

## **Teil II**

# **Quantenphänomene**



## Kapitel 9

# Quantenphänomene und Strahlungsgesetze

Es war im Dezember 1900, als Max Planck bei der Erklärung des Spektrums der Schwarzkörperstrahlung die Quantisierung der elektromagnetischen Wellen gefunden hat. Mit seiner damals sehr gewagten Hypothese, dass die Energie des Strahlungsfeldes der Schwarzkörperstrahlung quantisiert ist, hat Planck eine Revolution in der Physik eingeleitet – das neue Gebiet der *Quantenphysik* war geboren. In der ersten Hälfte des vergangenen Jahrhunderts wurde dann die *Quantentheorie* entwickelt, die heute die Basis unserer modernen Technologie geworden ist. Obwohl Quantenphänomene in unserer Alltagswelt heute eine große Rolle spielen (z.B. im elektronischen Bauelementen), gibt es immer noch konzeptionelle Schwierigkeiten bei ihrem Verständnis. Diese sind nicht im Formalen begründet, sondern liegen in den philosophischen Ansatzpunkten der Quantentheorie. Der Schritt zwischen der Quantentheorie, die die Mikrowelt beschreibt, und der klassischen makroskopischen Welt ist einfach zu groß. Wir kennen aus unserer Alltagserfahrung nur unsere makroskopische Welt und haben deshalb Probleme die Quantenphänomene der mikroskopischen Welt zu verstehen.

Die moderne Physik ist ohne die Konzepte aus der Quantenphysik und die daraus entstehenden Anwendungen nicht vorstellbar. Dies gilt für die Optik in gleicher Weise wie für die Atom- und Teilchenphysik oder die Festkörperphysik. Die Quantenphysik beantwortet so wichtige Fragen wie: Warum leuchten die Sterne? Wie funktionieren mikroelektronische Bauelemente? Warum ist Kupfer ein elektronischer Leiter und Quarzglas ein Isolator? Wieso sind unsere chemischen Elemente in einem periodischen System angeordnet? Da die Quantenphysik auch für die Disziplinen Chemie, Biochemie bis hin zur Biologie wichtig ist, müssen wir sie verstehen um unser Leben zu verstehen. Der Ausgangspunkt für das neue Gebiet der Quantenphysik war ein Problem aus der Optik, nämlich die korrekte Beschreibung des Spektrums eines schwarzen Körpers. Wir wollen deshalb auch hier im Anschluss an die Diskussion der “klassischen Optik” eine Einführung in die grundlegenden Konzepte der Quantenphysik geben, die uns dann zur “Quantenoptik” führen wird. Dabei werden wir in diesem Kapitel einige Dinge diskutieren, die wir auf unserem jetzigen Kenntnisstand noch nicht richtig verstehen können, da die dazu notwendigen theoretischen Grundlagen erst in den Vorlesungen zur Quantenmechanik im Detail erarbeitet werden.

Die Radien von Atomen liegen im Ångström-Bereich ( $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ ). Dies entspricht der Wellenlänge von Röntgenlicht mit einer typischen Energie von einigen keV. Dringt man in den Bereich atomarer Dimensionen vor (sowohl hinsichtlich der Teilchengröße als auch der Wellenlänge), so beobachtet man einige völlig neuartige Eigenschaften physikalischer Systeme, die im Rahmen der klassischen Physik nicht erklärt werden können. Man nennt diese Phänomene *Quantenphänomene*. Aus ihrer Analyse können wir den Übergang von der bisher behandelten klassischen Physik zur Quantenphysik vollziehen. Die entsprechenden theoretischen Beschreibungen bezeichnet man als *Quantenmechanik* bzw. als *Quantenelektrodynamik*. Diese Theorien werden z.B. benötigt, um die Eigenschaften von freien Atomen sowie die

Bindung von Atomen zu Molekülen und Festkörpern zu verstehen. Ferner kann man mit Hilfe dieser Theorien kollektive Phänomene, die aus dem Verhalten vieler identischer Teilchen folgen, analysieren (z.B. Supraleitung, Eigenschaften von Halbleitern und Halbleiterbauelementen).

Tatsächlich treten Quantenphänomene nicht nur in mikroskopischen Systemen mit Abmessungen im atomaren Bereich auf, man kann sie aber in solchen Systemen besonders gut und eindeutig beobachten und studieren. Quantenphänomene sind z.B. auch ganz entscheidend, wenn man die elektronischen oder thermischen Eigenschaften<sup>1</sup> eines makroskopischen Festkörpers beschreiben will. Die klassische Physik versagt hier, weil Materie aus mikroskopischen Bestandteilen, den Atomen, aufgebaut ist, die für diese Eigenschaften von Bedeutung sind. Will man dagegen die Bewegung eines makroskopischen Festkörpers beschreiben, so ist die klassische Mechanik völlig ausreichend.

#### Zitate zur Quantenphysik:

**Richard Feynman 1965:** ``Früher konnte man in den Zeitungen lesen, es gebe nur zwölf Menschen, die die Relativitätstheorie verstanden. Das glaube ich nicht. .. Nachdem Einstein seine Theorie zu Papier gebracht und veröffentlicht hatte, waren es gewiss mehr als zwölf. Andererseits kann ich mit Sicherheit behaupten, dass keiner die Quantenmechanik versteht.``

**Murray Gell-Mann 1994:** ``Die Entdeckung der Quantenmechanik ist eine der größten Errungenschaften der Menschheit, aber auch eine der am schwersten zu begreifenden selbst für jene Wissenschaftler, die über Jahrzehnte hinweg tagtäglich mit ihr gearbeitet haben. Sie widerspricht unserer Intuition.``

## 9.1 Quantenphänomene – eine Einführung

Wir wollen in diesem Abschnitt versuchen, eine kurze Einführung in das Themengebiet der Quantenphysik und der Quantenphänomene zu geben, obwohl wir auf der Basis unseres jetzigen Kenntnisstandes (klassische Mechanik und Elektrodynamik) einige Dinge noch nicht richtig verstehen können. Trotzdem werden wir im Folgenden Quantenphänomene diskutieren, wobei wir uns häufig mehr auf eine *Beschreibung von Sachverhalten* beschränken müssen und weniger detaillierte Erklärungen liefern können. Die für ein tieferes Verständnis von Quantenphänomenen notwendigen theoretischen Grundlagen werden erst später in den Vorlesungen zur Quantenmechanik erarbeitet. Die Quantenmechanik ist eine Beschreibung des Verhaltens von Materie in seiner gesamten Breite, insbesondere im mikroskopischen Bereich auf einer atomaren Skala. Auf mikroskopischer Skala verhalten sich Objekte nicht so, wie wir es aus unserer Alltagserfahrung kennen. Sie verhalten sich nicht als Wellen, auch nicht als Teilchen, Billardkugeln, Massen an Federn oder irgendetwas anderes, was wir aus unserer direkten Erfahrung kennen.

Wir wollen zuerst einen kurzen Rückblick auf die historische Entwicklung der Optik machen. **Newton** war der Meinung, dass Licht aus Teilchen besteht. Doch dann wurde entdeckt (Experimente von **Huyghens** und **Fresnel**), dass sich Licht doch eher wie eine Welle beschreiben lässt. Später wurde dann in den 1920er Jahren gefunden, dass sich Licht wiederum in manchen Fällen doch wie ein Teilchen verhält (z.B. Entdeckung des Photoeffekts durch **Hallwachs**). Dies gilt in umgekehrter Weise auch für Elektronen, von denen man zunächst glaubte, dass sie sich wie Teilchen verhalten. Dann wurde allerdings entdeckt, dass

<sup>1</sup>Im Rahmen der klassischen Physik erwartet man zum Beispiel, dass die spezifische Wärme eines Isolators unabhängig von der Temperatur ist (Dulong-Petit'sches Gesetz). Tatsächlich beobachtet man aber bei tiefen Temperaturen ein  $T^3$ -Verhalten (Debye-Gesetz) der spezifischen Wärme. Dieses Verhalten kann nur quantenmechanisch (Quantisierung der Gitterschwingungen) erklärt werden.

sie sich in vielerlei Hinsicht wie Wellen verhalten. Wir könnten also sagen, dass sich Elektronen weder als Welle noch als Teilchen verhalten. Dies gilt für alle mikroskopischen Objekte (Elektronen, Protonen, Neutronen, etc.). Sie alle stellen *„Teilchenwellen“* oder wie immer wir sie auch bezeichnen mögen dar. Wir werden später einige Eigenschaften von Elektronen diskutieren. Was wir dabei lernen, kann direkt auf andere mikroskopische Objekte übertragen werden.

Da das Verhalten von mikroskopischen Objekten unserer Alltagserfahrung widerspricht, ist es sehr schwierig, sich daran zu gewöhnen und es erscheint uns zunächst als mysteriös. Dies ist verständlich, wenn man bedenkt, dass die menschliche Erfahrung und Intuition sich auf makroskopische Objekte bezieht. Wir wissen also, wie sich große Objekte verhalten, können das aber nicht auf mikroskopische Objekte übertragen. Deshalb müssen wir das Verhalten von mikroskopischen Objekten in einer eher abstrakten Art und Weise lernen und nicht durch Bezug auf unsere direkte Erfahrung. Wir werden jetzt direkt die grundlegenden Elemente des mysteriösen Verhaltens mikroskopischer Objekte angehen. Dabei diskutieren wir Beispiele, die auf keinen Fall klassisch erklärt werden können und in sich den Kern der Quantenmechanik beinhalten. Wir werden dabei das mysteriöse Verhalten nicht erklären können in dem Sinne, dass wir erklären wie es etwas funktioniert, wir werden vielmehr nur schildern, wie etwas funktioniert. Durch diese Schilderung werden wir mit den grundlegenden Besonderheiten der Quantenphysik vertraut werden.

