

Kapitel 7

Abbildungstheorie

In diesem Kapitel wollen wir uns basierend auf den in den vorangegangenen Kapitel erarbeiteten Kenntnisse zur Beugung und Interferenz sowie zur Kohärenz von Licht mit der Abbildungstheorie beschäftigen, um die Erzeugung von Bildern mit optischen Instrumenten und die dabei auftretenden Auflösungsgrenzen zu verstehen. Wir beschreiben dabei die physikalischen Grundlagen, die zu grundlegenden Beschränkungen in der Leistungsfähigkeit optischer Systeme führen. Wir wollen auch andeuten, wie man diese grundlegenden Beschränkungen überwinden kann.

Die meisten optischen Systeme werden zur Bilderzeugung verwendet. Abgesehen von der Lochkamera benutzen alle Linsen und/oder Spiegel, deren Eigenschaften wir bereits in Kapitel 4 zur geometrischen Optik ausführlich behandelt haben. In diesem Kapitel nehmen wir bei der Diskussion des Auflösungsvermögens abbildender optischer Systeme an, dass der geometrisch optische Teil eine perfekt scharfe Abbildung liefert. Das Auflösungsvermögen des Systems, d.h. die Fähigkeit zwei sehr nahe beeinanderliegende Objektpunkte noch getrennt abzubilden, hängt dann nur von der Beugung des Lichts an den in dem optischen System auftretenden Strahlbegrenzungen (Pupillen) ab.

Die geometrische Optik hat uns kein Konzept vermittelt, die Leistungsfähigkeit optischer Systeme abzuschätzen. Tatsächlich glaubten auch die Mikroskophersteller bis zu den Arbeiten von **Abbe** in der Mitte des 19. Jahrhunderts, dass die einzige Begrenzung des räumlichen Auflösungsvermögens durch die technischen Fähigkeiten der Linsenhersteller gegeben ist. Auf der Basis der Wellenoptik wissen wir heute aber, dass die grundlegende Längenskala für die Auflösungsgrenze optischer Systeme die Wellenlänge des verwendeten Lichtes ist.¹ Allerdings wurden in der jüngeren Vergangenheit auch Methoden entwickelt, das Auflösungsvermögen über diese Grenze hinaus zu verbessern (z.B. Nahfeldmikroskopie).

In diesem Kapitel wollen wir die Wellenoptik dazu benutzen, die Bilderzeugung durch eine Einzellinse zu beschreiben. Die dabei verwendeten Konzepte beruhen auf der *Fraunhofer'schen Beugungstheorie* und führen direkt zu einem Verständnis der Grenzen der Bildqualität von abbildenden optischen Systemen.

¹Die Vorhersagen der geometrischen Optik und der Wellenoptik sind äquivalent zu den Aussagen der klassischen Physik und der Quantenmechanik. Während in der klassischen Physik keinerlei prinzipielle Grenzen für die Messgenauigkeit existieren, hat man in der Quantenphysik aufgrund der Heisenberg'schen Unschärferelation eine Grenze vorliegen.

7.1 Fourier-Optik und Abbe'sche Theorie der Bildentstehung

Im Jahr 1867 schlug **Ernst Carl Abbe**² eine Theorie vor, die die Grenzen des Auflösungsvermögens von optischen Systemen und deren Verbindung mit der Wellenlänge des Lichts verdeutlicht. Wir wollen in diesem Abschnitt die Grundzüge dieser Theorie diskutieren.

Wir betrachten dazu stark vereinfacht die Bildentstehung bei der Abbildung durch eine Linse (siehe Abb. 7.1). Das Objekt sei eben und habe eine räumliche Transmissionsfunktion $f_O(x, y)$. Das Objekt wird von links mit kohärenten, monochromatischen ebenen Wellen beleuchtet. Durch die Linse mit Brennweite f wird gemäß der geometrischen Optik ein Bild $f_B(X, Y)$ in der Bildebene erzeugt. Beim Vorgang der Bildentstehung laufen dabei die folgenden Prozesse ab: Das Objekt beugt das einfallende Licht, so dass hinter dem Objekt gestörte Wellenfronten mit unterschiedlichen Raumfrequenzen (Richtungen) auftreten. Die gestörten Wellenfronten werden von der Linse nochmals gebeugt, so dass das Bild durch einen *zweifachen Beugungsvorgang* entsteht. Betrachten wir die Beugungsvorgänge genauer, so sehen wir, dass Lichtbündel, die in die gleiche Richtung gebeugt werden, durch die Linse alle auf gleiche Punkte in der Brennebene F der Linse fokussiert werden. In der Brennebene entsteht ein Fraunhofer'sches Beugungsbild $\Psi(u, v)$. Gemäß der Fraunhofer'schen Beugungstheorie (siehe Abschnitt 5.4) ist $\Psi(u, v)$ mit der zweidimensionalen Fourier-Transformation der Objektfunktion $f_O(x, y)$ verknüpft. Die Punkte in der Brennebene stellen selbst wieder Lichtquellen dar, von denen aus das Licht zur Objektebene läuft, dort interferiert und somit das Bild $f_B(X, Y)$ aufbaut. Dieser zweite Prozess kann als Rücktransformation aufgefasst werden. Die Funktion der Linse ist also zweifach. Zum einen lenkt sie das Licht so, dass das Fraunhofer'sche Beugungsbild ins Endliche kommt. Zum anderen bewirkt sie gleichzeitig die Fourier-Rücktransformation zur Bildentstehung in der Bildebene.³

Der Zusammenhang zwischen optischer Abbildung und zweifacher Fourier-Transformation ist am einfachsten für eine symmetrische Anordnung zu erkennen, wie sie in Abb. 7.1b gezeigt ist. Hier wird die Abbildung durch zwei Linsen gleicher Brennweite erzielt. Die erste Fourier-Transformation (FT) erfolgt mit der Linse L_1 in die gemeinsame Brennebene. Die Rücktransformation erfolgt dann durch die Linse L_2 , die zur Abbildung in der Bildebene führt. Der ideale Abbildungsvorgang läuft also in zwei Teilschritten ab:

$$f_O(x, y) \xrightarrow{\text{FT}} \Psi_{\text{ideal}}(u, v) \xrightarrow{\text{Rück-FT}} f_{B, \text{ideal}}(X, Y) . \quad (7.1.1)$$

Die Beugung am Objekt liefert die Fourier-Transformierte $\Psi_{\text{ideal}}(u, v)$, die dann in die ideale Bildfunktion $f_{B, \text{ideal}}(X, Y)$ zurücktransformiert wird. Wir können insgesamt Folgendes feststellen:

Ein optisches Bild kann als Fourier-Transformierte der Fourier-Transformierten des Objekts dargestellt werden.

Diese Regel gilt streng genommen nur dann, wenn die Linse im Hinblick auf alle Abbildungsfehler korrigiert ist.

In einer realen Abbildung, die weiter unten in Abb. 7.4 dargestellt ist, wird allerdings die ideale Fourier-Transformierte gar nicht erzeugt. Die Linse besitzt nämlich nur einen begrenzten Durchmesser und

²Eine Zusammenfassung der Leistungen von Ernst Abbe finden sich in H. Volkmann, *Ernst Abbe and His Work*, Appl. Opt. **5**, 1720 (1966).

³Diese Gedanken wurden erstmals 1973 von **Ernst Abbe** vorgetragen. Ein anderer, im Prinzip jedoch gleichbedeutender Ansatz stammt von **Lord Rayleigh** (1996), der jeden Punkt des Gegenstands als kohärente Lichtquelle betrachtete, deren Welle von der Linse zu einem Airy-Muster gebeugt wird. Die Mittelpunkte jedes Airy-Scheibchens liegen im idealen Bildpunkt.

kann somit nur niedrige Raumfrequenzen (kleine Beugungswinkel) verarbeiten.⁴ Das Abschneiden von hohen Raumfrequenzen durch den endlichen Durchmesser der Linse oder andere den Strahlengang begrenzende Pupillen berücksichtigen wir dadurch, dass vor die Rücktransformation noch ein Filterungsprozess geschaltet wird. Dieser Filterungsprozess führt zu einer gefilterten Fourier-Transformation $\Psi_{\text{real}}(u, v) = T_{\text{Filter}} \cdot \Psi_{\text{ideal}}$ führt. Damit erhalten wir

$$f_O(x, y) \xrightarrow{\text{FT}} \Psi_{\text{ideal}}(u, v) \xrightarrow{\text{Filterung } T(u, v)} \Psi_{\text{real}}(u, v) \xrightarrow{\text{Rück-FT}} f_{B, \text{real}}(X, Y) \quad (7.1.2)$$

Das erhaltene Bild entspricht dann nach dem Faltungstheorem⁵ der Faltung von idealer Bildfunktion und Filterfunktion (die auch Transferfunktion genannt wird):

$$f_{B, \text{real}} = f_{B, \text{ideal}} \otimes T_{\text{Filter}} \quad (7.1.3)$$

⁴Zusätzlich treten natürlich immer Linsenfehler auf, die wir hier aber nicht berücksichtigen wollen. Wir gehen von einer idealen geometrischen Optik ohne Linsenfehler aus.

⁵Faltungstheorem: $FT(A \otimes B) = FT(A) \cdot FT(B)$.

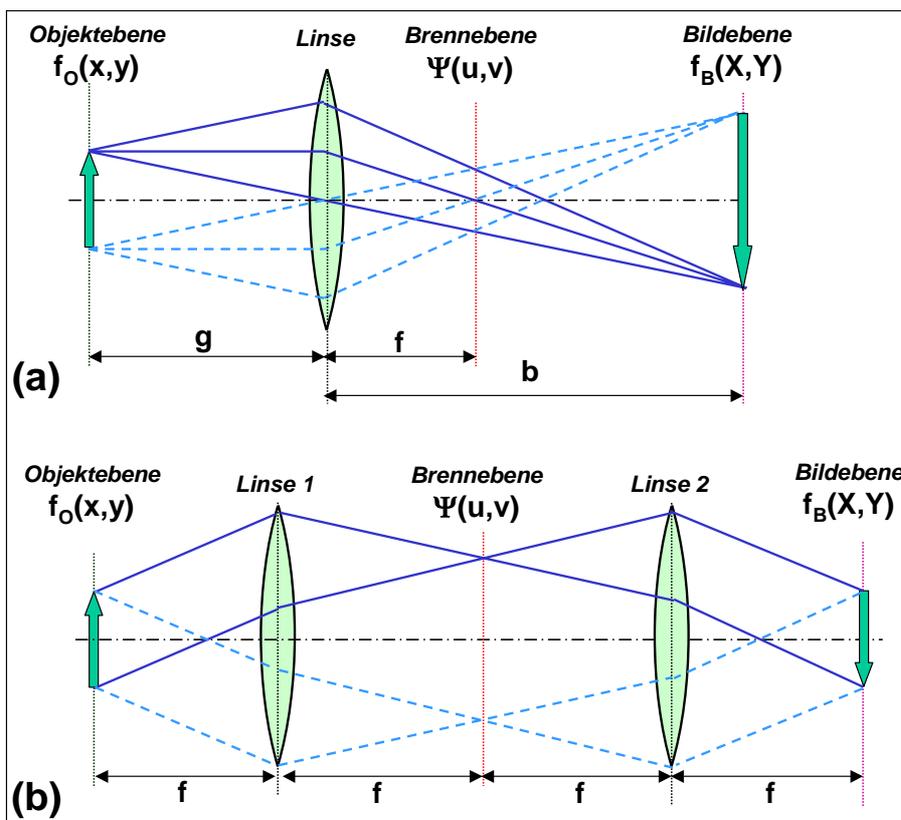


Abbildung 7.1: Abbe'sche Abbildungstheorie: (a) Die Abbildung eines beleuchteten Objekts mit Transmissionsfunktion $f_O(x, y)$ durch eine Linse wird in eine Sequenz von Fourier-Transformation (in die Brennebene der Linse) und Rücktransformation in die Bildebene zerlegt. (b) Direkt verständlich wird die Rücktransformation, wenn man die Abbildung mit Hilfe von zwei Linsen durchführt, die im Abstand $2f$ stehen.

Durch Einbringen von zusätzlichen Blenden in der Brennebene der Linse kann die Fourier-Transformierte modifiziert werden. Dadurch kann man gezielt z.B. niedrige oder hohe Raumfrequenzen (Beugungswinkel) ausblenden. Diesen Vorgang nennt man räumliche Filterung.

