutzt werden, genaue Längenmessungen durchzuführen und damit einen physikalischen Längenstandard umzusetzen. Dazu benutzt man z.B. die Wellenlänge λ_{Ed}

²⁰Hierbei verwendet man $\overline{\cos^2 \omega t} = 1/2$ und $\overline{\sin^2 \omega t} = 1/2$.

Albert Abraham Michelson (1852 - 1931):

Albert Abraham Michelson wurde am 19. Dezember 1852 in Strelno geboren. Seine Eltern emigrierten, als ihr Sohn 4 Jahre alt war an die Westküste Nordamerikas. Nach dem Besuch der Grundschule in Virginia City wurde Michelson für den Rest seiner Schulzeit nach San Francisco zu Verwandten geschickt. Er erhielt ein Stipendium an der US Navel Academy in Annapolis. Nach Abschluss seines Studiums fuhr Michelson zunächst ein Jahr auf See bevor er als Ausbilder für physikalische Wissenschaften an der Navel Academy angestellt wurde. Durch die Schriften von Leon Foucault und Armand Fizeau angeregt befasste er sich mit der Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit und verbesserte das Ergebnis auf 299910 ± 50 km/s. Für die Jahre 1880 -1882 erhielt Michelson von der Navel Academy die Erlaubnis für weiterführende Studien in Europa. So arbeitete er bei Helmholtz in Berlin, wo er das nach ihm benannte Michelson-Interferometer entwickelte. Varianten dieses Instrumentes wurden an verschiedenen Orten entwickelt. Zu den bekanntesten gehört das Fabry-Perot-Etalon von Fabry und Perot 1896 entwickelt. Danach ging Michelson zu Quinke nach Heidelberg ehe er seine



Reise in Paris abschloss. 1882 übernahm er eine Professur für Physik an der neugegründeten Case School for Applied Sciences in Cleveland, Ohio. Dort verbesserte er die Messung der Lichtgeschwindigkeit erneut und kam auf einen Wert von 299854 ± 60 km/s. Dieser Wert wurde für 45 Jahre als Standard für die Lichtgeschwindigkeit erklärt. Nach umfangreichen Voruntersuchungen zur Feinstruktur von Spektrallinien wählte Michelson 1887 die rote Cadmiumlinie zur Bestimmung des Meters. So ergab das $1553163,5$ fache der Wellenlänge einen Meter. Dieser Wert blieb bis 1960 gültig. 1889 wechselte er an die Clark University in Worchester, Massachusettes. 1893 wurde er Direktor der University of Chicago. 1907 erhielt er neben dem Nobelpreis für Physik auch die Copley-Medaille von der Royal Society. Ab den 20er Jahren verbrachte Michelson zunehmend mehr Zeit in Kalifornien auf Mt. Wilson als wissenschaftlicher Gast von George Ellery Hale. Hier verbesserte er durch einen Lichtsignalaustausch zwischen dem Mt. Wilson und dem 35 km entfernt liegenden Mt. Antonio den Wert der Lichtgeschwindigkeit noch einmal auf 299796 ± 4 km/s. Dieser Wert liegt nur 4 m/s über dem heute akzeptierten. Michelson, der schon 1925 von seinen administrativen Pflichten von der University of Chicago entbunden wurde, zog im Alter von 77 Jahren endgültig nach Pasadena. Dort verstarb er am 9. Mai 1931 an einem Gehirntumor.

der roten Cadmium-Linie.²¹ Man beleuchtet dazu das Interferometer mit dieser Cadmium-Linie, zählt eine entsprechende Anzahl N von Hell-Dunkeldurchgängen am Schirm ab, die beim Verschieben eines Spiegels auftreten. Dadurch bestimmt man die Verschiebestrecke $D = \Delta s/2$ des Spiegels und stellt somit einen exakt geeichten mechanischen Maßstab her. Es gilt wegen $\Delta\varphi = N \cdot 2\pi$ dabei

$$D = \frac{N\lambda_{\text{Cd}}}{2} . \quad (5.7.28)$$

²¹Heute ist die Längeneinheit durch die Festlegung des Lichtgeschwindigkeit als Naturkonstante an die Zeiteinheit gekoppelt. Der Wert der Lichtgeschwindigkeit wird bei den Konferenzen der nationalen Eichämter festgelegt. Das Meter ist dann als die Länge der Strecke definiert, die Licht im Vakuum während der Dauer von $1/299792458$ Sekunden durchläuft.

Vertiefungsthema: Fourier-Transformationsspektroskopie

Eine weitere wichtige Anwendung des Michelson-Interferometers ist die *Fourier-Transformationsspektroskopie* (vergleiche hierzu auch Abschnitt 6.3.2). **Michelson** zeigte bereits 1898, dass ein Zweistrahl-Interferometer für spektrale Untersuchungen verwendbar ist. Zu dieser Zeit war allerdings seine Idee schwierig umzusetzen, da man bei diesem Messprinzip eine Fourier-Transformation der Messdaten durchführen muss, um die spektrale Verteilung eines untersuchten Signals zu erhalten. Michelson konstruierte sogar einen analogen Computer, um die Spektren zu rekonstruieren. Mit unseren heutigen leistungsfähigen Rechnern stellt die Durchführung einer Fourier-Transformation kein großes Problem mehr dar.

Um das Prinzip der Fourier-Transformationsspektroskopie klar zu machen, berechnen wir die Energie $W(\tau)$, die das Interferometer zum Detektor für eine bestimmte Laufzeitdifferenz τ der beiden Teilstrahlen transmittiert. Hierbei ist $W(\tau)$ das zeitliche Integral über die Intensität,²² die man durch Summation der beiden Felder $E_1(t)$ und $E_2(t) = E_1(t + \tau)$ aus den beiden Teilstrahlen erhält.

$$\begin{aligned}
 W(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} |E_1(t) + E_2(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |E_1(t) + E_1(t + \tau)|^2 dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int E_1(\omega) \exp(i\omega t) d\omega + \int E_1(\omega') \exp(i\omega'(t + \tau)) d\omega' \right|^2 dt \quad (5.7.29) \\
 &= W_{\text{const}} + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\iint (E_1(\omega) E_1^*(\omega') \times \exp[i(\omega - \omega')t - i\omega'\tau] + \text{c.c.}) d\omega d\omega' \right] dt .
 \end{aligned}$$

Mit $\int \exp[i(\omega - \omega')t] dt \propto \delta(\omega - \omega')$ erhält man

$$\begin{aligned}
 W(\tau) &= W_{\text{const}} + \int_{-\infty}^{\infty} E_1(\omega) E_1^*(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega + \text{c.c.} \\
 &= W_{\text{const}} + \text{FT}(I(\omega)) . \quad (5.7.30)
 \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass die Abhängigkeit der transmittierten Energie des Michelson-Interferometers vom Laufzeitunterschied τ die Fourier-Transformierte der spektralen Dichte $I(\omega)$ des verwendeten Lichtes liefert. Das heißt, das Spektrum $I(\omega)$ des Lichtes lässt sich durch Rücktransformation der im Interferometer gemessenen Funktion $W(\tau)$ gewinnen. Da bei einer Messung im Fourier-Raum alle Frequenzen praktisch simultan zum Signal beitragen, sind solche Messungen besonders dann wichtig, wenn man eine von zeitlichen Fluktuationen an Detektor, Quelle, Untergrund, etc. unbeeinflusste Spektralinformation gewinnen will. Außerdem ist der Lichtdurchsatz durch das Interferometer höher als bei konventionellen, mit Spalten ausgestatteten Gitterspektrometern (siehe oben). Das Fourier-Transformationsmessprinzip wird heute in modernen Messgeräten zur Bestimmung der Infrarottransmission und in der Raman-Spektroskopie eingesetzt.

²²Man kann von $-\infty$ bis $+\infty$ integrieren, da die Messzeit endlich ist und außerhalb des Messintervalls die Intensität gleich Null gesetzt werden kann.

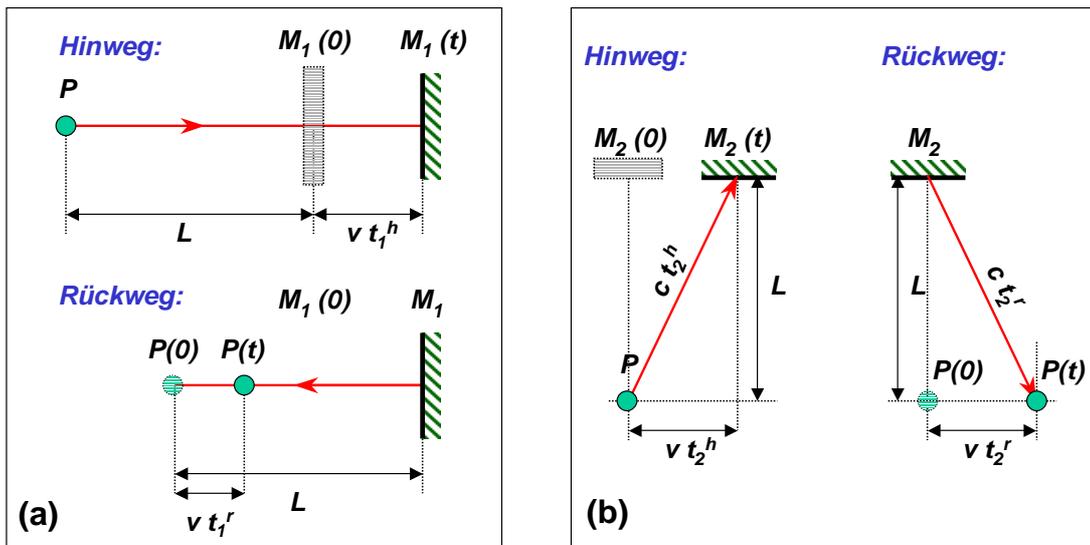


Abbildung 5.46: Zur Bestimmung der eventuellen Laufzeitdifferenzen zwischen den Laufzeiten der beiden Teilwellen im Michelson-Interferometer bei Annahme eines ruhenden Äthers: (a) Laufweg parallel zu v , (b) Laufweg senkrecht zu v .

Das Michelson-Morley Experiment

Abschließend soll nun noch die Anwendung des Michelson-Interferometers bei Untersuchungen zu prinzipiellen Fragen der Lichtausbreitung im Rahmen der Relativitätstheorie vorgestellt werden. Eines der wichtigsten Experimente dazu wurde von **Michelson** und **Morley** im Jahr 1887 durchgeführt. Michelson beschäftigte sich damals mit dem Problem, dass, um die Abberation von Sternenlicht (die scheinbare Veränderung des Sternenorts durch die Bewegung der Erde um die Sonne) zu klären, Fresnel annehmen musste, dass der so genannte *Äther*²³ in Ruhe ist, wenn sich ein undurchsichtiger Körper durch ihn hindurchbewegt. Er setzte sich daraufhin zum Ziel, die Geschwindigkeit der Erde relativ zum Äther zu messen.²⁴

Michelson ging dabei davon aus, dass die Geschwindigkeit der Erde relativ zum Äther von der gleichen Größenordnung wie ihre Umlaufgeschwindigkeit sein sollte. Er zeigte dann zuerst, dass sein Interferometer eine hinreichende Genauigkeit für eine solche Messung besitzt. Das Hauptproblem dabei bestand darin, dass der zu messende Effekt ein Effekt zweiter Ordnung ist. Die Geschwindigkeit des Lichts konnte nur dadurch herausgefunden werden, indem man die Zeit maß, die ein Lichtstrahl braucht, um wieder an seinen Ausgangspunkt zurückzukehren. Die Differenz der Zeiten zwischen einem Weg parallel zur Flugrichtung und quer zur Flugrichtung der Erde ist nämlich, wie wir kurz zeigen wollen, eine Größe zweiter Ordnung.

