

## Kapitel 6

# Kohärenz

Um Interferenzerscheinungen beobachten zu können, müssen die interferierenden Teilwellen *kohärent* sein. Dies bedeutet, dass die Zeit- und Ortsabhängigkeit ihrer Phasen bis auf einen konstanten Phasenfaktor identisch sein muss. In den vorangegangenen Kapiteln haben wir immer angenommen, dass vollkommen kohärente oder vollkommen inkohärente Teilstrahlen in den Interferenzexperimenten vorliegen. Wir wollen in diesem Kapitel das *Konzept der räumlichen und zeitlichen Kohärenz* einführen und einige Anwendungen für Präzisionsmessungen diskutieren.

Die Kohärenz einer Welle beschreibt die Genauigkeit, mit der sie als reine sinusförmige Welle dargestellt werden kann. Wir hatten bei unserer bisherigen Diskussion immer Wellen angenommen, deren Wellenvektor  $\mathbf{k}$  und deren Frequenz  $\omega$  wohldefiniert waren. Wir wollen jetzt analysieren, wie kleine Unschärfen in diesen Größen die Beobachtungen in optischen Experimenten beeinflussen. Wellen, die als reine Sinuswellen erscheinen, wenn man sie nur über einen beschränkten Zeit- und Raumbereich beobachtet, heißen *teilweise kohärent*. Ein wichtiger Diskussionspunkt in diesem Kapitel wird sein, die Abweichungen von Wellen von einer reinen Sinuswelle zu charakterisieren.

Das Verständnis der Kohärenzeigenschaften von Licht hat zahlreiche praktische Konsequenzen. Darunter befindet sich z.B. die Fourier-Spektroskopie und mehrere Methoden für hochauflösende astronomische Messungen. Sie basieren meist auf dem Verständnis von Fluktuationen in Phase und Intensität realer Lichtwellen. Wir werden diese Fluktuationen hier nur auf dem Niveau der klassischen Physik diskutieren, obwohl einige der spannenden Bereiche der modernen Optik durch die Anwendung der Quantentheorie auf das Phänomen der Kohärenz entstanden.

Es sei schließlich darauf hingewiesen, dass für Wellen der Akustik oder der Hochfrequenztechnik die Begriffe Kohärenz und Inkohärenz eine wesentlich geringere Bedeutung haben als in der Optik. Die dort auftretenden Wellen können fast immer als vollständig kohärent angesehen werden. Die Sonderstellung der Optik, die wir im täglichen Leben dauernd erfahren, hat lange Zeit verhindert, dass man eine Wellentheorie des Lichtes ernsthaft in Erwägung gezogen hat. Als man erstmals Interferenzerscheinungen beobachtet hat, hatten diese geradezu etwas Sensationelles an sich, weil sie dem alltäglich Beobachteten widersprachen.

## 6.1 Reale Lichtwellen

Eine Lichtquelle, die eine ebene Welle mit fester Frequenz  $\omega_0$  und festem Wellenvektor  $\mathbf{k}_0$  aussendet, bezeichnen wir als ideale Lichtquelle. Die Flächen konstanter Phase (Wellenfronten) stehen senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung und stellen eine unendlich ausgedehnte Fläche dar. Wissen wir den Phasenfaktor  $\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t = \omega_0 (\frac{1}{c} \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - t)$  einer solchen Welle an irgendeinem Ort zu irgendeiner Zeit, so können wir die Phase dieser Welle für alle anderen Orte und Zeiten voraussagen (hierbei ist  $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ ). Eine solche Welle bezeichnen wir als vollkommen kohärent. Reale Lichtquellen besitzen aber immer eine endliche spektrale Breite und eine endliche räumliche Ausdehnung, was zu Licht führt, dass aus Teilwellen mit Frequenzen aus einem Frequenzintervall  $\Delta\omega$  um  $\omega_0$  und Wellenvektoren mit unterschiedlichen Richtungen  $\hat{\mathbf{k}}$  zusammengesetzt ist. Die führt zu einer endliche *zeitlichen Kohärenz* und einer endlichen *räumlichen Kohärenz*.

Wir versuchen zuerst zusammenzufassen, was wir über reale Lichtquellen wissen. Wir wissen zunächst, dass monochromatisches Licht von angeregten Atomen ausgesandt wird, die einen Übergang zwischen zwei gleichen Energieniveaus machen (siehe Abb. 6.1). Allerdings emittieren die einzelnen Atome normalerweise völlig unabhängig voneinander, d.h. es bestehen beliebige Phasendifferenzen zwischen den emittierten Wellen. Eine genaue spektrale Analyse zeigt ferner, dass das Licht nicht wirklich monochromatisch ist. Es enthält vielmehr verschiedene Wellenlängen innerhalb einer endlichen *Linienbreite*, da die beteiligten Energieniveaus energetisch verschmiert sind. Ist die Linienbreite sehr viel kleiner als die Wellenlänge selbst, so sprechen wir von einer *quasi-monochromatischen* Strahlung. Die Gründe für die endliche Linienbreite werden wir weiter unten noch diskutieren (siehe Abschnitt 6.2). Als Beispiel sei hier nur die *Dopplerverbreiterung* angeführt, die dadurch entsteht, dass sich die emittierenden Atome z.B. in einem Gas zufallsverteilt in verschiedene Richtungen bewegen, wodurch die Strahlung jedes Atoms eine spezifische Dopplerverschiebung erhält.

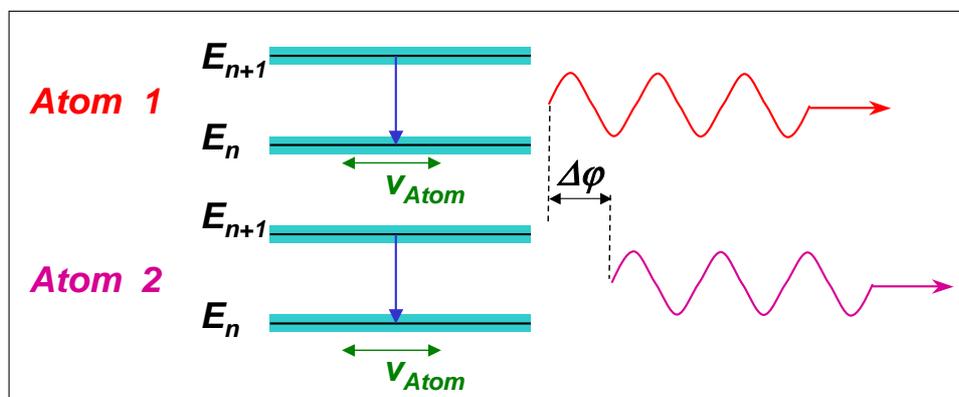


Abbildung 6.1: Schematische Darstellung der Lichtemission beim Übergang von Atomen von einem angeregten Zustand  $E_{n+1}$  in einen Zustand  $E_n$ . Da alle Atome völlig unkorreliert emittieren, bestehen zwischen den einzelnen Wellenpaketen beliebige Phasendifferenzen  $\Delta\phi$ . Aufgrund der Verschmierung der Energieniveaus ist ferner die Übergangsfrequenz  $\nu$  nicht scharf sondern besitzt eine endliche Übergangsbreite.

Wir werden später sehen, dass die endliche spektrale Frequenzbreite einer realen Lichtquelle direkt mit einer endlichen *Kohärenzzeit* verknüpft ist. Die endliche *zeitliche Kohärenz* einer Lichtquelle resultiert also aus der endlichen spektralen Breite einer Lichtquelle. Die Betrachtung des Phasenfaktors  $\exp[i\omega_0 (\frac{1}{c} \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - t)]$  einer Welle zeigt aber, dass neben einer endlichen spektralen Breite auch eine endliche Schwankung der Richtung des Wellenvektors  $\mathbf{k}$  zu Phasendifferenzen zwischen verschiedenen Teilwellen einer Lichtquelle führen kann. Dies resultiert in einer endlichen *räumlichen Kohärenz*.

Wir wollen nun überlegen, wie eine reale Lichtwelle aussieht. Dies können wir durch die Anwendung

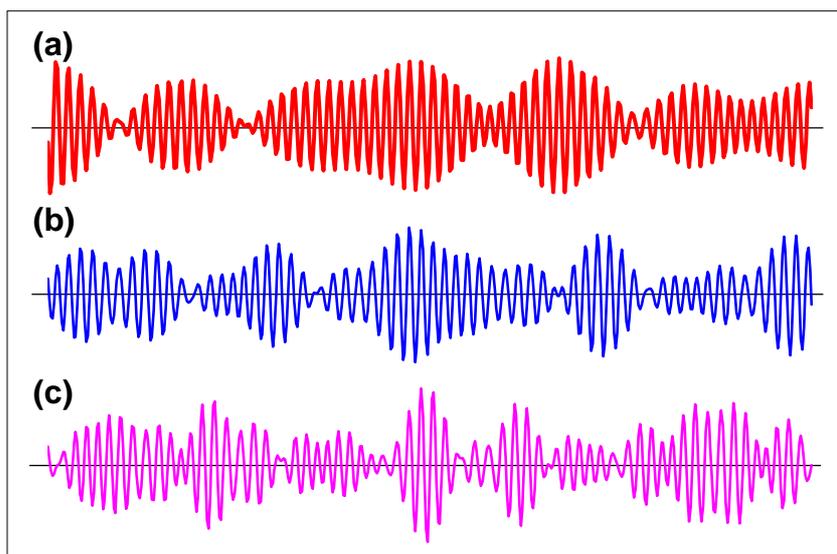


Abbildung 6.2: Drei Beispiele für Wellen, die keine reinen Sinuswellen darstellen. Jede besteht aus 5 Komponenten, die in einem Frequenzbereich von  $\pm\Delta\omega/\omega = 0.05$  (a), 0.10 (b) und 0.15 (c) zufallsverteilt sind.

einer Fouriersynthese beantworten, wobei wir eine Anzahl von Sinuswellen, deren Frequenzen in einem bestimmten Bereich (der Linienbreite der Strahlung) liegen, addieren. Der Wellenvektor der einzelnen Wellen soll identisch sein. Das Ergebnis ist in Abb. 6.2 gezeigt. Wir erkennen ein kompliziertes Schwebungsmuster - die Amplitude der Welle ist nicht konstant, sondern fluktuiert in einer scheinbar zufälligen Art und Weise. Die durchschnittliche Schwebungsdauer hängt vom Frequenzbereich ab, aus dem die beteiligten Wellen stammen und ist direkt mit der Kohärenzzeit verknüpft.

Genauso, wie wir Teilwellen mit unterschiedlichen Frequenzen und konstanten Wellenvektor überlagern können, könnten wir auch Teilwellen mit unterschiedlichen Richtungen aber konstantem Betrag des Wellenvektors (entspricht konstanter Frequenz) überlagern und die Gesamtamplitude als Funktion des Ortes betrachten. Dies wollen wir hier allerdings nicht tun.