Ernst Carl Abbe (1840 - 1905):

Ernst Carl Abbe wurde am 23. Januar 1840 in Eisenach geboren. Er besuchte die Volkshochschule in Eisenach, in der er sich durch überdurchschnittliche Leistungen hervortat. Gegen Ende des 4. Schuljahres wurde er von seinen Lehrern für eine höhere Schulbildung am Realgymnasium empfohlen, an dem die mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer und die neuen Sprachen, also Englisch und Französisch, verstärkt unterrichtet wurden. Aufgrund hervorragender Leistungen konnte Abbe diese Schule bereits nach 7 statt 8 Jahren verlassen. Am 21. April 1857 begann er an der Friedrich-Schiller-Universität in Jena ein Mathematik- und Physikstudium. Abbe studierte 4 Semester in Jena und hörte außer Mathematik und Physik auch Vorlesungen über Botanik, Kristallographie, Pädagogik, Psychologie, Philosophie und neueste Geschichte. Im Frühjahr 1859 wechselte Ernst Abbe nach Göttingen, wo er bis 1859 weiterstudierte. Er promovierte am 23. März 1861. Nach einer Anstellung als Dozent am Physikalischen Verein in Frankfurt am Main zog Abbe nach Jena. Hier arbeitete er an seiner Habilitationsschrift und konnte sich in den Lehrgebieten Mathematik und Physik habilitieren. Er wurde daraufhin Privatdozent an der Großherzoglichen und Herzoglich-Sächsischen Gesamtuniversität Jena. Am 5. Mai 1870 wurde Abbe zum außerordentlichen Professor und am 25. Juli 1878 zum außerordentlichen Honorarprofessor ernannt. In dieser Zeit erfand er eine Reihe optischer Geräte und arbeitete mit Carl Zeiss zusammen, der ihn 1875 zum Teilhaber seiner optischen Werkstätten machte. Mit ihm entwickelte er die Grundlage für die Herstellung von Linsen. 1878 erhielt er einen ehrenvollen Ruf des großen Helmholtz als Professor für Optik, konnte ihn aufgrund der starken Bindung zu Zeiss jedoch nicht annehmen. 1882 baute er zusammen mit Carl Zeiss und Otto Schott die "Jenaer Glaswerk Schott und Gen." auf. Nach Zeiss Tod im Jahre 1889 zum Alleininhaber der Firma geworden, führte er Mitbestimmung, Achtstundentag, Gewinnbeteiligung, bezahlten Urlaub und fortlaufendes Einkommen für sechs Monate nach erfolgter Kündigung ein. Schließlich gründete er die Carl-Zeiss-Stiftung, der er 1891 die Firma und Teile seines persönlichen Vermögens übergab und der er bis 1893 vorstand.

Der Physiker, Industrielle und Sozialreformer starb am 14. Januar 1905 in Jena.



Das Phasenproblem

Es soll nun kurz auf die Frage eingegangen werden, ob man die beiden Schritte des Bildentstehungsprozesses voneinander trennen kann. Nehmen wir z.B. an, wir versuchen das Beugungsmuster in der Brennebene der Linse zu fotografieren und beleuchten in einem getrennten Schritt diese Photographie mit kohärentem Licht, um ihr Beugungsmuster zu beobachten. Es stellt sich dann die Frage, ob wir nicht auf diese Weise das Beugungsmuster des Beugungsmusters erzeugen und somit das Originalbild rekonstruieren können. Dies kann man gerade nicht tun, da der Fehler bei der Überlegung darin besteht, dass auf der Photographie keine Information über die Phase des Beugungsmusters enthalten ist. Die Photographie stellt nur ein Intensitätsbild $|\Psi(u, v)|^2$ ohne Phaseninformation dar, man verliert deshalb beim Photographieren der Intensitätsverteilung des Beugungsmusters Information. Der zweite vorgeschlagene Beugungsprozess würde in Unkenntnis der Phasen ausgeführt und würde somit ein falsches bzw. unvollständiges Bild hervorbringen.

Das Problem, dass die Phasen in einem aufgenommenen Beugungsmuster im Allgemeinen unbekannt sind, heißt *Phasenproblem*. Seine Lösung ist von zentraler Bedeutung für die Interpretation von Röntgenbeugungsbildern, bei denen man die Struktur eines Kristalls aus den aufgenommenen Beugungs-

bildern rekonstruieren will. Dabei sind verschiedene Ansätze möglich. Einer davon besteht darin, die Phasen auf plausible Art und Weise aus der im Beugungsmuster enthaltenen Information abzuleiten, wenn man bereits ein gewisses Vorwissen über das Objekt hat. Diesen Prozess nennt man *Phasenwiedergewinnung*.

Es gibt allerdings eine sehr wichtige Klasse von Beugungsbildern, die direkt zurücktransformiert werden können, da bei ihnen die Phasen im Beugungsbild tatsächlich null sind.⁶ Daraus folgt, dass sich alle gebeugten Wellen im Ursprung des Realraumes konstruktiv überlagern und dass die Objektfunktion daher an dieser Stelle ein Maximum hat. In der Sprache der Kristallographie bedeutet dies, dass am Ursprung ein stark streuendes Atom sitzt. Viele Moleküle oder Atome lassen sich tatsächlich als so aufgebaut denken. In einem solchen Fall ergibt die Rücktransformation der Photographie des Beugungsbildes ein gutes Bild der ursprünglichen Kristallstruktur.

Wir werden in Abschnitt 7.5 mit der Holographie eine Technik kennenlernen, mit der man die Phaseninformation auf einer Photoplatte als Intensitätsmuster abspeichern kann.

⁶Eine Beleuchtung der Photographie des Beugungsbildes mit kohärentem Licht entspricht gerade dem Rücksetzen aller Phasen auf null.

7.2 Auflösungsgrenze optischer Instrumente

Wir wollen nun die Abbe'sche Theorie zur Herleitung des Auflösungsvermögens optischer Instrumente anwenden. Dabei werden wir die beiden Grenzfälle einer völlig inkohärenten und völlig kohärenten Beleuchtung diskutieren, die relativ einfach behandelbar sind.

7.2.1 Das Rayleigh-Kriterium für ein inkohärentes Objekt

Das einfachste und am besten bekannte Auflösungskriterium ist das von **Lord Rayleigh** formulierte. Es bezieht sich auf ein selbstleuchtendes oder inkohärent beleuchtetes Objekt. Es wird normalerweise auf astronomische Teleskope angewendet, da zwei Sterne sicherlich die Bedingungen selbstleuchtend und inkohärent erfüllen.

Betrachten wir einen einzelnen Objektpunkt, so wissen wir aus der Fraunhofer'schen Beugungstheorie, dass wir in der Bildebene das Fraunhofer Muster der Aperturblende beobachten, dessen Abmessungen von der Bildweite abhängen. Dieses Beugungsmuster wird als *Punktantwort* bezeichnet. Ein ausgedehntes Objekt kann immer als Ansammlung von Punktobjekten betrachtet werden, wobei jedes Punktobjekt in der Bildebene eine ähnliche Punktantwort erzeugt. Da die einzelnen Punktquellen inkohärent sind, müssen wir die Intensitäten der jeweiligen Beugungsmuster addieren, um das Bild zu erhalten. Das Bild ist also eine Faltung der Objektfunktion mit der Punktantwort.

Das *Rayleigh-Kriterium* für die Auflösung lässt sich herleiten, indem man zwei benachbarte Punkte des Objekts betrachtet, die einen kleinen Winkelabstand voneinander entfernt sind. Hat die Aperturblende den Durchmesser $D = 2R$, so besitzt ihr Beugungsmuster folgende Intensitätsverteilung als Funktion des Winkels (vergleiche hierzu (5.4.32) und die daran anschließende Diskussion):

$$I(\theta) = \left(\frac{2J_1(\frac{1}{2}k_0D \sin \theta)}{\frac{1}{2}k_0D \sin \theta} \right)^2. \quad (7.2.1)$$

Rayleigh nahm nun an, dass zwei Objektpunkte gerade dann noch zu trennen sind, wenn das zentrale Maximum des einen Beugungsmusters im ersten Minimum des anderen liegt (siehe Abb. 7.2a). Die Funktion $J_1(x)$ in (7.2.1) hat ihre erste Nullstelle bei $x = 3.83$ oder $x/\pi = 1.22$. Daraus folgt

$$\frac{1}{2\pi}k_0D \sin \theta_1 = D \sin \theta_1 / \lambda = 1.22. \quad (7.2.2)$$

Der Winkelabstand θ_1 ist der minimale Winkelabstand, der noch aufgelöst werden kann. Für inkohärente Quellen gilt deshalb das Auflösungsvermögen⁷

$$\theta_{\min} = \frac{3.83}{\pi} \frac{\lambda}{D} = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (\text{Rayleigh}) \quad (7.2.3)$$

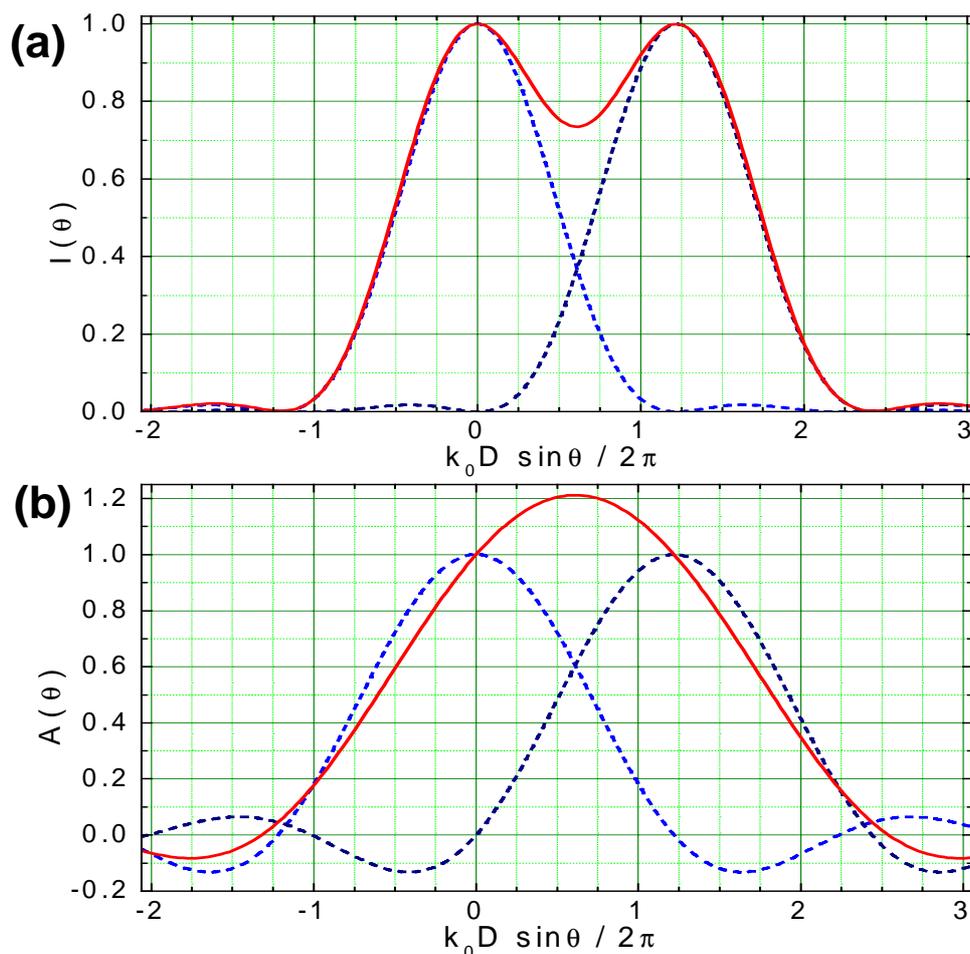


Abbildung 7.2: Überlagerung der Bilder zweier (a) inkohärent beleuchteter und (b) kohärent beleuchteter Lochblenden. Die gestrichelten Linien stellen in (a) die Einzelintensitäten und in (b) die Einzelamplituden dar, die durchgezogenen Linien entsprechend die Gesamtintensität und die Gesamtamplitude.

Wichtig an diesem Ergebnis ist, dass nur der Winkelabstand der Quellen vorkommt. Um eine gute Auflösung zu erzielen, muss also die Wellenlänge möglichst klein und die den Strahlengang einengende Apertur (z.B. der Linsendurchmesser) möglichst groß sein.

Wir wollen das Auflösungsvermögen eines Fernrohrs anhand eines Zahlenbeispiels diskutieren. Dazu wollen wir mit einem Fernrohr mit $D = 5$ m den Mond beobachten. Mit dem Abstand Erde-Mond von $x = 385.000$ km kann man den minimalen Abstand a von Gegenständen auf dem Mond abschätzen, der noch aufgelöst werden kann. Für θ_{\min} erhalten wir a/x . Bei $\lambda = 500$ nm ergibt sich daraus $a \geq 1.22\lambda x/D = 47$ m. Für die Astronomie ist im Allgemeinen die Winkelauflösung von Bedeutung. Für $D = 5$ m erhält man bei $\lambda = 500$ nm eine Winkelauflösung von 1.2×10^{-7} rad.