Gemäß der klassischen Physik ist die Zeit t_1 für die Reise des Lichts entlang der Strecke L parallel (hin und zurück) zur Flugrichtung der Erde gegeben durch (siehe Abb. 5.46)

²³Das Medium, in dem sich Licht ausbreitet.

²⁴Wenn es einen ruhenden Äther gäbe, sollte der Wert von c von der Richtung der Erdgeschwindigkeit v abhängen. Dies sieht man aus folgender Überlegung: Wirft man von einem mit der Geschwindigkeit v_S fahrenden Schiff einen Stein ins Wasser, so bildet sich eine Welle mit Kreisen als Phasenflächen aus, deren Phasengeschwindigkeit v_{ph} relativ zum Wasser unabhängig von der Richtung ist. Relativ zum Schiff ist die Phasengeschwindigkeit jedoch in Fahrtrichtung $v_1 = v_{ph} - v_S$, während sie gegen die Fahrtrichtung $v_2 = v_{ph} + v_S$. Aus der Messung von v_1 und v_2 lässt sich sowohl die Phasengeschwindigkeit $v_{ph} = (v_1 + v_2)/2$ als auch die Schiffsgeschwindigkeit $v_S = (v_1 - v_2)/2$ bestimmen. Durch entsprechende Versuche mit Lichtwellen verband man die Hoffnung, sowohl die Lichtgeschwindigkeit als auch die Geschwindigkeit v der Erde relativ zum Äther zu bestimmen.

$$t_1 = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v}, \quad (5.7.31)$$

wobei v die Umlaufgeschwindigkeit der Erde ist.²⁵ Für eine Reise senkrecht zur Flugrichtung gilt $(ct_2^h)^2 = (ct_2^r)^2 = (ct_2')^2 = L^2 + (vt_2')^2$,²⁶ woraus sich $t_2 = 2t_2' = 2L/c\sqrt{1-(v^2/c^2)}$ ergibt. Entwickelt man die Ausdrücke bis zur zweiten Ordnung in v/c , erhält man²⁷

$$t_1 \simeq \frac{2L}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right); \quad t_2 \simeq \frac{2L}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right). \quad (5.7.32)$$

Der Zeitunterschied von $t_1 - t_2 = \frac{L}{c} \frac{v^2}{c^2}$ entspricht einem Weglängenunterschied von Lv^2/c^2 . Ist deshalb v im Vergleich zu c zu klein, so könnte die Messung dieser Größe unmöglich werden. Die Umlaufgeschwindigkeit der Erde beträgt etwa 10^{-4} der Lichtgeschwindigkeit. Nimmt man deshalb $L = 100$ cm, so erhält man einen Weglängenunterschied von 10^{-6} cm oder etwa $\lambda/50$. Dies ist in der Tat zu klein für visuelle optische Techniken, kann aber in einem speziell für diese Messung maßgeschneiderten Interferometer sichtbar gemacht werden.

Um ein großes L zu erhalten, wurde das Interferometer auf eine Steinplatte mit einer Diagonalen von 2 m montiert und der Strahl mehrmals hin- und her reflektiert um eine Gesamtlänge von 11 m zu erreichen. Damit erwartet man einen Weglängenunterschied von fast $\lambda/2$. Da es kein Wissen über die Relativbewegung zwischen Erde und Äther gab, konnte die ganze Apparatur gedreht werden. Das Ergebnis des Experiments war allerdings enttäuschend. Es konnte keine reproduzierbare Verschiebung gefunden werden, die größer als etwa 0.01λ gewesen wäre. Es gab natürlich die Möglichkeit, dass die Umlaufgeschwindigkeit der Erde zur Zeit des Experiments gerade die Geschwindigkeit des Sonnensystems kompensierte. Dies kann aber nicht über ein ganzes Jahr der Fall sein, weshalb das Experiment über ein ganzes Jahr regelmäßig wiederholt wurde. Das Ergebnis war immer null. Der Ausgang des Experiments war für Michelson und Morley zunächst enttäuschend, da sie glaubten, ihr großer experimenteller Aufwand sei umsonst gewesen. Heute ist uns natürlich klar, dass dem nicht so war. Im Jahr 1905 präsentierte **Einstein** seine *Relativitätstheorie*, deren Hauptaussage darin bestand, dass die Lichtgeschwindigkeit eine Konstante und vom Bewegungszustand des Beobachters unabhängig ist. Dies stimmte mit der experimentellen Beobachtung überein. Aus dem Experiment, das am Anfang als gescheitert angenommen wurde, konnte somit die experimentelle Grundlage für ein neues physikalisches Prinzip gelegt werden.

Vertiefungsthema:

Sagnac-Interferometer

Interferometer erlauben es, Rotationsgeschwindigkeiten sehr exakt zu vermessen. Sagnac hat dazu 1911 ein Spektrometer konzipiert, bei dem zwei Teilstrahlen (siehe Abb. 5.47) ringförmig umlaufen. Da die Teilstrahlen fast identische aber gegenläufige Wege zurücklegen, kann man sehr einfach Weißlichtinterferenzen beobachten. Kleine Weglängenunterschiede können dadurch eingeführt werden, indem man

²⁵Man erhält dieses Ergebnis leicht, indem man die Zeit t_1^h für den Hin- und t_1^r für den Rückweg betrachtet. Für t_1^h gilt nach Abb. 5.46a $t_1^h = (L + vt_1^h)/c$, woraus $t_1^h = L/(c-v)$ folgt. Genauso gilt für $t_1^r = (L - vt_1^r)/c$, woraus $t_1^r = L/(c+v)$ folgt.

²⁶Dies folgt sofort aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken in Abb. 5.46b.

²⁷Hierbei verwenden wir die Näherungen $(1-x)^{-1} \simeq 1+x$ und $(1-x)^{-1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2}x$, die für $x = v^2/c^2 \ll 1$ gute Näherungen darstellen.

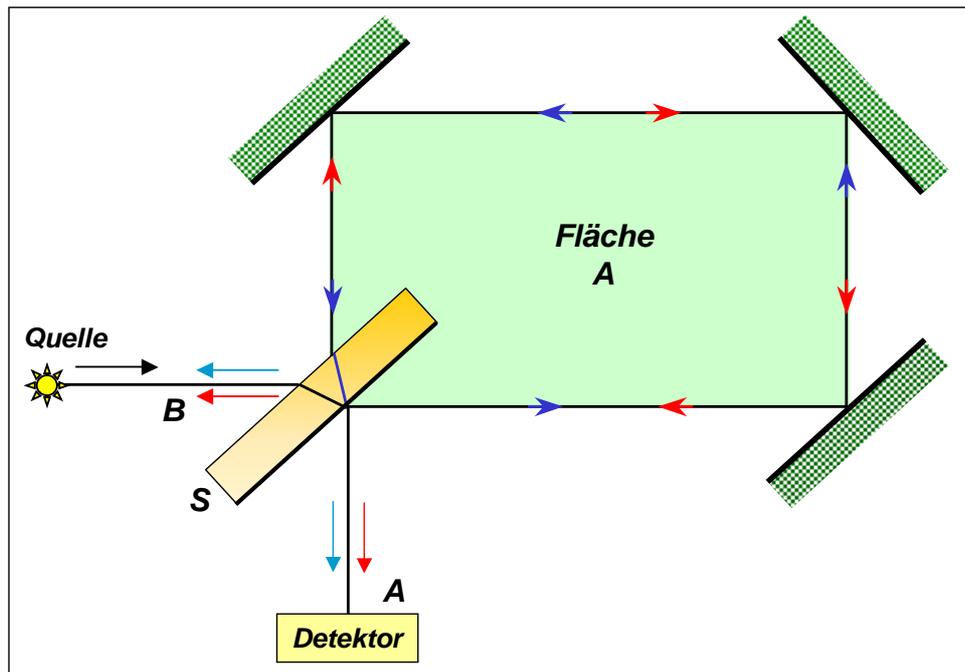


Abbildung 5.47: Sagnac-Interferometer: S ist ein Strahlteiler, das austretende Licht kann an den Positionen A oder B beobachtet werden.

die vollständige Gegenläufigkeit der Teilstrahlen etwas stört (z.B. durch Rotation des Interferometers). Beim Sagnac-Interferometer gibt es nicht wie beim Michelson-Interferometer die Notwendigkeit der Kompensation, da beide Strahlen gleich häufig durch den Strahlteiler laufen. Ist der Amplitudenreflexionskoeffizient des Strahlteilers r und der Transmissionskoeffizient t , dann hat die eine Welle am Ort des Detektors die Amplitude t^2 und die andere $r\bar{r}$ (da einmal an der Grenzfläche zum optisch dichteren Medium reflektiert wird, wo ein Phasensprung von π auftritt). Die Wellen interferieren also destruktiv, wenn der Weglängenunterschied an diesem Ausgang null beträgt. Sie löschen sich aber nur dann ganz aus, wenn $t^2 = r^2$ gilt. Dies erfordert einen sorgfältig konstruierten Strahlteiler.

Das Sagnac-Interferometer ist aus zwei Gründen sehr wichtig. Zum einen wurde dieses Interferometer zur Messung relativistischer Effekte bei der Lichtausbreitung verwendet. Zum anderen kommt es in optischen Gyroskopen zum Einsatz. Im Jahr 1859 konstruierte **Fizeau** ein Interferometer dieser Art, um die Geschwindigkeit von Licht in strömendem Wasser zu messen. Das Wasser fließt, wie in Abb. 5.48 gezeigt ist, so, dass sich ein Teilstrahl parallel, der andere aber entgegen der Wasserströmung ausbreitet. Die Differenz der beiden Geschwindigkeiten kann somit gemessen werden. In der klassischen Physik ergibt sich natürlich für die Geschwindigkeit in einem bewegten Bezugssystem $c_+ = c/n + v$ und $c_- = c/n - v$ für die beiden Richtungen. Die experimentelle Beobachtung stimmte aber mit diesem entsprechend der klassischen Physik erwarteten Ergebnis nicht überein. Erst die Einstein'sche Relativitätstheorie konnte die Ergebnisse zwanglos erklären. Man erhält die Geschwindigkeiten

$$c_{\pm} = \frac{c/n \pm v}{1 \pm vn/c} . \quad (5.7.33)$$

Es soll hier angemerkt werden, dass im Unterschied zum Michelson-Morley Experiment die Größen, die hier gemessen wurden, von erster Ordnung sind und daher relativ leicht zu beobachten sind.