### 9.1.1 Der Welle - Teilchen - Dualismus

Wir werden uns im Folgenden mit dem Quantenverhalten von Elektronen beschäftigen. Wir werden dazu das Verhalten von Elektronen einerseits mit dem vergleichen, dass man für klassische Teilchen wie z.B. Kugeln erwartet. Andererseits werden wir es mit dem Verhalten von Wellen wie z.B. Wasserwellen vergleichen.

#### Experiment mit klassischen Teilchen

Wir betrachten zunächst das Verhalten von klassischen Kugeln in einer Versuchsanordnung, wie sie in Abb. 9.1a gezeigt ist. Eine Kanone schießt Kugeln in Richtung eines Doppelspaltes ab. Die Spalte sind gerade so groß, dass die Kugeln hindurchpassen. Hinter dem Doppelspalt befindet sich ein fahrbarer Detektor, der misst, wie viele Kugeln an welcher Stelle ankommen. Wir können mit dieser Versuchsanordnung also die Wahrscheinlichkeit  $P(x)$  bestimmen, mit der eine von der Kanone abgeschossene Kugel an der Stelle  $x$  in der Detektorebene ankommt. Dabei berücksichtigen wir, dass eine Kugel auch an der Öffnung des Spalts gestreut werden kann und dadurch irgendwo in der Detektorebene ankommt. Das Ergebnis des Experiments ist in Abb. 9.1a durch die Wahrscheinlichkeit  $P_{12}$  dargestellt. Der Index 12 soll dabei darauf hinweisen, dass wir nicht wissen, durch welchen Spalt die Kugel geflogen ist. Man kann nun das Experiment wiederholen und dabei nacheinander Spalt 2 und Spalt 1 abdecken und somit die Wahrscheinlichkeiten  $P_1$  und  $P_2$  bestimmen.  $P_1$  und  $P_2$  sind dabei die Wahrscheinlichkeitsverteilungen in der Detektorebene für Kugeln die Spalt 1 bzw. Spalt 2 passiert haben. Vergleicht man die Wahrscheinlichkeiten  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_{12}$ , so stellt man fest dass

$$P_{12} = P_1 + P_2 \quad (9.1.1)$$

gilt. Das heißt, die Wahrscheinlichkeit  $P_{12}$ , die man erhält, wenn beide Spalte offen sind, ergibt sich gerade aus der Addition der Wahrscheinlichkeiten, die man bei nur einem geöffneten Spalt erhält. Auf der Basis unseres Wissens hinsichtlich der Interferenzerscheinungen von Licht, würden man das beobachtete Ergebnis als einen Hinweis auf die Abwesenheit von Interferenzerscheinungen werten.

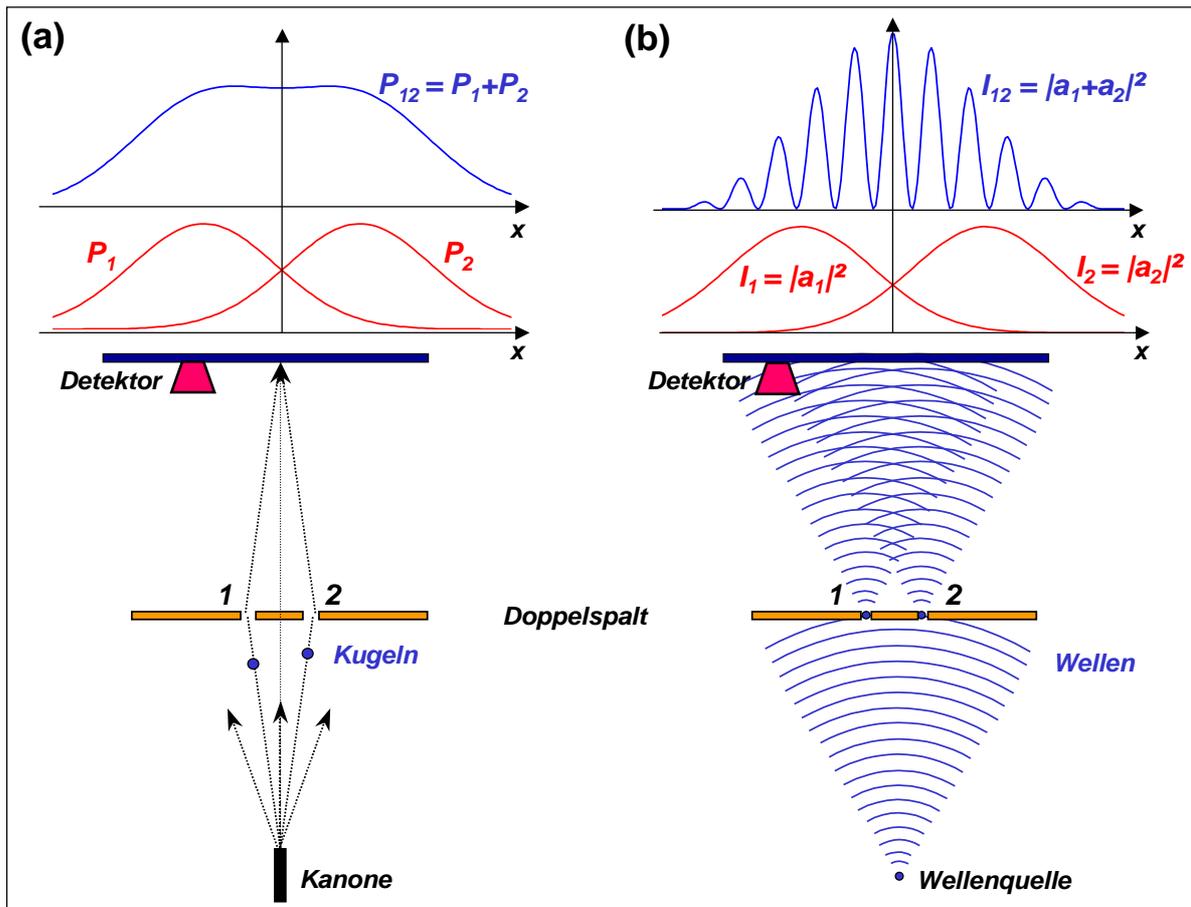


Abbildung 9.1: Interferenzexperiment mit (a) Kugeln und (b) Wasserwellen. Der bewegliche Detektor misst die Wahrscheinlichkeiten (a) bzw. Intensitäten (b) in der Beobachtungsebene für die Fälle, dass Spalt 1 (Index 1), Spalt 2 (Index 2) oder beide Spalte (Index 12) offen sind.

### Experiment mit Wellen

Wir betrachten nun ein äquivalentes Experiment mit Wasserwellen (siehe Abb. 9.1b). Die Kanone, die Kugeln aussendet, wird durch eine Quelle für Wasserwellen ersetzt. Das Ergebnis ist uns aus der Diskussion des Interferenzmusters eines Doppelspalts bereits gut bekannt (siehe Abschnitt 5.5.1 und 5.7.1). Der Detektor ist jetzt ein Instrument, das die Intensität der ankommenden Welle am Ort  $x$  misst. Die Intensitäten  $I_1$ ,  $I_2$  und  $I_{12}$ , die man misst, wenn Spalt 1, Spalt 2 oder beide Spalte offen sind, kann man als

$$\begin{aligned}
 I_1 &= |a_1|^2 \\
 I_2 &= |a_2|^2 \\
 I_{12} &= |a_1 + a_2|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2 + 2|a_1||a_2|\cos\varphi
 \end{aligned}
 \tag{9.1.2}$$

schreiben, wobei  $a_1$  und  $a_2$  die Amplituden der beiden Wellen durch Spalt 1 und Spalt 2 und  $\varphi$  die Phasendifferenz der beiden Wellen ist. Dieses Ergebnis ist uns von der Diskussion von Interferenzeffekten in Kapitel 5 wohlbekannt.

### Experiment mit mikroskopischen Teilchen

Bis jetzt haben wir unser Experiment mit klassischen Teilchen oder Wellen durchgeführt, was zu wohl-bekanntem Ergebnissen geführt hat. Wir wiederholen nun das oben beschriebene Experiment mit Elektronen, die mikroskopische Objekte darstellen. Dazu benutzen wir eine Elektronenkanone, die Elektronen in Richtung des Doppelspaltes aussendet. Die Elektronen werden hinter dem Doppelspalt mit Hilfe eines Elektronendetektors detektiert (z.B. Photomultiplier). Der Ausgang des Elektronendetektors wird an einen Lautsprecher gegeben, so dass die Ankunft eines jeden Elektrons durch ein Klicken akustisch wahrgenommen werden kann. Mit dem Elektronendetektor wird also die Wahrscheinlichkeit  $P_{12}(x)$  gemessen, dass ein Elektron bei geöffnetem Spalt 1 und 2 an der Stelle  $x$  hinter dem Doppelspalt ankommt.

Die erste interessante Beobachtung ist, dass das gemessene Klicken immer gleich laut ist.<sup>2</sup> Das heißt, es kommen keine "halben" Elektronen an. Wir können nun die mittlere Rate des Klickens diskutieren, also die mittlere Zahl der Elektronen, die pro Zeiteinheit an einer Stelle  $x$  ankommt (diese ist proportional zur Wahrscheinlichkeit  $P_{12}(x)$ ). Zuerst beobachtet man, dass für einen festen Ort  $x$  die Rate konstant ist. Dies erwartet man, wenn man eine Elektronenkanone verwendet, die einen konstanten Strom von Elektronen aussendet. Bewegt man allerdings den Detektor in  $x$ -Richtung, so beobachtet man, dass die Rate des Klickens periodisch größer und kleiner wird. Das bedeutet, dass die mittlere Anzahl der Elektronen, die an verschiedenen Orten  $x$  ankommt, sich periodisch entlang der  $x$ -Richtung ändert. Dies erinnert sehr stark an das für Wasserwellen beobachtete Interferenzmuster. In der Tat zeigt eine genaue Messung, dass die mittlere Zahl an einem Ort  $x$  ankommenden Elektronen (und damit die Wahrscheinlichkeit  $P_{12}$ ) die gleiche  $x$ -Abhängigkeit zeigt wie das Interferenzmuster eines Doppelspaltes (siehe Abb. 9.2a). Dies ist ein klarer Hinweis auf den Wellencharakter der Elektronen.