7.2.2 Das Sparrow-Kriterium für ein inkohärentes Objekt

Obwohl das Rayleigh-Kriterium das bekannteste Mass für das Auflösungsvermögen ist, funktioniert es unter bestimmten Bedingungen nicht, die wir später noch kennen lernen werden (siehe z.B. Abschnitt 7.4.2). Ein alternatives Kriterium, das vor allem der Eigenschaft des menschlichen Auges, Intensitätsunterschiede gut wahrzunehmen, Rechnung trägt, ist das *Sparrow-Kriterium*. Bei diesem Kri-

⁷Da die auftretenden Winkel üblicherweise klein sind, wurde der Sinus durch sein Argument ersetzt.

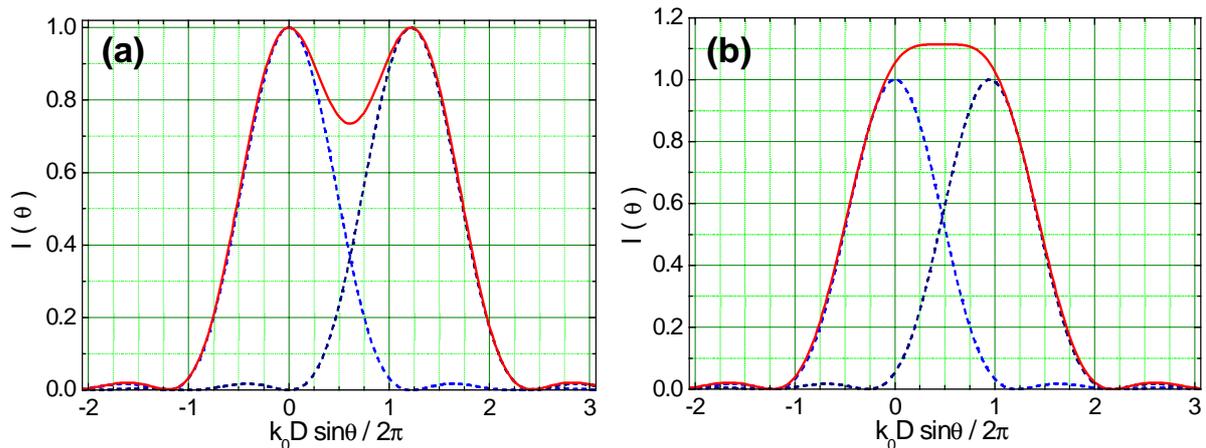


Abbildung 7.3: Überlagerung der Bilder zweier inkohärent beleuchteter Lochblenden entsprechend dem (a) Rayleigh und (b) Sparrow-Kriterium. Die gestrichelten Linien stellen die Einzelintensitäten, die durchgezogenen Linien die Gesamtintensität dar.

terium gelten zwei Punkte als räumlich aufgelöst, wenn ihre gemeinsame Intensitätsfunktion entlang ihrer Verbindungslinie ein Minimum besitzt. Haben beide Punkte die gleiche Intensität, so ergibt das Sparrow-Kriterium einen Minimalabstand θ_{\min} , wenn gilt

$$\left(\frac{d^2 I}{d\theta^2} \right)_{\theta=\theta_{\min}/2} = 0. \quad (7.2.4)$$

Verwendet man als Intensitätsfunktion die Bessel-Funktion (7.2.1), so folgt für θ_{\min}

$$\theta_{\min} = \frac{2.98}{\pi} \frac{\lambda}{D} = 0.95 \frac{\lambda}{D} \quad (\text{Sparrow}). \quad (7.2.5)$$

Abb. 7.3 zeigt einen Vergleich des Intensitätsverlaufs zweier inkohärent beleuchteter Lochblenden nach dem Rayleigh und dem Sparrow-Kriterium.

7.2.3 Rayleigh Kriterium für ein kohärent beleuchtete Objekt

Besteht das Objekt aus zwei Punkten, die Licht mit der gleichen Phase emittieren, so müssen die Amplituden ihrer Punktantwort addiert werden (und nicht wie bei inkohärenten Objektpunkten die Intensitäten). Entsprechend (7.2.1) erhält man

$$A(\theta) = \frac{J_1(\frac{1}{2}k_0 D \sin \theta)}{\frac{1}{2}k_0 D \sin \theta}. \quad (7.2.6)$$

Das *Rayleigh-Kriterium* ergibt dann das gleiche Resultat wie in (7.2.3). In Abb. 7.2b sind die Einzelamplituden und die Gesamtamplitude von zwei kohärent beleuchteten Lochblenden gezeigt. Man erkennt,

dass für die kohärent beleuchteten Lochblenden das Rayleigh-Kriterium offensichtlich nicht mehr ausreichend ist. Dies liegt daran, dass wir jetzt die Einzelamplituden und nicht die Einzelintensitäten addieren müssen. Bei kohärenter Beleuchtung erhält man dann die Gesamtintensität durch Quadrieren der Amplitudensumme, $I(\theta) = [A(\theta) + A(\theta - \theta_{\min})]^2$.

Die Diskussion legt nahe, dass man für inkohärent beleuchtete Objekte auf jeden Fall eine bessere Auflösung erhält als für kohärent beleuchtete. Dies liegt aber nur daran, dass wir eine spezielle Phasenbeziehung zwischen den beiden kohärenten Quellen angenommen haben (beide hatten dieselbe Phase). Wir könnten aber auch annehmen, dass beide Quellen einen Phasenunterschied von π haben sollen. In diesem Fall ergäbe sich die Gesamtintensität zu $I(\theta) = [A(\theta) - A(\theta - \theta_{\min})]^2$. Man sieht sofort, dass diese Intensitätsfunktion immer genau zwischen den Maxima der Einzelintensitäten ein Minimum besitzt, egal wie eng benachbart die beiden Quellen sind. Natürlich werden die Bilder durch die destruktive Interferenz immer schwächer, je näher die beiden Quellen zusammenrücken. Dieser Fall findet in modernen Lithographietechniken Anwendung. Man verwendet bei der Herstellung von kleinen Strukturen für mikroelektronische Schaltkreise mittels Photolithographie so genannte *Phasenmasken*. Dabei werden beieinanderliegende Objekte auf einer Photomaske abwechselnd mit einem transparenten Film bedeckt, der zu einer Phasenschiebung von π führt. Dadurch wird sichergestellt, dass eine dunkle Linie zwischen den Bildern der benachbarten Elemente entsteht. Im Allgemeinen gilt aber tatsächlich, dass inkohärente Beleuchtung zu einem besseren Auflösungsvermögen führt.

7.2.4 Anwendung der Abbe'schen Theorie auf das Auflösungsvermögen

Wir haben oben gesehen, dass es eigentlich günstig wäre, eine inkohärente Beleuchtung zu verwenden, um ein möglichst hohes Auflösungsvermögen zu erhalten. Allerdings arbeiten die meisten Mikroskope aufgrund der kleinen Abmessungen der Objekte und der praktischen Schwierigkeiten, wirklich räumlich inkohärentes Licht zu erzeugen, mit kohärenter bzw. zumindest teilweise kohärenter Beleuchtung.

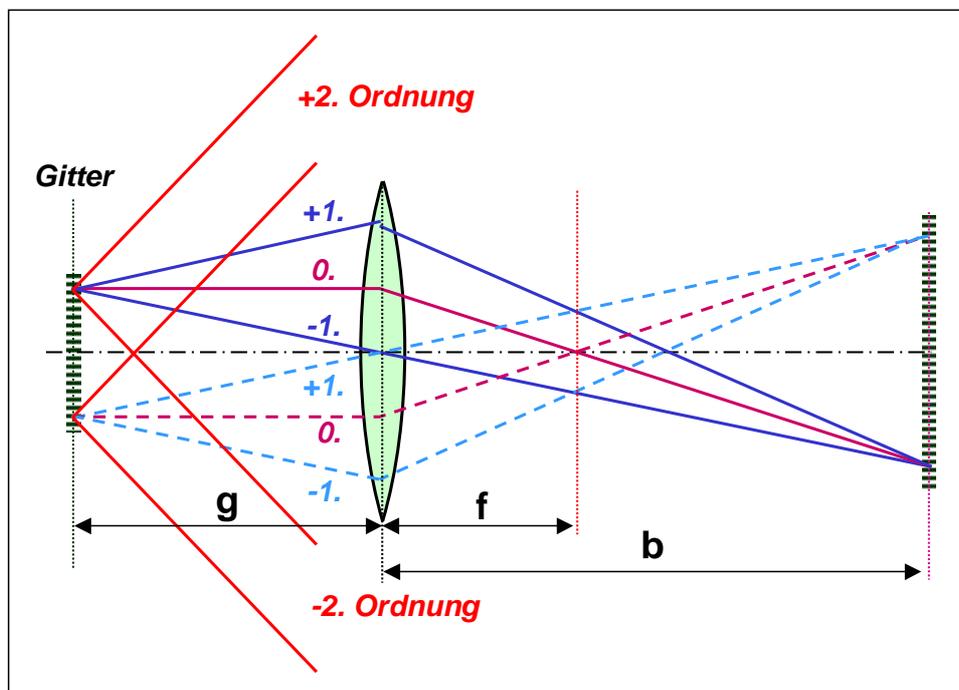


Abbildung 7.4: Auflösungsvermögen nach Abbe. Damit die Periodizität einer Struktur richtig wiedergegeben wird, muss das abbildende optische System neben der 0-ten Ordnung auch die ± 1 -te Ordnung durchlassen.

Wir wollen nun die *Abbe'sche Theorie der Bildentstehung* auf kohärent beleuchtete Objekte anwenden. Hierzu betrachten wir die in Abb. 7.4 gezeigte Situation. Wir verwenden als Objekt ein Strichgitter mit kleinem Strichabstand a . Das Gitter beugt das einfallende Licht in die unterschiedlichen Ordnungen. Je nach Öffnungswinkel des Objektivs werden unterschiedliche Beugungsordnungen ausgefiltert bzw. zum Aufbau des Bildes verwendet. Lässt man nur die 0-te Ordnung passieren, so entspricht dies einem einzigen Punkt in der Fourier-Ebene (Brennebene der Linse), der nur zu einer gleichmäßigen Helligkeit in der Bildebene Anlass gibt. Verwendet man zusätzlich die ± 1 -te Ordnung, so entsteht ein Bild des Objekts, das die Periodizität des Gitters richtig wiedergibt. Mit zunehmend höheren Ordnungen nimmt die Schärfe der Abbildung zu.

Um das Auflösungsvermögen eines optischen Instruments abzuschätzen, kann man den Gitterabstand betrachten, für den gerade noch die 0-te und ± 1 -te Ordnung durchgelassen werden. Bei weiterer Verringerung des Gitterabstandes würden die Beugungswinkel größer und man hätte nur noch die 0-te Ordnung vorliegen. Diese Überlegung wurde erstmals von **Abbe** gemacht und führt direkt zum Auflösungsvermögen bei der Abbildung eines Objekts, das mit senkrechtem Licht bestrahlt wird. Für den Fall, dass sich vor dem Objektiv ein Medium mit dem Brechungsindex n befindet, lautet die Bedingung für das Auftreten der ± 1 -ten Beugungsordnung $a n \sin \theta = \pm \lambda$ (vergleiche (5.5.13)). Damit ergibt sich das erreichbare Auflösungsvermögen zu

$$a \geq \frac{\lambda}{n \sin \theta} = \frac{\lambda}{\text{NA}} . \quad (7.2.7)$$

Hierbei wird $\text{NA} = n \sin \theta$ *numerische Apertur* genannt.

In unserer Diskussion haben wir angenommen, dass die Beleuchtung parallel zur optischen Achse erfolgt und dass das Empfangen der 0-ten und ± 1 -ten Ordnungen für die Bildentstehung notwendig ist. In der Tat reicht es aber, nur die 0-te und die $+1$ -te oder -1 -te Ordnung zu verwenden. Wir können deshalb das Auflösungsvermögen verbessern, indem wir das Objekt mit Licht beleuchten, das einen Winkel α zur optischen Achse hat, so dass die 0-te Ordnung gerade noch durchgelassen wird. Die Bedingung, dass dann die 1-te Ordnung auf einer Seite auch noch durchgelassen ist, ergibt dann

$$a \geq \frac{\lambda}{2n \sin \theta} = \frac{\lambda}{2 \text{NA}} . \quad (7.2.8)$$

Dieses Ergebnis stellt die maximale Auflösung dar, die mit einer gegebenen Linse erzielt werden kann. Um sie in der Praxis zu erreichen, beleuchtet man mit einem Lichtkegel, der einen halben Öffnungswinkel von mindestens α hat, wie in Abb. 7.5 gezeigt ist.