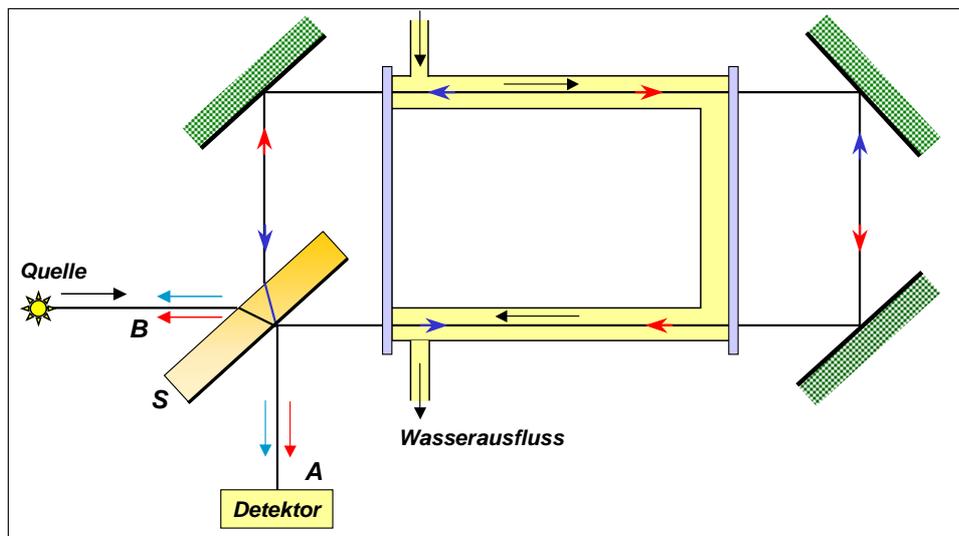


Abbildung 5.48: Fizeau-Experiment zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit in strömendem Wasser.

Eine wichtige moderne Anwendung des Sagnac-Interferometers ist die Verwendung als *optisches Gyroskop*. Hierzu nehmen wir an, dass der gesamte Interferometeraufbau in Rotation versetzt wird. Die Winkelgeschwindigkeit soll Ω betragen. In diesem Fall sieht der in Drehrichtung umlaufende Teilstrahl (im angepassten Inertialsystem) einen gegenüber dem in Gegenrichtung umlaufenden Strahl verlängerten Weg zum Detektor. Dies führt zu Laufzeitunterschieden und damit zur Interferenz. Dieser Effekt wird *Sagnac-Effekt* genannt. Dabei ist die relativistische Behandlung des Problems konzeptionell nicht einfach und führt immer wieder zu angeregten Diskussionen. Da es sich um ein beschleunigtes System handelt, müsste man die allgemeine Relativitätstheorie bemühen, falls man im ortsfesten Koordinatensystem des Spektrometers arbeiten wollte. Es zeigt sich aber, dass auch die spezielle Relativitätstheorie das richtige Ergebnis liefert. Um die Diskussion einfach zu halten, nehmen wir ein kreisförmiges Interferometer mit Radius R an, so dass die Geschwindigkeit $R\Omega$ des Mediums konstant ist. Der optische Weg für einen Umlauf ist $L = 2\pi R$. Die Geschwindigkeit ist $v = R\Omega$ und das Licht breitet sich in einem Medium mit Brechungsindex n aus. Die Lichtgeschwindigkeit in Drehrichtung soll c_+ , die entgegen dem Drehsinn c_- sein. Diese Geschwindigkeiten stellen die beiden im Laborsystem gemessenen Lichtgeschwindigkeiten dar. Während der Zeit t_+ , die das Licht in Drehrichtung braucht, bewegt sich der Strahlteiler um die Strecke $R\Omega t_+$, so dass $c_+ t_+ = L + R\Omega t_+$ gilt. Analog gilt $c_- t_- = L - R\Omega t_-$. Kombinieren wir beide Gleichungen, so erhalten wir

$$\Delta t = t_+ - t_- = L \left[\frac{1}{c_+ - R\Omega} - \frac{1}{c_- + R\Omega} \right]. \quad (5.7.34)$$

Setzen wir c_{\pm} aus (5.7.33) ein, so erhalten wir

$$\Delta t = \frac{2LR\Omega}{c^2 - R^2\Omega^2} \simeq \frac{2LR\Omega}{c^2}. \quad (5.7.35)$$

Da $LR/2 = \pi R^2$ der eingeschlossenen Fläche entspricht, erhält man als Ergebnis, dass Δt der Kreisfrequenz und der eingeschlossenen Fläche proportional ist.

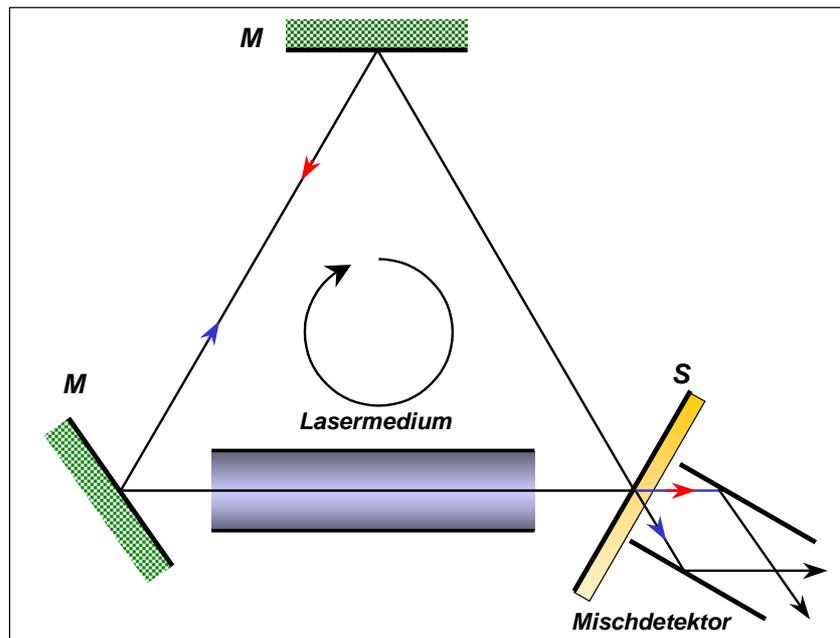


Abbildung 5.49: Ringlasergyroskop.

Diese Zeitdifferenz kann in eine Phasen- oder Frequenzverschiebung übersetzt werden. In einem optischen Gyroskop wird Licht der Frequenz ω in das Interferometer geleitet und die Phasenschiebung $\omega\Delta t$ gemessen. Da der Effekt sehr klein ist, verwendet man üblicherweise eine Spule aus Glasfasern, um dadurch die Länge L zu vergrößern. Da n in (5.7.35) gar nicht eingeht, verändert die Benutzung einer Glasfaser nichts am Ergebnis. Der Radius R bestimmt die Größe des Interferometers und wird so groß wie praktisch handhabbar gemacht. Für $L = 100$ m, $R = 0.1$ m, $\Omega = 1$ rad/sec und $\lambda = 500$ nm ergibt sich eine Phasenschiebung von

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t = \frac{2\pi c}{\lambda} \frac{2LR\Omega}{c^2} \simeq 0.8\text{rad} . \quad (5.7.36)$$

Es ist nicht allzu schwierig, eine solche Phasenschiebung zu messen. Allerdings sollte ein nutzbares Gyroskop bis auf einen Faktor 10^{-3} der Erdrotation ($15^\circ/\text{h}$) genau sein, so dass Phasenschiebungen von 10^{-7} gemessen werden müssen. Aufgrund von Verlusten in den Glasfasern, beträgt der größte realisierbare Wert von L einige Kilometer.

In modernen Anwendungen verwendet man Ringlaser (siehe Abb. 5.49) und man erhält so genannte *Ringlasergyroskope*. In dem Resonator bilden sich zwei elektromagnetische Wellen aus, die sich bei Rotation des Lasers in ihrer Frequenz leicht unterscheiden. Der Frequenzunterschied kann sehr genau vermessen werden. Große Flugzeuge besitzen mehrere redundante Ringlasersysteme (ein System besteht aus 3 Ringlasern mit zueinander orthogonalen Achsen) als Navigationshilfe.

Der Laser arbeitet bei einer Resonatorfrequenz, bei der die Resonatorlänge einem ganzzahligen Vielfachen m der Wellenlänge λ/n beträgt. Rotiert der Resonator im Uhrzeigersinn, so erfüllt das im Uhrzeigersinn umlaufende Licht die Gleichung

$$L + tR\Omega = L \left(1 + \frac{n}{c} R\Omega \right) = m\lambda_+/n . \quad (5.7.37)$$

Für das gegen den Uhrzeigersinn umlaufende Licht gilt

$$L - tR\Omega = L \left(1 - \frac{n}{c} R\Omega \right) = m\lambda_- / n . \quad (5.7.38)$$

Daraus ergibt sich die Wellenlängendifferenz

$$\Delta\lambda = \lambda_+ - \lambda_- = \frac{2LRn^2\Omega}{m c} . \quad (5.7.39)$$

Hierbei haben wir angenommen, dass in beiden Fällen die gleiche Anzahl von Moden das Optimum darstellt. Übersetzen wir die Wellenlängendifferenz in einen Frequenzunterschied, erhalten wir mit $\lambda = nL/m$

$$\Delta f = \frac{\Delta\lambda c}{n\lambda^2} = \frac{2LRn\Omega}{m\lambda^2} = \frac{2R\Omega}{\lambda} . \quad (5.7.40)$$

Die Messung von Δf ermöglicht also die Bestimmung von Ω . In unserem Ansatz wurde zwar ein Dreieck durch einen Kreis angenähert, das hergeleitete Ergebnis ist aber trotzdem näherungsweise gültig. Für $R = 0.1 \text{ m}$, $\Omega = 1 \text{ rad/sec}$ und $\lambda = 500 \text{ nm}$ erhält man $\Delta f = 0.4 \text{ MHz}$. Prinzipiell sollte die Messung dieser Frequenzverschiebung kein Problem sein. Frühe Versuche, Ringlasergyroskope zu bauen, scheiterten aber daran, dass für $f \rightarrow 0$ Streueffekte in der Optik dazu führten, dass sich die beiden gegenläufigen Moden mischten und stimulierte Emission bei der gleichen Frequenz hervorriefen.

5.7.4 Interferenz durch Mehrfachreflexion

Wir haben bisher nur die Überlagerung von zwei Teilwellen diskutiert. Mit den darauf basierenden Interferometern konnten wichtige Experimente zur Wellentheorie des Lichtes durchgeführt werden. Ferner konnte die Wellenlänge des Lichts mit einer Genauigkeit von einigen Prozent bestimmt werden. Da die Intensitätsverteilung bei der Zweistrahlinterferenz allerdings sinusförmig ist, können die Positionen der Maxima und Minima nur relativ ungenau bestimmt werden. Um eine höhere Auflösung zu erreichen, kann man zu *Mehrstrahlinterferometern* übergehen. Hier ist die Bedingung für konstruktive Interferenz aller Teilstrahlen schwieriger zu erreichen und die Intensitätsmaxima werden deshalb sehr scharf.