Obwohl die mittlere Rate des Klickens entlang der  $x$ -Achse stark variiert, bleibt die Lautstärke jedes einzelnen Klickens aber gleich. Das bedeutet, die mittlere Anzahl der Elektronen, die an verschiedenen Orten  $x$  ankommt, ändert sich zwar, es kommen aber überall Elektronen "gleicher Größe" oder in "gleichen Portionen" an. Diese Beobachtung erinnert uns natürlich stark an das obige Experiment mit den Kugeln. Hier ändert sich auch die mittlere Rate der ankommenden Kugeln, wenn man den Detektor in  $x$ -Richtung bewegt, die Größe der ankommenden Kugeln ist aber überall die gleiche. Dies ist ein klarer Hinweis auf den Teilchencharakter der Elektronen.

Unser Experiment mit Elektronen zeigt also, dass die Elektronen sowohl Teilchen- als auch Wellencharakter manifestieren. Wir wollen nun die in Abb. 9.2a gezeigten Messergebnisse weiter analysieren, um zu sehen, ob wir das Verhalten von Elektronen tatsächlich verstehen. Das erste, was wir gesehen haben, ist, dass am Detektor immer gleiche Portionen ankommen, die wir als Elektronen bezeichnen können. Daraus könnten wir schließen, dass diese Portionen entweder durch Spalt 1 oder durch Spalt 2 gegangen sind. Wir können also folgenden Vorschlag *A* machen:

**A: Jedes Elektron geht entweder durch Spalt 1 oder Spalt 2.**

Falls unser Vorschlag *A* richtig sein sollte, können wir die Elektronen in solche, die durch Spalt 1 und solche, die durch Spalt 2 gehen, klassifizieren. Deshalb müsste die von uns gemessene Gesamtwahrscheinlichkeit  $P_{12}(x)$ , dass wir am Ort  $x$  ein Elektron detektieren, das entweder durch Spalt 1 oder Spalt 2 gegangen ist, sich aus der Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten  $P_1$  und  $P_2$  ergeben. Diese können wir messen, indem wir nur jeweils einen Spalt öffnen. Das Ergebnis ist auch in Abb. 9.2a gezeigt. Das experimentelle Ergebnis zeigt ganz klar, dass

$$\text{für Elektronen:} \quad P_{12} \neq P_1 + P_2 \quad (9.1.3)$$

<sup>2</sup>Dies gilt nur dann, falls der zeitliche Abstand der ankommenden Elektronen genügend groß ist, so dass die Wahrscheinlichkeit für die gleichzeitige Ankunft von zwei Elektronen verschwindend klein ist.

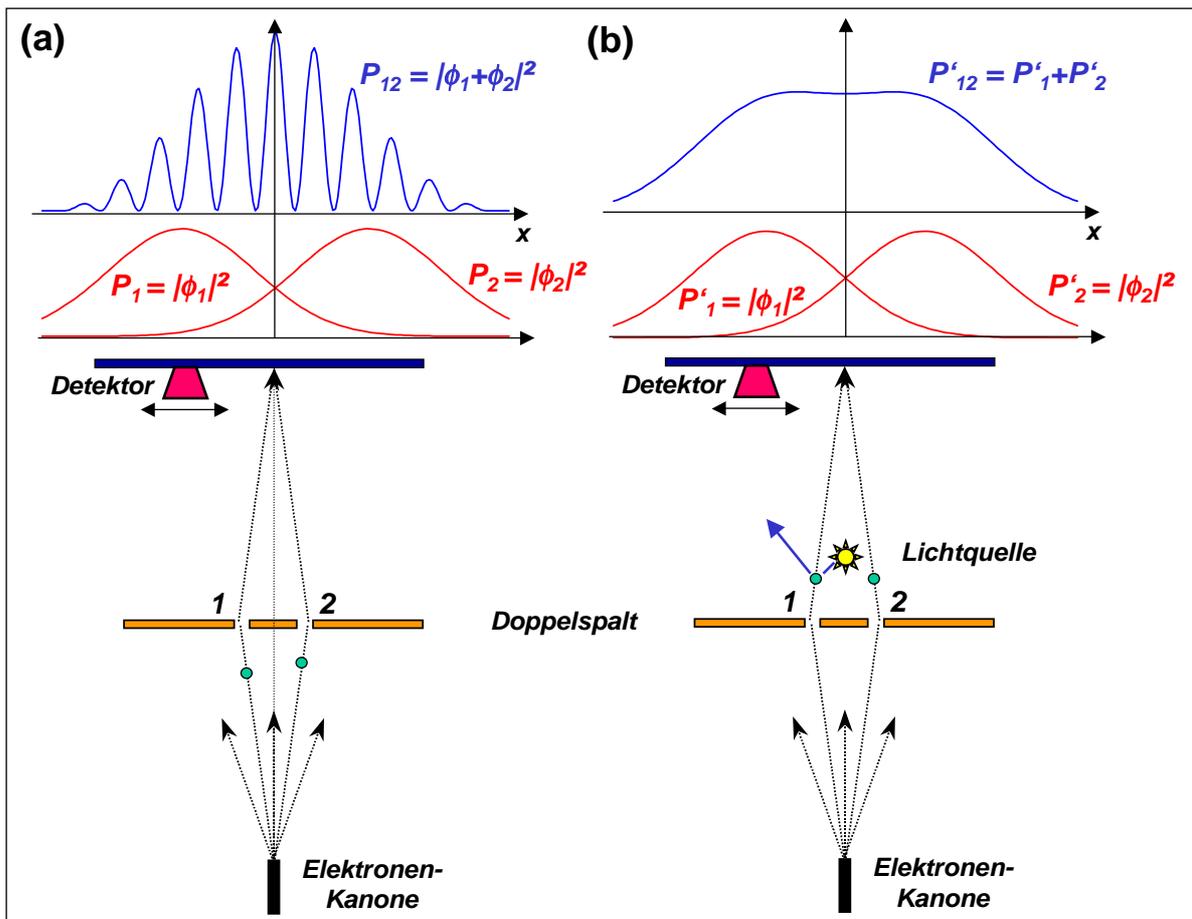


Abbildung 9.2: (a) Interferenzexperiment mit Elektronen. Der bewegbare Detektor misst die Wahrscheinlichkeiten, dass ein Elektron an die Stelle  $x$  in der Beobachtungsebene gelangt für die Fälle, dass Spalt 1 (Index 1), Spalt 2 (Index 2) oder beide Spalte (Index 12) offen sind. (b) Gleiches Experiment mit zusätzlicher Lichtquelle hinter dem Doppelspalt, um zu bestimmen, durch welchen Spalt des Elektron geflogen ist.

ist. Das bedeutet, Elektronen verhalten sich nicht wie klassische Teilchen, es treten Interferenzeffekte auf. Wie kann man sich aber diese Interferenzeffekte erklären?

Wir können natürlich unseren obigen Vorschlag *A* verwerfen und folgenden Vorschlag *B* machen:

*B*: Die Elektronen schlagen kompliziertere Wege ein, ja sie können sich sogar aufspalten und durch beide Spalte gehen.

Es stellt sich dann aber sofort die Frage, wieso die Elektronen dann immer in ganzen Portionen am Detektor ankommen. Man kann sich auch andere Szenarien für die von den Elektronen zurückgelegten Wege überlegen, man wird sich immer in Widersprüche verstricken. Insgesamt ist das für Elektronen erhaltene Messergebnis also sehr mysteriös und je mehr man es analysiert desto mysteriöser wird es.

Umso schwieriger die physikalische Interpretation des Messergebnisses ist, desto simpler ist deren mathematische Beschreibung. Die  $x$ -Abhängigkeit von  $P_{12}$  entspricht genau derjenigen von  $I_{12}$  aus dem Experiment mit Wasserwellen. Dies legt nahe, zwei komplexe Zahlen  $\phi_1$  und  $\phi_2$  einzuführen, die den Amplituden  $a_1$  und  $a_2$  im Wellenexperiment entsprechen. Wir können dann schreiben

$$\begin{aligned}
 P_1 &= |\phi_1|^2 \\
 P_2 &= |\phi_2|^2 \\
 P_{12} &= |\phi_1 + \phi_2|^2 .
 \end{aligned}
 \tag{9.1.4}$$

Die mathematische Beschreibung ist damit äquivalent zu der für Wasserwellen benutzten. Es ist schwer einzusehen, wie man ein so simples Ergebnis durch ein komplexes Spiel der Elektronen, die komplizierte Wege durch den Doppelspalt zurücklegen, erhalten kann.

Wir können daraus die folgende Schlussfolgerung ziehen: Die Elektronen kommen in festen Portionen, also wie Teilchen, an. Die Wahrscheinlichkeit für ihr Ankommen ist aber räumlich wie das Interferenzmuster von Wellen verteilt. In diesem Sinne verhalten sich also Elektronen einerseits wie ein Teilchen und andererseits wie eine Welle.

Da wir auf jeden Fall jetzt sagen können, dass die Zahl der Elektronen, die an der Stelle  $x$  ankommt, sich nicht aus der Summe der Elektronen, die durch Spalt 1 gehen, und denjenigen, die durch Spalt 2 gehen, ergibt, ist unzweifelhaft klar, dass der oben gemachte Vorschlag *A* falsch ist. Es ist also nicht wahr, dass Elektronen entweder durch Spalt 1 oder Spalt 2 gehen. Dies können wir durch das im nächsten Abschnitt geschilderte Experiment testen.