Die Auflösungsgrenze, die durch eine endliche Öffnung zustande kommt, kann auch als Anwendung des Faltungssatzes (vergleiche (5.5.1) in Abschnitt 5.5) interpretiert werden. In einem System mit kohärenter Beleuchtung resultiert die Begrenzung der Fourier-Transformierten durch eine Blende in einer Punktantwort in der Bildebene, deren Amplitude mit der des Objekts gefaltet werden muss, wenn das Bild entsteht (vergleiche (7.1.3)). Das Resultat ist ein Verschmieren des Bildes. Da aber hierbei die Amplituden verwendet werden müssen, können benachbarte Teile des Bildes interferieren. Das Ergebnis wird dann deutlich komplizierter als im Fall einer inkohärenten Beleuchtung, wo die gleiche Überlegung für die Intensitäten gilt. Insbesondere können durch die Interferenzeffekte *Bildartefakte* entstehen, die hier nicht diskutiert werden sollen.

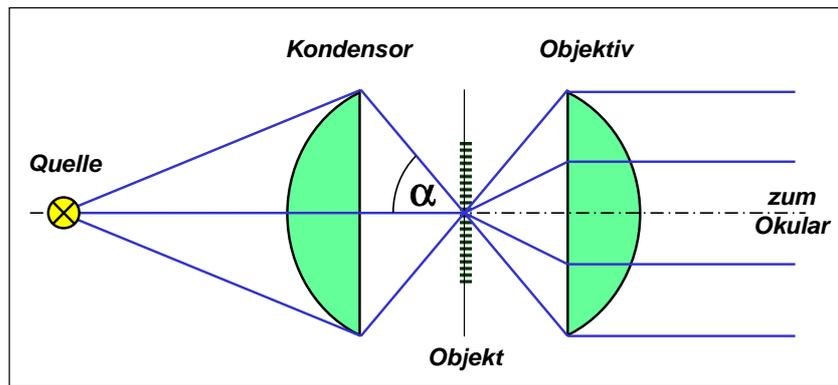


Abbildung 7.5: Kegelförmige Beleuchtung eines Objekts, um die größte mikroskopische Auflösung zu erhalten.

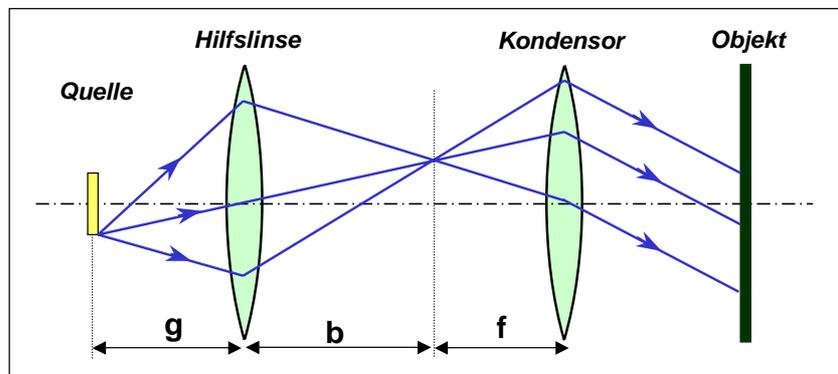


Abbildung 7.6: Köhler'sche Beleuchtung zur Erzeugung einer inkohärenten Objektbeleuchtung.

7.2.5 Köhler'sche Beleuchtung

Für viele praktische Fälle ist eine völlig inkohärente Beleuchtung eines Objekts am günstigsten. Inkohärentes Licht erhalten wir im Allgemeinen von einer Quelle mit großer räumlicher Ausdehnung (z.B. Tageslicht von Himmel). Solche Lichtquellen sind allerdings meist zu schwach und man muss zur Steigerung der Intensität eine Linse verwenden, um das Licht der Quelle auf das Objekt zu fokussieren. Ein Abbildungssystem ist allerdings nie perfekt und somit erzeugt jeder Punkt der Quelle ein Bild endlicher Größe auf dem Objekt. Das bedeutet, dass benachbarte Bereiche auf dem Objekt wiederum mit teilweise kohärentem Licht beleuchtet werden. Man muss das Beleuchtungssystem nun so gestalten, dass diese teilweise kohärent beleuchteten Bereiche möglichst klein werden.

Als Beispiel ist in Abb. 7.6 die *Köhler'sche Beleuchtung* gezeigt. Dabei wird eine ausgedehnte Lichtquelle benutzt. Obwohl jeder Punkt der Quelle paralleles kohärentes Licht unter einem bestimmten Winkel erzeugt, ist die Gesamtstrahlung an jedem Punkt des beleuchteten Objekts völlig inkohärent. Dies kommt dadurch zustande, dass sich an jedem Punkt des Objekts kohärente ebene Lichtwellen mit zufallsverteilten Phasen überlagern, die von unterschiedlichen Punkten der Quelle kommen.

Die Beleuchtungsanordnung ergibt ein Feld mit einem räumlichen Kohärenzbereich mit Radius $\xi \propto \lambda/NA_c$, wobei NA_c die numerische Apertur des Kondensators ist. Ist NA_c größer als die numerische Apertur des Objektivs und ist die optische Qualität der Kondensatorlinse genügend hoch, so ist ξ kleiner als die räumliche Auflösungsgrenze, so dass aufgelöste Punkte im Wesentlichen inkohärent beleuchtet werden und deshalb unkorreliert sind. In diesem Fall ist die Auflösungsgrenze wirklich durch das Rayleigh-Kriterium gegeben. Es sei noch darauf hingewiesen, dass eine Reduktion von NA_c meist zu

einer Erhöhung des Bildkontrastes, dafür aber zu mehr Artefakten durch Korrelationen führt.

7.3 Anwendungen der Abbe'schen Theorie

Die Abbe'sche Theorie der Bildentstehung führt direkt zu einigen interessanten Möglichkeiten der Bildbearbeitung, die wir hier kurz vorstellen wollen. Durch Anbringen von geeigneten Masken und Filtern in der Fourier-Ebene der abbildenden Linse kann man eine *räumliche Filterung* des Bildes vornehmen. Dadurch kann man z.B. den Kontrast erhöhen oder erniedrigen, störende Bildelemente unterdrücken oder Kantenüberhöhungen ausführen. Die Bezeichnung räumliche Filterung wird deshalb verwendet, da bei kohärenter Beleuchtung eines Objekts in der hinteren Brennebene der abbildenden Linse hauptsächlich das Spektrum der Raumfrequenzen des Bildes vorliegt, das durch Blenden und Filter modifiziert werden kann. Zum Beispiel können, wie in Abb. 7.7 gezeigt ist, die großen Raumfrequenzen durch eine Maske herausgefiltert werden, die somit die Bildebene nicht erreichen können. Eine solche Änderung des Frequenzspektrums eines Bildes nennen wir *räumliche Filterung*.

Wird eine inkohärente Beleuchtung verwendet, so können wir die Fourier-Transformierte in der hinteren Brennebene der abbildenden Linse natürlich nicht beobachten. Die im Folgenden diskutierten Prinzipien gelten aber trotzdem. Die verwendeten Methoden sind sowieso meistens nur Näherungsmethoden. Wir wollen im Folgenden einige Methoden diskutieren, die darauf basieren, dass in die Brennebene der 1. Linse bestimmte Blenden- und/oder Filteranordnungen eingebracht werden.

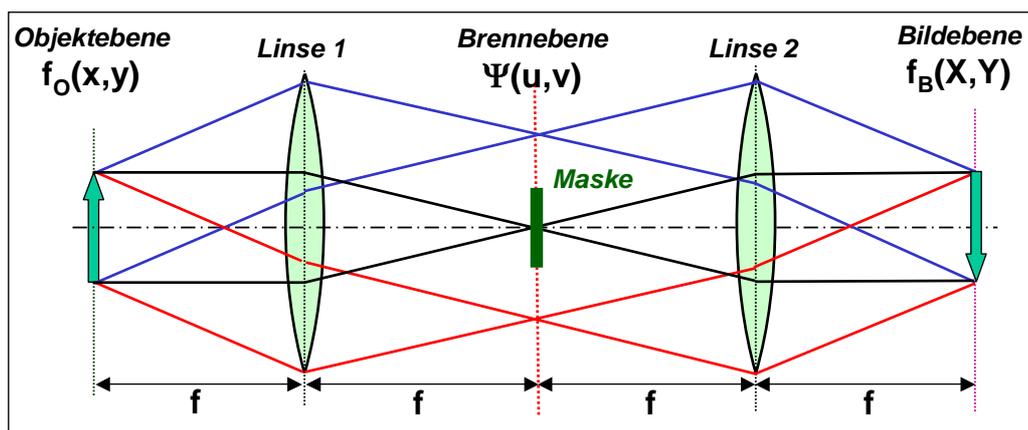


Abbildung 7.7: Zur Veranschaulichung der räumlichen Filterung: Durch Einbringen in die hintere Brennebene der 1. Linse, in der die Fourier-Transformierte des Gegenstands entsteht, können bestimmte räumliche Frequenzen herausgefiltert werden.

7.3.1 Dunkelfeldabbildung

Wir betrachten zuerst den Fall, dass wir ein sehr kleines, nichtleuchtendes Objekt z.B. unter einem Mikroskop betrachten wollen. Verwenden wir eine übliche Beleuchtungsmethode, so werden wir den sehr kleinen Beitrag des von dem kleinen Objekt gestreuten Lichts gegenüber der hohen Intensität des ungestreuten Lichts nicht wahrnehmen können. Dieses Problem können wir aber dadurch umgehen, dass wir die Probe schräg beleuchten, so dass das ungestreute Licht nicht auf das Objektiv trifft. Deshalb wird diese Methode *Dunkelfeldabbildung* genannt. Dadurch gelangt nur das von dem kleinen Objekt gestreute Licht in unser Auge. Wir können dann das kleine Objekt (z.B. Bakterium) gut lokalisieren und eventuell seine Bewegung verfolgen.

Bei der Dunkelfeldabbildung wird also das ungebeugte Licht nicht zur Abbildung verwendet. Dies ist gleichbedeutend damit, dass man in der Fourier-Ebene der abbildenden Linse die 0-te Beugungsordnung ausblendet. Dies kann durch das Einbringen einer scheibenförmigen Blende geschehen (siehe Abb. 7.8a).

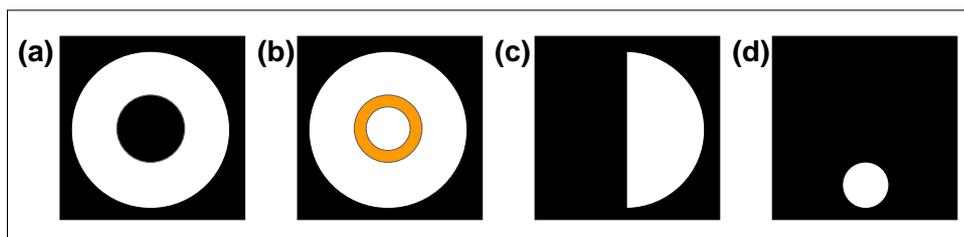


Abbildung 7.8: Filter in der Fourier-Ebene der Objektivlinse für die (a) Dunkelfeldabbildung und die Erzeugung von (b) Phasen-, (c) Schlieren- und (d) Beugungskontrast.

Diese Methode eignet sich auch sehr gut zur Darstellung von so genannten Phasenobjekten mit geringer Absorption.

7.3.2 Die Phasenkontrast-Mikroskopie

Die Phasenkontrast-Mikroskopie ist eine Methode, den schwachen Kontrast eines Phasenobjektes⁸ zu erhöhen. Da große Phasenänderungen aufgrund ihrer Brechungseffekte normalerweise gut sichtbar sind, wird die Phasenkontrast-Mikroskopie nur bei kleinen Phasenänderungen verwendet. Die Methode des *Phasenkontrasts* wurde bereits 1934 von dem niederländischen Physiker **Fritz Zernicke** vorgeschlagen und in seinem *Phasenkontrast-Mikroskop* umgesetzt.

Die Phasenkontrastmethode kann man analytisch beschreiben, wenn die Phasenvariationen $\phi(x) \ll 1$ sind. Wir wollen uns hier auf diesen Fall, bei dem die Transmissionsfunktion $f(x)$ entwickelt werden kann, beschränken. Es gilt dann⁹

$$\begin{aligned} f(x) &= A \exp[i\phi(x)] \simeq A + iA\phi(x) \\ |f(x)|^2 &\simeq A^2 . \end{aligned} \quad (7.3.1)$$

Man erkennt, dass die transmittierte Intensität etwa konstant ist und man deshalb ein sehr kontrastschwaches Bild erwartet.