Wir haben Mehrstrahlinterferenz bereits bei der Diskussion des Beugungsgitters kennengelernt, wo eine Aufteilung der Wellenfront in N Teilwellen vorgenommen wurde. Hier wurde also die Wellenfront in N Teilwellen aufgetrennt und diese Teilwellen wieder überlagert. Eine weitere Möglichkeit, eine Schar von N Teilwellen zu erhalten, ist die Mehrfachreflexion an einer ebenen, transparenten Scheibe oder von parallelen Spiegeln. Beim Hin- und Herreflektieren kommt jedesmal ein konstanter Phasenfaktor hinzu. Extrahiert man bei jeder Reflexion einen Bruchteil des Lichtes, so erhält man eine Wellenschar mit konstant anwachsender Phase. Wir betrachten zunächst die Reflexion zwischen zwei parallelen Oberflächen. Diese Oberflächen sollen für die äußere und innere Reflexion bzw. Transmission die Amplitudenreflexionskoeffizienten r und \bar{r} bzw. die Transmissionskoeffizienten t und \bar{t} besitzen, wobei $\bar{r} = -r$. Wir haben dabei berücksichtigt, dass bei der Reflexion am optisch dichteren Medium ein Phasensprung der

reflektierten Welle von π auftritt, was durch die Vorzeichen von r und \bar{r} berücksichtigt wird.²⁸ Wenn wir annehmen, dass bei der Reflexion und Transmission keine Energie verloren geht, dann gilt (Stokesche Beziehungen)

$$\bar{r} = -r \quad r^2 + t\bar{t} = 1 . \quad (5.7.41)$$

Der Phasensprung $\Delta\varphi_1$ des an der Plattenoberfläche reflektierten Lichts ist gleich π , wenn der Brechungsindex der Platte größer als der von Luft (oder des umgebenden Mediums) ist und sonst null. Mit der gleichen Betrachtung bestimmt man den Phasensprung $\Delta\varphi_2$ des an der zweiten Oberfläche reflektierten Lichts. Da nur die Phasendifferenz $\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2$ wichtig ist, erhält man eine Phasendifferenz von π , falls die Platte einen größeren oder kleineren Brechungsindex als das umgebende Medium hat.²⁹

Wir berechnen zunächst die Phasendifferenz, die in einem Hin- und Herreflexionszyklus angesammelt wird. Dazu betrachten wir eine Platte der Dicke d mit Brechungsindex n , durch die eine Welle unter dem Winkel θ relativ zur Oberflächennormale hindurchläuft (siehe Abb. 5.50). Die optischen Weglängen \overline{AE} und \overline{DC} sind gleich. Daher ist der Unterschied im optischen Weg zwischen den Strahlen, die nach X und Y laufen, durch $\Delta s = \overline{ABD} = n(AB + BD)$ gegeben. Es gilt ferner

$$AB + BD = A'D = 2d \cos \theta , \quad (5.7.42)$$

so dass die Phasendifferenz zwischen den beiden interferierenden Wellenfronten AD

$$\frac{2\pi}{\lambda} \overline{ABD} = k_0 \overline{ABD} = 2k_0 n d \cos \theta \equiv g \quad (5.7.43)$$

beträgt. Der Wellenlängenunterschied ist also nicht gleich der doppelten projizierten Dicke AB der Platte. Darüberhinaus nimmt die Phasendifferenz g ab, wenn der Einfallswinkel zunimmt, was nicht der Intuition entspricht.

Konstruktive Interferenz tritt auf, wenn $g + \Delta\varphi = m \cdot 2\pi$ ist, wobei m eine ganze Zahl ist. Aus (5.7.43) folgt somit, dass konstruktive Interferenz für

$\frac{2\pi}{\lambda} 2nd \cos \theta + \Delta\varphi = m \cdot 2\pi$
<p>oder</p> $\Delta s = 2nd \cos \theta = \left(m + \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \right) \lambda \quad (5.7.44)$

²⁸Dass bei der Reflexion am optisch dichteren Medium ein Phasensprung von π auftritt, kann man sich auf folgende Weise plausibel machen: Man lasse die Dicke d der Platte allmählich bis auf $d = 0$ abnehmen. Dann verschwindet für $d \rightarrow 0$ auch die Phasenschiebung $2k_0 n d \cos \theta$ zwischen den beiden reflektierten Teilstrahlen in Abb. 5.50 durch den zusätzlichen Laufweg (siehe weiter unten) unabhängig von θ . Ihre Interferenzwirkung würde also immer zu einem Intensitätsmaximum in der reflektierten Intensität führen. Da aber für $d \rightarrow 0$ die Platte gar nicht existiert, muss sich ein Intensitätsminimum ergeben. Das heißt, die Phasenschiebung muss für $d \rightarrow 0$ gerade π sein.

²⁹Eine Phasendifferenz von null kann man nur erhalten, wenn der Brechungsindex der Platte zwischen denen des oberen und unteren Mediums liegt.

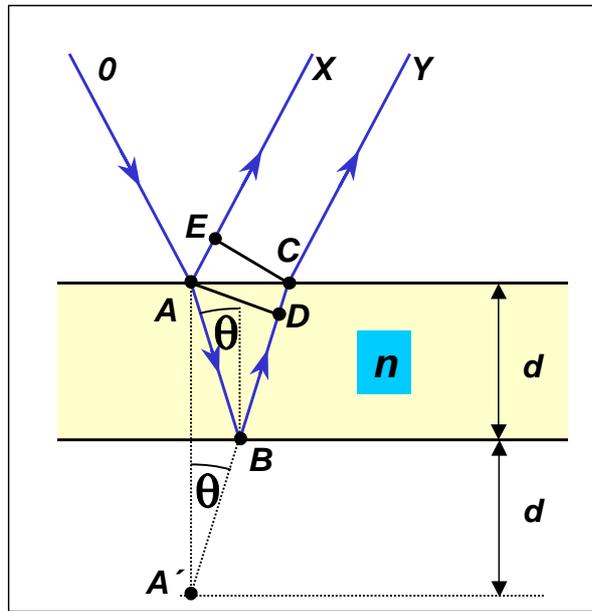


Abbildung 5.50: Wegunterschiede bei der Reflexion von Strahlen an einer planparallelen Platte.

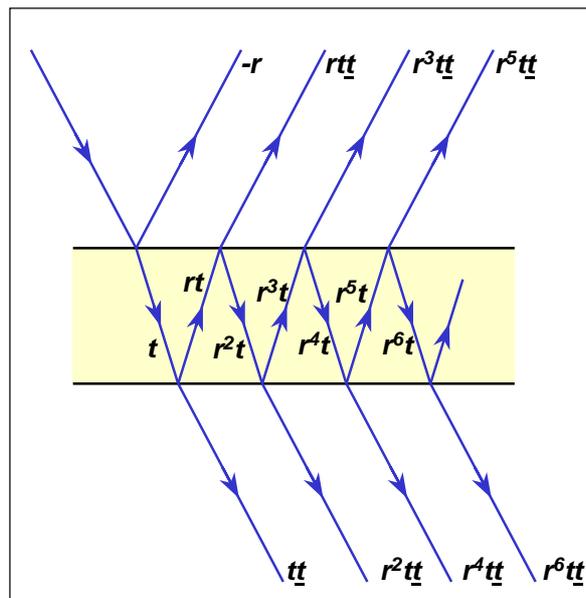


Abbildung 5.51: Mehrfachreflexion an einer planparallelen Platte. Die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten beziehen sich auf die Amplituden.

auftritt.

Wir betrachten nun die Amplitude von mehrfach reflektierten Wellen. Es sei dabei nochmals darauf hingewiesen, dass r für die Reflexion an einer Seite jedes Reflektors definiert wurde, z.B. an der Innenseite. Daher wird die Reflexion an der Außenseite einen Reflexionskoeffizienten $\bar{r} = -r$ besitzen. Die Amplituden der beteiligten Wellen sind in Abb. 5.51 gezeigt. Benachbarte auslaufenden Wellen (Reflexion und Transmission) haben jeweils eine konstante Phasendifferenz g . Die Situation erinnert an ein Beugungsgitter. Allerdings waren dort die Amplituden der sich überlagernden Teilwellen konstant, während sie hier stetig abnehmen.

Wir betrachten zunächst das *transmittierte Licht*. Die Reihe der Partialwellen kann durch

$$\Psi(g) = \bar{t} \sum_{p=0}^{\infty} r^{2p} \exp(ipg) \quad (5.7.45)$$

dargestellt werden. Diese Funktion kann sowohl als Fourier-Reihe mit den Koeffizienten $a_p = r^{2p}$ als auch als geometrische Reihe mit dem Faktor $r^2 \exp(ig)$ ausgewertet werden.

Wir betrachten (5.7.45) zunächst als Fourier-Reihe. Sie stellt eine periodische Funktion mit der Periode $\Delta g = 2\pi$ dar. Die Funktion innerhalb einer jeden Periode ist die Fourier-Transformierte der Koeffizienten r^{2p} , wobei p als kontinuierliche Variable angesehen wird. Schreiben wir

$$r^{2p} = \exp(2p \ln r), \quad (5.7.46)$$

so sehen wir, dass wir die Transformierte von

$$f(p) = \exp(-\alpha p) \quad (p \geq 0), \quad f(p) = 0 \quad (p < 0) \quad (5.7.47)$$

benötigen, die durch

$$F(g) = \int_0^{\infty} \exp[-(\alpha + ig)p] dp = (\alpha + ig)^{-1} \quad (5.7.48)$$

gegeben ist, da p und g konjugierte Variablen sind.³⁰ Ersetzen wir α durch $-2 \ln r$, so erhalten wir das gesuchte Resultat:

$$F(g) = (-2 \ln r + ig)^{-1}; \quad |F(g)|^2 = [4(\ln r)^2 + g^2]^{-1}. \quad (5.7.49)$$

Die Funktion $|F(g)|^2$ aus (5.7.49) wird *Lorentz-Funktion* genannt. Ihre Intensität ist in Abb. 5.52 gezeigt. Oberflächlich betrachtet sieht die Kurve aus wie eine Gauß-Kurve, sie fällt aber zu den Flanken hin langsamer ab. Die Fourier-Reihe (5.7.45) entspricht $F(g)$, gefaltet mit $\sum \delta(g - 2\pi m)$. Diese Faltung hat die Intensität $|\Psi(g)|^2$ und ist in Abb. 5.52 als durchgezogene Linie gezeichnet.

Wir betrachten nun die Halbwertsbreite der Lorentz-Funktion. Den halben Funktionswert des Maximums, $1/8(\ln r)^2$, erhält man für $g_H = \pm 2|\ln r|$, so dass wir für die volle Breite bei halbem Funktionswert, FWHM,³¹

³⁰Der Exponent in (5.7.46) ist $\exp(ipg)$.