### 6.1.1 Amplitude und Phase von quasi-monochromatischem Licht

Um uns eine Vorstellung von der zeitlichen Kohärenz einer realen Lichtquelle zu verschaffen, betrachten wir eine Überlagerung von vielen Teilwellen mit unterschiedlichen Frequenzen (unterschiedlichem Betrag des Wellenvektors). Bevor wir die Modellvorstellung von realen Wellen als Überlagerung einer großen Zahl von Sinuswellen weiterverfolgen, führen wir zuerst den Mittelwert einer Funktion  $g(t)$  in einem Zeitintervall  $T$  ein:

$$\langle g \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) dt . \quad (6.1.1)$$

Wir werden im Folgenden mit komplexen Wellenfeldern  $f = f^R + f^I$  arbeiten. Die Intensität einer Welle zu einem bestimmten Zeitpunkt ist dann definiert als  $I(t) = |f(t)|^2$ . Für eine reine Sinuswelle, die durch die komplexe Funktion  $f(t) = a \exp(i\omega t)$  beschrieben wird, ist die Intensität konstant.

Wir beschreiben nun quasi-monochromatisches Licht durch die Überlagerung einer großen Zahl  $N$  von Sinuswellen mit gleicher Amplitude  $a$ . Jede Teilwelle hat aber eine zufallsverteilte Phase  $\phi_n$  und eine Frequenz  $\omega_n$  aus dem Intervall  $\omega_0 \pm \varepsilon$ , wobei  $\varepsilon \ll \omega_0$ . Mit diesen Annahmen ergibt sich für die Amplitude und Phase der zusammengesetzten Welle

$$f(t) = a \sum_{n=1}^N \exp[i(\omega_n t + \phi_n)] \quad (6.1.2)$$

$$I(t) = |f(t)|^2 = a^2 \left| \sum_{n=1}^N \exp[i(\omega_n t + \phi_n)] \right|^2. \quad (6.1.3)$$

Dies lässt sich als Doppelsumme

$$I(t) = a^2 \left| \sum_n \sum_m \exp(i[(\omega_n - \omega_m)t + \phi_n - \phi_m]) \right| \quad (6.1.4)$$

schreiben. Die Intensität oszilliert also zeitlich mit der Schwebungsfrequenz  $\varepsilon \approx \omega_n - \omega_m$ . Die in Abb. 6.2 gezeigten Wellen haben typische Schwebungsperioden von  $2\pi/\varepsilon$ . Dies sollte sich in einer Analyse des kurzzeitigen und langzeitigen Mittelwertes bemerkbar machen. Der zeitliche Mittelwert von (6.1.4) lässt sich als

$$\langle I(t) \rangle_T = \frac{a^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_n \sum_m \exp(i[(\omega_n - \omega_m)t + \phi_n - \phi_m]) dt \quad (6.1.5)$$

schreiben.

Wir betrachten nun zunächst die Mittelung über einen Zeitraum  $T_0 \gg 2\pi/\varepsilon$ , der groß gegenüber der Schwebungsperiode ist, das heißt, wir betrachten das *langfristige Mittel*. In diesem Fall kann der Term  $(\omega_n - \omega_m)t = \varepsilon t$  einen beliebigen Wert bis zu  $\varepsilon T_0$  annehmen, was nach der Definition von  $T_0$  viel größer als  $2\pi$  sein kann. Daher gibt es die Tendenz, dass sich die fluktuierenden Teile im Integral gegenseitig herausheben. Nur die Terme mit  $n = m$ , die alle den Wert  $e^{i0} = 1$  haben, liefern einen dauernd positiven Beitrag zum Integral. Es gilt daher

$$\langle I(t) \rangle_T = \frac{a^2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sum_{n=1}^N 1 dt = a^2 N. \quad (6.1.6)$$

Diese Gleichung besagt nichts anderes, als dass die Intensität der Gesamtwelle gleich der Summe der Intensitäten der Einzelwellen ist, was aufgrund der Unkorreliertheit der Teilwellen nicht verwunderlich ist.

Wir berechnen als nächstes das *kurzzeitige Mittel*. Falls die Periode  $T_1$ , über die gemittelt wird, klein genug ist, ist die maximale Phase  $(\omega_n - \omega_m)t = \varepsilon t \leq \varepsilon T_1$  wesentlich kleiner als  $2\pi$ . Dies tritt ein, wenn  $T_1 < 2\pi/\varepsilon$  ist. In diesem Fall kann der Term  $(\omega_n - \omega_m)t$  gegenüber  $\phi_n - \phi_m$  vernachlässigt werden und es gilt

$$\begin{aligned} \langle I(t) \rangle_T &= \frac{a^2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \exp[i(\phi_n - \phi_m)] dt \\ &= a^2 N + 2a^2 \sum_n \sum_{m < n} \cos(\phi_n - \phi_m) . \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

Hierbei haben wir in der letzten Zeile die Terme mit  $n = m$  von den anderen getrennt aufgeführt. Wir können die Größe des zweiten Terms nicht genau vorhersagen. Wir wissen nur, dass er von null verschieden ist und dass sich sein Wert während der kurzen Zeitspanne  $T_1$  nicht ändert. Wir sehen also, dass sich die Intensität während der Zeitspanne  $T_1$  nicht wesentlich ändert, aber vom langfristigen Mittelwert abweicht.

Wir analysieren nun den zweiten Term in (6.1.7) etwas genauer, der etwa  $\frac{1}{2}N^2$  Beiträge zur Summe liefert. Sein Quadrat, über viele verschiedene  $T_1$  Intervalle gemittelt, ist

$$\frac{1}{2}N^2 4a^4 \langle \cos^2(\phi_n - \phi_m) \rangle_T = a^4 N^2 , \quad (6.1.8)$$

da  $\langle \cos^2 \rangle = \frac{1}{2}$ . Das heißt, der fluktuierende Term hat einen quadratischen Mittelwert von  $a^2 N$ , die Fluktuationen sind also vergleichbar mit der mittleren Intensität. Wir können daher folgern, dass der kurzzeitige Mittelwert um den langzeitigen Mittelwert  $a^2 N$  makroskopisch fluktuiert. Die kritische Zeitkonstante  $\tau_c = T_c/2\pi = (2\pi/2\varepsilon)/2\pi = 1/\varepsilon$ , die die kurzzeitigen von den langzeitigen Fluktuationen unterscheidet, entspricht in etwa der *Kohärenzzeit*  $\tau_c$  der Welle. Wir werden diese Zeit weiter unten noch genauer definieren. Wir sehen aber bereits hier, dass  $\tau_c \simeq 1/\varepsilon$ , d.h. die Kohärenzzeit proportional zu inversen spektralen Breite ist. Für klassische Lichtquellen liegt diese Zeit in der Größenordnung von  $10^{-10}$  sec. Man kann schließlich auch zeigen, dass sich die Welle während des kurzen Zeitintervalls  $T_1$  praktisch wie eine reine Sinuswelle verhält.

Zusammenfassend können wir festhalten, dass das Verhalten der zusammengesetzten Welle auf einer kurzen Zeitskala  $T_1$  dem einer einfachen, harmonischen Welle mit konstanter Intensität entspricht. Beobachtungen über einen längeren Zeitraum ( $\gg 2\pi/\varepsilon$ ) zeigen aber, dass diese kurzzeitige Intensität fluktuiert und dass es keine Korrelation zwischen den Phasen auf einer Zeitskala deutlich größer als  $T_1$  gibt.

Wir wollen den eben diskutierten Sachverhalt uns nochmals veranschaulichen (siehe hierzu Abb. 6.3). Dazu betrachten wir zunächst nur zwei Teilwellen mit Frequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$ , wobei  $\omega_1 = \omega_0 + \varepsilon/2$  und  $\omega_2 = \omega_0 - \varepsilon/2$ , so dass  $\omega_1 - \omega_2 = \varepsilon$ . Die Phasendifferenz dieser beiden Teilwellen mit Frequenzen am Rande des Frequenzintervalls sei bei der Zeit  $t = 0$  gleich Null und wächst mit der Zeit entsprechend

$$\Delta\varphi(t) = (\omega_1 - \omega_2)t$$

linear mit der Zeit an. Nach der Zeitskala  $T_c$  ist sie auf den Wert  $\Delta\varphi(T_c) = 2\pi$  angewachsen (siehe Abb. 6.3b). Alle anderen Teilwellen mit Frequenzen näher bei der Mittenfrequenz  $\omega_0$  ergeben daher nach

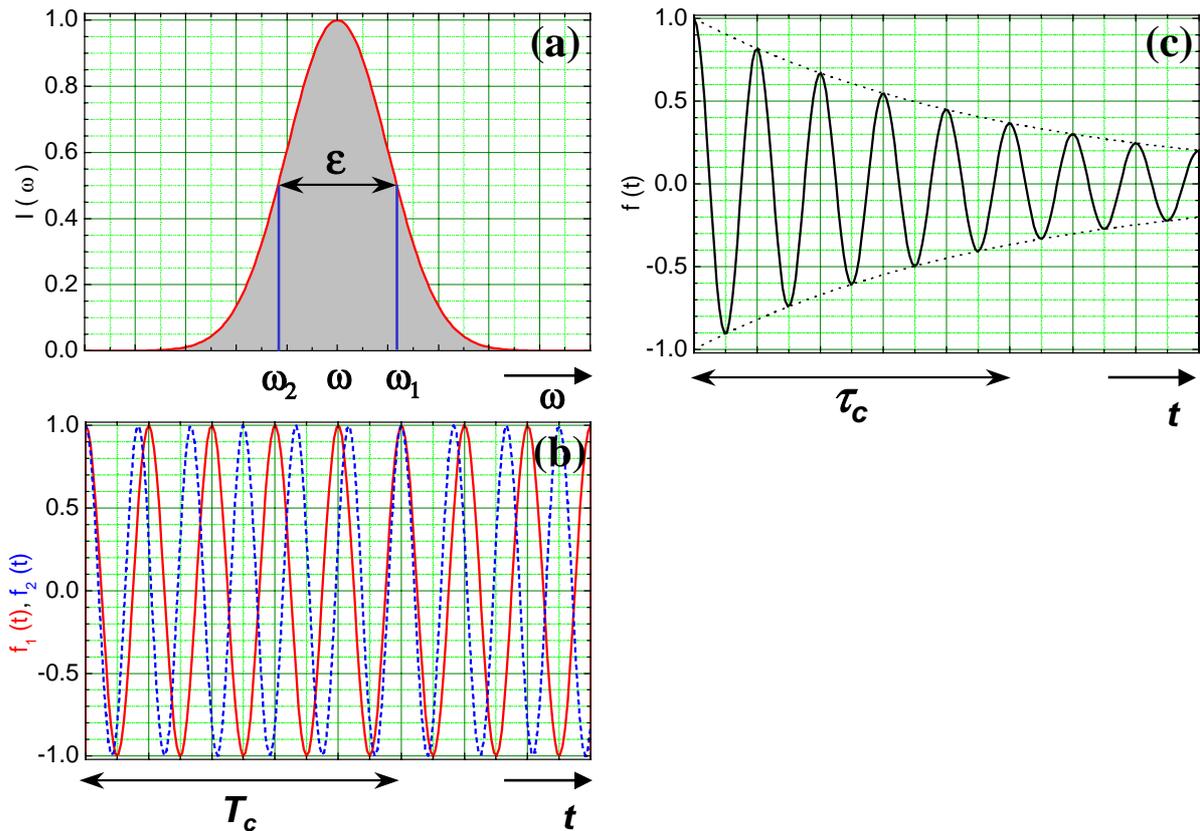


Abbildung 6.3: Zur Veranschaulichung der zeitlichen Kohärenz einer Welle mit der spektralen Frequenzbreite  $\epsilon$ . (a) Spektrale Frequenzverteilung, (b) zeitliche Überlagerung zweier Teilwellen, (c) zeitlicher Verlauf der Gesamtwellenamplitude.