### Beobachtung von Elektronen

Wir führen jetzt ein Experiment ähnlich zum Doppelspaltexperiment mit Elektronen durch. Wir bringen jetzt aber hinter dem Doppelspalt eine Lichtquelle an. Durch Streuung des Lichts an der Ladung des Elektrons soll es uns jetzt möglich sein, zu bestimmen, durch welchen Spalt ein Elektron geflogen ist. Das heißt, wir setzen einen Spion ein, der hinter dem Doppelspalt sitzt und uns mitteilt, durch welchen Spalt die Elektronen geflogen sind. Jedesmal wenn wir ein Klicken des Detektors in der Beobachtungsebene hören, sehen wir auch einen kurzen Lichtblitz entweder in der Nähe von Spalt 1 oder 2, der uns sagt, durch welchen Spalt das Elektron geflogen ist. Führen wir das Experiment durch, so erhalten wir das in Abb. 9.2b gezeigte Ergebnis. Die Wahrscheinlichkeit  $P_{12}$  ist jetzt als Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten  $P_1$  und  $P_2$  gegeben. Das heißt, wenn wir wirklich nachschauen, durch welchen Spalt die Elektronen gegangen sind, stellen wir fest, dass die Elektronen entweder durch Spalt 1 oder Spalt 2 gehen und somit ist unser obiger Vorschlag *A* richtig (experimentell bestätigt).

Was ist also falsch an unserem oben gegebenen Argument, das klar gegen unseren Vorschlag *A* gesprochen hat. Um dies zu klären, gehen wir zurück zum Experiment. Für jede Detektorposition  $x$  zählen wir nun die Zahl der ankommenden Elektronen und bestimmen gleichzeitig, durch welchen Spalt sie gekommen sind. Wir erhalten dann die Wahrscheinlichkeiten  $P'_1$  und  $P'_2$  dafür, dass ein Elektron an einer bestimmten Detektorposition durch Spalt 1 bzw. Spalt 2 angekommen ist. Dies können wir für verschiedene Detektorpositionen durchführen, um die Kurven  $P'_1(x)$  und  $P'_2(x)$  zu erhalten. Das erhaltene Ergebnis ist nicht überraschend. Es stimmt mit dem Ergebnis  $P_1(x)$  bzw.  $P_2(x)$  überein, dass wir durch Abdecken jeweils eines Spalts erhalten haben. Dieses Ergebnis entspricht unserer Intuition. Wenn wir also die Elektronen beobachten, kommen sie durch die Spalte wie wir es erwarten. Wenn wir hier mit unserer Analyse stoppen würden, wären wir sicherlich zufrieden. Wir müssen nun aber noch die Wahrscheinlichkeit  $P'_{12}$  betrachten, die wir in dem modifizierten Experiment erhalten. Zu unserem Erstaunen finden wir jetzt  $P'_{12} = P_1 + P_2$ . Das heißt, obwohl es uns jetzt gelungen ist zu beobachten, welches Elektron durch welchen Spalt fliegt, ist jetzt unser altes Interferenzmuster  $P_{12}$  verschwunden und wir beobachten jetzt das Muster  $P'_{12}$ , das die Abwesenheit von Interferenzeffekten zeigt.

Wir können aus unseren Beobachtungen schließen, dass sich die Elektronen anders verhalten, wenn wir sie beobachten oder wenn wir sie nicht beobachten. Es stellt sich dann natürlich die Frage, ob die Elektronen sehr empfindlich auf die Streuung von Licht reagieren. Stören wir die Bewegung der Elektronen? Ein Ausweg könnte die Verringerung der Intensität der Lichtquelle sein. Reduzieren wir die Lichtintensität, so stellen wir fest, dass die von Elektron gestreute Lichtmenge nicht schwächer wird. Es ist vielmehr so, dass immer weniger Elektronen Licht streuen (einige passieren dann den Spalt unbeobachtet), dass aber diejenigen, die streuen, immer die gleiche Lichtmenge streuen. Wir sehen also, dass das verwendete Licht auch nur in bestimmten "Portionen" auftritt, die wir "Photonen" nennen. Unsere Überlegungen ergeben also das insgesamt enttäuschende Ergebnis, dass die Elektronen, die wir beobachten, immer die gestörten Elektronen sind. Insgesamt können wir sagen: *Falls die Elektronen nicht beobachtet werden, sehen wir Interferenzeffekte.*

Wir können uns nun fragen, ob es eine Möglichkeit gibt, die Elektronen zu beobachten, ohne sie zu stören. Wir haben in einem früheren Kapitel gelernt, dass Photonen einen Impuls  $p = \hbar k = h/\lambda$  haben. Wollen wir also die Elektronen so wenig wie möglich stören, so sollten wir Licht mit einer niedrigen Frequenz oder großen Wellenlänge verwenden, um  $p$  klein zu machen. Vergrößern wir also die Wellenlänge des verwendeten Lichts in unserem Experiment, so passiert zunächst nichts. Wir erhalten das gleiche Ergebnis. Ab einer bestimmten Größe der Wellenlänge erhalten wir dann aber ein Problem. Wir haben nämlich gelernt, dass die räumliche Auflösung bei einer optischen Beobachtung proportional zu  $\lambda$  ist. Das heißt, ab einer bestimmten Wellenlänge ist es uns nicht mehr möglich aufzulösen, durch welchen Spalt das Elektron geflogen ist. Und genau an dem Punkt, an dem wir nicht mehr sagen können, durch welchen Spalt das Elektron geflogen ist, stellen wir fest, dass die Wahrscheinlichkeit  $P_{12}$  wieder in  $P_{12}$  übergeht.

Wir haben also in unseren Experimenten festgestellt, dass wir das zur Beobachtung verwendete Licht nicht so wählen können, dass wir gleichzeitig messen können, durch welchen Spalt die Elektronen gehen und die Elektronen so wenig stören, dass sie noch das Interferenzmuster bilden. **Heisenberg** hat diese Beobachtung in der nach ihm benannten *Unschärferelation* festgehalten. Diese besagt folgendes:

Es ist unmöglich, ein Messgerät zu entwerfen, das feststellen kann, durch welchen Spalt ein Elektron fliegt ohne gleichzeitig dieses so stark zu beeinflussen, dass das Interferenzmuster zerstört wird.

Die Unschärferelation ist fundamental für die Quantenphysik und wird durch zahlreiche Experimente bestätigt. Falls es jemals gelingen sollte, in einem Experiment diese fundamentale Prinzip zu widerlegen, müssten wir die heutige Quantenmechanik als gültige Theorie zur Beschreibung unserer Natur verwerfen.

Wir können jetzt nochmals zu unserem Vorschlag A zurückkehren und fragen: Ist er nun richtig oder ist er nun falsch? Die einzige Antwort, die wir auf der Basis der oben diskutierten Experimente geben können ist, dass es eine bestimmte Art und Weise gibt, wie wir denken müssen, um uns nicht in Inkonsistenzen zu verstricken.

Abschließend sei noch die Frage gestellt, wieso wir keine Interferenzeffekte bei unserem Experiment mit den Kugeln beobachten, obwohl die Bewegung von jeglicher Materie doch durch Wellen beschrieben werden sollte. Die Antwort ist, dass die Wellenlänge der makroskopischen Kugeln so klein ist, dass wir die sehr feine Struktur des Interferenzmusters nicht mehr auflösen können. Wir sehen dann nur eine Art Mittelwert, der eine klassische Kurve darstellt.

### Experiment mit Photonen – Komplementarität

Wir könnten jetzt das gleiche Experiment statt mit Elektronen mit Photonen durchführen und würden genau dasselbe Ergebnis erhalten. Das Experiment mit Photonen beschreiben wir aber erst später in

### Niels Hendrick Bohr (1885 - 1962) – Nobelpreis für Physik 1922:

Niels Hendrik Bohr wurde am 7. Oktober 1885 in Kopenhagen geboren.

Er studierte ab 1903 an der Universität Kopenhagen, wo er 1909 diplomierte und 1911 promoviert wurde. Im Anschluss ging er an das Cavendish Laboratory in Cambridge, um bei Joseph Thomson Kernphysik zu studieren. Doch bereits im März 1912 begab er sich an die Universität Manchester, um mit Ernest Rutherford zusammenzuarbeiten. Hier erarbeitete er die theoretischen Grundlagen für das Bohr'sche-Atommodell. 1913 wurde er Dozent an der Universität Kopenhagen. In diesem Jahr erschien auch seine epochemachende Arbeit "Die Elektronenbahnen innerhalb des Atoms" mit der er die Aufmerksamkeit der wissenschaftlichen Welt erregte. Das damit geschaffene Atommodell war richtungweisend für die ganze weitere Entwicklung der Atomphysik. Von 1914 bis 1916 war er auf Einladung Rutherford's wieder in Manchester, danach ging er als Professor nach Kopenhagen zurück. 1918 stellte er das Bohr'sche Korrespondenzprinzip auf, welches besagt, dass die Quantenmechanik im Grenzfall klassisch-mechanischen Prinzipien entspricht.

1920 wird ihm das Institut für theoretische Physik in Kopenhagen eingerichtet, dem er zeitlebens als Direktor vorstand. 1921 entwickelt Bohr das "Aufbauprinzip" und liefert damit eine theoretische Erklärung der chemischen Elemente. Die äußeren Schalen der ring- bzw. schalenförmig angeordneten Elektronen bestimmen die chemischen Eigenschaften des Atoms. 1922 erhielt er für seine Forschungen über die Feinstruktur der Atome den Nobelpreis für Physik. Er beschäftigte sich mit der Messbarkeit der elektrodynamischen Feldgrößen, mit Fragen der Kernphysik und entwickelte unter anderem das so genannte Tröpfchenmodell des Kerns sowie eine Theorie zur Kernspaltung. 1943 musste Bohr, da er jüdische Vorfahren hatte, vor den Nazis nach Schweden fliehen. Von dort wurde er vom britischen Geheimdienst in die USA geholt, um unter dem Decknamen Nicholas Baker am "Manhattan-Projekt" in Los Alamos an der Entwicklung und Herstellung der Atombombe mitzuarbeiten. Nach Kriegsende kehrte er 1945 nach Kopenhagen zurück und nahm aktiv an der Gründung des Europäischen Zentrums für Kernforschung, CERN (Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire), in Genf teil. Mitte Juni 1950 trat Bohr mit einem offenen Brief an die Vereinten Nationen an die Öffentlichkeit. Er forderte darin einen freien Austausch aller wissenschaftlichen Informationen zwischen den Völkern, damit die aus den wissenschaftlichen Erkenntnissen gleichzeitig auftauchenden tödlichen Gefahren für die Zivilisation überwunden würden. 1957 erhielt Bohr für seine Engagement für eine friedliche Atompolitik den "U.S. Atoms for Peace Award".