³¹Full width at half maximum.

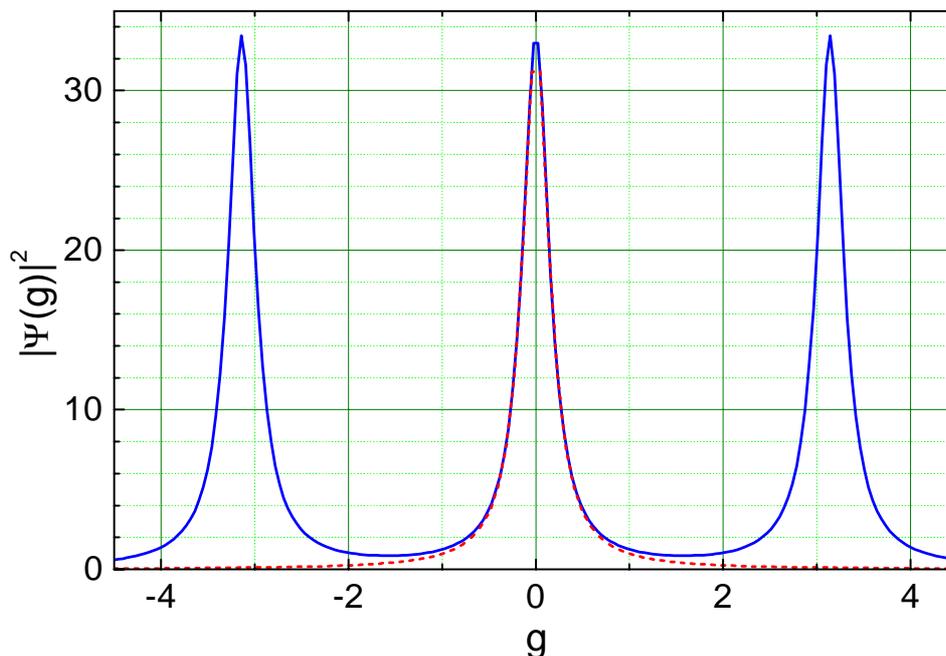


Abbildung 5.52: Intensität einer Lorentz-Funktion (gestrichelte Linie). Die durchgezogene Linie zeigt die Intensität bei einer Faltung von periodisch angeordneten δ -Funktionen mit einer Lorentz-Funktion. Die Maxima treten bei $g = \pm m 2\pi$ auf.

$$\text{FWHM} = 2g_H = 4|\ln r| \approx 4(1 - r) \quad (5.7.50)$$

erhalten. Hierbei gilt die Näherung nur für $r \simeq 1$. In diesem Fall ist der Überlapp mit den Nachbarmaxima vernachlässigbar klein, weshalb das gleiche Ergebnis auch für $|\Psi(g)|^2$ gilt.

Wir wollen nun (5.7.45) als geometrische Reihe auswerten. Dies ist die konventionelle Methode, das Problem zu lösen. Wir schreiben

$$\Psi(g) = t\bar{t} \sum_{p=0}^{\infty} [r^2 \exp(ig)]^p, \quad (5.7.51)$$

was eine geometrische Reihe mit der Summe

$$\Psi(g) = \frac{t\bar{t}}{1 - r^2 \exp(ig)} \quad (5.7.52)$$

darstellt. Die transmittierte Intensität ist dann

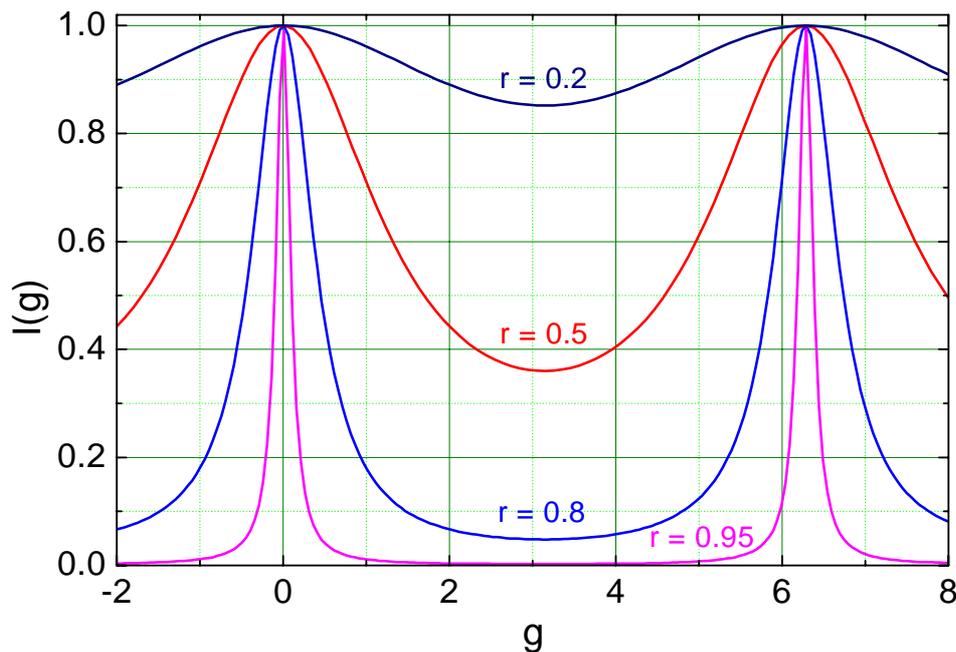


Abbildung 5.53: Verlauf der Funktion $I_T(g)$ als (5.7.53) für verschiedene Werte von r .

$$\begin{aligned}
 I_T(g) = |\Psi(g)|^2 &= \frac{t^2 \bar{t}^2}{1 + r^4 - 2r^2 \cos g} \\
 &= \frac{t^2 \bar{t}^2}{(1 - r^2)^2 + 4r^2 \sin^2(g/2)} \quad (5.7.53) \\
 &= \left(\frac{t\bar{t}}{1 - r^2} \right)^2 \frac{1}{1 + F \sin^2(g/2)}.
 \end{aligned}$$

Hierbei ist $F \equiv 4r^2/(1 - r^2)^2$ und $\mathcal{F} = (\pi/2)\sqrt{F} = \pi r/(1 - r^2)$ wird *Finesse* genannt. Die Funktion (5.7.53) wird *Airy-Funktion*³² genannt.

Wir wollen kurz die Eigenschaften des Ausdrucks (5.7.53) diskutieren, der in Abb. 5.53 gezeigt ist. Wir stellen fest, dass die Funktion periodische Maxima des Wertes $[t\bar{t}/(1 - r^2)]^2$ an den Stellen $g = m 2\pi$ besitzt. Gibt es keine Absorption in dem Medium, so gilt $t\bar{t} + r^2 = 1$ oder $[t\bar{t}/(1 - r^2)]^2 = 1$. Wir kommen dadurch zu der offensichtlich paradoxen Vorstellung, dass bei einem Transmissionskoeffizienten von fast null an den Stellen $g = m 2\pi$ das gesamte Licht transmittiert wird. Dies resultiert natürlich daher, dass die starke transmittierte Welle aus der konstruktiven Interferenz der zahlreichen, mehrfach reflektierten Teilwellen resultiert. Ist F groß ($r \simeq 1$), so werden diese Maxima sehr scharf. Zwischen den Maxima nimmt die Funktion Werte in der Größenordnung von $1/F$ an.

Nach (5.7.53) fällt die Transmission auf den halben Maximalwert ab, wenn $F \sin^2(g/2) = 1$. Daraus lässt sich die Halbwertsbreite der Maxima zu

$$\text{FWHM} = 2g_H = 4 \sin^{-1} \left(F^{-1/2} \right) \approx \frac{4}{\sqrt{F}} \quad (5.7.54)$$

³²Dieser Ausdruck wurde erstmals von **G. B. Airy** im Jahr 1833 berechnet.

berechnen. Wenn $r \rightarrow 1$, so ergibt sich $\text{FWHM} \simeq 4(1-r)$ wie in (5.7.50). Für $r = 0.95$ ergibt sich z.B. $\text{FWHM}/2\pi = 1/\mathcal{F} = 0.03$. Zum Vergleich sei hier angemerkt, dass der entsprechende Wert für das Young'sche Doppelspaltexperiment 0.5 beträgt. Mit (5.7.54) verstehen wir jetzt auch die Bedeutung der Finesse. Da der Abstand zweier benachbarter Maxima der Funktion $I_T(g)$ gerade 2π beträgt, gibt die Finesse \mathcal{F} das Verhältnis des Abstands zweier benachbarter Maxima zur Breite eines Maximums an.

Das reflektierte Licht, das wir noch nicht diskutiert haben, verhält sich als komplementäre Weise, da die Gesamtintensität $I = I_T + I_R$ in Abwesenheit von Absorptionsverlusten aus der Summe von transmittierter und reflektierter Intensität ergibt.

Das Fabry-Perot Interferometer

Eine bedeutende Anwendung der Mehrstrahlinterferenz ist das *Fabry-Perot-Interferometer*,³³ das auch *Étalon* genannt wird. Der Aufbau dieses Interferometers ist in Abb. 5.54 gezeigt. Das optisch relevante Element eines Fabry-Perot-Interferometers ist eine planparallele Platte, die von zwei hochreflektierenden Schichten begrenzt wird. Für Routineexperimente mit keinen allzu hohen Anforderungen an die Auflösung verwendet man häufig Glasplatten, die außen mit Reflexschichten versehen sind. Bei Geräten mit sehr hoher Auflösung werden die hochreflektierenden Schichten auf zwei Kielplatten aufgebracht, die durch Distanzstücke in einem großen Abstand d parallel gehalten werden. Ein typischer Messaufbau ist in Abb. 5.54a gezeigt. Monochromatisches Licht aus einer ausgedehnten Lichtquelle wird durch eine Linse divergent auf das Interferometer abgebildet. Jedes Lichtbündel wird an den parallelen Flächen des Interferometers hin- und herreflektiert, wobei der Reflexionswinkel θ beträgt, und verlässt das Interferometer als Schar paralleler Bündel. In der Brennebene einer Linse L_2 beobachtet man dann die Interferenzfigur, die nach (5.7.44) ein konzentrisches Ringsystem bildet (vergleiche auch unten: Haidingersche Ringe).

Die beiden inneren Oberflächen des Fabry-Perot-Interferometer sind so verspiegelt, dass sie einen hohen Reflexionskoeffizienten haben. Diese Oberflächen müssen sehr gut planparallel sein, was bei einem großen Abstand d schwierig ist. Damit der optische Weg nicht durch Brechungsindexänderungen der Luft beeinflusst wird, werden Fabry-Perot-Interferometer für spezielle Anforderungen im Vakuum gehalten. Ferner müssen die verwendeten Glasplatten sehr eben sein (besser als $\lambda/50$). Diese Anforderungen machen Fabry-Perot-Interferometer zu teuren Messinstrumenten. Die Qualität der Außenseite der Glasplatten ist dagegen weitgehend unwichtig, sie müssen nur optisch eben sein. Es ist günstig, wenn sie nicht genau parallel zu den inneren Oberflächen sind und mit einer Antireflexbeschichtung versehen sind.