Verändert man allerdings die Phase der 0-ten Ordnung, d.h. des von x unabhängigen Terms, um $\pi/2$, so erhält man die Funktion:

$$\begin{aligned} f(x) &= iA + iA\phi(x) \simeq iA \exp[\phi(x)] \\ |f(x)|^2 &= A^2 \exp[2\phi(x)] \simeq A^2 [1 + 2\phi(x)] . \end{aligned} \quad (7.3.2)$$

Das heißt, man erhält eine reelle Variation der Intensität mit einer linearen Abhängigkeit von ϕ .

In der Praxis ist die Anwendung der Phasenkontrastmethode auf eine inkohärent beleuchtete Probe schwierig, da es keine wohldefinierte Fourier-Transformierte gibt, deren verschiedene Ordnungen man

⁸Ein ideales Phasenobjekt ändert nur die Phase einer Welle aber nicht ihre Amplitude.

⁹Unter Benutzung der Näherung $e^x \simeq 1 + x$.

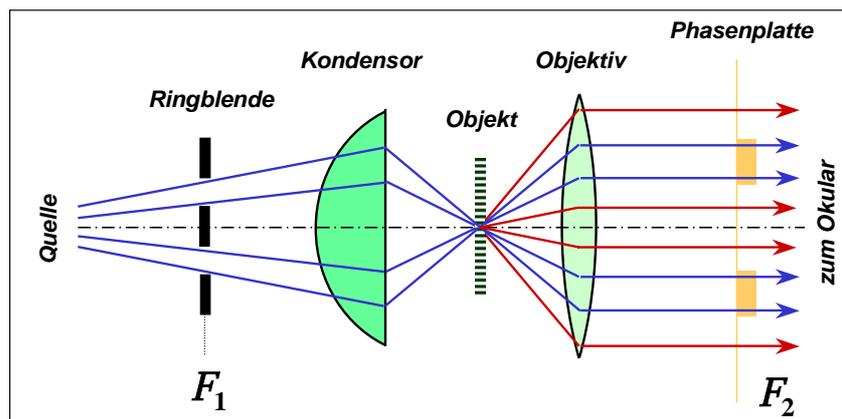


Abbildung 7.9: Strahlengang in einem Phasenkontrast-Mikroskop. Die Phasenplatte liegt in der Ebene des Bildes der Ringblende, das vom Kondensator-Objektiv-Linsensystem geformt wird.

identifizieren könnte. Man behilft sich mit der in Abb. 7.9 gezeigten Anordnung. Dabei wird der beleuchtende Strahl durch eine ringförmige Blende geleitet. Ein reelles Bild dieser Blende wird in der hinteren Brennebene des abbildenden Objektivs erzeugt. Die Platte, die die Phasenschiebung erzeugt, ist ein dünner Film der Dicke $\lambda/4$, dessen laterale Abmessungen denen des Bildes der Ringblende angepasst sind. Das Bild wird schließlich durch Interferenz des Lichts, das durch die Platte gegangen ist, und dem, das an der Platte vorbeigegangen ist, erzeugt.

Erzeugt die Probe selbst nur kleine Phasenunterschiede, so ist meist die 0-te Ordnung im Beugungsmuster zu hell und eine Veränderung ihrer Phase führt zu übertriebenen Veränderungen des Bildes. Man stellt deshalb die Phasenplatte so her, dass nur etwa 10 - 20% der 0-ten Ordnung transmittiert werden. Diese sieht dann wie ein dunkler Ring vor einem hellen Hintergrund aus (siehe Abb. 7.8b) und erzeugt ein Bild, das einen Kompromiss zwischen einer Dunkelfeld- und einer Phasenkontrastaufnahme darstellt.

7.3.3 Die Schlierenmethode

Eine alternative Methode zur Erzeugung von Kontrast besteht darin, den zentralen Fleck im Beugungsbild mit einer scharfen Kante zu begrenzen (siehe Abb. 7.8c), wodurch die Hälfte der Fourier-Transformierten ausgeblendet wird. Dazu muss das Objekt in einen kohärenten, parallelen Lichtstrahl gebracht werden, der durch eine auf sphärische Aberration sorgfältig korrigierte Linse fokussiert wird. Die scharfe Kante wird dann so in die Brennebene der Linse eingebracht, dass sie den Fokuspunkt gerade schneidet. Diese Methode, die 1864 von **A. Töpfer** zum Auffinden von Materialfehlern in Linsen eingeführt wurde, wird *Schlierenmethode* genannt und hat zwei wichtige Anwendungen.

Als erstes stellt sie einen wichtigen Test der Linsenqualität hinsichtlich der sphärischen Aberration dar. Falls eine Linse eine sphärische Aberration aufweist, besitzt sie keinen wohldefinierten Fokuspunkt und es wird unmöglich, eine Position für die Messerkante zu finden, bei der genau die Hälfte der Fourier-Transformierten abgeschnitten wird. Wenn wir die Linse selbst beim Verschieben der Kante in der Brennebene betrachten, so stellen wir fest, dass sich die Intensität der Beleuchtung auf der Oberfläche verändert. Daraus können dann notwendige Korrekturen der Linse abgeleitet werden. Dieser Test wird *Foucault'sche Schneidenprüfung* genannt.

Die zweite Anwendung der Schlierenmethode ist bei der Untersuchung der Flüssigkeits- und Aerodynamik wichtig. Ein Windkanal, in dem die Luftdichte und damit der Brechungsindex der Luft durch Störungen (z.B turbulente Strömungen) modifiziert wird, stellt ein Phasenobjekt dar. Indem man die Schlierenmethode verwendet, kann man die Phasenänderungen als Änderungen der Intensität sichtbar

machen. Ein wichtiger Unterschied zwischen den Phasenkontrast- und Schlierensystemen besteht dabei darin, dass die letzteren nur entlang einer Achse arbeiten. Schlierensysteme werden oft so eingestellt, dass das Licht der 0-ten Ordnung gedämpft, aber nicht vollständig ausgeblendet wird.

7.3.4 Beugungskontrast

Bei Elektronenmikroskopen wird die numerische Apertur sehr klein gehalten, da es keine Möglichkeiten gibt, die Aberrationen der Linsensysteme vollständig zu korrigieren. Betrachtet man z.B. kristalline Materialien, so ist es daher möglich, sich nur einen sehr begrenzten Teil der Fourier-Transformierten anzuschauen, der nur eine Beugungsordnung und ihre Umgebung enthält (siehe entsprechenden Filter in Abb. 7.8d). Dies reicht aus, um die Struktur auf einer Skala größer als die Einheitszelle sichtbar zu machen. Die Technik, die als *Beugungskontrastmethode* bezeichnet wird, verwendet ein Raumfilter, das alle Beugungsordnungen bis auf eine ausblendet. Haben wir beispielsweise ein polykristallines Material vorliegen und bilden es durch eine Blende außerhalb der optischen Achse ab, so erscheinen nur diejenigen Kristallite als helle Flecken im Bild, die Beugungsmaxima innerhalb der Blendenöffnung haben. Der Rest bleibt dunkel. Um die Periodizität der Probe (atomare Struktur) abzubilden, muss man eine Blende verwenden, die mehrere Beugungsordnungen durchlässt. Ein Bild, das auf diese Weise erhalten wird, heißt Gitterbild.

7.4 Verbesserung der Auflösung von optischen Instrumenten

Die im vorangegangenen Abschnitt 7.3 diskutierten Methoden haben nicht zu einer Verbesserung der räumlichen Auflösung über den Wert $\lambda/2NA$, sondern nur zu einer Optimierung des Kontrastes geführt. Es stellt sich allgemein die Frage, ob die Grenze $\lambda/2NA$ eine fundamentale Grenze für die Auflösung darstellt.

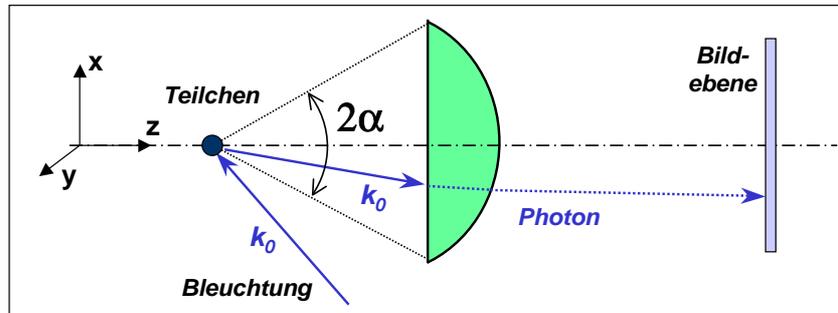


Abbildung 7.10: Prinzipskizze zum Heisenberg'schen Gedankenexperiment zum Gammastrahlen-Mikroskop.

In der Tat wurde die Auflösungsgrenze von optischen Instrumenten von **Heisenberg** dazu verwendet, das quantenmechanische Unschärfeprinzip darzustellen. Dazu hat Heisenberg ein Gedankenexperiment, sein berühmtes *Gammastrahlenmikroskop*¹⁰ verwendet. Er ging dabei davon aus, dass die Position von punktförmigen Teilchen im Blickfeld eines Mikroskops so genau wie möglich bestimmt werden soll. Um dies zu erreichen, wird ein Objektiv mit möglichst großer numerischer Apertur und Wellen der kürzesten Wellenlänge (Gammastrahlen) verwendet. Um eine Ortsbestimmung durchzuführen, muss mindestens ein Photon an dem Objekt gestreut werden und ins optische System des Mikroskops einfallen (siehe Abb. 7.10). Es gibt allerdings keine Möglichkeit festzustellen, unter welchem Winkel das Photon in die Optik einfällt. Nach der Streuung wissen wir, dass das Photon eine Richtung innerhalb des halben Öffnungswinkels α besitzen muss, der die numerische Apertur des Mikroskops bestimmt. Hat das Photon die Wellenzahl k_0 , so muss seine x -Komponente nach der Streuung im Bereich $-k_0 \sin \alpha < k_x < k_0 \sin \alpha$ liegen. Es gilt daher eine Unschärfebeziehung $\delta k_x = 2k_0 \sin \alpha$. Mit Hilfe der Theorie zum Auflösungsvermögen eines Mikroskops ergibt die Beziehung $a \geq \lambda/2NA$ eine Unschärfe in der Bildposition $\delta x \geq \lambda/2NA = \lambda/2 \sin \alpha$. Daher gilt

$$\delta x \delta k_x \geq 2\pi, \quad (7.4.1)$$

was in der Form¹¹

$$\delta x \delta p_x \geq h, \quad (7.4.2)$$

geschrieben werden kann. Dies ist die übliche Schreibweise der *Heisenberg'schen Unschärferelation*. Das heißt, Heisenberg hat in seinem Gedankenexperiment die Auflösungsgrenze optischer Instrumente auf das Unschärfeprinzip der Quantenmechanik zurückgeführt.

¹⁰Dieses Gedankenexperiment wurde von Heisenberg im Jahr 1930 durchgeführt.

¹¹Mit $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$; siehe hierzu Kapitel 9.

Wir können nun nach Möglichkeiten suchen, das Unschärfeprinzip zu umgehen. Eine sinnvolle Idee ist die Verwendung von vielen Photonen. Jedes Photon muss weiterhin durch die Linse treten, so dass δk unverändert bleibt. Aber ein statistisches Ensemble N solcher Photonen hat eine totale Unschärfe von $2\sqrt{N}k_0 \sin \alpha$, so dass $\delta x \simeq \lambda/2NA\sqrt{N}$ erwartet werden kann. Es gibt in der Tat mehrere Methoden, die eine große Zahl von Photonen verwenden.