Niels Bohr starb am 18. November 1962 in Kopenhagen.



Abschnitt 10.4, nachdem wir die Teilcheneigenschaften von Licht näher diskutiert haben. Insgesamt zeigt es sich, dass diese Interferenzerscheinungen bei Experimenten mit Photonen oder Elektronen nur dann entstehen, wenn nicht versucht wird, den Weg des einzelnen Elektrons oder Photons zu bestimmen. Wenn dieses Ziel verfolgt wird, so kommt es zu einer Auslöschung der Interferenzen. Dieses Prinzip der *Komplementarität* ist in der Anfangszeit der Quantentheorie sehr viel zwischen **Einstein** und **Bohr** diskutiert worden (siehe Abb. 9.3).

Das von Niels Bohr 1927 formulierte *Komplementaritätsprinzip* besagt folgendes:

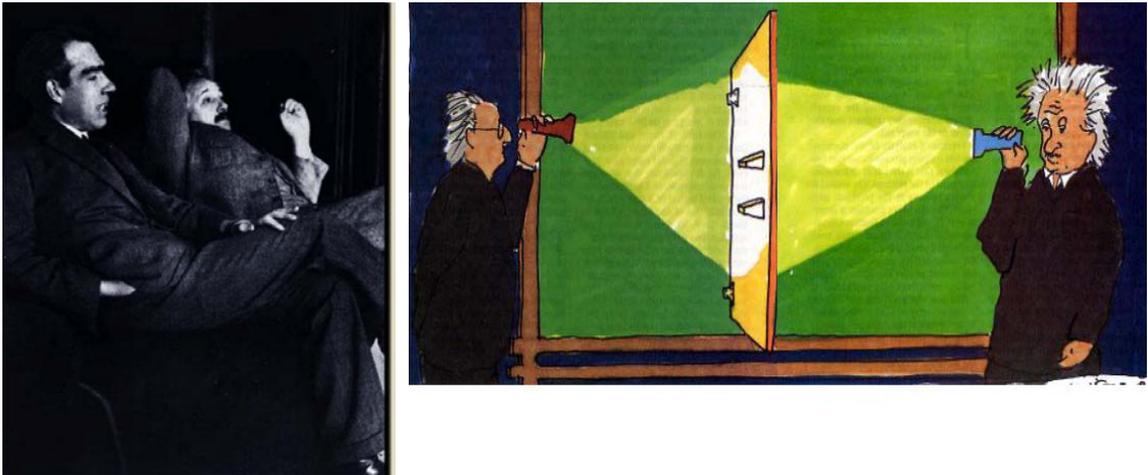


Abbildung 9.3: Diskussion von Bohr und Einstein zur Komplementarität.

In einem Experiment können niemals beide Eigenschaften des Lichts gleichzeitig beobachtet werden, sondern immer nur die eine oder die andere. Teilchen und Welle schließen sich gegenseitig aus, sie sind zueinander *komplementär*.

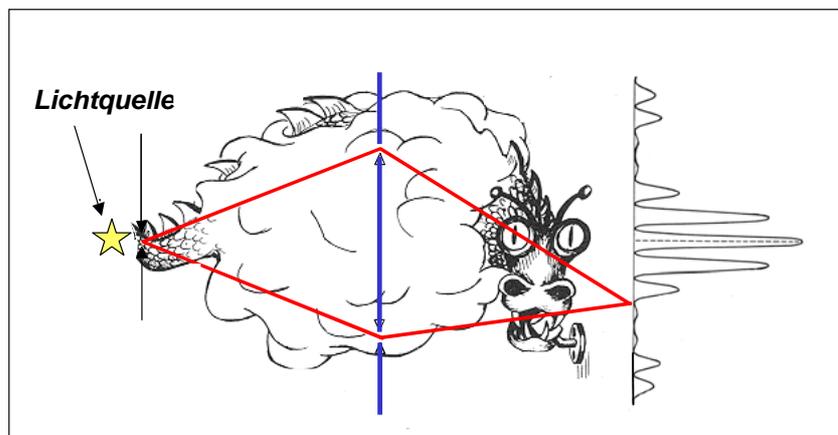


Abbildung 9.4: Der Wheeler'sche Drache.

Die Tatsache, dass auch nur ein Elektron oder Photon in der Lage ist, Interferenz zu zeigen, ist darauf zurückzuführen, dass dieses von der Anwesenheit beider Spalte weiß. Ein Bild von **Wheeler** (siehe Abb. 9.4) verdeutlicht sehr schön, wie man sich die Situation vorstellen muss. Das Photon verhält sich wie ein diffuser Drache, der einen scharfen Schwanz hat, der durch den Kollimationsspalt festgelegt ist, und außerdem einen scharfen Kopf, der in den Detektor beißt und dort ein lokalisiertes Signal hervorruft. Der Drache ist in der Mitte hinreichend diffus, dass er den Ort der beiden Spalte wahrnehmen kann.

Die Quantenphysik lässt somit auch zu, dass Interferenzen von Teilchen beobachtet werden, wenn der Weg, den das Teilchen läuft, im Experiment unbestimmt bleibt. Wir können deshalb bei Elektronen die gleiche Situation beobachten wie bei Photonen (vergleiche hierzu Abschnitt 10.4.2).

Ein Photon bzw. Elektron verhält sich also in Experimenten sowohl als Teilchen als auch als Welle. Elektronen und Photonen wissen beim Durchlaufen durch die Apparatur von der Existenz der beiden Spalte - dies ist ein typisches nichtlokales Verhalten. Es sollte hier erwähnt werden, dass auch Interferenzexperimente mit sehr schweren Molekülen, die aus 60 bis 70 Kohlenstoffatomen bestehen, beobachtet worden

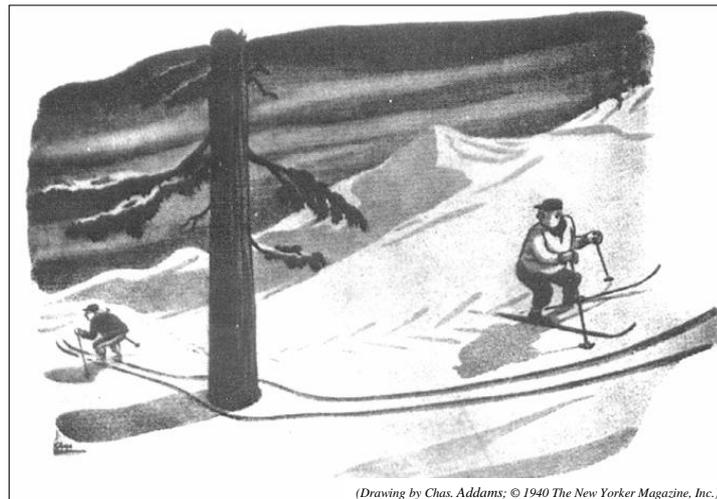


Abbildung 9.5: Karikatur zu Quanteneffekten bei makroskopischen Objekten (Drawing by Chas. Addams; ©1940 The New Yorker Magazine, Inc.).

sind. Die Quantenphysik funktioniert also auch noch beim Übergang zu größeren und massiveren Teilchen. Angesichts dieser Situation kann ein unbefangener Beobachter nur in Staunen versetzt werden, wie dies in einer Karikatur gezeigt wird, die vor einigen Jahren im Magazin “The New Yorker” veröffentlicht worden ist (siehe Abb. 9.5).

### 9.1.2 Grundprinzipien der Quantenmechanik

Wir wollen nun einige Schlussfolgerungen aus den vorangegangenen Diskussionen zusammenfassen. Wir benutzen dabei die Ausdrücke “ideales Experiment” und “Ereignis”. Unter einem idealen Experiment wollen wir ein Experiment verstehen, bei dem alle unbestimmten externen Einflüsse abgeschaltet sind. Unter Ereignis verstehen wir einen spezifischen Satz von Anfangsbedingungen und Endzuständen (z.B.: ein Elektron verlässt die Elektronenkanone, kommt am Detektor an und sonst passiert gar nichts).

Für unsere Zusammenfassung können wir folgendes festhalten:

1. Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis in einem idealen Experiment ist gegeben durch das Absolutquadrat einer komplexen Zahl  $\phi$ , die wir Wahrscheinlichkeitsamplitude nennen:

$$\begin{aligned}
 P &= \text{Wahrscheinlichkeit} \\
 \phi &= \text{Wahrscheinlichkeitsamplitude} \\
 P &= |\phi|^2 .
 \end{aligned}
 \tag{9.1.5}$$

2. Falls es für ein Ereignis mehrere alternative Möglichkeiten gibt, so ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude für das Ereignis durch die Summe der Wahrscheinlichkeitsamplituden der Einzelmöglichkeiten gegeben:

$$\begin{aligned}
 \phi &= \phi_1 + \phi_2 \\
 P &= |\phi_1 + \phi_2|^2 .
 \end{aligned}
 \tag{9.1.6}$$

3. Falls ein Experiment durchgeführt werden kann, dass es ermöglicht festzustellen, welche Alternative tatsächlich gewählt wurde, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis durch die Summe der Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Alternativen gegeben:

$$P = P_1 + P_2 . \quad (9.1.7)$$

Man kann sich nun trotzdem die Frage stellen, wie das ganze eigentlich funktioniert, welche Maschinerie steckt hinter diesen Gesetzen. Diese Frage ist allerdings mehr philosophischer Natur. Vom Standpunkt der Physik aus ist es so, dass niemand mehr erklären kann als wir hier "erklärt" haben.