Wird eine ausgedehnte monochromatische Lichtquelle durch ein Fabry-Perot-Interferometer betrachtet, so beobachtet man scharfe, helle Ringe unter dem Winkel θ der nach (5.7.44) durch $2knd \cos \theta = m 2\pi$ oder $nd \cos \theta = m \lambda/2$ gegeben ist. Der Verlauf der Interferenzmaxima ist, wie oben bereits diskutiert wurde, Lorentz-förmig mit einer $\text{FWHM} \simeq 4/\sqrt{F}$. Für einen typischen Plattenabstand $d = 1$ cm, Luft zwischen den Platten ($n = 1$) und einer Wellenlänge $\lambda = 500$ nm erhält man für senkrechten Einfall ($\cos \theta = 1$) eine Ordnungszahl $m = 2d/\lambda = 40.000$. An die gleiche Stelle kommt aber auch die Ordnung 40.001 für Licht der Wellenlänge $\lambda' = 499.998$ nm. Sobald sich die Wellenlängen zweier Linien um mehr als $D\lambda = \lambda - \lambda' = \lambda^2/(2nd \cos \theta)$ unterscheiden, können sie nicht mehr eindeutig einer entsprechenden Ordnung zugeordnet werden. Ein Fabry-Perot-Interferometer erlaubt deshalb nicht die absolute Bestimmung der Wellenlänge von Licht, sondern nur die Bestimmung von Wellenlängenunterschieden innerhalb des so genannten freien Spektralbereichs $D\lambda$ des Spektrometers

$$\frac{D\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda}{2nd \cos \theta} = \frac{1}{m} . \quad (5.7.55)$$

³³A. Fabry und Ch. Perot gaben das Prinzip des nach ihnen benannten Spektrometers bereits im Jahr 1897 an.

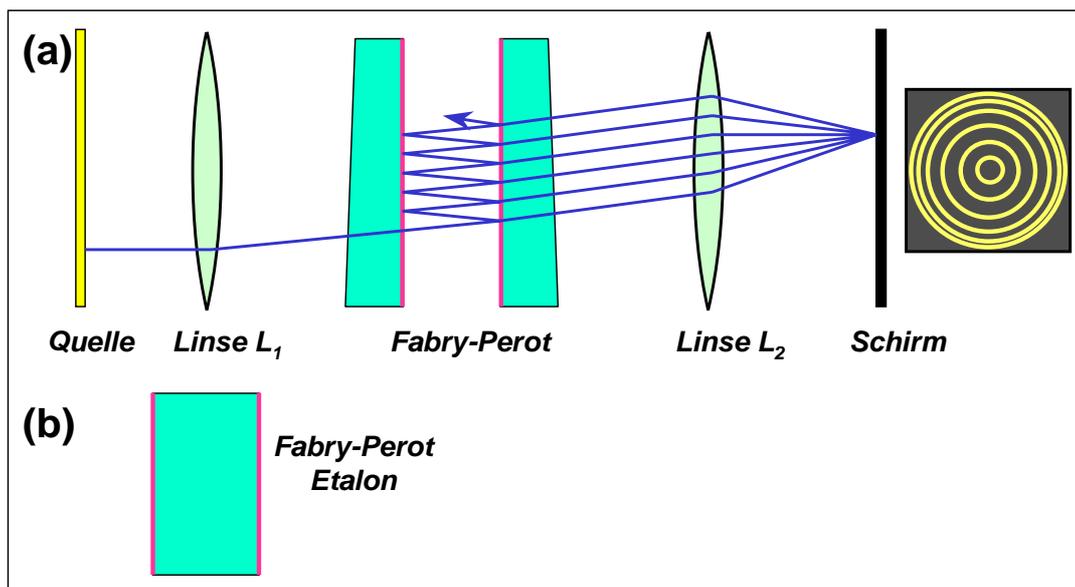


Abbildung 5.54: (a) Typischer Aufbau eines Fabry-Perot-Interferometers unter Verwendung einer flächenhaften Lichtquelle. Die Beobachtung erfolgt in der Brennebene von Linse L_2 . (b) Eine einfache Form sind so genannte Fabry-Perot-Etalons, bei denen die reflektierenden Schichten einfach auf ein planparalleles Substrat aufgebracht werden.

Für die Analyse in einem weiteren Spektralbereich muss ein anderes Spektrometer niedrigerer Auflösung (z.B. ein Gitterspektrometer) vorgeschaltet werden.

Die Auflösung eines Fabry-Perot-Spektrometers wird durch die Breite der Intensitätsmaxima bestimmt. Man kann abschätzen, dass sich zwei Linien noch auflösen lassen, wenn ihr Abstand gerade noch der FWHM der Maxima entspricht. Man erhält dann das Auflösungsvermögen eines Fabry-Perot-Interferometers zu

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\Delta g}{\text{FWHM}} = \frac{4\pi nd\sqrt{F} \cos\theta}{4\lambda} = m \frac{2\pi\sqrt{F}}{4} = m \mathcal{F}$$

oder

$$\frac{D\lambda}{\Delta\lambda} = \mathcal{F} . \quad (5.7.56)$$

Das heißt, die Finesse gibt das Verhältnis des freien Spektralbereichs des Spektrometers zur Halbwertsbreite $\Delta\lambda$ der Interferenzmaxima an.

Für $r \simeq 1$ kann man $\sqrt{F} = 2r/(1-r^2) \simeq 2/(1-r^2)$ und kleine Winkel $\cos\theta \simeq 1$ schreiben und erhält

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{2\pi nd}{(1-r^2)\lambda} . \quad (5.7.57)$$

Das Auflösungsvermögen ist also durch das Produkt aus Ordnungszahl und Finesse gegeben. Qualitativ lässt sich dies wie folgt verstehen: Die Ordnungszahl gibt an, über wie viele Wellenlängen die interferierenden Lichtbündel gegeneinander verschoben werden. Die Finesse dagegen zeigt, wie viele Bündel im Mittel miteinander interferieren und inwieweit das Interferenzmaximum gegenüber dem bei einer Zweistrahlinterferenz verschmälert wird.

Mit Fabry-Perot-Interferometern lassen sich sehr hohe Auflösungen erreichen, wie folgendes Beispiel klar macht: Mit $d = 1 \text{ cm}$ und $n = 1$ erhält man für $r = 95\%$ ($\mathcal{F} = 61$) ein Auflösungsvermögen für grünes Licht von $\lambda/\Delta\lambda = m\mathcal{F} = 40.000 \cdot 61 = 2.44 \times 10^6$. Damit kann man genügend schmale Spektrallinien, die nur $2 \times 10^{-4} \text{ nm}$ voneinander entfernt sind, trennen. Die Zahl der effektiven Reflexionen, die zur Interferenz beiträgt, ist $\pi\sqrt{\mathcal{F}} = 2\mathcal{F}$. Um allerdings die hohen Auflösungen zu erreichen, muss die Phase nach den $2\mathcal{F}$ Reflexionen immer noch genauer als $\lambda/4$ sein, so dass die verwendeten Glasplatten eben und parallel auf $\lambda/8\mathcal{F}$ über die verwendete Fläche sein müssen. In unserem Beispiel also auf etwa $\lambda/500$, also auf 1 nm !! In vielen Fällen wird die hochauflösende Spektroskopie nicht durch die Auflösung des Spektrometers, sondern durch die Linienbreiten der Spektrallinien beschränkt. In diesem Zusammenhang setzt man heute Methoden der nichtlinearen optischen Spektroskopie mit schmalbandigen Lasern ein, mit deren Hilfe sich Verbreiterungsmechanismen, wie z.B. die Dopplerverbreiterung, umgehen lassen.

5.7.5 Interferenzen dünner Schichten

Wir wollen in diesem Abschnitt Interferenzen an dünnen Schichten diskutieren. Solche Interferenzen sind z.B. gut durch die schillernden Farben eines Ölflecks oder einer Seifenblase bekannt. Es handelt sich hierbei um Interferenzen, die durch Reflexion an der Vorder- und Rückseite von dünnen Schichten hervorgerufen werden. Da das Reflexionsvermögen an diesen dünnen Schichten klein ist (z.B. 4% für $n = 1.5$), kann man sich bei der Behandlung dieser Effekte im Wesentlichen auf Zweistrahlinterdferenzen beschränken. Die Lage der Minima und Maxima der Interferenzfigur ist durch die Phasenverschiebung bei der Reflexion und durch den geometrischen Gangunterschied bestimmt. Die Farben bei der Verwendung von weißem Licht werden durch die Wellenlänge λ_{\min} bestimmt, bei der die Interferenzminima auftreten. Man beobachtet dann gerade die zu dieser Wellenlänge gehörende Komplementärfarbe.

Interferenzen gleicher Neigung

Zur Beschreibung der Interferenzerscheinungen verwenden wir (5.7.44):

$$\frac{2\pi}{\lambda} 2nd \cos \theta + \Delta\varphi = m \cdot 2\pi$$

oder

$$\Delta s = 2nd \cos \theta = \left(m + \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \right) \lambda \quad (5.7.58)$$

Diese Gleichung gibt die Bedingung für konstruktive Interferenz an. Bei gegebener Wellenlänge treten Intensitätsmaxima immer bei gleichen Winkeln auf. Man nennt diese Interferenzen deshalb nach **Lummer** auch Interferenzen gleicher Neigung. Aus Symmetriegründen sind die Interferenzkurven, die man mit dem auf unendlich adaptierten Auge (oder in der Brennebene einer Linse) beobachtet, wenn man in Richtung der Plattennormale schaut, konzentrische Kreise um die Plattennormale. Diese Kreise werden auch *Haidinger'sche Ringe* genannt.

Bei der Sichtbarmachung der Interferenzen gleicher Neigung muss man entweder sehr dünne Platten oder Licht mit einer großen Kohärenzlänge verwenden. Da die Laufwegdifferenz $\sim 2nd$ beträgt, muss die Kohärenzlänge $\ell \geq 2nd$ sein. Wir werden in Kapitel 6 sehen, dass die Kohärenzlänge durch $\ell \simeq \lambda^2/\Delta\lambda$ gegeben ist. Damit ergibt sich für die spektrale Breite der verwendeten Lichtquelle $\Delta\lambda \leq \lambda^2/2nd$. Für $d = 1 \text{ mm}$, $n = 1.5$ und $\lambda = 500 \text{ nm}$ ergibt sich $\Delta\lambda \leq 0.08 \text{ nm}$.