dem Zeitintervall  $T_c$  Phasendifferenzen im Intervall zwischen  $0$  und  $2\pi$ . Für den zeitlichen Mittelwert gilt dann

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T_c} \int_{-T_c/2}^{+T_c/2} \sum_{n=1}^N f_n(t) dt \equiv 0,$$

wenn wir voraussetzen, dass die Überlagerung alle Phasendifferenzen zwischen  $0$  und  $2\pi$  enthält. Wir sehen also, dass die Überlagerung eine zeitlich auf der Zeitskala  $T_c$  abklingende Gesamtamplitude ergibt. Wir werden weiter unten ganz allgemein die Kohärenzzeit  $\tau_c$  als die Zeit definieren, innerhalb der die Gesamtamplitude einer Überlagerung von Teilwellen auf  $1/e$  ihres Anfangswertes abgesunken ist (siehe Abb. 6.3c).

### 6.1.2 Das Spektrum einer Zufallsfolge von Wellenpaketen

#### Weißes Licht

Man kann weißes Licht als eine Folge von sehr kurzen Wellenpaketen auffassen. Stellt man die Wellenpakete im Limes als Delta-Funktionen dar, wird die Fourier-Transformierte  $F(\omega)$  zu einer Konstanten, unabhängig von  $\omega$ . Eine Folge von delta-förmigen Pulsen, die zu zufallsverteilten Zeiten ausgesendet werden, transformiert sich zu einem Spektrum, das alle Frequenzen mit zufälligen Phasen enthält. Dies

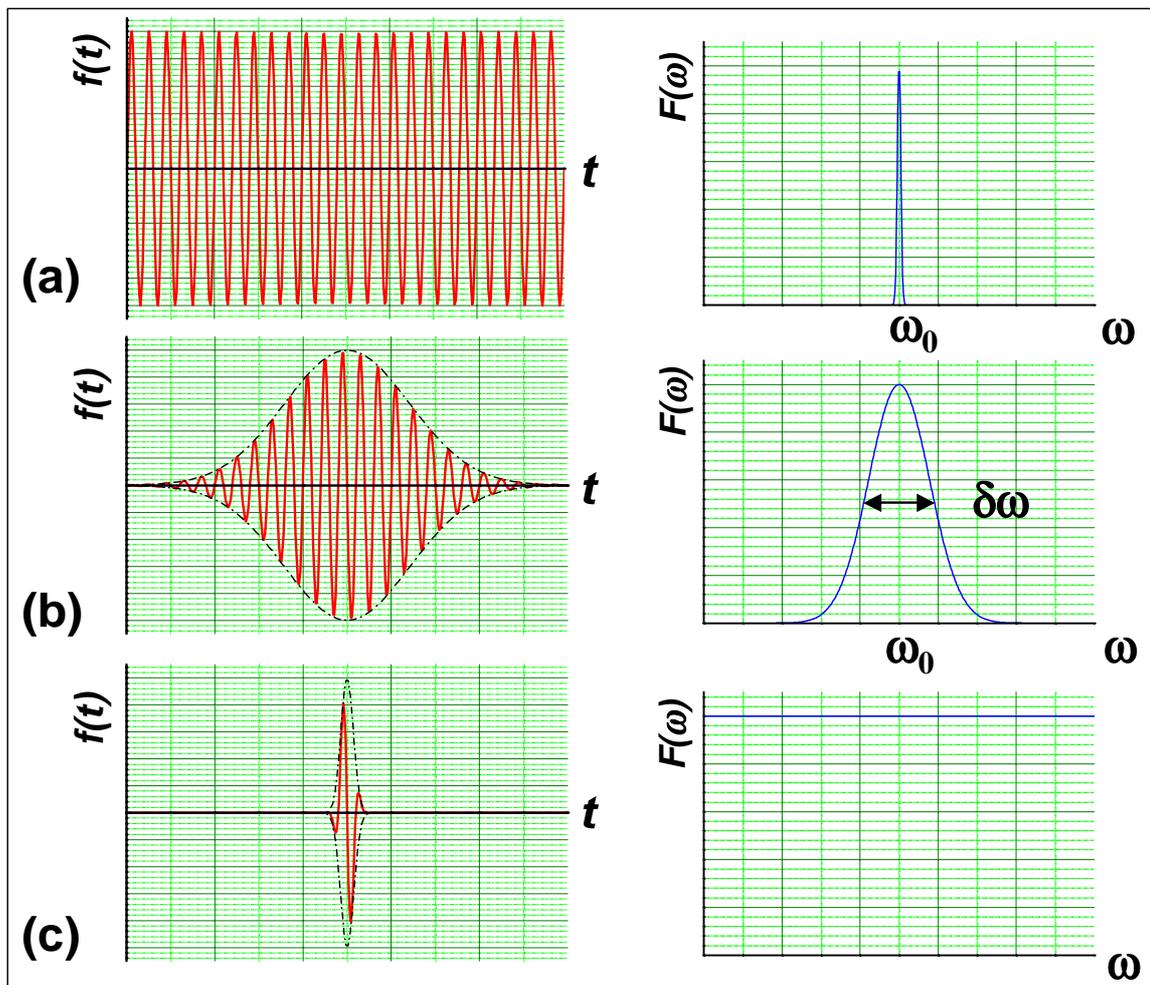


Abbildung 6.4: Darstellung verschiedener Wellenpakete und ihrer Frequenzspektren: (a) sinus-förmige Welle mit delta-förmigem Frequenzspektrum, (b) Gauß'sches Wellenpaket mit Gauß'schem Frequenzspektrum, (c) delta-förmiges Wellenpaket mit weißem Frequenzspektrum.

wird weißes Licht genannt. Weißes Licht enthält also alle Frequenzen in gleichem Maße, wobei diese in ihrer Phase aber völlig unkorreliert sind.

Als Beispiel sind in Abb. 6.4 verschiedene Wellen mit ihren Frequenzspektren gezeigt. Während eine sinusförmige Welle der Frequenz  $\omega_0$  ein delta-förmiges Frequenzspektrum besitzt, besitzt ein Gauß'sches Wellenpaket ein Gauß-förmig verbreitertes Frequenzspektrum. Ein kurzes, delta-förmiges Wellenpaket besitzt schließlich ein "weißes" Frequenzspektrum.

## 6.2 Linienbreite von Spektrallinien

Wir haben bisher zwar die Breite einer Spektrallinie oder die Endlichkeit eines Wellenzuges formal berücksichtigt, wir haben aber nicht die physikalischen Ursachen für die Linienverbreiterung von Spektrallinien diskutiert. Dies wollen wir jetzt nachholen.

### 6.2.1 Natürliche Linienbreite

Eine Spektrallinie hat ihren Ursprung in den Quantenübergängen zwischen zwei Energieniveaus  $E_1$  und  $E_2$  eines Atoms oder Moleküls. Dabei wird die Frequenz  $\omega = (E_2 - E_1)/\hbar$  abgestrahlt. Die atomaren oder molekularen Zustände sind aber bis auf den Grundzustand nicht stationär, d.h. ein Atom, das sich im angeregten Zustand mit der Energie  $E_2$  befindet, wird innerhalb der mittleren Lebensdauer  $T_2$  des angeregten Zustands in den Grundzustand übergehen. Gemäß der *Heisenberg'schen Unschärferelation* ist der Wert  $E_2$  daher um den Wert  $\delta E \simeq h/T_2$  verschmiert, wobei  $h$  das *Planck'sche Wirkungsquantum* ist. Die dazugehörige Frequenzunschärfe der ausgesandten Welle ist dann

$$\delta\omega = 2\pi \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right). \quad (6.2.1)$$

Dies wird als *natürliche Linienbreite* bezeichnet. Sie ist im Allgemeinen kleiner als die Dopplerverbreiterung oder die Verbreiterung aufgrund atomarer Stöße, die wir im Folgenden diskutieren.

Wir wollen noch darauf hinweisen, dass sich als Linienprofil ein *Lorentz-Profil* ergibt (siehe Abb.6.5). Dies resultiert daraus, dass ein Atom aufgrund der endlichen Lebensdauer des angeregten Zustandes nur einen endlichen langen Wellenzug abstrahlt, wobei die Amplitude aufgrund des Energieverlusts exponentiell abnimmt. Dies kann durch eine gedämpfte harmonische Welle  $Ae^{-t/2\tau} \cos \omega_0 t$  beschrieben werden. Die Fourier-Transformierte davon ergibt ein Lorentz-Profil mit einer vollen Halbwertsbreite  $\gamma = 1/\tau$  (siehe Anhang B.3).