Eine Methode zur Verbesserung des Auflösungsvermögens verwendet *evaneszente Wellen*, die wir bereits in Abschnitt 2.6.4 kennengelernt haben. Wir haben in Kapitel 5 gesehen, dass eine elektromagnetische Welle die skalare Wellengleichung

$$\nabla^2 \Psi + k_0^2 \Psi = 0 \quad (7.4.3)$$

erfüllen muss. Wir haben bisher angenommen, dass die Lösungen in alle Richtungen wellenförmig sind. Können wir aber die Welle in eine Richtung, z.B. die z -Richtung, evaneszent machen, so dass Ψ in der Form $\exp[i(k_x x + k_y y) \pm 2\pi z/a]$ geschrieben werden kann, erhalten wir durch Einsetzen in (7.4.3)

$$k_x^2 + k_y^2 - \frac{4\pi^2}{a^2} = k_0^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}. \quad (7.4.4)$$

Wir können aus diesem Ausdruck folgendes ablesen: Ist $a \ll \lambda$, so ist $4\pi^2/a^2 \gg 4\pi^2/\lambda^2$. Damit ergibt sich $k_x^2 + k_y^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} + \frac{4\pi^2}{a^2} \simeq \frac{4\pi^2}{a^2}$, wodurch k_x oder k_y fast so groß wie $2\pi/a$, also deutlich größer als k_0 wird. Als Resultat davon wird die räumliche Auflösung δx oder $\delta y \simeq a$ deutlich kleiner als eine Wellenlänge. Der Prozess des Erzeugens evaneszenter Wellen bedeutet die Anwendung von bestimmten Randbedingungen, die evaneszente Wellen zu ihrer Entstehung benötigen.

Wir werden im Folgenden einige Methoden vorstellen, die das eben diskutierte Konzept verwenden. Zwei von ihnen haben zu praktisch funktionierenden Instrumenten geführt.

7.4.1 Vertiefungsthema: Apodisation

Bei der Technik der *Apodisation* wird versucht, der Fourier-Transformierten eine bestimmte Form zu geben. Durch Einsetzen von geeigneten Masken in der Linsenebene (z.B. System aus mehreren Ringblenden) kann man die Punktantwort des Linsensystems optimieren. Verwendet man eine einfache Lochblende (diese liegt bei jedem Linsensystem durch den endlichen Durchmesser der Linsen vor), so erhält man als Punktantwort eine Airy-Scheibe mit konzentrischen Beugungsringen (vergleiche Abschnitt 5.4.6 und Abb. 5.20). Durch Verwendung eines Satzes von konzentrischen Ringblenden mit geeigneten Durchmessern in der Linsenebene kann man nun erreichen, dass die Beugungsringe um die Airy-Scheibe unterdrückt werden.¹² Bei der Diskussion der Beugung am unscharfen Spalt (siehe Abschnitt 5.4.3) haben wir gesehen, dass eine vollständige Unterdrückung der Nebenmaxima durch eine Blende mit Gauß-förmigem Profil (siehe Abb. 5.18) erreicht werden könnte. Die genaue Rechnung zeigt allerdings, dass die Verwendung einer Blende mit Gauß-förmigem Profil die Auflösung etwas verschlechtert, da die zentrale Airy-Scheibe insgesamt etwas breiter wird.

¹²Jaquinot und Roizen-Dossier, 1964.

Eine andere Blendenanordnung verbessert die Auflösung dagegen etwas. Decken wird z.B. das Zentrum der Linse ab, so dass nur an ihrem Rand eine ringförmige Blende bestehen bleibt. Die Punktantwort der Linse ist dann durch die Fourier-Transformierte dieser Ringblende, die im Anhang C diskutiert wurde, gegeben. Es gilt $I(\theta) = 4\pi^2 R^2 \delta R^2 J_0^2(Rk_0 \sin \theta) / (Rk_0 \sin \theta)^2$, wobei $R = D/2$ der Radius und δR die Stärke der Ringblende ist. Die erste Nullstelle dieser Funktion liegt bei $(k_0/2\pi)D \sin \theta = 0.76$ (siehe hierzu Abb. C1 im Anhang). Wendet man das Rayleigh-Kriterium für die Auflösung an, so erhält man $\theta_{\min} = 0.76\lambda/D$ verglichen mit $\theta_{\min} = 1.22\lambda/D$ für eine Lochblende mit Durchmesser $D = 2R$. Wir erhalten somit eine Auflösungsverbesserung von etwa 40%. Da allerdings die Beugungsringe, die durch die J_0 -Funktion entstehen, relativ stark sind, hat diese Methode nur wenige direkte Anwendungen. Ein weiterer Nachteil der Methode ist die große Verschwendung von Licht. Aus Sicht der Unschärferelation haben wir δk_x dadurch maximiert, indem wir nur Photonen aus den Randbereichen der Linse verwendet haben, wodurch wir δx minimiert haben.

7.4.2 Konfokale Rastermikroskopie

Die *konfokale Rastermikroskopie*¹³ ist eine praktisch eingesetzte Technik, die auf konventionellen Mikroskopen beruht und ein Auflösungsvermögen besser als $\lambda/2NA$ erlaubt. Die Technik ist in Abb. 7.11 schematisch für ein in Transmission arbeitendes System dargestellt. Prinzipiell kann auch in Reflexion gearbeitet werden. Das Objekt wird durch das Bild einer Punktquelle beleuchtet. Das durch das Objekt transmittierte Licht wird durch eine Objektivlinse auf eine Lochblende fokussiert, hinter der sich ein Lichtdetektor befindet. Das Objekt wird mechanisch in x und y -Richtung bewegt (Rasterprozess) und gleichzeitig die Intensität des durch die Lochblende gelangenden Lichtes mit Hilfe des Detektors gemessen. Das Detektorsignal wird dann gegen die xy -Koordinate aufgetragen und somit ein Bild erzeugt.

Für die Diskussion des Auflösungsvermögens eines solchen Systems müssen wir zuerst die Punktantwort betrachten. Dazu stellen wir uns ein punktförmiges Objekt mit einer Transmissionsfunktion $f(x, y) = \delta(x)\delta(y)$ vor. Das Beleuchtungssystem erzeugt eine Amplitudenantwort $a_1(x)$ in der Objektebene, so dass die Amplitude in einer Entfernung x von der Achse durch

$$A(x) = A_0 a_1(x) . \quad (7.4.5)$$

gegeben ist. Wird nun das punktförmige Objekt abgerastert, so verhält sich dieses wie eine Punktquelle, die sich am Ort x befindet und eine Amplitude $A_0 a_1(x)$ besitzt. Diese wird dann durch die Objektivlinse mit einer Vergrößerung V auf die Ebene der Lochblende abgebildet, so dass sie mit ihrem Zentrum bei $x' = -Vx$ erscheint. Das Objektiv soll die Amplitudenantwort $a_2(x'/V)$ in der Ebene der Lochblende haben. Die Amplitude in dieser Ebene ist daher $A_0 a_1(x) a_2[(x' - Vx)/V]$. An der Stelle $x' = 0$, an der sich die Lochblende befindet, ist die Amplitude dann $A_0 a_1(x) a_2(-x)$. Sind beide Linsen identisch, so ergibt sich die Amplitudenantwort zu $a^2(x)$ und für die Intensität zu $a^4(x)$. Setzen wir die Gleichung für eine beugungsbegrenzte Linse der numerischen Apertur NA ein, so ist $a(x) = 2J_1(k_0 x NA) / (k_0 x NA)$.

Um das Auflösungsvermögen zu analysieren, können wir nun das Rayleigh oder Sparrow-Kriterium für ein inkohärent beleuchtetes Objekt verwenden. Verwenden wir das Rayleigh-Kriterium, so sehen wir, dass wir keine Auflösungsverbesserung erhalten, da die Lage der Minima natürlich unverändert bleibt. Dieses Kriterium ist aber zu konservativ. Verwenden wir dagegen das Sparrow-Kriterium, so erhalten wir

¹³Wilson und Sheppard, 1984.

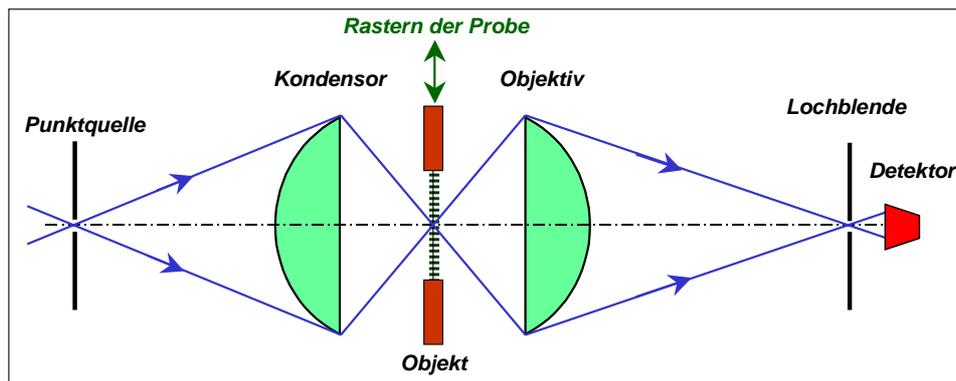


Abbildung 7.11: Strahlengang bei einem konfokalen Rastermikroskop.

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{3.1 \text{ NA}}, \quad (7.4.6)$$

da die zweite Ableitung von $[J_1(x)/x]^4$ eine Nullstelle bei $x = 1.08$ besitzt.

Zu beachten ist, dass nur ein Bruchteil des vom Objekt transmittierten Lichtes auf die Lochblende trifft, so dass wiederum ein Gewinn an Auflösung mit einem Verlust an Intensität bezahlt werden muss. Weiterhin kommt der volle Gewinn an Auflösung nur dann zum Tragen, wenn die Beleuchtung vollkommen inkohärent ist. Dies ist dann der Fall, wenn das Objekt als Reaktion auf das einfallende Licht fluoresziert. Sonst ist die Abbildung teilweise kohärent (Beleuchtung durch eine Punktquelle). Eine Hauptanwendung der konfokalen Rastermikroskopie ist deshalb die Fluoreszenzmikroskopie von biologischen Objekten, wo man einzelne Teile des Objekts mit einem Laser anregen kann und die am Anregungsort erzeugte Fluoreszenz mit großer räumlicher Auflösung beobachten kann.

Die konfokale Rastermikroskopie hat außer der Auflösungsverbesserung noch andere wichtige Eigenschaften, die in der Praxis häufig wichtiger sind. Wird das Objekt beispielsweise entlang der optischen Achse durch die Bildebene der Punktquelle bewegt, so wird es nicht mehr durch einen Punkt beleuchtet sondern durch eine ausgedehnte Quelle. Zusätzlich ist die zweite Stufe des Abbildungssystems nicht mehr richtig fokussiert, so dass insgesamt nur wenig Licht am Detektor ankommt. Das bedeutet, dass das Abbildungssystem eine geringe Fokustiefe hat. Dies kann man ausnutzen, um dreidimensionale Bilder eines Objekts zu erzeugen. Dies kommt vor allem bei biologischen Objekten häufig zur Anwendung.

7.4.3 Optische Nahfeldmikroskopie

Bei der optischen Nahfeldmikroskopie wird eine Lichtquelle der Ausdehnung $a \ll \lambda$ über die Probe gerastert. Das von der Probe gestreute Licht wird durch eine Linse gesammelt und auf einen Detektor fokussiert.¹⁴ Das Bild wird sequentiell bei der Abrasterung der Probe aufgebaut. Mit dieser Abbildungstechnik lässt sich eine räumliche Auflösung erreichen, die mehr als eine Größenordnung unterhalb der Wellenlänge des verwendeten Lichts liegt.

Da die Lichtquelle eine Ausdehnung besitzt, die klein gegenüber der Wellenlänge des verwendeten Lichts ist, ist die Welle im Bereich $z \ll \lambda$ evaneszent, weshalb eine Auflösung weit unterhalb der Wellenlänge erzielt werden kann (vergleiche hierzu (7.4.4)). Natürlich muss die Quelle bis auf einen Abstand $a \ll \lambda$ an das Objekt herangeführt werden, was einen entscheidenden Nachteil bedeutet. Die Situation ist ähnlich

¹⁴Eine ausführliche Beschreibung dieser Technik ist z.B. in Betzig *et al.*, Science **251**, 1468 (1991) und Science **257**, 189 (1992) gegeben, siehe auch Paesler und Moyer, *Near-field Optics*, Wiley Interscience, New York (1995).