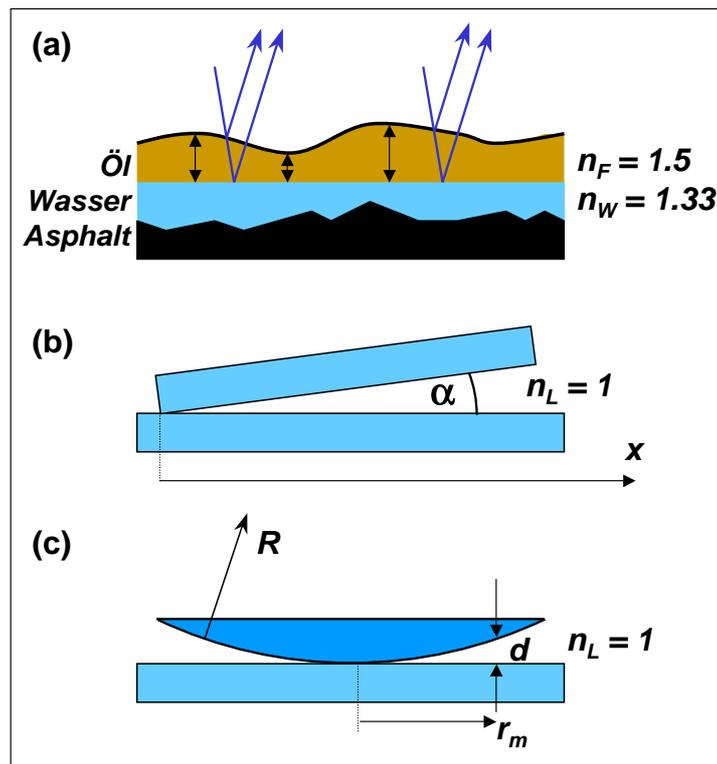


Abbildung 5.55: Interferenzen gleicher Dicke für (a) einen dünnen Ölfilm, (b) einen Luftkeil zwischen zwei Glasplatten und (c) eine sphärische Linsenoberfläche auf einer Glasplatte (Newton'sche Ringe).

Interferenzen gleicher Dicke

Wir betrachten jetzt ein System, bei dem es nicht so sehr auf den Einfallswinkel der Strahlen ankommt, sondern vielmehr auf die Variationen der optischen Dicke nd der Platte. Zu den für solche Systeme beobachtbaren Effekten gehören die Interferenzfarben von Seifenblasen oder dünnen Ölfilmen. Lässt man den Winkel θ konstant (z.B. senkrechter Lichteinfall), so folgt, dass man die Bedingung (5.7.58) für konstruktive Interferenz nur für bestimmte Dicken erfüllen kann. Für $\theta = 0$ gilt

$$\Delta s = 2n_F d = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda \quad (5.7.59)$$

Die beobachteten Interferenzstreifen geben somit einen Bereich konstanter Dicke wieder. In Abb. 5.55a ist als Beispiel ein Ölfilm ($n_F \sim 1.5$) gezeigt, der auf Wasser ($n_W \sim 1.33$) schwimmt. Die Funktion des darunterliegenden Asphalts ist die eines absorbierenden Mediums, das Streulicht wegnimmt und somit die Interferenzerscheinungen besonders stark hervortreten lässt.

Ausgeprägte Interferenzstreifen treten bei keilförmigen Proben auf. Dies kann man leicht zeigen, indem man zwei Glasplatten aufeinander legt und an einer Seite den Abstand zwischen den beiden Platte durch ein Blatt Papier vergrößert. Die Dicke d des Luftkeils ist dann etwa $d \approx \alpha x$ (siehe Abb. 5.55b). Für senkrechten Lichteinfall erhält man dann parallele Interferenzstreifen mit einem Abstand von $\Delta x = \lambda/2\alpha$. Aufgrund der Phasensprünge bei der Reflexion am optisch dichteren Medium tritt bei $d = 0$ eine Phasenverschiebung von π auf und dieser Teil des Luftkeils erscheint schwarz.

Newton'sche Ringe

Besonders einfach lassen sich die Kurven gleicher Dicke mit einer Anordnung beobachten, die zuerst von **R. Hooke** (1665) und dann von **I. Newton** (1676) verwendet wurde. Die nach Newton benannten Newton'sche Ringe entstehen, wenn man eine langbrennweitige Linse auf eine ebene Glasplatte legt. Man beobachtet dann im reflektierten Licht konzentrische Kreise, die sich mit zunehmendem Abstand vom Zentrum immer näher kommen. Für eine sphärische Linse mit dem Radius R lässt sich der Gangunterschied $2n_L d$ für konstruktive Interferenz leicht bestimmen (siehe hierzu Abb. 5.55c). Für $R \gg d$ gilt $R^2 + r^2 \simeq (R+d)^2$, woraus die Beziehung $r^2 \simeq 2Rd$ folgt. Aus der Bedingung für konstruktive Interferenz

$$\Delta s = 2n_L d_m = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda \quad (5.7.60)$$

folgt dann für den Radius r_m des m -ten hellen Rings

$$r_m = \sqrt{\frac{(m + 1/2)R\lambda}{n_L}}. \quad (5.7.61)$$

Mit dieser Beziehung lassen sich die Newton'schen Ringe, bei denen im Zentrum immer ein dunkles Interferenzminimum liegt klar von den Haidinger'schen Interferenzen gleicher Neigung unterscheiden.

Destruktive Interferenz erhält man für $2n_L d_m = \left(\frac{2m+1}{2} - \frac{1}{2}\right) \lambda$, also für $n_L d_m = m(\lambda/2)$. Im Zentrum ($m = 0$, $d_m = 0$) erhält man also ein Intensitätsminimum. Dieses bezeichnet man als dunklen Fleck und ist ein klarer Beweis für den bei der Reflexion am optisch dichteren Medium auftretenden Phasensprung von π . Wäre dies nicht so, müsste im Zentrum ein heller Fleck auftreten.

Kennt man den Krümmungsradius R der sphärischen Linsenoberfläche, so kann man durch Ausmessen der Radien der hellen und dunklen Ringe die Wellenlänge λ des verwendeten Lichtes bestimmen.

Vergütung von Oberflächen und dielektrische Spiegel

Wir waren in den vorangegangenen Unterabschnitten davon ausgegangen, dass die Reflexion an den betrachteten dünnen Schichten schwach ist und deshalb nur Zweifachinterferenzen auftreten. In diesem Zusammenhang ist der Spezialfall von Interesse, bei dem die Intensität des an der Vorder- und Rückseite des Films reflektierten Lichts gleich ist. Bei destruktiver Interferenz sollte dann die Reflexion vollständig verschwinden. Dies wird bei der Vergütung von Glasoptiken zur Reflexminderung ausgenutzt.³⁴

Wir betrachten eine Glasplatte mit Brechungsindex n_2 , auf die eine dünne Schicht mit dem Brechungsindex n_F mit $n_F < n_2$ aufgebracht ist. Bei Beleuchtung des Systems aus Luft ($n_1 = 1$ gilt somit: $n_1 < n_F < n_2$). Damit wird die Phasenverschiebung durch Reflexion gleich null. Für das Auftreten destruktiver Interferenz muss dann bei senkrechtem Einfall gelten: $2n_F d = (2m + 1) \lambda / 2$. Für das erste Interferenzminimum ($m = 0$) benötigt man also eine Schicht mit der Dicke $n_F d = \lambda / 4$. Deshalb bezeichnet man solche Schichten als $\lambda/4$ -Schichten. Damit die destruktive Interferenz zum Verschwinden der Reflexion führt, müssen die Reflexionskoeffizienten beim Eintritt und Austritt aus der Schicht

³⁴G. Bauer, 1934.

gleich groß werden. Zur näherungsweisen Berechnung nimmt man an, dass die an den beiden Grenzflächen reflektierten Wellen proportional zum Reflexionsvermögen der betreffenden Grenzflächen sind und vernachlässigt, dass die in die Schicht eindringende Welle durch die Reflexion an der Vorderseite eine geringe Schwächung erfahren hat. Verwendet man die Amplitudenreflexionskoeffizienten (Fresnel'sche Formeln) aus Abschnitt 2.6.2, so erhält man für den senkrechten Einfall die Bedingung für die Antireflexion zu

$$\frac{n_1 - n_F}{n_1 + n_F} = \frac{n_F - n_2}{n_F + n_2}$$

oder $n_F = \sqrt{n_1 n_2}$ und $n_F d = \lambda/4$. (5.7.62)

Mit dieser einfachen dielektrischen Schicht könnte man allerdings nur für eine bestimmte Wellenlänge die Reflexion praktisch perfekt unterdrücken. Aufgrund der Umkehrbarkeit der Strahlengänge unterdrückt diese Antireflexbeschichtung die Reflexion sowohl bei Beleuchtung der Glasplatte von der Luftseite als auch bei Beleuchtung von der Glasseite her.

Wir wollen die Situation anhand eines Zahlenbeispiels diskutieren. Für ein Schwerflintglas mit $n_2 = 1.9$ tritt bei senkrechtem Lichteinfall ein Reflexionsverlust an der Eintrittsseite von 10% auf. Durch das Aufbringen einer MgF_2 -Schicht mit $n_F = 1.38 \simeq \sqrt{1.9}$ oder einer Kryolith-Schicht (Na_3AlF_6 , $n = 1.33 \simeq \sqrt{1.77}$) mit passender Dicke lässt sich die Reflexion praktisch vollständig unterdrücken. Für ein Standar-Kronglas mit $n_2 = 1.5$ gibt es jedoch bei dem entsprechenden Brechungsindex $n_F = \sqrt{n_2} = 1.22$ kein passendes Filmmaterial. Man verwendet auch $\lambda/4$ -Schichten aus MgF_2 und reduziert dadurch die Reflexion von 4.2% auf etwa 1.5%. Durch das Aufbringen mehrerer Schichten passender Dicke lässt sich aber auch hier die Reflexion fast vollständig unterdrücken. Hochwertige Antireflexionsschichten zeigen üblicherweise Restreflexionskoeffizienten, die kleiner als 0.1% sind. Die Herstellung solcher Schichten erfolgt mit den üblichen Beschichtungsmethoden wie Aufdampf- und Sputterverfahren.

Dielektrische Vielschichtspiegel

Es sei hier noch darauf hingewiesen, dass man durch die Verwendung von paarweisen Doppelschichten aus hochbrechendem (n_h) und niedrigbrechendem (n_n) Materialien hochreflektierende Spiegel erhalten kann. Hierbei muss die optische Dicke der einzelnen Schichten $n_h d_h = n_n d_n = \lambda/4$ sein. Der optische Gangunterschied an jeder Einzelschicht ist hier wieder $\lambda/2$, der auftretende Phasensprung aufgrund der alternierenden Brechungsindizes ist nun aber $\Delta\varphi = \pi$, so dass insgesamt ein Gangunterschied von λ auftritt, was zu optimaler Reflexion führt. Baut man genügend viele Doppelschichten hintereinander auf, so erhält man ein Reflexionsvermögen, das für bestimmte Wellenlängen weit über 99% liegen kann. Wichtig ist, dass solche Spiegel im Gegensatz zu metallischen Spiegeln eine sehr geringe Absorption haben und deshalb auch für große Leistungen geeignet sind (Laser-Spiegel).