### 6.2.2 Dopplerverbreiterung

Wir betrachten jetzt die Strahlung, die von einem isolierten Atom eines Gases der Temperatur  $T$  ausgeht. Das Atom soll eine Masse  $m$  besitzen und während der Lichtemission eine Geschwindigkeit  $v_x$  in Beobachtungsrichtung haben. Aufgrund dieser Geschwindigkeit wird die Spektrallinie durch den *Dopplereffekt* verschoben.<sup>1</sup> Nehmen wir an, dass die Geschwindigkeitsverteilung im Gas durch eine Gauß-Verteilung

$$f(v_x) = C \exp\left(\frac{-mv_x^2}{2k_B T}\right) dv_x \quad (6.2.2)$$

beschrieben werden kann und die Dopplerverschiebung

<sup>1</sup>Dieser Effekt ist uns allen dadurch bekannt, dass sich die wahrgenommenen Frequenz eines Signalhorns auf einem Feuerwehrauto verschiebt, je nachdem, ob sich das Auto auf uns zu oder von uns weg bewegt.

$$\omega - \omega_0 = \omega_0 v_x / c \quad (6.2.3)$$

ist, so erhalten wir für die spektrale Frequenzverteilung

$$F(\omega) = C \exp\left(\frac{-m(\omega - \omega_0)^2 c^2}{2\omega_0^2 k_B T}\right) . \quad (6.2.4)$$

Das heißt, der Dopplereffekt hat die zunächst ideal scharfe Spektrallinie zu einer Linie mit einem Gauß-Profil  $\exp(-x^2/2\sigma^2)$  mit

$$\sigma = \omega_0 \sqrt{\frac{k_B T}{mc^2}} \quad (6.2.5)$$

verbreitert. Die Halbwertsbreite der Linie (FWHM: full width at half maximum) beträgt für ein Gauß-Profil  $2.36\sigma$ . Drückt man die Halbwertsbreite in Wellenlängen aus, so erhält man  $2.36\lambda_0 \sqrt{k_B T / mc^2}$ .

Beispiel: Für die  $\text{Kr}^{84}$  Linie mit  $\lambda_0 = 560 \text{ nm}$  erhalten wir mit  $m = 1.4 \times 10^{-22} \text{ g}$  bei  $T = 80 \text{ K}$  eine Halbwertsbreite von  $1.6 \times 10^{-11} \text{ m} \simeq 0.02 \text{ nm}$ . Dies stimmt relativ gut mit dem beobachteten Wert von etwa  $0.03 \text{ nm}$  überein.

### 6.2.3 Vertiefungsthema: Stoßverbreiterung

Mit der Annahme eines isolierten Atoms erhalten wir noch nicht die vollständige Linienbreite. Wir müssen noch berücksichtigen, dass es in einem Gas immer zu Stößen mit den Nachbaratomen kommt. Gemäß der kinetischen Gastheorie ist die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen für ein bestimmtes Atom durch<sup>2</sup>

$$\tau_a = \frac{1}{4NvA} \quad (6.2.6)$$

gegeben. Hierbei ist  $N$  die Zahl der Atome pro Volumeneinheit und  $A$  ihr Streuquerschnitt. Wichtig ist, dass  $v$  und  $N$  von der Temperatur und dem Druck des Gases abhängen. Für ein ideales Gas gilt

$$Nv = pV \sqrt{\frac{3}{mk_B T}} , \quad (6.2.7)$$

woraus

<sup>2</sup>J. Jeans, *An Introduction to the Kinetic Theory of Gases*, Cambridge University Press, Cambridge (1982).

$$\tau_a = \text{const.} \sqrt{T}/p \quad (6.2.8)$$

folgt.

Wir müssen nun den Fall diskutieren, dass ein emittierendes Atom einen Stoß erleidet. Dabei können wir annehmen, dass der Stoß zumindest die Phasenkorrelation zwischen den emittierenden Wellen vor und nach dem Stoß zerstört. Die Emission aller Atome im Gas können wir dann als Serie unkorrelierter Emissionsprozesse betrachten, wobei jeder eine mittlere Dauer  $\tau_a$  hat. Die tatsächliche Dauer der Emissionsprozesse wird um den Mittelwert  $\tau_a$  exponentialverteilt sein. Das heißt, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Strahlungsereignis eine Dauer zwischen  $\tau$  und  $\tau + \delta\tau$  besitzt, ist gegeben durch<sup>3</sup>

$$p_e(\tau) = \frac{1}{\tau_a} \exp(-\tau/\tau_a) . \quad (6.2.9)$$

Damit bestehen die emittierten Wellen aus Wellenzügen mit einer Frequenz  $\omega$  und einer zufallsverteilten Phase, sie beginnen bei einer zufälligen Zeit und haben eine statistisch verteilte Dauer mit einem Erwartungswert  $\tau_a$  und einer Varianz  $\tau_a^2$ .

Wir müssen jetzt die spektrale Dichte dieser Wellen analysieren. Es lässt sich zeigen, dass das Spektrum durch

$$J(\omega) = \int_0^\infty \left[ \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \exp(i\omega_0 t) \exp(-i\omega t) dt \right]^2 p_e(\tau) d\tau \quad (6.2.10)$$

gegeben ist. Das innere Integral in diesem Ausdruck entspricht der Fourier-Transformierten einer harmonischen Welle der Dauer  $\tau$ , das äußere Integral repräsentiert das statistische Mittel. Das innere Integral ergibt  $\tau \sin[(\omega - \omega_0)\tau/2]/[(\omega - \omega_0)\tau/2]$ . Damit kann man (6.2.10) zu

$$\begin{aligned} J(\omega) &= \frac{4}{\tau_a(\omega - \omega_0)^2} \int_0^\infty \exp(-\tau/\tau_a) \sin^2[(\omega - \omega_0)\tau/2] d\tau \\ &= \frac{2\tau_a^2}{1 + (\omega - \omega_0)^2 \tau_a^2} \end{aligned} \quad (6.2.11)$$

umschreiben. Diese Funktion ist eine *Lorentz-Funktion* mit einer vollen Halbwertsbreite  $\gamma = 2/\tau_a$  (vergleiche hierzu auch Anhang B.3). Die Lorentz-Funktion haben wir bereits als Fourier-Transformierte einer Exponentialfunktion bei der Diskussion der Interferenzmuster bei Mehrfachreflexionen in Abschnitt 5.7.4 kennengelernt. Die Lorentz-Funktion sieht auf den ersten Blick wie eine Gauß-Funktion aus, hat aber einen deutlich langsameren Abfall in den Flankenbereichen (siehe Abb. 6.5).

In der Praxis führen sowohl Doppler- als auch Stoßverbreiterung zu der verbreiterten, beobachteten Form der Spektrallinien. Es liegt deshalb meist kein reines Gauß- oder Lorentz-Profil vor.

<sup>3</sup>Es lässt sich leicht zeigen, dass sich mit dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung der Erwartungswert  $\int_0^\infty \tau p(\tau) d\tau = \tau_a$  für die Dauer eines Emissionsprozesses ergibt. Hierbei muss die Identität  $\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1)$  verwendet werden. Die Varianz der Exponentialverteilung beträgt  $\sigma^2 = \tau_a^2$ .

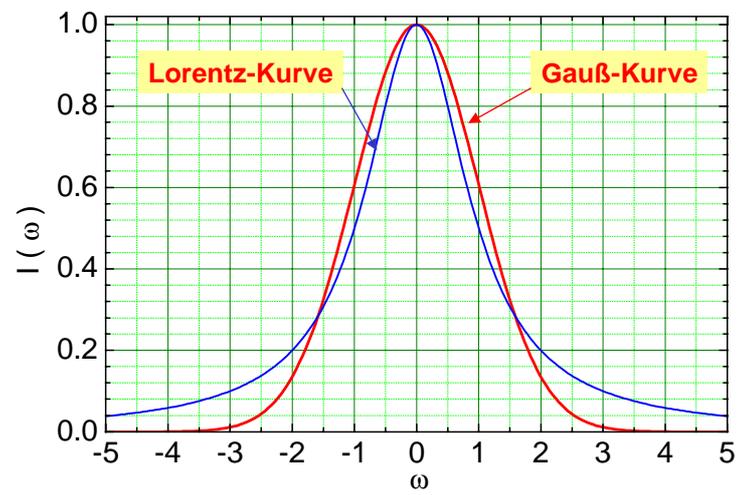


Abbildung 6.5: Vergleich zwischen Lorentz- und Gauß-Funktion.

## 6.3 Das Konzept der Kohärenz – eine quantitative Analyse

Wir wollen in diesem Abschnitt die Eigenschaften realer Lichtwellen quantitativ erfassen. Dies erfolgt über eine statistische Beschreibung. Wir werden dabei eine Funktion  $\gamma$  ableiten, die ein Maß für die Kohärenz zwischen zwei Werten  $f(\mathbf{r}_1, t_1)$  und  $f(\mathbf{r}_2, t_2)$  eines Wellenfeldes ist. In diesem Zusammenhang bedeutet Kohärenz, dass man für eine gegebenes Wellenfeld  $f(\mathbf{r}_1, t_1)$  die Amplitude und Phase von  $f(\mathbf{r}_2, t_2)$  abschätzen kann. Je besser dies funktioniert, desto größer ist die Kohärenz und je näher kommt die Funktion  $\gamma$  dem Wert eins.

Wir werden folgende zwei Grenzfälle betrachten (siehe hierzu Abb. 6.6):

### 1. Zeitliche Kohärenz:

Die zeitliche Kohärenz misst zwischen  $f(\mathbf{r}, t_1)$  und  $f(\mathbf{r}, t_2)$ , d.h. zwischen Werten des Wellenfeldes am gleichen Ort zu verschiedenen Zeiten. Die Analyse der zeitlichen Kohärenz ermöglicht die Definition einer *Kohärenzzeit*  $\tau_c$ . Wie wir in Abschnitt 6.1.1 gesehen haben, ist die Kohärenzzeit eng mit der Bandbreite von quasi-monochromatischem Licht verknüpft. Wir werden sehen, dass der Grad der zeitlichen Kohärenz direkt mit dem Spektrum des Wellenfeldes verknüpft ist. Multipliziert man die Kohärenzzeit mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle, so erhält man die Kohärenzlänge  $\ell_c = c \cdot \tau_c$ , die also in Ausbreitungsrichtung der Welle gemessen wird.

### 2. Räumliche Kohärenz:

Die räumliche Kohärenz misst zwischen  $f(\mathbf{r}_1, t)$  und  $f(\mathbf{r}_2, t)$ , d.h. zwischen Werten des Wellenfeldes an verschiedenen Orten aber zur gleichen Zeit. In Analogie zur Kohärenzzeit kann man eine *Kohärenzfläche*  $F_c$  in der Umgebung von  $\mathbf{r}_1$  definieren, die senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung, d.h. senkrecht zum Wellenvektor steht.

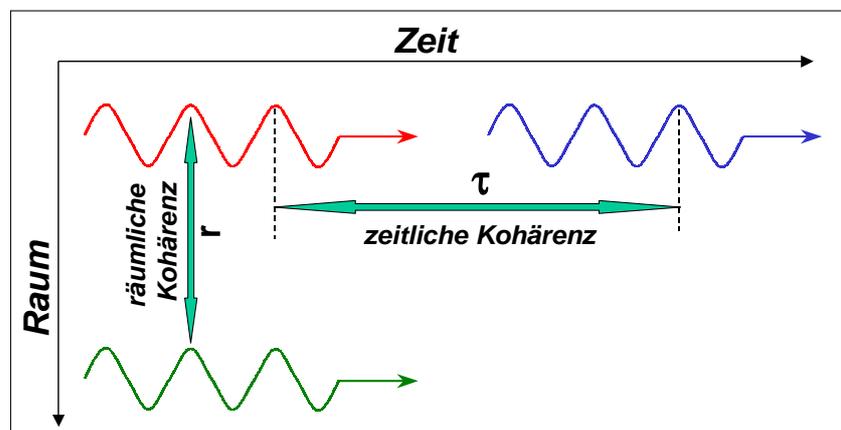


Abbildung 6.6: Zur Veranschaulichung der räumlichen und zeitlichen Kohärenz.