Wir wollen hier auch auf einen ganz wichtigen Unterschied zwischen der klassischen Physik und der Quantenphysik hinweisen. In der klassischen Physik konnte z.B. die Bewegung eines Teilchens bei bekannten Anfangsbedingungen genau vorherberechnet werden (im Prinzip für alle Zeiten). In der Quantenphysik kann man dagegen nur *Wahrscheinlichkeiten vorhersagen*. Das heißt, in der Quantenphysik muss man das Ziel der klassischen Physik aufgeben, genau vorherzusagen, was unter bestimmten Umständen passieren wird.

### 9.1.3 Die Unschärferelation

**Werner Heisenberg (1901 - 1976):**

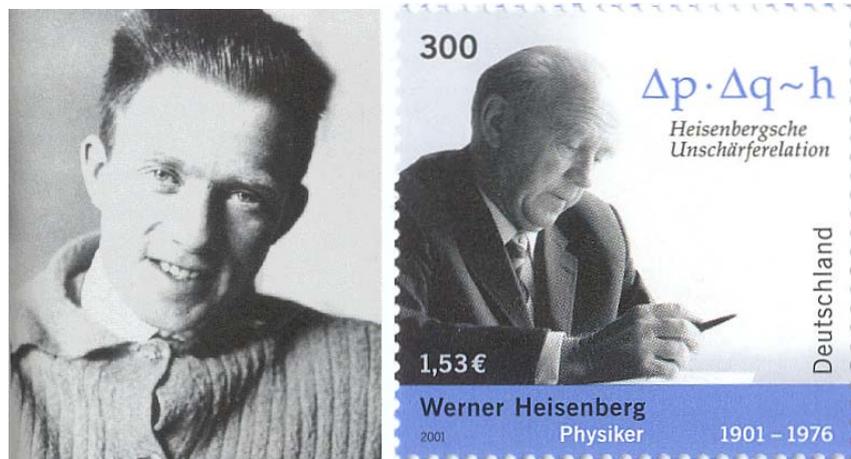


Abbildung 9.6: Links: Werner Heisenberg als 24-Jähriger im Jahr 1925. Rechts: Werner Heisenberg Briefmarke mit 51-jährigem Heisenberg.

Aus der Diskussion von Wellenpaketen<sup>3</sup> wissen wir bereits, dass die Ortskoordinate und der  $k$ -Vektor eines Wellenpakets nur mit einer Unschärfe  $\Delta x$  und  $\Delta k_x$  gemessen werden kann, wobei  $\Delta k_x \Delta x \geq 2\pi$  gilt (vergleiche (12.2.21)). Ein extremes Beispiel ist eine ebene Welle, bei der  $\Delta k_x \rightarrow 0$ , aber dafür  $\Delta x \rightarrow \infty$ . Das heißt, eine ebene Welle mit exakt definiertem Impuls  $p_x = \hbar k_x$  kann räumlich überhaupt nicht lokalisiert werden. Eine äquivalente Unschärfe besteht zwischen Frequenz und Zeit, wobei  $\Delta \omega \Delta t \geq 2\pi$  gilt.<sup>4</sup> Ein extremes Beispiel ist hier eine monochromatische Welle mit scharfer Frequenz ( $\Delta \omega \rightarrow 0$ ),

<sup>3</sup>siehe hierzu Abschnitt 2.3.3 und die noch folgende Diskussion in Abschnitt 12.2.3.

<sup>4</sup>siehe hierzu Gleichung (2.3.25) in Abschnitt 2.3.3 und die Diskussion zum Thema Kohärenz in Abschnitt 6.1.2, z.B. Abbildung 6.4.

die allerdings dann zeitlich konstant ist und deshalb, wie in Abb. 6.4 gezeigt wurde, auf der Zeitachse beliebig verschmiert ist ( $\Delta t \rightarrow \infty$ )

Beschreiben wir nun mikroskopische Teilchen mit Wellenpaketen, so ergeben sich in analoger Weise *Unschärferelationen* für alle kanonisch konjugierten Variablen eines Teilchens: Ort-Impuls, Energie-Zeit, Drehimpuls-Winkel. Diese nach **Heisenberg** benannten Unschärferelationen haben große Bedeutung für alle Messprozesse an Systemen von atomarer oder subatomarer Dimension.

**Heisenberg** formulierte das Unschärfe-Prinzip ursprünglich auf folgende Weise: Falls man in einem Experiment an irgendeinem Objekt die  $x$ -Komponente seines Impulses mit einer Genauigkeit  $\Delta p_x$  bestimmen kann, so ist es unmöglich, gleichzeitig seine  $x$ -Koordinate mit einer Genauigkeit besser als

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h \quad (9.1.8)$$

zu bestimmen. Hierbei ist

$$\begin{aligned} h = 2\pi\hbar &= 6.626\,068\,76(52) \times 10^{-34} \text{ J s} \\ &= 4.135\,667\,27 \times 10^{-15} \text{ eV} \quad (9.1.9) \end{aligned}$$

das *Planck'sche Wirkungsquantum*. Das so formulierte Unschärfe-Prinzip ist ein spezieller Fall der oben gegeben, allgemeineren Aussage, dass es in einem Experiment nicht möglich ist, festzustellen, welchen von alternativen Wegen ein Teilchen wählt ohne das Interferenzmuster zu zerstören. Viele Wissenschaftler haben sich seither Experimente überlegt, das Unschärfe-Prinzip zu überlisten. Alle sind bisher gescheitert.<sup>5</sup>

## 9.1.4 Beziehung zwischen Welle- und Teilchenaspekten

### Wahrscheinlichkeitswellenamplituden

Wir wollen in diesem Abschnitt den Zusammenhang zwischen den Wellen- und Teilchenaspekten diskutieren. Wir haben bereits im vorangegangenen Abschnitt gesehen, dass für die Beschreibung der Mikrowelt weder der Teilchen- noch der Wellenstandpunkt korrekt ist. Wenn wir im folgenden von Teilchen- und Wellenbild reden werden, so werden beide Sichtweisen nur Näherungen sein, die später bei einer genauen Behandlung der Quantenmechanik noch abgeändert werden. Wir tun dies trotzdem, da wir hier nicht direkt zum Stoff der Quantenmechanik gehen werden, sondern vielmehr eine Vorstellung von den Effekten bekommen wollen, die wir finden. Außerdem bezieht sich unser jetziger Kenntnisstand völlig auf das Teilchen- oder Wellenbild. Deshalb ist es nützlich, diese Bilder zu benutzen, um ein Verständnis dafür zu entwickeln, was unter bestimmten Umständen passiert, bevor wir ein komplettes mathematisches Verständnis der quantenmechanischen Amplituden entwickeln.

Wir haben bereits gelernt, dass die neue Art und Weise, die Welt im Rahmen der Quantenmechanik zu repräsentieren, die Angabe von Wahrscheinlichkeitsamplituden für alle möglichen Ereignisse ist. Falls ein Ereignis mit dem Empfang eines Teilchens verbunden ist, so können wir die Amplitude dafür angeben, das Teilchen an verschiedenen Orten zu verschiedenen Zeiten zu finden. Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zu finden ist dann durch das Absolutquadrat der Wahrscheinlichkeitsamplitude gegeben, die im Allgemeinen vom Ort und der Zeit abhängt.

<sup>5</sup>Es sei hier darauf hingewiesen, dass die Unschärferelation  $\Delta p_x \Delta x \geq h$  äquivalent zu  $\Delta k_x \Delta x \geq 2\pi$  ist, da der Impuls einer Welle, wie wir in Abschnitt 10.3 noch genau diskutieren werden, durch  $p = \hbar k$  gegeben ist. Die Energie-Zeit Unschärferelation  $\Delta E \Delta t \geq h$  ist äquivalent zu  $\Delta \omega \Delta t \geq 2\pi$ , da die Energie der Quanten eines Wellenfeldes durch  $E = \hbar \omega$  gegeben ist (siehe Abschnitt 9.2).

### Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858 - 1947) – Nobelpreis für Physik 1918:

Max Planck wurde am 23. April 1858 in Kiel geboren. Er besuchte das Maximilians-Gymnasium in München und legte dort mit 16 Jahren das Abitur ab. 1878 begann er das Studium der Physik an der Ludwig Maximilians Universität in München, welches er nach zwei auswärtigen Semestern bei Hermann von Helmholtz und Gustav Kirchhoff in Berlin, mit seiner Dissertation "über den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie" abschloss. Nach seiner Habilitation 1880 und einigen Jahren als Privatdozent in München nahm er 1885 eine außerordentliche Professur für mathematische Physik in Kiel an. 1889 folgte er einem Ruf an die Friedrich Wilhelm Universität in Berlin, um die Nachfolge Gustav Kirchhoffs anzutreten. Diese außerordentliche Professur wurde 1892 in einen Lehrstuhl für Theoretische Physik umgewandelt. 1894 wurde er ordentliches Mitglied der preußischen Akademie der Wissenschaften. Auf Grundlage des Entropiebegriffs fand Planck einen Ausdruck für die Energiedichte, welcher in der Lage war, die experimentell ermittelten Daten exakt wiederzugeben (Planck'sche Strahlungsformel). Im Zuge der theoretischen Begründung dieser Formel erkannte er, dass der Konstanten  $h$  eine grundlegende Bedeutung zukommen müsse und präsentierte das Planck'sche Wirkungsquantum am 14.12.1900 der Physikalischen Gesellschaft in Berlin.