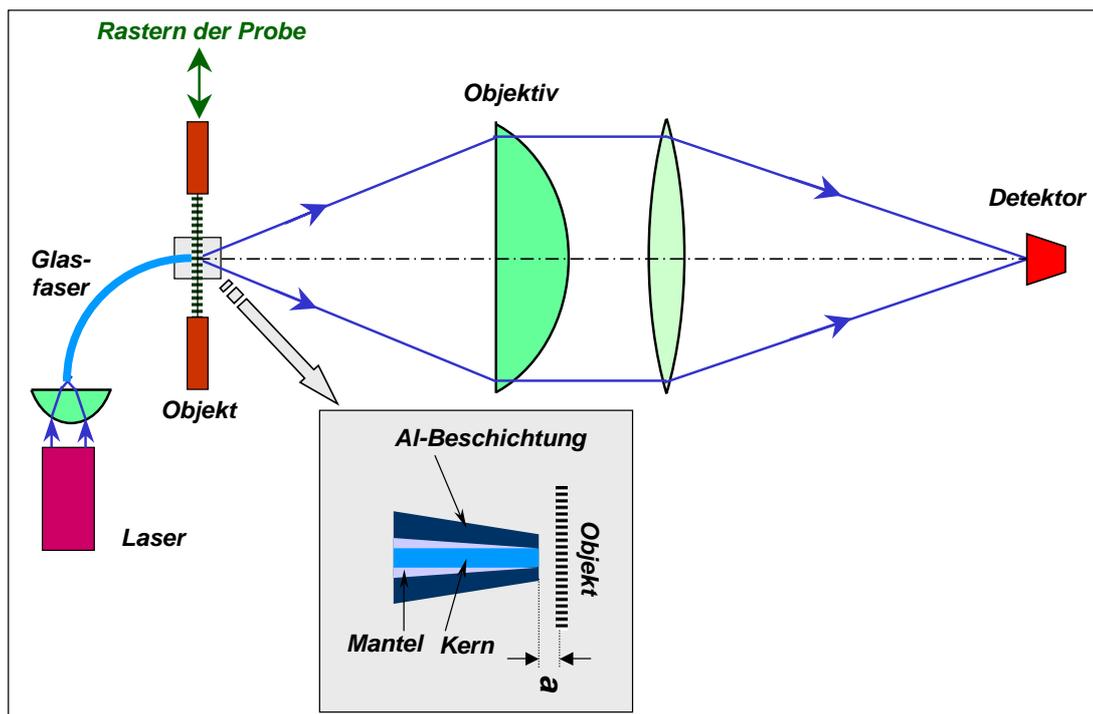


Abbildung 7.12: Schemadarstellung eines optischen Nahfeldmikroskops. Die Ausschnittsvergrößerung zeigt die Spitze der Glasfaser. Bei der Rasterung kann entweder die Glasfaser oder die Probe bewegt werden.

wie beim Rastertunnelmikroskop, das im Jahr 1985 von **Binnig** und **Rohrer** entwickelt wurde. Der daraufhin einsetzende enorme Fortschritt bei den Rastersondentechniken hat auch die Entwicklung der optischen Nahfeldmikroskopie stark befruchtet. Das erste Mikroskop verwendete Laserlicht, das durch eine winzige Lochblende fokussiert wurde. Neuere Versionen verwenden üblicherweise extrem dünne Glasfasern, die am Ende ausgezogen werden, oder kleine elektrolumineszente Kristalle. Insgesamt resultiert die Verwendung von evaneszenten Wellen wiederum in einer sehr schlechten Beleuchtungseffizienz.

Da bei der Nahfeldmikroskopie im Nahfeld gearbeitet wird, ist die Interpretation der erhaltenen Bilder nicht einfach und erfordert häufig einen erheblichen Rechenaufwand. Das Nahfeld der Beugungsverteilung, also die Fresnel-Beugung eines Objekts, hängt üblicherweise kritisch von der Entfernung d ab, da sich die Phasendifferenz der einzelnen Teilwellen noch stark mit d ändert.¹⁵

¹⁵O. Martini, *Nahfeldoptik mit atomarer Auflösung*, Phys. Blätter **51**, 67 (1997).
J. P. Fillard, *Near Field Optics*, World Scientific, Singapore (1996).

7.5 Holographie

Die Photographie stellt seit über 100 Jahren Methoden zur Verfügung, optische Information zu speichern und wieder sichtbar zu machen. Allerdings ist es schwierig, mit Hilfe der Photographie räumliche Eindrücke zu vermitteln. Mit Hilfe der Stereophotographie wird zwar der räumliche Eindruck einer Szenerie für einen bestimmten Blickwinkel vermittelt, insgesamt gelingt es aber nicht, die gesamte räumliche Information auf einen photographischen Film zu bannen. Der wesentliche Grund dafür liegt im photographischen Aufnahmeverfahren: Auf dem photographischen Film oder mit einer elektronischen Kamera wird nur die Intensität registriert.

Da die gesamte Information eines Objektes in seinem Beugungsmuster enthalten ist, ist es naheliegend zu fragen, ob nicht durch die Aufnahme des Beugungsmusters auf einer photographischen Platte die gesamte Information des Objektes gespeichert werden kann und anschließend daraus ein Bild des Objektes rekonstruiert werden kann. Das Problem besteht bei dieser Vorgehensweise aber wiederum im Verlust der Phaseninformation der verschiedenen Teile der optischen Fourier-Transformierten bei der Speicherung auf einer Photoplatte (vergleiche Abschnitt 7.1). Die grundlegende Lösungsidee für dieses Problem wurde bereits 1948 von **Denis Gabor** vorgeschlagen, hatte aber zu dieser Zeit nur begrenzten Erfolg. Erst durch die Entwicklung des Lasers ermöglichte die Umsetzung des von Gabor vorgeschlagenen Lösungsansatzes.¹⁶

Im folgenden sollen die elementaren Grundprinzipien der Holographie stark vereinfacht vorgestellt werden. Für eine weitergehende Diskussion muss auf Spezialliteratur zum Thema Holographie verwiesen werden.¹⁷ Bei der Holographie werden sowohl Phasen- als auch Amplitudeninformation mit einem intensitätsempfindlichen Material gespeichert. Dabei werden die Phänomene Interferenz und Beugung benutzt, die wir in Kapitel 5 ausführlich diskutiert haben.

7.5.1 Aufzeichnen eines Hogramms

Die Aufzeichnung eines Hogramms ist in Abb. 7.13a schematisch dargestellt. Man beleuchtet das abzubildende Objekt mit einer ebenen Welle monochromatischen Lichtes. Das vom Objekt gestreute und reflektierte Licht fällt dann auf eine photographische Platte. Würde man nur dieses Licht registrieren, so würde man eine mehr oder weniger gleichmäßige Schwärzung der Platte ohne Bildinformation erhalten. Die Phaseninformation des auf die Platte treffenden Lichtes wird nun dadurch registriert, indem man dieses Licht mit einer ebenen Referenzwelle überlagert. Als Referenzlicht dient dabei ein Teil der ebenen Welle, die über einen Spiegel auf die Photoplatte gelenkt wird. Damit es am Ort der Photoplatte zu Interferenzeffekten kommt, muss natürlich die Kohärenzlänge des verwendeten Lichtes größer sein, als alle bei der Beleuchtung der Platte vorkommenden Weglängendifferenzen. Man benötigt also Licht mit einer großen Kohärenzlänge, wie es erst durch die Erfindung des Lasers bereitgestellt werden konnte.¹⁸

¹⁶Gabor beschäftigte sich mit der Überwindung der Aberrationen bei der Elektronenmikroskopie. Die Auflösung von Elektronenmikroskopen wird nicht durch die Wellenlänge (etwa 0.01 nm) begrenzt, sondern durch die Aberrationen der Elektronenlinsen begrenzt. Diese können nicht korrigiert werden, weshalb man normalerweise Linsen mit sehr kleiner numerischer Apertur verwendet. Gabor wollte nun dadurch ein besseres Bild konstruieren, indem er das von Aberrationen verzeichnete Bild aufnimmt und dann eine optische Rekonstruktion vornimmt, wobei das optische System die Aberrationen der Elektronenlinsen korrigiert. Das Phasenproblem wurde von Gabor dadurch gelöst, dass er ein Objekt verwendete, das aus kleinen, undurchsichtigen Details auf einem transparenten Hintergrund bestand. Dieser Hintergrund liefert dann eine starke 0-te Ordnung und die Phasenvariationen des Beugungsmusters können als Intensitätsvariationen beobachtet werden. Die Intensität würde dabei am größten, wenn die Phasenschiebung null, und am kleinsten, wenn sie π betragen würde.

Denis Gabor erhielt für seine Arbeiten zur Holographie im Jahr 1971 den Nobelpreis für Physik.

¹⁷siehe z.B. **P. Hariharan**, *Optical Holography*, Cambridge University Press, Cambridge (1989).

¹⁸Tatsächlich wurden die ersten Hogramme mit gewöhnlichen Lichtquellen aufgenommen. Die Erfindung des Lasers machte das Aufnahmeverfahren aber wesentlich einfacher.

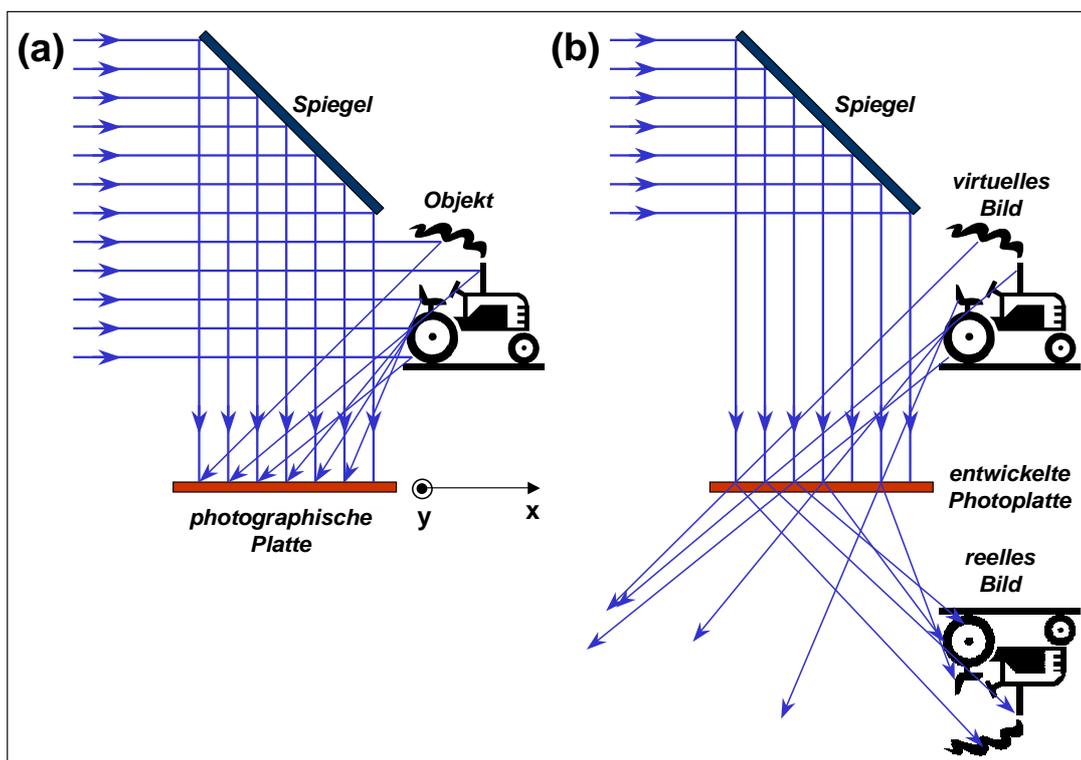


Abbildung 7.13: Schematische Darstellung der (a) Aufzeichnung und der (b) Rekonstruktion eines Hologramms.

Das Ergebnis einer auf diese Weise durchgeführten Belichtung der Photoplatte ist ein kompliziertes Streifenmuster.

Die mathematische Beschreibung des Aufnahmeverfahrens können wir auf folgende Weise durchführen: Wir gehen von einer Objektwelle $E_O(x,y)$ auf der Photoplatte aus, die durch stark ortsabhängige Amplituden- und Phasenanteile charakterisiert ist. Dagegen soll die Referenzwelle $E_R(x,y)$ eine konstante Amplitude und einen einfachen Phasenverlauf besitzen. Wir können also schreiben:

$$E_O(x,y) = E_{O,0}(x,y) \exp[i\omega t + i\phi_O(x,y)] \quad (7.5.1)$$

$$E_R(x,y) = E_{R,0} \exp[i\omega t + i\phi_R(x,y)] \quad (7.5.2)$$

Die Intensität auf der Filmebene berechnet sich dann zu

$$\begin{aligned} I(x,y) &= |E_O(x,y) + E_R(x,y)|^2 \\ &= E_{O,0}^2 + E_{R,0}^2 + E_{O,0}E_{R,0} \{ \exp[i\phi_O(x,y) - i\phi_R(x,y)] + \exp[-i\phi_O(x,y) + i\phi_R(x,y)] \} \\ &= E_{O,0}^2(x,y) + E_{R,0}^2 + 2E_{O,0}(x,y)E_{R,0} \cos[\phi_O(x,y) - \phi_R(x,y)] \quad (7.5.3) \end{aligned}$$

Da die Intensität der Objektwelle alleine einen relativ glatten Verlauf besitzen würde, ist die räumliche Variation des Intensitätsverlaufs des Gesamtbildes und damit die Plattenschwärzung im Wesentlichen durch den letzten Term in (7.5.3) zurückzuführen, der die Phasendifferenz zwischen Objekt- und Referenzwelle enthält. Normalerweise wird in der Holographie $E_{O,0}$ immer viel kleiner als $E_{R,0}$ gemacht, so dass in (7.5.3) der Term $E_{O,0}^2$ gegenüber $E_{R,0}^2$ vernachlässigt werden kann.