Das Produkt aus Kohärenzlänge  $\ell_c$  und Kohärenzfläche  $F_c$  ergibt das *Kohärenzvolumen*  $V_c = F_c \cdot \ell_c$ . *Interferenzeffekte können nur innerhalb des Kohärenzvolumens beobachtet werden*, da die sich überlagernden Wellen nur innerhalb dieses Volumens interferenzfähig sind.

### 6.3.1 Die Kohärenzfunktion

Wir wollen jetzt durch die Einführung der *Kohärenzfunktion* unsere Überlegungen quantifizieren. Hierzu machen wir noch die Annahme, dass sich die Kohärenzeigenschaften nicht im Laufe der Zeit ändern, das

heißt, die Kohärenzeigenschaften hängen nicht von den absoluten Zeiten  $t$  sondern nur von den Zeitdifferenzen  $t_2 - t_1$  ab. Mit diesen Definitionen können wir eine komplexe Kohärenzfunktion  $\Gamma$  einführen, die als

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \langle f(\mathbf{r}_1, t) f^*(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle \quad (6.3.1)$$

definiert ist. Hierbei steht  $\langle \rangle$  für eine zeitliche Mittelung. Entsprechend unserer obigen Annahme hängt  $\Gamma$  nicht von  $t$  ab. Wir führen nun ein *komplexes Maß für die gegenseitige Kohärenz* ein, indem wir  $\Gamma$  normieren und damit folgende Definition erhalten

$$\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)}{\sqrt{I_1 I_2}} . \quad (6.3.2)$$

Hierbei ist  $I_1$  die mittlere Intensität am Ort  $\mathbf{r}_1$

$$I_1 \equiv \langle f(\mathbf{r}_1, t) f^*(\mathbf{r}_1, t) \rangle , \quad (6.3.3)$$

was gleichzeitig  $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, 0)$  entspricht. Eine analoge Definition gilt für  $I_2$ . Da  $f$  die komplexe Darstellung der reellen Funktion  $f^R$  ist, kann leicht gezeigt werden, dass

$$I_1 = 2 \langle [f^R(\mathbf{r}_1, t)]^2 \rangle \quad (6.3.4)$$

ist.

Wir wollen nun im Folgenden die Grenzfälle der zeitlichen und räumlichen Kohärenz näher beleuchten.

### 6.3.2 Zeitliche Kohärenz

Wir wollen zunächst eine qualitative Diskussion der zeitlichen Kohärenz geben und anschließend den eben beschriebenen mathematischen Formalismus für eine quantitative Diskussion benutzen. Wir haben in Abschnitt 5.7 gesehen, dass die Intensität (vergleiche Abb. 5.36 und (5.7.3)) aus der Überlagerung zweier Teilwellen durch

$$\begin{aligned} |\Psi(x)|^2 &= |\Psi_1(x) + \Psi_2(x)|^2 \\ &= \left( \frac{a_Q}{x+x_0} \right)^2 + \left( \frac{a_Q}{x_0-x} \right)^2 + \left( \frac{2a_Q^2}{x_0^2-x^2} \right) \cos(2kx + \Delta\varphi) . \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

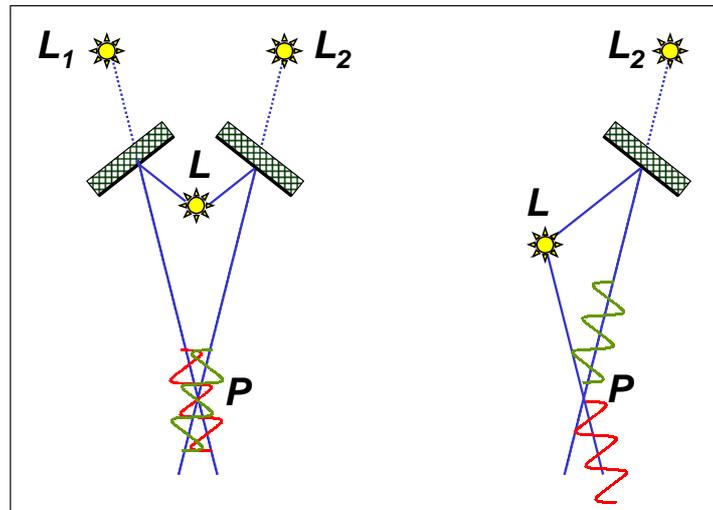


Abbildung 6.7: Erzeugung zweier interferenzfähiger Teilwellen aus einer punktförmigen Lichtquelle. Die interferierende Lichtquellen könne als von den virtuellen Lichtquellen  $L_1$  und  $L_2$  ausgehend betrachtet werden.

gegeben ist. Falls die beiden Lichtwellen aus unterschiedlichen Quellen stammen, ist aufgrund des statistischen Charakters der Lichtemission von Atomen die Phasendifferenz  $\Delta\varphi = \phi_2 - \phi_1$  zeitlich nicht konstant, die Wellen werden dann als inkohärent bezeichnet.

Konventionelle Lichtquellen wie z.B. die Sonne, Glüh- und Gasentladungslampen sind inkohärent. Dies beruht auf dem Entstehungsmechanismus des von ihnen abgestrahlten Lichtes. Das Licht stammt aus den Übergängen von Atomen oder Molekülen von einem angeregten Zustand in ihren Grundzustand. Das dabei abgestrahlte Licht kann als Wellenzug endlicher Länge aufgefasst werden. Die einzelnen Emissionsprozesse sind aber völlig unkorreliert, so dass die einzelnen Wellenzüge unterschiedliche Phasenkonstanten haben. Deshalb sind die von verschiedenen Punkten der Lichtquelle abgestrahlten Lichtwellen zueinander inkohärent. Trotz ihrer Inkohärenz kann man aber mit konventionellen Lichtwellen Interferenzeffekte beobachten. Man zerlegt dazu das von einem Punkt kommende Licht in zwei Teilwellen. Ein Beispiel hierfür ist in Abb. 6.7 gezeigt. Durch geeignete Blenden werden aus der von der Lichtquelle ausgehenden Kugelwelle zwei schmale Lichtbündel ausgeblendet, die auf die beiden Spiegel treffen. Bei einer hinreichend kleinen Ausdehnung des Lichtquellenpunktes (im Idealfall darf dieser nur ein Atom enthalten) sind die beiden Teilwellen kohärent und man kann am Überlagerungspunkt  $P$  Interferenzerscheinungen beobachten.

Aber auch Lichtwellen, die von einem einzelnen Emissionszentrum ausgehen, brauchen nicht kohärent zu sein. Dies liegt daran, dass zeitlich hintereinander folgende Emissionsprozesse nicht korreliert sind, d.h. nacheinander von einem Emissionszentrum kommende Wellenzüge haben eine zueinander statistische Phasenlage. Dies erfordert, dass die Wegdifferenz zwischen den beiden Teilwellen in Abb. 6.7 nicht größer sein darf als die Länge eines Wellenzuges. Die maximal zulässige Wegdifferenz, die etwa der Länge eines Wellenzuges entspricht, wird als *Kohärenzlänge*  $\ell_c$  bezeichnet. Die zugehörige Zeit

$$\tau_c = \frac{\ell_c}{c} \quad (6.3.6)$$

wird als *Kohärenzzeit* bezeichnet. Sie ist die Zeit, die das Licht braucht, die Kohärenzlänge zurückzulegen.

Der Begriff der Kohärenzlänge und der Kohärenzzeit kann auch unabhängig von dem Modell einer Lichtquelle, die Wellenzüge einer endlichen Länge aussendet, erläutert werden. Wie wir oben bereits diskutiert

haben, ist eine endliche Länge eines Wellenzuges immer mit einer endlichen spektralen Frequenzverteilung verbunden (vergleiche hierzu Abb. 6.4). Licht einer beliebig scharfen Frequenz  $\nu = \omega/2\pi$  gibt es folglich nicht.<sup>4</sup> Jede Lichtquelle, d.h. auch die beste Spektrallampe oder ein Laser, strahlt Licht ab, das eine mehr oder weniger breite Verteilung von Frequenzen bzw. Wellenlängen besitzt. Diese spektrale Verteilung ist in Abb. 6.8 gezeigt. Die Halbwertsbreite  $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$  der Verteilung wird als Linienbreite bezeichnet. Die Halbwertsbreite als Funktion der Frequenz kann als

$$\Delta\nu = \frac{c}{\lambda_1} - \frac{c}{\lambda_2} = \frac{c \Delta\lambda}{\lambda_1 \lambda_2} \simeq c \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} = \nu_0 \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \quad (6.3.7)$$

ausgedrückt werden.<sup>5</sup>

Für jede einzelne Wellenlänge ist bei einem Interferenzexperiment die Intensität durch Gleichung (6.3.5) gegeben. So tritt für die Wellenlängen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  ein Intensitätsmaximum auf, wenn

$$\begin{aligned} k_1(x_1 - x_2) &= m 2\pi \quad \text{oder} \quad \frac{x_1 - x_2}{\lambda_1} = m \\ \text{bzw. wenn} \quad k_2(x_1 - x_2) &= m 2\pi \quad \text{oder} \quad \frac{x_1 - x_2}{\lambda_2} = m \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

gilt. Hierbei ist  $m$  eine ganze Zahl und die Phasenkonstanten  $\phi_1$  und  $\phi_2$  wurden der Einfachheit halber als gleich angenommen. Aufgrund des Wellenlängenunterschieds tritt für die Wellenlängen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  am selben Punkt, d.h. bei der selben Wegdifferenz  $x_1 - x_2$  im Allgemeinen nicht notwendigerweise ein Intensitätsmaximum auf, da die relativen Wegdifferenzen  $(x_1 - x_2)/\lambda_1$  und  $(x_1 - x_2)/\lambda_2$  einen unterschiedlichen Wert haben. Nur bei hinreichend kleinen Wegunterschieden weichen bei den vorgegebenen Wellenlängen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  die dazugehörigen Wegdifferenzen  $(x_1 - x_2)/\lambda_1$  und  $(x_1 - x_2)/\lambda_2$  hinreichend wenig voneinander ab, so dass die Intensitätsmaxima der Interferenzfelder für diese und alle dazwischenliegenden Wellenlängen zusammenfallen.