Bereits eine hochbrechende $\lambda/4$ -Schicht aus ZnS ($n_h = 2.3$) erhöht z.B. das Reflexionsvermögen einer Grenzfläche Luft/Glas von 4% auf etwa 31%. Es sei schließlich noch darauf hingewiesen, dass eine mathematisch genaue Behandlung von reflexmindernden und reflexerhöhenden Schichten die Berücksichtigung von Vielstrahlinterferenzen notwendig macht.

Zusammenfassung

- Beugungs- und Interferenzphänomene treten auf, wenn zwei oder mehrere Teilwellen mit ortsabhängigen Phasendifferenzen kohärent überlagert werden.
- Begriffskonvention:
 1. Interferenz ist mit der geplanten Überlagerung von zwei oder mehreren getrennten Teilwellen verbunden. Eine notwendige Bedingung für das Auftreten von Interferenz ist die Kohärenz der Teilwellen.
 2. Beugung tritt bei der Begrenzung einer einzelnen Wellenfront durch ein Hindernis auftritt. Beugung kann als Interferenz von Sekundärwellen angesehen werden, die vom beugenden Objekt phasenkohärent zur einlaufenden Wellenfront ausgesandt werden.

Beugung:

- Die Beugung von Wellen kann näherungsweise nach dem Huygensschen Prinzip beschrieben werden, nach dem jeder Punkt einer Phasenfläche einer Welle Ausgangspunkt einer Kugelwelle ist. Die Gesamtamplitude des an einem Beobachtungspunkt P hinter einem beugenden Objekt beobachteten Lichts ergibt sich durch die kohärente Überlagerung aller Sekundärwellen. Mathematisch ist die Gesamtamplitude durch das Beugungsintegral gegeben, das die Summe aller vom beugenden Objekt auslaufenden Sekundärwellen am Punkt P repräsentiert, wobei die unterschiedlichen Phasenfaktoren der Teilwellen eine entscheidende Rolle spielen.
- Bei Beugungsphänomenen wird zwischen Fresnel- und Fraunhofer-Beugung unterschieden. Bei der Fraunhofer-Beugung hängen die Phasenfaktoren der sich überlagernden Sekundärwellen nur linear vom Ort \mathbf{r} in der Beugungsebene ab, während bei der Fresnel-Beugung nichtlineare Terme berücksichtigt werden müssen. Fraunhofer-Beugung tritt im Fernfeld ($L \gg r^2/\lambda$), Fresnel-Beugung dagegen in der Nahzone ($L \ll r^2/\lambda$) auf.
- Fresnel-Beugung:

1. Die Fresnel-Beugung an einer Lochblende ergibt entlang der Symmetrieachse durch das Zentrum der Lochblende die Intensität

$$|\Psi_P| = 2A^2[1 - \cos(k_0 R^2/2L)].$$

Die Intensität variiert also periodisch mit $1/L$, wobei L der Abstand zur Lochblende ist.

2. Die Fresnel-Beugung an einer runden, undurchlässigen Scheibe ergibt entlang der Symmetrieachse durch das Zentrum der Scheibe die Intensität

$$|\Psi_P| = A^2 = \text{const.}$$

Man erhält also überraschenderweise hinter der runden Scheibe unabhängig vom Abstand von der Scheibe immer einen hellen Fleck.

3. Mit Hilfe der Fresnelschen Zonenplatten kann eine Abbildung durch konstruktive Interferenz aller Lichtbündel, die durch geradzahlige oder ungeradzahlige Fresnelzonen durchgelassen werden, erzielt werden.

- Fraunhofer-Beugung:

1. Die Amplitudenverteilung $\Psi(u, v)$ des Fraunhoferschen Beugungsbildes in der Beobachtungsebene ist durch die Fourier-Transformierte der Transmissionsfunktion $f(x, y)$ des beugenden Objekts gegeben:

$$\Psi(u, v) = \iint f(x, y) \exp[-i(ux + vy)] dx dy.$$

Hierbei sind $u \equiv k_0 \sin \theta_x$ und $v \equiv k_0 \sin \theta_y$ durch die Beugungswinkel θ_x und θ_y , sowie den Wellenvektor k_0 (bzw. Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k_0$) der einlaufenden Welle gegeben.

2. Das Beugungsmuster eines unendlich langen Spalts (in y -Richtung) mit Breite b (in x -Richtung) ist durch

$$I(u, v) = b^2 \left(\frac{\sin(bu/2)}{bu/2} \right)^2 \cdot \delta(v)$$

gegeben.

3. Das Beugungsmuster einer Lochblende mit Radius R ist durch

$$I(\xi) = I(0) \left(\frac{2J_1(\xi R)}{\xi R} \right)^2$$

gegeben, wobei $\xi = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta$ und J_1 die Besselfunktion erster Ordnung ist.

4. Das Beugungsmuster von beugenden Objekten mit komplizierterer Geometrie lässt sich in vielen Fällen durch Ausnutzen des Faltungstheorems der Fourier-Transformation

$$\text{FT}(A \otimes B) = \text{FT}(A) \cdot \text{FT}(B)$$

erhalten: Die Fourier-Transformierte der Faltung von zwei Funktionen A und B ist gleich dem Produkt der Fourier-Transformierten dieser zwei Funktionen.

5. Das Beugungsmuster eines Doppelspaltes (Spaltbreite b , Position $-a/2$ und $+a/2$) ergibt sich durch Fourier-Transformation der Transmissionsfunktion $f_{\text{DS}} = f_{\text{Spalt}}(x) \otimes [\delta(x - a/2) + \delta(x + a/2)]$ des Doppelspalts zu

$$I_{\text{DS}} = I_{\text{DS}}(0) \cos^2(ua/2) \frac{\sin^2(bu/2)}{(bu/2)^2},$$

also aus dem Produkt des Beugungsmusters des Einzelspaltes (Beugungsfunktion) und einer \cos^2 -Funktion (Interferenzfunktion). Letztere ist die Fourier-Transformierte der beiden Delta-Funktionen, die die Positionen der Spalte angeben.

6. Das Beugungsmuster eines Gitters aus N Spalten der Breite b ergibt sich als Produkt des Beugungsmusters des Einzelspaltes (Beugungsfunktion) und der Interferenzfunktion

$$I_{\text{Gitter}} = I(0) \left(\frac{\sin(uNa/2)}{\sin(ua/2)} \right)^2.$$

Letztere ist die Fourier-Transformierte einer Summe aus N δ -Funktionen, die die Positionen der einzelnen Gitterspalte angibt.

7. Die Transmissionsfunktion f_{Rechteck} einer Rechteckblende mit den Seitenlängen a und b lässt sich als Faltung der Transmissionsfunktionen von zwei unendlich langen, in x - und y -Richtung verlaufenden Spalten mit Breiten a und b

$$f_{\text{Rechteck}}(x, y) = f_{\text{Spalt}}(x) \otimes f_{\text{Spalt}}(y)$$

ausdrücken. Das Beugungsmuster ergibt sich deshalb als Produkt der Fourier-Transformierten zweier unendlich langer Spalte:

$$I_{\text{Rechteck}} = a \cdot b \frac{\sin^2(au/2)}{(au/2)^2} \cdot \frac{\sin^2(bu/2)}{(bu/2)^2}.$$

8. Die Fraunhofer-Beugung an ein- und zweidimensionalen periodischen Objekten lässt sich mit Hilfe des reziproken Gitters beschreiben. Sind \mathbf{a} und \mathbf{b} die Gittervektoren, die die Gitterpunkte des periodischen Beugungsobjekts beschreiben, so sind die reziproken Gittervektoren durch

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^* &= 1 & \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^* &= 1 \\ \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{b}^* \cdot \mathbf{a} & &= 0 \end{aligned}$$

bestimmt. Für die möglichen Beugungsrichtungen mit endlicher Intensität gilt

$$\mathbf{k} - \mathbf{k}_0 = \mathbf{u} = \frac{1}{2\pi} (h^* \mathbf{a}^* + k^* \mathbf{b}^*).$$

Hierbei ist \mathbf{k}_0 der Wellenvektor der einlaufenden und \mathbf{k} der Wellenvektor der gebeugten Welle.

Interferometrie:

- Bei der Interferometrie werden gezielt zwei oder mehrere kohärente Teilwellen zur Überlagerung gebracht. Die kohärenten Teilwellen können entweder durch Aufspalten der Wellenfront oder durch Aufspalten der Wellenamplitude erzeugt werden.
- Maximale Intensität der kohärent überlagerten Teilwellen erhält man für optische Laufwegunterschiede

$$\Delta s = m \cdot \lambda \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- Bei Zweistrahl-Interferometern erhält man eine kosinusförmige Intensitätsvariation als Funktion der Laufwegdifferenz Δs :

$$I(\Delta s) = I_0 \left[1 + \cos\left(\varphi_0 + \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s\right) \right].$$

Hierbei ist φ_0 eine konstante Phasendifferenz, die durch Phasensprünge bei der Reflexion an Grenzflächen zwischen Medien mit unterschiedlichem Brechungsindex entstehen kann.

- Bei der Vielstrahlinterferenz erhält man eine Intensitätsverteilung mit scharfen Maxima. Für ein Gitter mit N Spalten ergibt sich

$$I_{\text{Gitter}} = \frac{1}{N^2} \left(\frac{\sin(uNa/2)}{\sin(ua/2)} \right)^2$$

mit Intensitätsmaxima bei

$$u = k_0 \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta = \frac{2\pi}{a} m.$$

Dies entspricht einer Laufwegdifferenz zwischen Teilwellen von benachbarten Spalten von

$$\Delta s = a \sin \theta = m \cdot \lambda \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- Vielstrahlinterferenz wird wegen der Schärfe der Interferenzmaxima in hochauflösenden Gitterspektrometern eingesetzt. Die maximale Auflösung eines Gitterspektrometers hängt nur von der Gesamtlänge L des Gitters ab:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2 \frac{L}{\lambda}.$$

- Vielstrahlinterferenz wird auch im Fabry-Perot-Interferometer eingesetzt, das aus einer planparallelen Platte der Dicke d besteht, die mit hochreflektierenden Schichten begrenzt wird. Das Fabry-Perot-Interferometer wird zur genauen Vermessung von Lichtwellenlängen eingesetzt. Seine Auflösung ist durch die Finesse \mathcal{F} zu

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{m\mathcal{F}}$$

gegeben. Hierbei ist $m = 2d/\lambda$ die Ordnungszahl; die Finesse ist durch das Verhältnis des Abstandes zweier Interferenzmaxima und der vollen Breite der Maxima gegeben.

- Michelson-Morley-Experiment:
Mit einem Zwiestrahlinferferometer wurde von Michelson und Morley gezeigt, dass die Lichtgeschwindigkeit unabhängig vom Bewegungszustand der Quelle oder des Beobachters ist.
- Die Vielstrahlinterferenz wird in dielektrischen Spiegeln und vergüteten Oberflächen zur Realisierung eines hohen (konstruktive Interferenz) bzw. niedrigen (destruktive Interferenz) Reflexionsvermögens eingesetzt.