Von 1905 bis 1909 und 1915/16 hatte er den Vorsitz der Physikalischen Gesellschaft. Ab 1912 war er beständiger Sekretär der physikalisch mathematischen Klasse der Preußischen Akademie der Wissenschaften. Für die Begründung der Quantentheorie erhielt Max Planck 1918 den Nobelpreis für Physik. 1921/22 war er erster Vorsitzender der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte. Trotz der Machtübernahme der Nationalsozialisten ergriff er unerschrocken das Wort zur Ehrenrettung seiner jüdischen Kollegen. Offizielle Verbote ungeachtet, organisierte er 1935 eine Gedenkfeier für den aus Deutschland vertriebenen und kurz danach verstorbenen jüdischen Kollegen Fritz Haber. In der Akademie der Wissenschaften würdigte er ausdrücklich die Leistungen des entlassenen Albert Einstein. Sein privates Leben war von Tragik überschattet. 1909 verlor er seine erste Ehefrau. Von den vier Kindern aus dieser Ehe überlebte keines den Vater. Sein erster Sohn und seine Zwillingstöchter fielen dem Ersten Weltkrieg zum Opfer. Sein jüngster Sohn Erwin wurde am 20. Juli 1944 zum Tode verurteilt. Im gleichen Jahr verlor Planck sein Haus in Berlin bei einem Bombenangriff. Seine Korrespondenz und Bibliothek fiel den Flammen zum Opfer. Mit seiner zweiten Frau musste er unter primitivsten Bedingungen in Göttingen neu beginnen. Hier verbrachte er seine letzten Lebensjahre. Die Kaiser Wilhelm Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften wurde ihm zu Ehren in Max-Planck-Gesellschaft umbenannt. Ein Gedenkstein mit der Aufschrift  $h = 6,62 \times 10^{-27}$  erg sec erinnert an den Begründer der Quantentheorie. Er verstarb am 4. Oktober 1947 in Göttingen.

Wir betrachten den Spezialfall, dass die Wahrscheinlichkeitsamplitude in Ort und Zeit wie  $\exp[-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$  variiert. Es stellt sich heraus, dass dies gerade dem klassischen Grenzfall eines Teilchens entspricht, dessen Energie, die durch

$$E = \hbar\omega \quad (9.1.10)$$

mit der Frequenz verbunden ist, und dessen Impuls, der über

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \quad |\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (9.1.11)$$

mit dem Wellenvektor verbunden ist, wir kennen.

Die beiden Gleichungen (9.1.10) und (9.1.11) geben die Beziehungen zwischen Teilcheneigenschaften  $E$  und  $\mathbf{p}$  und Welleneigenschaften  $\omega$  und  $\mathbf{k}$  an. Für die Beschreibung von klassischen Teilchen oder

Wellen benutzen wir immer jeweils nur  $E, \mathbf{p}$  oder nur  $\omega, \mathbf{k}$ . Mikroskopische Objekte haben aber sowohl Teilchen- als auch Wellencharakter und wir können diese strikte Trennung nicht mehr aufrecht erhalten. Wir werden später in Kapitel 10 die Teilcheneigenschaften von Licht und in Kapitel 12 die Welleneigenschaften von Materie diskutieren und die obigen, jetzt zunächst ohne genaue Begründung angegebenen Zusammenhänge ableiten.

Die klassische Vorstellung eines Teilchens (seines Ortes, Impulses, Drehimpulses, etc.), die wir so häufig benutzen, ist allerdings in bestimmter Hinsicht nicht zufriedenstellend. Falls die Wahrscheinlichkeitsamplitude, das Teilchen an einem bestimmten Ort zu finden, zum Beispiel durch  $\exp[-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$  gegeben ist, bedeutet dies, dass das Absolutquadrat dieses Ausdrucks konstant ist, dass also die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zu einer bestimmten Zeit an einem bestimmten Ort zu finden, für alle Orte und Zeiten gleich groß ist. Das heißt, wir wissen nicht, wo das Teilchen ist – die Unschärfe von Ort und Zeit ist beliebig groß. In gleicher Weise ist die klassische Vorstellung einer Welle (seines Wellenvektors, Frequenz, Drehimpulses, etc.) in bestimmter Hinsicht nicht zufriedenstellend. Sind nun Ort und Zeit gut bekannt, ist die Ortsunschärfe  $\Delta x$  und die Zeitunschärfe  $\Delta t$  klein. Die Welle ist dann in Raum und Zeit gut lokalisiert, d.h. die Wahrscheinlichkeit, die Welle außerhalb eines Intervalls  $\Delta x, \Delta t$  zu finden, ist null. Wir wissen also genau, wo die Welle ist – die Unschärfe von Frequenz und Wellenvektor ist damit beliebig groß.

Als Mittelweg zwischen den gerade diskutierten Extremfällen werden wir zur Beschreibung von mikroskopischen Objekten Wellenpakete benutzen, deren Ausdehnung in Raum und Zeit  $\Delta x$  und  $\Delta t$  beträgt. Aus der Diskussion von Wellenpaketen wissen wir bereits, dass die Ortskoordinate  $x$  und der Wellenvektor  $k_x$  eines Wellenpakets nur mit einer Unschärfe  $\Delta x \Delta k_x \geq 2\pi$  und die Zeitkoordinate  $t$  und die Frequenz  $\omega$  ebenso nur mit einer Unschärfe  $\Delta t \Delta \omega \geq 2\pi$  gemessen werden kann. Je mehr wir als eine Lokalisierung in Raum oder Zeit vornehmen, umso größer wird die Unschärfe im Wellenvektor und der Frequenz. Die extremen Beispiele sind wiederum einerseits  $\Delta k_x, \Delta \omega \rightarrow 0$ , aber dafür  $\Delta x, \Delta t \rightarrow \infty$  und andererseits  $\Delta k_x, \Delta \omega \rightarrow \infty$ , aber dafür  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ . Der erste Fall entspricht einer klassischen Welle, der zweite einem klassischen Teilchen.

### Beispiel: Die Größe eines Atoms

Mit Hilfe der Beziehungen (9.1.10) und (9.1.11) und der Unschärferelation können wir die Größe eines Atoms abzuschätzen. Wir betrachten hierzu ein Wasserstoffatom. Nehmen wir an, dass der mittlere Abstand des Elektrons vom Kern  $a$  ist, so können wir diesen Abstand mit Hilfe der Unschärferelation und Minimierung der Gesamtenergie bestimmen. Aus der Unschärferelation ergibt sich eine Impulsunschärfe  $\hbar/a$ . Das Elektron kann also nicht stillstehen, sondern hat vielmehr einen mittleren Impuls  $p \approx \hbar/a$ .<sup>6</sup> Damit erhält man die kinetische Energie  $p^2/2m = \hbar^2/2ma^2$ . Die potentielle Energie beträgt  $-e^2/4\pi\epsilon_0 a$ . Die Gesamtenergie ist damit

$$E = \frac{\hbar^2}{2ma^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} . \quad (9.1.12)$$

Das Minimum der Gesamtenergie ergibt sich aus  $dE/da = 0$  zu

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} = 0.52918 \text{ \AA} . \quad (9.1.13)$$

<sup>6</sup>Unsere Abschätzung ist bis auf Faktoren der Größenordnung  $2\pi$  richtig. Um den richtigen Wert des Atomradius zu erhalten, setzen wir  $p = \hbar/a$  statt  $p = h/a$ .

Dieser Abstand wir als *Bohr'scher Radius* bezeichnet. Wir haben also aus dieser einfachen Abschätzung gelernt, dass die typische Größe von Atomen im Å-Bereich liegt. Dies ist erstaunlich, da wir bis jetzt eigentlich gar nichts über Atome wissen.<sup>7</sup>

Setzen wir den Bohr'schen Radius in den Ausdruck für die Gesamtenergie ein, so erhalten wir

$$E_0 = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 2a_0} = -\frac{me^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2} = -13.6 \text{ eV} . \quad (9.1.14)$$

Diese negative Energie bedeutet, dass das an den Kern gebundene Elektron eine geringere Gesamtenergie besitzt, als wenn es frei wäre. Das heißt, es ist gebunden, da es Energie kostet, es vom Kern zu entfernen. Die Energie von 13.6 eV wird *Rydberg-Energie* genannt.

Wir können jetzt also verstehen, wieso sich das negative geladenen Elektron nicht noch näher dem positiv geladenen Kern nähert, was im Rahmen einer klassischen Betrachtungsweise ja passieren sollte. Tut dies das Elektron, so wird die Ortsunschärfe kleiner, wodurch die Impulsunschärfe und damit die kinetische Energie ansteigt. Dieser Anstieg überwiegt den Gewinn an elektrostatischer Energie, wodurch sich ein Gleichgewichtsabstand einstellt.

### Energieniveaus von Atomen

Wir haben gerade die Energie des Grundzustands eines Wasserstoffatoms abgeleitet. Es zeigt sich, dass Elektronen nicht nur diesen Grundzustand mit Energie  $E_0$  einnehmen können, sondern auch angeregte Zustände mit den Energien  $E_1, E_2, E_3$  etc. (eine genaue Diskussion erfolgt im Rahmen von Physik IV). Falls sich ein Elektron in einem dieser Anregungszustände befindet, so wird es nach einer bestimmten Zeit in einen Zustand mit geringerer Anregungsenergie oder den Grundzustand übergehen. Bei diesem Vorgang strahlt es Energie in Form von Licht ab. Die Frequenzen des Lichts, die bei den verschiedenen Übergängen frei werden, sind gegeben durch

$$\hbar\omega_{ij} = E_j - E_i . \quad (9.1.15)$$

Diese Frequenzen sind für jede Atomsorte charakteristische Frequenzen und bilden die Spektrallinien eines Atoms. Interessant ist dabei, dass man, falls es die Frequenzen  $\omega_j$  und  $\omega_{jk}$  im Spektrum gibt, immer auch eine Frequenz  $\omega_{ik} = \omega_{ij} + \omega_{jk}$  im Spektrum finden kann. Dies wird als *Ritz'sches Kombinationsprinzip* bezeichnet.

Die verschiedenen Frequenzen  $\omega_j$  kann man in einem Experiment leicht nachweisen, indem man das von angeregten Atomen einer Sorte ausgesandte Licht spektral zerlegt (z.B. mit einem Gitterspektrometer). Man kann hierzu z.B. eine Quecksilber-Hochdrucklampe nehmen, in der sich angeregte Hg-Atome befinden. Das von dieser Lampe abgestrahlte Licht enthält dann die für Hg charakteristischen Spektrallinien.