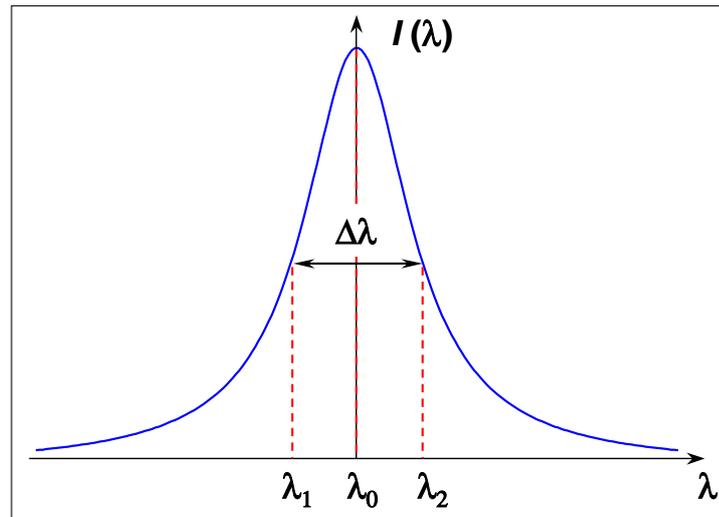
Vergrößert man die Wegdifferenz  $x_1 - x_2$ , so tritt der Fall ein, dass das  $m$ -te Interferenzmaximum für die Wellenlänge  $\lambda_2$  mit dem  $(m+1)$ -ten Interferenzmaximum für die Wellenlänge  $\lambda_1$  zusammenfällt. Wie wir bereits in Abschnitt 6.1.1 diskutiert haben (vergleiche hierzu auch Abb. 6.3), erwartet man in diesem Fall, dass die Überlagerung aller Teilwellen mit Wellenlängen im Intervall zwischen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  gerade zu einer verschwindenden Gesamtamplitude führt. In dieser Situation lässt sich nämlich zu jeder Wellenlänge aus dem Intervall zwischen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  eine andere Wellenlänge innerhalb der Breite der Spektrallinie finden, so dass die Interferenz dieser beiden Teilwellen destruktiv ist.

Nach (6.3.8) trifft das  $m$ -te Interferenzmaximum für die Wellenlänge  $\lambda_2$  mit dem  $(m+1)$ -ten Interferenzmaximum für die Wellenlänge  $\lambda_1$  genau dann zusammen, wenn

$$\begin{aligned} \frac{x_1 - x_2}{\lambda_1} - \frac{x_1 - x_2}{\lambda_2} &= \frac{\Delta x \lambda_2 - \Delta x \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2} \simeq \frac{\Delta x \Delta\lambda}{\lambda_0^2} = 1 \\ \text{bzw.} \quad \Delta x &\simeq \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda} \end{aligned} \quad (6.3.9)$$

<sup>4</sup>Die Länge des Wellenzuges wird zumindest durch das Lebensalter unseres Universums auf  $\ell \leq c \cdot T_{\text{Universum}}$  begrenzt.

<sup>5</sup>Zur Herleitung der Beziehung  $\Delta\nu/\nu_0 = \Delta\lambda/\lambda_0$  benutzen wir  $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$  und  $\lambda_1 \lambda_2 \approx \lambda_0^2$ , was für  $\Delta\lambda \ll \lambda_0$  immer eine gute Näherung ist.

Abbildung 6.8: Intensitätsverteilung  $I(\lambda)$  einer Spektrallinie.

gilt. Hierbei wurde  $\lambda_1 \lambda_2 \simeq \lambda_0^2$  gesetzt, was für  $\Delta\lambda \ll \lambda_1, \lambda_2$  eine gute Näherung ist.

Der Wert  $\Delta x$  des Weglängenunterschieds entspricht der oben definierten Kohärenzlänge  $\ell_c$ . Wir erhalten also für die Kohärenzlänge  $\ell_c$  und Kohärenzzeit  $\tau_c$

$$\text{Kohärenzlänge:} \quad \ell_c \simeq \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda} \quad (6.3.10)$$

$$\text{Kohärenzzeit:} \quad \tau_c = \frac{1}{2\pi} \frac{\ell_c}{c} \simeq \frac{\lambda_0}{2\pi c} \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda} = \frac{1}{2\pi\nu_0} \frac{\nu_0}{\Delta\nu} = \frac{1}{2\pi\Delta\nu} = \frac{1}{\Delta\omega} . \quad (6.3.11)$$

Diese Gleichungen gelten nur näherungsweise und können noch einen konstanten Zahlenfaktor enthalten, der die genaue Linienform repräsentiert. Für eine Lichtquelle, die Wellenzüge mit einer begrenzten Dauer emittiert, ist die Kohärenzzeit gleich der Dauer des Wellenzuges. Der Vergleich mit (6.3.11) zeigt, dass eine solche Lichtquelle eine Linienbreite  $\Delta\omega$  haben sollte, die reziprok zur Wellenzugdauer ist. Dieses Ergebnis kann direkt durch eine Fourier-Zerlegung gewonnen werden.

Die Kohärenzlängen und -zeiten von Lichtquellen können sehr unterschiedlich sein. Unter günstigen Umständen (sehr scharfe Spektrallinien) kann  $\ell_c$  etwa 1 m lang werden, was einer Kohärenzzeit von etwa  $10^{-8}$  sec entspricht. Diese Zeit ist aber üblicherweise immer noch klein gegenüber der Beobachtungsdauer. Weißes Licht hat dagegen eine sehr kleine Kohärenzlänge von nur einigen  $10^{-6}$  m, was einer Kohärenzzeit von nur einigen  $10^{-14}$  sec entspricht.

### Vertiefungsthema:

#### Zeitliche Kohärenz – quantitative Analyse

Um den Grad der Kohärenz eines Wellenfeldes  $f(t)$  (vergleiche (6.1.2)) zu quantifizieren, betrachten wir die Funktion  $\gamma$  aus (6.3.2) an einem bestimmten Punkt. Wir erhalten

$$\gamma(\tau) = \frac{\langle f(t)f^*(t+\tau) \rangle}{I} = \frac{\langle f(t)f^*(t+\tau) \rangle}{\langle f(t)f^*(t) \rangle} . \quad (6.3.12)$$

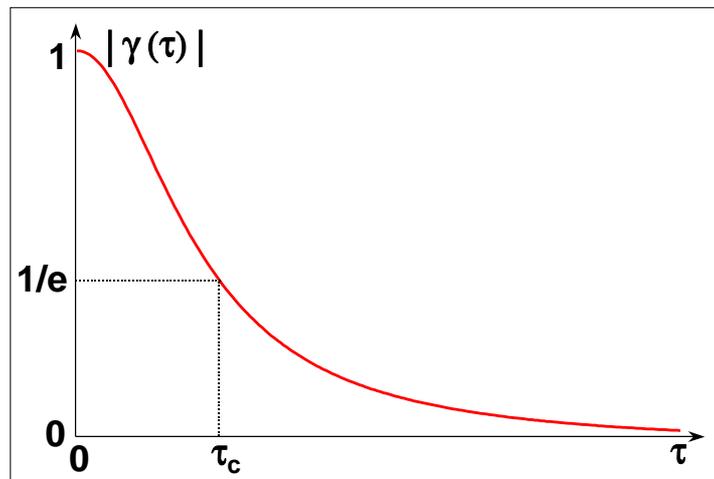


Abbildung 6.9: Die Kohärenzfunktion für eine quasi-monochromatische Lichtquelle.

Die Funktion  $\gamma(\tau)$  wird *komplexer Grad der zeitlichen Kohärenz* genannt. Für eine reine Sinuswelle,  $f(t) = \exp(i\omega_0 t)$ , erhalten wir  $\gamma(\tau) = \exp(-i\omega_0 \tau)$ . Dieses Ergebnis ist einsichtig. Wenn man zwei Sinuswellen gegeneinander zeitlich verschiebt, so verschiebt man die Phasen der beiden Wellenzüge gegeneinander, z.B. um genau  $2\pi$ , wenn  $\tau = 2\pi/\omega_0$  gilt. Der komplexe Grad der zeitlichen Kohärenz ändert deshalb kontinuierlich seine Phase, seine Amplitude  $|\gamma(\tau)|$  bleibt allerdings konstant und hat den Wert eins. Es ist nun allgemein üblich, sich auf  $|\gamma(\tau)|$  zu beziehen, wobei die Abweichung vom Wert eins die Abweichung des Wellenfeldes von einer reinen Sinuswelle angibt. Man kann dann  $|\gamma(\tau)|$  als Grad der zeitlichen Kohärenz auffassen.

Für eine quasi-monochromatische Lichtquelle hat  $|\gamma(\tau)|$  die in Abb. 6.9 gezeigte Form. Gemäß Definition ist  $|\gamma(0)| = 1$  und mit zunehmendem  $\tau$  geht  $|\gamma(\tau)|$  monoton gegen null. Für jedes Wellenfeld mit einem ähnlichen Verlauf von  $|\gamma(\tau)|$  können wir jetzt die Kohärenzzeit  $\tau_c$  als die Zeit definieren, für die  $|\gamma(\tau_c)| = 1/e$  gilt.

### Vertiefungsthema:

#### Zeitliche Kohärenz und Autokorrelationsfunktion

Für eine weitergehende Betrachtung benutzen wir das Konzept der Korrelation (siehe hierzu Anhang B.6 und B.7). Zur Erinnerung sei hier festgehalten, dass die Korrelationsfunktion zwischen zwei Funktionen  $f$  und  $g$  formal durch (vergleiche B.77)

$$h_C(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')g(x'+x)dx' \quad (6.3.13)$$

definiert ist. Für  $f \equiv g$  erhält man die *Autokorrelationsfunktion* (vergleiche B.80)

$$h_{AC}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')f^*(x'+x)dx' \quad (6.3.14)$$

Wir sehen, dass die Form von  $\gamma(t)$  der Autokorrelationsfunktion entspricht, wenn wir Gleichung (6.1.1) dazu benutzen, die Mittelwerte als Integrale auszudrücken. Ist  $f(t)$  reell, dann stellt das *Wiener-Khinchine-Theorem*<sup>6</sup> eine Verbindung zwischen dem Leistungsspektrum von  $f(t)$  und der Fourier-Transformierten von  $\gamma(\tau)$  her, die nun die symmetrische, reelle Funktion  $\gamma^R(\tau)$  ist. Wir erhalten

$$|F(\omega)|^2 = \frac{I}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^R(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \quad (6.3.15)$$

und

$$|F(-\omega)|^2 = |F(\omega)|^2. \quad (6.3.16)$$

Die spektrale Intensität  $J(\omega)$  entspricht  $\frac{1}{T}|F(\omega)|^2$ , was unabhängig vom Zeitbereich  $T$  der Mittelung ist. Wir sehen, dass die spektrale Intensität  $J(\omega)$  aus der Fourier-Transformierten abgeleitet werden kann. Dies führt direkt auf die *Fourier-Transformationsspektroskopie* oder *interferometrischen Spektroskopie*, die wir bereits in Abschnitt 5.7.3 vorgestellt haben. Man überlagert dabei eine Welle mit einer um  $\tau$  verschobenen Welle und misst die Funktion  $\gamma^R(\tau)$ . Die spektrale Intensität der Welle erhält man dann durch Fourier-Transformation. Die Vorzüge dieser Methode wurden bereits in Abschnitt 5.7.3 diskutiert.