Dennis Gabor (1900 - 1979) – Nobelpreis für Physik 1971:

Dennis Gabor wurde am 5. Juni 1900 in Budapest geboren. Er studierte Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Berlin (Diplom: 1924, Dr.-Ing.: 1927). Er besuchte in dieser Zeit bereits zahlreiche Veranstaltungen an der Humboldt Universität, wo sich die Physik mit Einstein, Planck, Nernst und v. Laue auf einem Höhepunkt befand. Obwohl Elektrotechnik sein Beruf blieb, war seine Arbeit meist der angewandten Physik gewidmet. In seiner Doktorarbeit beschäftigte er sich mit der ersten schnelle Oszilloskopen. 1927 trat er in die Firma Siemens & Halske AG ein und machte dort als forschender Ingenieur seine ersten Erfindungen: die Quecksilber-Hochdrucklampe mit übersättigtem Dampf und die Molybdän-Banddichtung.

Im Jahr 1933 musste er vor den Nazis aus Deutschland fliehen. Danach war er in England für die Fa. Thomson-Houston tätig. 1947 entwickelte er das Prinzip der Holographie, das er ursprünglich mit der Intention ersann, das Auflösungsvermögen von Elektronenmikroskopen zu verbessern. Zunächst war er auf die Verwendung gefilterter Lichtquellen angewiesen und arbeitete mit dem Prinzip der so genannten in-line-Holographie. 1949 trat er in das Imperial College of Science and Technology, London, ein. Er wurde dort 1958 Professor of Applied Electron Physics (angewandte Elektronenphysik). Nach der Erfindung des Lasers durch Theodore Maiman im Jahr 1960 wurden im Jahr 1962 die Aufnahmetechniken für Hologramme durch Emmeth Leith und Juris Upatnieks (Teilung der Aufnahmeanordnung in getrennten Objekt - und Referenzstrahl) verbessert. Ebenfalls im Jahr 1962 wurde die Weißlichtholographie durch Uri N. Denisjuk erfunden. 1967 entstand das erste Hologramm einer Person und 1968 erfand Stephen A. Benton die Regenbogen-Transmissionsholographie. Die herausragenden Arbeiten von Dennis Gabor wurden 1971 durch die Verleihung des Nobelpreises für Physik für die Erfindung der Holographie anerkannt.

Dennis Gabor verstarb am 8. Februar 1979 in London. Er war Inhaber von über 100 Patenten.



7.5.2 Auslesen eines Hologramms

Entwickelt man die belichtete Photoplatte, so wird das Intensitätsbild in ein Transmissionsbild oder Phasenbild der Photoplatte übersetzt. Wir nehmen im Folgenden an, dass dieses Transmissionsbild $T(x,y)$ proportional zur Intensität des auf die Platte gefallenen Lichtes ist, d.h. $T(x,y) = \alpha I(x,y)$. Die Photoplatte wird nun von einer ebenen Auslesewelle $E_L(x,y)$ beleuchtet, die den gleichen Amplituden- und Phasenverlauf wie die Referenzwelle besitzen soll. Dies lässt sich am einfachsten dadurch realisieren, indem man die entwickelte Photoplatte wieder in die Aufnahmegeometrie einsetzt (siehe Abb. 7.13b). Durch die Beleuchtung der Photoplatte mit der Auslesewelle wird die Bildwelle $E_B(x,y)$ erzeugt.

Die mathematische Beschreibung ergibt dann:

$$E_L(x,y) = E_{R,0} \exp[i\omega t + i\phi_R(x,y)] \quad (7.5.4)$$

$$\begin{aligned} E_B(x,y) &= E_L(x,y) \cdot T(x,y) \\ &= E_{R,0} \exp[i\omega t + i\phi_R(x,y)] \cdot \alpha \\ &\quad \times \{ E_{O,0}^2(x,y) + E_{R,0}^2 + 2E_{O,0}(x,y)E_{R,0} \cos[\phi_O(x,y) - \phi_R(x,y)] \} . \end{aligned} \quad (7.5.5)$$

Man sieht, dass sich die Gesamtbildfeldstärke beim Verlassen der Photoplatte aus drei Termen zusammensetzt:

$$\begin{aligned}
E_B(x,y) &= E_1(x,y) + E_2(x,y) + E_3(x,y) \\
&= \alpha E_{R,0} (E_{O,0}^2(x,y) + E_{R,0}^2) \exp[i\omega t + i\phi_R(x,y)] \\
&\quad + \alpha E_{R,0}^2 E_{O,0}(x,y) \exp[i\omega t + i\phi_O(x,y)] \\
&\quad + \alpha E_{R,0}^2 E_{O,0}(x,y) \exp[i\omega t - i\phi_O(x,y) + 2i\phi_R(x,y)] .
\end{aligned} \tag{7.5.6}$$

Gemäß der Fraunhofer'schen Beugungstheorie werden die drei Feldverteilungen $E_1(x,y)$, $E_2(x,y)$ und $E_3(x,y)$ von der Ebene der Photoplatte "emittiert" und erzeugen dann die Gesamtfeldstärke an einem beliebigen Beobachtungspunkt hinter der Photoplatte durch Überlagerung.

Die drei Terme in (7.5.6) lassen sich wie folgt interpretieren:

1. Das Feld $E_1(x,y)$ ist proportional zum Auslesefeld, das heißt, es entspricht dem durch die mittlere Absorption der Photoplatte geschwächten Auslesefeld, das nicht abgelenkt oder gebeugt wurde. Es stellt also die nullte Beugungsordnung dar. Es enthält keine Information über das Objekt.
2. Das Feld $E_2(x,y)$ ist direkt proportional zum Objektfeld $E_O(x,y)$ in der Ebene der Photoplatte (bis auf den konstanten Vorfaktor ist die rekonstruierte Welle exakt gleich der Objektwelle). Es stellt die erster Ordnung dar. Dieses Feld breitet sich so wie die originäre Objektwelle aus, d.h. es verhält sich so, als ob es vom Ort des Objekts käme. Wenn man dieses Feld beobachtet, so erhält man dieselbe Bildinformation, als wenn man das Original durch das Fenster der Photoplatte sehen würde. Da sich aber beim Feld E_2 keine Lichtstrahlen hinter der Photoplatte schneiden, ist das beobachtete Bild virtuell. Da die komplette virtuelle Welle E_0 rekonstruiert wurde, sieht die Rekonstruktion aus jeder Blickrichtung wie das Objekt aus und erscheint deshalb dreidimensional.
3. Das dritte Feld E_3 besitzt gegenüber der Objektwelle eine negative Phase. Es stellt die -1. Ordnung dar. Es erzeugt hinter der Photoplatte ein reelles Bild, das verglichen mit dem Objekt spiegelverkehrt ist.

Die wichtigsten Eigenschaften des virtuellen Bildes lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Das Bild erscheint räumlich. Beim Blick auf das Hologramm muss man wie beim Betrachten des reellen Objekts auf verschiedene Bereiche scharf stellen. Ein weiterer Aspekt der räumlichen Bildwiedergabe ist die Möglichkeit, innerhalb der Begrenzung der Photoplatte hinter Objektteile blicken zu können.
- Aus jedem Bruchstück des Hologramms lässt sich das gesamte Bild rekonstruieren. Allerdings wird der Fensterausschnitt, durch den man betrachtet, kleiner. Durch die kleinere Ausdehnung des beugenden Hologramms wird die maximale Auflösung des Bildes und damit der gesamte Informationsgehalt reduziert.
- Der maximale Blickwinkel, unter dem man noch das virtuelle Bild betrachten kann, hängt vom Auflösungsvermögen der verwendeten Photoplatte ab. Je feinkörniger das Photomaterial, desto feinere Interferenzlinien können auf der Photoplatte gespeichert werden und desto größer werden die zugehörigen Beugungswinkel und damit mögliche Beobachtungswinkel.
- Verwendet man beim Auslesen eines Hologramms Licht einer anderen Wellenlänge, so wird der Abbildungsmaßstab verändert.

In den Jahren seit der Entdeckung der Holographie wurde eine Vielzahl neuer holographischer Methoden entwickelt. Der wesentliche Anstoß kam hierbei sicherlich durch die Erfindung des Lasers, der die Entwicklung leistungsfähiger, kohärenter Lichtquellen ermöglichte. Unter der Vielzahl der holographischen Methoden sei hier auf die holographische Datenspeicherung, die eine dreidimensionale Speicherung sehr großer Datenmengen bei kleinen Zugriffszeiten ermöglicht, und auf die Weißlichthologramme hingewiesen, bei denen das Bild mit jeder Weißlichtquelle ausgelesen werden kann.

Zusammenfassung

- Bei der Fraunhofer-Beugung ist die Amplitudenverteilung in der Beugungsebene gleich der Fourier-Transformierten der Verteilung in der Objektebene. Die optische Abbildung kann als zweifache Fourier-Transformation aufgefasst werden. Ein optische Bild stellt demnach die Fourier-Transformierte der Fourier-Transformierten des Objekts dar. Man spricht von Fourier-Optik.
- Strahlbegrenzungen in optischen Systemen führen dazu, dass stark gebeugte Strahlen, die durch große Raumfrequenzen (kleine Strukturen) der Objektfunktion erzeugt werden, abgeschnitten werden, was zu einer endlichen räumlichen Auflösung führt. Dieses Abschneiden kann durch einen Filterprozess beschrieben werden.
- Für ein inkohärent beleuchtetes Objekt ist die bei einer optischen Abbildung erzielbare kleinste Winkelauflösung durch die Beugung an der Strahlbegrenzung limitiert. Für einen Linsendurchmesser D ist sie gegeben durch

$$\theta_{\min} = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (\text{Rayleigh-Kriterium})$$

$$\theta_{\min} = 0.95 \frac{\lambda}{D} \quad (\text{Sparrow-Kriterium}) .$$

- Die Abbildung einer räumlichen Struktur durch Linsen kommt bei kohärenter Beleuchtung nur dann zustande, wenn zusätzlich zur 0.-ten Ordnung mindestens die erste Beugungsordnung vom Linsensystem durchgelassen wird (Abbesches Auflösungskriterium). Aus dieser Bedingung ergibt sich die Auflösungsgrenze

$$a \geq \frac{\lambda}{\text{NA}} = \frac{\lambda}{n \sin \theta}$$

mit der numerischen Apertur $\text{NA} = n \sin \theta$. Das heißt, die räumliche Auflösung wird in etwa durch die Wellenlänge des verwendeten Lichts bestimmt.

- Bei der Fourier-Optik kann durch Einbringen von Filtern, Phasenobjekten oder Blenden in die Beugungs- (Fourier-) Ebene eine gezielte Beeinflussung des Bildes eines Objekts erhalten werden (optische Filterung). Werden in der Beugungsebene nur niedrige Raumfrequenzen durchgelassen (Tiefpaß), so verschwinden im Bild feine Details. Umgekehrt (Hochpaß) werden feine Details verstärkt wiedergegeben.

Wichtige Beispiele sind die Dunkelfeldabbildung, die Schlierenmethode, die Phasenkontrastmikroskopie und die Beugungskontrastmethode.

- Mit der konfokalen Mikroskopie lässt sich außer der räumlichen Auflösung in der Fokalebene auch eine sehr hohe Auflösung senkrecht zur Fokalebene erzielen, wodurch dreidimensionale Bilder erzeugt werden können.
- Durch die Verwendung von evaneszenten Wellen in der Nahfeldmikroskopie lassen sich Auflösungen weit unterhalb der Wellenlänge des verwendeten Lichts erzielen.
- Beim Festhalten eines Bildes auf einer Photoplatte verliert man die Phaseninformation, da eine Photoplatte nur die Intensitätsverteilung aufnimmt. Man kann deshalb nicht das Beugungsbild eines Objekts auf eine Photoplatte aufnehmen und aus diesem anschließend das Bild des Objekts rekonstruieren.

- Bei der Holographie überlagert man die von einem Objekt gestreute Welle mit einer Referenzwelle. Die auf einer Photoplatte festgehaltene Intensitätsverteilung enthält dann auch Information über die relative Phasen zwischen Objekt- und Referenzwelle. Dadurch hat man Information über die räumliche Struktur des Objekts gespeichert. Die Beleuchtung des entwickelten Hologramms mit einer Rekonstruktionswelle liefert ein dreidimensionales Bild.