### 6.3.3 Räumliche Kohärenz

Das Konzept der zeitlichen Kohärenz wurde eingeführt, um eine quantitative Antwort zu folgender Fragestellung zu geben: Zu einem bestimmten Zeitpunkt messen wir die Phase einer sich ausbreitenden Lichtwelle an einem bestimmten Punkt. Wie genau wissen wir dann die Phase für einem späteren Zeitpunkt. Handelt es sich z.B. um eine ideal sinusförmige Welle, so kennen wir die Phase zu jedem beliebigen späteren Zeitpunkt. Für eine nichtsinusförmige Welle nimmt aber unsere Kenntnis der Phase für spätere Zeitpunkte graduell ab. Dies konnte quantitativ auf die endliche spektrale Breite der Spektrallinie zurückgeführt werden.

Das zweite Konzept der räumlichen Kohärenz befasst sich mit der Phasenbeziehung zwischen Wellen zu einem gegebenen Zeitpunkt aber verschiedenen Orten in einer Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Wäre die Welle eine perfekt ebene Welle, so würde diese Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung eine Wellenfront darstellen und die Bestimmung der Phase an einem Punkt  $P$  der Wellenfront würde sie an allen anderen Punkten der Ebene genau festlegen. Für reale Wellen müssen wir uns aber die Frage stellen, wie weit weg von einem Punkt  $P$  können wir gehen und immer noch eine konkrete Aussage über die Phase machen.

In ähnlicher Weise wie wir die zeitliche Inkohärenz mit einer Unschärfe in der Frequenz bzw. der Wellenlänge oder des *Betrags*  $|\mathbf{k}|$  *des Wellenvektors* verknüpft haben, werden wir sehen, dass die räumliche Inkohärenz mit einer Unschärfe in der *Richtung des Wellenvektors* verknüpft ist. Diese Unschärfe in der Richtung von  $\mathbf{k}$  entsteht, wenn die Lichtquelle nicht punktförmig, sondern ausgedehnt ist.

<sup>6</sup>Das Wiener-Khinchin-Theorem besagt, dass das Leistungsspektrum  $J(\omega) = \frac{1}{T}|F(\omega)|^2$  gleich der Fourier-Transformierten der Autokorrelationsfunktion von  $f(x)$  ist, vergleiche hierzu Anhang B.7.

### Qualitative Diskussion der räumlichen Kohärenz

Im vorigen Abschnitt haben wir erläutert, dass zur Erzeugung von kohärentem Licht ein einziges Emissionszentrum verwendet werden muss. Dies ist natürlich eine zu starke Idealisierung. Die in Experimenten verwendeten Lichtquellen besitzen immer eine bestimmte Ausdehnung. Wir müssen deshalb jetzt diskutieren, welchen Einfluss eine endliche Ausdehnung der Lichtquelle auf Interferenzerscheinungen hat. Hierzu betrachten wir Abb. 6.10. Die Phasen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  der von den Punkten  $L_1$  und  $L_2$  kommenden Lichtwellen sind

$$\begin{aligned}\varphi_1(\mathbf{r}_1) &= \varphi_0 + \frac{2\pi}{\lambda} s_1 \\ \varphi_2(\mathbf{r}_2) &= \varphi_0 + \frac{2\pi}{\lambda} s_2 .\end{aligned}\tag{6.3.17}$$

Hieraus ergibt sich die Phasendifferenz der Teilwellen zu

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (s_1 - s_2) = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s .\tag{6.3.18}$$

Ist die Phasendifferenz zwischen den beiden Teilwellen  $2\pi$ , so lässt sich für einen Ausgangspunkt, der zwischen den beiden Quellen  $L_1$  und  $L_2$  liegt, immer ein anderer Ausgangspunkt für eine Teilwelle finden, so dass die beiden Teilwellen destruktiv interferieren. Analog zur Einführung der Kohärenzzeit können wir jetzt einen *räumlich Kohärenzabstand*  $x_c$  einführen, der den maximalen Abstand der beiden Lichtquellen  $L_1$  und  $L_2$  definiert. In zwei Dimensionen erhält man eine *Kohärenzfläche*  $F_c$ . Für alle Punkte auf der Kohärenzfläche muss

$$\Delta\varphi \leq 2\pi \quad \text{oder äquivalent} \quad \Delta s \leq \lambda\tag{6.3.19}$$

erfüllt sein.

Es ist klar, dass die Größe der Kohärenzfläche von der relativen Lage und Entfernung zwischen Beobachter und Lichtquelle abhängt. Wir wollen deshalb die Bedingung (6.3.19) für einen konkreten Fall analysieren. Wir ersetzen dazu die punktförmigen Lichtquellen in Abb. 6.7 durch ausgedehnte Lichtquellen. Dann ergeben sich durch die Spiegelung ausgedehnte virtuelle Lichtquellen  $L'_1 L''_1$  und  $L'_2 L''_2$  (siehe Abb. 6.11). Alle Punkte der leuchtenden Fläche senden untereinander völlig inkohärente Teilwellen aus. Es genügt, wenn wir den ungünstigsten Fall, also nur die beiden Randstrahlen, die von  $L'_1$  und  $L'_2$  sowie  $L''_1$  und  $L''_2$  ausgehen, betrachten. Die von  $L'_1$  und  $L'_2$  ausgehenden Strahlen sind untereinander kohärent, da sie vom demselben Punkte der wirklichen Lichtquelle stammen, und interferieren deshalb. Dasselbe gilt für  $L''_1$  und  $L''_2$ . Die von  $L'_1$  und  $L'_2$  im Punkt  $P$  erzeugte Intensität soll ein Intensitätsmaximum besitzen, da  $r'_1 = r'_2$ . Die Differenz der Phasenkonstanten wird dabei als null angenommen. Um die von  $L'_1$  und  $L''_2$  am Punkt  $P$  erzeugte Intensität zu berechnen, müssen wir die Weglängendifferenz  $l''_2 - r'_1$  bestimmen. Es gilt

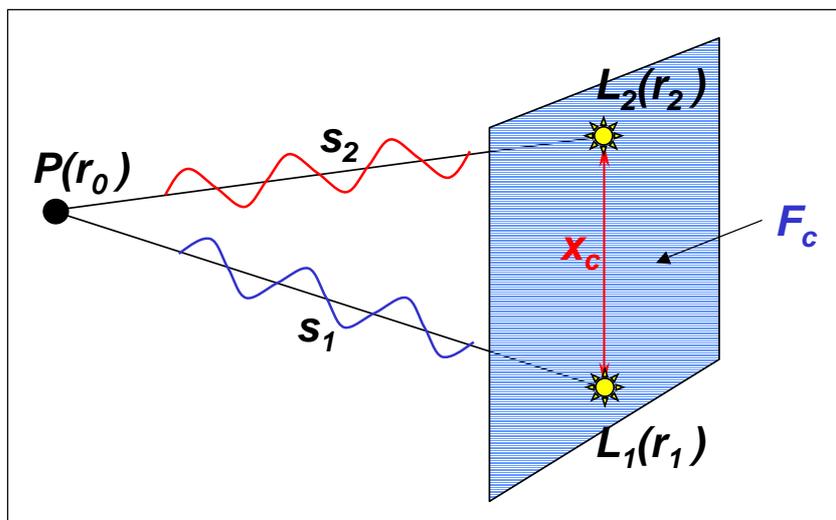


Abbildung 6.10: Zur Interferenz der von den Punkten  $L_1(\mathbf{r}_1)$  und  $L_2(\mathbf{r}_2)$  ausgehenden Teilwellen am Beobachtungspunkt  $P(\mathbf{r}_0)$  bei Vorliegen einer ausgedehnten Lichtquelle.

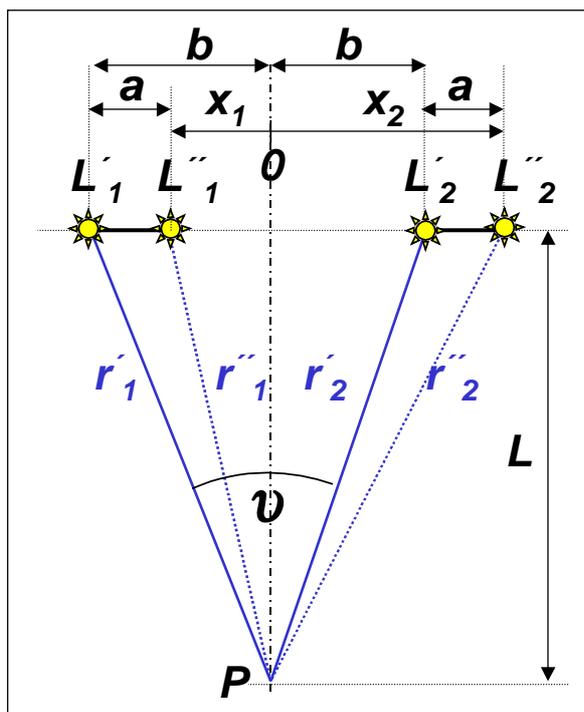


Abbildung 6.11: Zur Interferenz bei ausgedehnter Lichtquelle. Es sind nur die durch die Spiegelung (vergleiche Abb. 6.7) erzeugten virtuellen Lichtquellen gezeigt.

$$r''_2 - r''_1 = \sqrt{x_2^2 + L^2} - \sqrt{x_1^2 + L^2} = L\sqrt{1 + \frac{x_2^2}{L^2}} - L\sqrt{1 + \frac{x_1^2}{L^2}}. \tag{6.3.20}$$

Für  $L \gg x_1, x_2$ , d.h. große Abstände des Beobachtungspunktes  $P$  von den Lichtquellen, gilt:

$$\begin{aligned}\Delta s = r_2'' - r_1'' &\simeq L \left( 1 + \frac{x_2^2}{2L^2} \right) - L \left( 1 + \frac{x_1^2}{2L^2} \right) \\ &= \frac{x_2^2 - x_1^2}{2L} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{2L} \simeq a \sin \vartheta .\end{aligned}\quad (6.3.21)$$

Hierbei ist  $\sin \vartheta \simeq (x_2 - x_1)/L$  und  $a = \frac{1}{2}(b + a - b + a) = \frac{1}{2}(x_2 + x_1)$  die Ausdehnung der Lichtquelle.<sup>7</sup>

Entsprechend der Forderung  $\Delta s \leq \lambda$  muss für die Weglängendifferenz  $\Delta s = r_2'' - r_1'' \leq \lambda$  gelten. Für die Ausdehnung der Lichtquelle beziehungsweise den Kohärenzabstand  $x_c$  ergibt sich daraus die Forderung

$$x_c = a \leq \frac{\lambda}{\sin \vartheta} . \quad (6.3.22)$$

Das Ergebnis (6.3.22) zeigt, dass es nicht auf die Ausdehnung  $a$  der Lichtquelle ankommt, sondern auf den Winkel  $\vartheta$ , unter dem die Quelle vom Beobachtungspunkt  $P$  aus gesehen wird. So können z.B. sehr große Lichtquellen wie z.B. Sterne für Interferenzexperimente verwendet werden. Erweitert man die Analyse auf zwei Dimensionen, so definiert eine Quelle mit endlicher Winkelausdehnung eine zweidimensionale Region. Diese Region bezeichnen wir dann als *Kohärenzfläche*  $F_c$ .

### Vertiefungsthema:

#### Quantitative Diskussion der räumlichen Kohärenz

Wir benutzen nun wieder die Kohärenzfunktion (6.3.2) um eine quantitative Aussage über den Grad der räumlichen Kohärenz von Lichtquellen zu machen. Für zwei Orte  $A_1$  und  $A_2$  eines Wellenfeldes können wir schreiben

$$\gamma_{A_1, A_2}(\tau = 0) = \frac{\langle f(\mathbf{r}_1, 0) f^*(\mathbf{r}_2, 0) \rangle}{\sqrt{I_1 I_2}} . \quad (6.3.23)$$

Drückt man den Mittelwert  $\langle \rangle$  durch ein Integral aus, so sieht man, dass (6.3.23) einer auf  $\sqrt{I_1 I_2}$  normierten Autokorrelationsfunktion entspricht (vergleiche hierzu Anhang B.7).

Für zwei Teilwellen  $a_1 \exp[-i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_1 - \omega t)]$  und  $a_2 \exp[-i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_2 - \omega t)]$  einer Wellenfront mit Wellenvektor  $\mathbf{k}_0$  ergibt sich

$$\begin{aligned}\gamma_{A_1, A_2}(0) &= \frac{1}{T} \frac{1}{a_1 a_2} \int_0^T a_1 \exp[-i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_1 - \omega t)] a_2 \exp[i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_2 - \omega t)] dt \\ &= \exp[i\mathbf{k}_0 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)] .\end{aligned}\quad (6.3.24)$$

Hierbei haben wir angenommen, dass die Phasenfaktoren  $\phi_1$  und  $\phi_2$  für beide Teilwellen gleich sind. Für unterschiedliche Abstände  $r_2 - r_1$  ergeben sich also unterschiedliche Phasenfaktoren  $\mathbf{k}_0 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ . Der

Betrag  $|\gamma_{A_1, A_2}(0)|$  bleibt aber immer gleich eins. Das heißt, die beiden Teilwellen sind voll räumlich korreliert was nicht verwunderlich ist, da wir angenommen haben, dass sie zur gleichen Wellenfront gehören. In Analogie zur zeitlichen Kohärenz bezeichnet man  $\gamma_{A_1, A_2}(0)$  den *komplexen Grad der räumlichen Kohärenz* und  $|\gamma_{A_1, A_2}(0)|$  den *Grad der räumlichen Kohärenz*.

Die Situation ändert sich, wenn wir eine ausgedehnte Lichtwelle betrachten. Für eine ausgedehnte Lichtquelle müssen wir über sehr viele Teilwellen mit unterschiedlichen Phasenfaktoren  $\mathbf{k}_0 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$  aufsummieren. Dies ist ähnlich zur Aufsummation über viele Teilwellen mit unterschiedlichen Frequenzen bei der Diskussion der zeitlichen Kohärenz. Konstruktive oder destruktive Interferenz am Beobachtungspunkt  $P$  kann man bei einer solchen Überlagerung nur dann beobachten, wenn die Phasenfaktoren der am weitesten auseinanderliegenden Teilwellen klein gegen  $2\pi$  bleiben. Mit  $\mathbf{k}_0 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \simeq k_0 a \sin \vartheta \leq 2\pi$  erhält man damit wiederum die Bedingung  $a \leq \lambda / \sin \vartheta$  für die maximale Ausdehnung der Lichtquelle.

Es lässt sich zeigen,<sup>8</sup> dass die Beziehung zwischen der Kohärenzfunktion und der Intensitätsverteilung der Lichtquelle eine Fourier-Transformation ist, zumindest dann wenn die Quelle einen kleinen Winkeldurchmesser  $\vartheta$  hat. Diese Aussage nennt man das *van Cittert-Zernike-Theorem*, was das räumliche Analogon zum *Wiener-Khinchine-Theorem* ist. Ist die ausgedehnte Lichtquelle z.B. eine runde Scheibe mit einem Winkeldurchmesser  $\vartheta$  (mit Intensität eins innerhalb der Scheibe und null außerhalb), so erhält man die Kohärenzfunktion als Fourier-Transformierte zu (vergleiche hierzu Beugung an der Lochblende in Abschnitt 5.4.6)

$$\gamma(r) = \frac{2J_1(k_0 \vartheta r/2)}{k_0 \vartheta r/2} . \quad (6.3.25)$$

Diese Funktion ist in Abb. 6.12 dargestellt. Die erste Nullstelle dieser Funktion liegt bei  $r = 1.22\lambda / \vartheta$ . Nach der ersten Nullstelle treten Bereiche mit sowohl positiver als auch negativer Korrelation auf. Diese

<sup>7</sup>Hierbei muss berücksichtigt werden, dass entsprechend Abb.6.11  $x_1$  negativ ist.

<sup>8</sup>Vergleiche hierzu Anhang B.7. Eine ausführliche Ableitung kann auch in **S. G. Lipson, H. S. Lipson, D. S. Tannhauser: Optik**, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg (1997) gefunden werden.

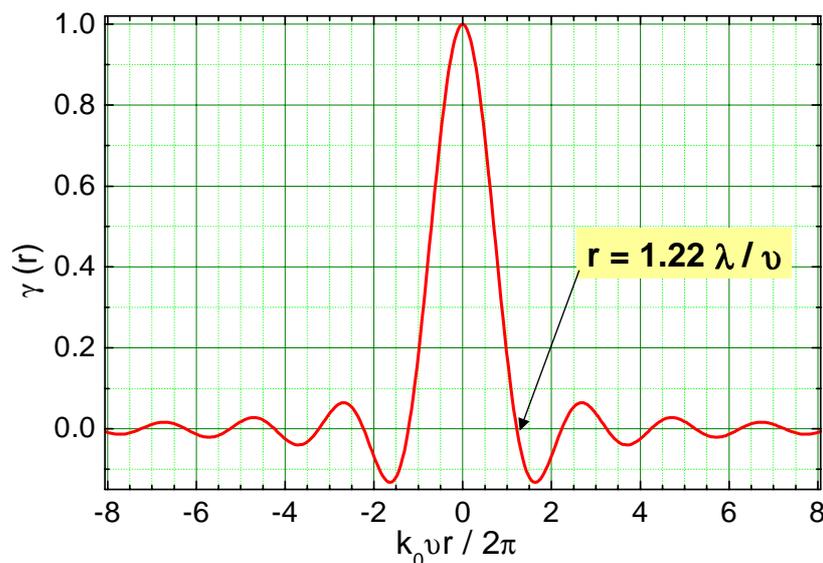


Abbildung 6.12: Räumliche Korrelationsfunktion von zwei Punkten  $P_1$  und  $P_2$  als Funktion ihres Abstandes  $r$  bei Beleuchtung mit einer kreisförmigen Lichtquelle mit Winkeldurchmesser  $\vartheta$ .

stammen aber von dem scharfen Abschneiden der Intensität der Lichtquelle außerhalb der Scheibe mit Winkeldurchmesser  $\vartheta$ .

## Zusammenfassung

- Ideale monochromatische Lichtquellen senden Licht mit einer scharfen Frequenz  $\omega_0$  und scharfem Wellenvektor  $\mathbf{k}_0$  aus. Reale Lichtquellen senden Licht aus, das eine endliche Unschärfe sowohl im Betrag als auch in der Richtung des Wellenvektors besitzt.
- Die Unschärfe  $\delta k$  des Betrags des Wellenvektors (bzw. der Frequenz  $\delta\omega = c\delta k$ ) führt zu einer endlichen zeitlichen Kohärenz einer Lichtquelle. Ist  $\delta\omega/\omega_0 \ll 1$  spricht man von quasi-monochromatischem Licht.
- Die endliche spektrale Breite einer Lichtquelle kann mehrere physikalische Ursachen haben, wie die natürliche Linienbreite aufgrund der endlichen Lebensdauer angeregter Atomzustände, die Dopplerverbreiterung oder die Stoßverbreiterung.
- Die endliche spektrale Breite  $\delta\omega$  einer Lichtquelle führt zu einer endlichen Kohärenzzeit

$$\tau_c = 1/\delta\omega.$$

Die Kohärenzzeit  $\tau_c$  kann mit einer endlichen Kohärenzlänge

$$\ell_c = c \cdot \tau_c$$

in Ausbreitungsrichtung des Lichts assoziiert werden.

- Die endliche Unschärfe der Richtung des Wellenvektors resultiert aus der endlichen Ausdehnung realer Lichtquellen. Sie führt zu einer endlichen räumlichen Kohärenz, die sich mit einem Kohärenzabstand

$$x_c = \frac{\lambda}{\sin \vartheta}$$

senkrecht zur Ausbreitungsrichtung bzw. einer Kohärenzfläche  $F_c$  charakterisieren lässt. Hierbei ist  $\vartheta$  der Winkel, unter dem die ausgedehnte Lichtquelle gesehen wird. Für eine punktförmige Quelle geht  $\vartheta \rightarrow 0$  und damit  $x_c \rightarrow \infty$ .

- Das Produkt von Kohärenzlänge  $\ell_c$  und Kohärenzfläche  $F_c$  ergibt das Kohärenzvolumen  $V_c$ . Interferenzeffekte können nur innerhalb des Kohärenzvolumens beobachtet werden.
- Eine quantitative Charakterisierung des Kohärenzgrades von Lichtquellen kann mit Hilfe von zeitlichen und räumlichen Korrelationsfunktionen geschehen, die den komplexen Grad der zeitlichen und räumlichen Kohärenz beschreiben.