<sup>7</sup>Von einem klassischen Standpunkt aus könnten Atome gar nicht existieren, da die Elektronen eine beschleunigte Bewegung ausführen und somit ständig Energie abstrahlen sollten, wodurch sie in den Kern stürzen würden.

### 9.1.5 Zusammenfassung

Wir wollen nun unsere einführenden Bemerkungen abschließen und kurz die zentralen neuen Eigenschaften quantenmechanischer Systeme zusammenfassen:

#### 1. Wellen zeigen Teilchencharakter

Elektromagnetische Strahlung mit einer Wellenlänge  $\lambda$  verhält sich wie ein System von Teilchen mit der Energie  $E = h\nu = \hbar\omega$ , dem Impuls  $p = \hbar k = \hbar 2\pi\nu/c = E/c$  und dem Drehimpuls  $L = h/2\pi$ . Hierbei ist  $h$  das Planck'sche Wirkungsquantum,  $c$  die Lichtgeschwindigkeit und  $\nu = \omega/2\pi$  die Frequenz der Strahlung. Wir nennen die Teilchen *Photonen*. Der Teilchencharakter der Strahlung tritt umso stärker zu Tage, je kürzer die Wellenlänge ist. Strahlung wird nur in Quanten der Energie  $h\nu$  emittiert und absorbiert. Diese von **Max Planck** aufgestellte Quantenhypothese wird in Abschnitt 9.2 noch näher diskutiert. Mit Hilfe dieses Postulats gelang es **Albert Einstein** im Jahr 1905, experimentelle Ergebnisse zur Wechselwirkung elektromagnetischer Strahlung mit Materie, den *Photoeffekt*, richtig zu deuten. Der Teilchencharakter von Wellen wird noch ausführlicher in Kapitel 10 diskutiert.

#### 2. Teilchen zeigen Wellencharakter

Mikroskopische Teilchen zeigen Eigenschaften, die wir aus der Physik der Wellen kennen. Als Konsequenz dieses Wellencharakters ergeben sich z.B. Interferenzeffekte. Typische Beispiele für Interferenzeffekte von Teilchenstrahlen sind die Beugung von Elektronen und Neutronen an den regelmäßig angeordneten Atomen eines Festkörpers.

Die Beziehung zwischen Teilchen- und Wellenaspekten wird durch die Gleichungen<sup>8</sup>

$$E = \hbar\omega = h\nu \quad (9.1.16)$$

und<sup>9</sup>

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} = \frac{h}{\lambda} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \quad |\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (9.1.17)$$

beschrieben. Die räumliche Lokalisierung eines Teilchens wird durch ein räumlich lokalisiertes Wellenpaket beschrieben, wie wir es in der klassischen Optik bereits diskutiert haben. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Teilchens entspricht der Gruppengeschwindigkeit des Wellenpakets. Der Wellencharakter von Teilchen wird ausführlich in Kapitel Materiewellen diskutiert.

#### 3. Die Unschärferelationen

Aus der Diskussion von Wellenpaketen wissen wir, dass die Ortskoordinate und der  $k$ -Vektor eines Wellenpakets nur mit einer Unschärfe  $\Delta x$  und  $\Delta k_x$  gemessen werden kann. Gleiches gilt für die Zeit und die Frequenz. Ein extremes Beispiel ist eine ebene monochromatische Welle, für die  $\Delta k_x, \Delta\omega \rightarrow 0$ , aber dafür  $\Delta x, \Delta t \rightarrow \infty$  gilt. Das heißt, eine ebene Welle mit exakt definiertem Wellenvektor und Frequenz kann räumlich und zeitlich überhaupt nicht lokalisiert werden. Beschreiben wir nun mikroskopische Teilchen mit Wellenpaketen, so ergeben sich in analoger Weise *Unschärferelationen* für die kanonisch konjugierten Variablen eines Teilchens: Ort-Impuls, Energie-Zeit, Drehimpuls-Winkel. Diese nach **Heisenberg** benannten Unschärferelationen haben große Bedeutung für alle Messprozesse an Systemen von atomarer oder subatomarer Dimension.

<sup>8</sup>Um die Beobachtung des Wellencharakters von Teilchen zu deuten, stellte **Louis de Broglie** im Jahr 1924 die Hypothese auf, dass der Wellencharakter von Teilchen formal durch die gleiche Beziehung zwischen Gesamtenergie  $E$ , Frequenz  $\nu$ , Impulsvektor  $\mathbf{p}$  und Wellenvektor  $\mathbf{k}$  beschrieben werden kann, wie beim Licht.

<sup>9</sup>Diese Beziehung wird als *de Broglie Beziehung* bezeichnet.

#### 4. Bewegungsgleichungen und Quantisierung der Energieeigenwerte

Die Eigenschaften von mikroskopischen Systemen erhält man durch Lösung von Bewegungsgleichungen. Ohne auf die Details einzugehen, unterscheidet man zwischen *Schrödinger-Gleichung*, *Dirac-Gleichung* und *Klein-Gordon-Gleichung*, je nachdem, welche Systeme man analysieren will und welche Energien involviert sind. Wir werden uns im Folgenden nur mit der Schrödinger-Gleichung befassen.

Die Schrödinger-Gleichung ist eine zeitabhängige Differentialgleichung im Orts- bzw. Impulsraum. Die Lösung dieser Gleichung mit geeignet zu wählenden, physikalisch sinnvollen Randbedingungen ergibt *diskrete Energieniveaus* für gebundene Zustände. Wir nennen dies eine Quantisierung der Energie-Eigenwerte. Sie tritt immer dann auf, wenn die De Broglie Wellenlänge eines Teilchens eines in einem Potenzial gebundenen Teilchens mit der räumlichen Dimension des Potenzials zusammenpasst.

Wir werden in den folgenden Abschnitten die hier aufgezählten Phänomene weiter diskutieren und versuchen sie zu erklären.

## 9.2 Die Emission von Licht

### 9.2.1 Die Quantisierung der elektromagnetischen Feldes

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts wurde deutlich, dass die klassische Physik nicht alle bekannten physikalischen Phänomene erklären konnte. Es bedurfte deshalb eines grundlegend neuen Konzepts, des *Konzepts der Quantisierung*, um zu einer schlüssigen Erklärung experimenteller Beobachtungen zu kommen. Heute wissen wir, dass in der mikroskopischen Welt viele Größen nur in bestimmten *elementaren Portionen* oder ganzzahligen Vielfachen dieser elementaren Portionen vorkommen. Wir sagen dann, dass diese Größen *quantisiert* sind und wir bezeichnen die elementaren Portionen als *Quanten* einer Größe!<sup>10</sup> Wir werden das Konzept der Quantisierung jetzt anhand der elektromagnetischen Strahlung eines schwarzen Körpers einführen.

#### Die Ultraviolett-Katastrophe

Ende des 19. Jahrhunderts war eines der am meisten diskutierten Probleme das elektromagnetische Spektrum eines Hohlraumes. Wir betrachten dazu einen würfelförmigen, reflektierenden Hohlraum mit Seitenlänge  $L$ , der aus elektrisch gut leitendem Material besteht. Jede elektromagnetische Welle, die die Randbedingung  $\mathbf{E}_{\parallel} = 0$  erfüllt, stellt eine der Grundmoden des Hohlraumes dar. Solche Moden können leicht gefunden werden, z.B. haben stehende Wellen der Form

$$E_y = \cos k_z z \cos k_x x e^{-i\omega t} \quad (9.2.1)$$

Nullstellen in den Ebenen bei  $x = \pm L/2$ ,  $z = \pm L/2$ , wobei  $Lk_x = l\pi$  und  $Lk_z = n\pi$  erfüllt sein muss. Hierbei sind  $l$  und  $n$  ungerade ganze Zahlen. Es gibt entsprechende Sinuslösungen mit geraden ganzen Zahlen. Da das Feld in der  $y$ -Richtung liegt, ist seine Komponente parallel zur Ebene  $y = \pm L/2$  immer gleich null.

Die Welle in (9.2.1) stellt eine Überlagerung von vier ebenen Wellen dar und kann als

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{1}{2} e^{-i\omega t} [\cos(k_x x + k_z z) + \cos(k_x x - k_z z)] \\ &= \frac{1}{4} \{ \exp[i(k_x x + k_z z - \omega t)] + \exp[i(-k_x x - k_z z - \omega t)] \\ &\quad + \exp[i(k_x x - k_z z - \omega t)] + \exp[i(-k_x x + k_z z - \omega t)] \} \end{aligned} \quad (9.2.2)$$

geschrieben werden. Alle vier Wellen müssen die Bedingung

$$\omega^2 = (k_x^2 + k_z^2)c^2 = \frac{\pi^2 c^2}{L^2} (l^2 + n^2) \quad (9.2.3)$$

<sup>10</sup>Im erweiterten Sinn ist z.B. auch unsere Währung quantisiert, da wir eine kleinste Einheit, nämlich 1 Cent haben und alle anderen Beträge ganzzahlige Vielfache dieser elementaren Portion sind.

erfüllen. Die dazugehörigen Frequenzen der elektromagnetischen Welle in diesem Hohlraum unter Berücksichtigung der Polarisierungen  $E_x$  und  $E_z$  sind

$$\omega^2 = \frac{\pi^2 c^2}{L^2} (l^2 + m^2 + n^2), \quad (9.2.4)$$

wobei  $l$ ,  $m$  und  $n$  positive ganze Zahlen oder null sind, von denen immer mindesten zwei von null verschieden sein müssen. Es gibt zwei voneinander unabhängige Polarisierungen (links- und rechtszirkular), die die gleichen Werte für  $l$ ,  $m$  und  $n$  ergeben.

Wichtig ist, dass sich aus unserer Betrachtung keine Obergrenze für die Zahlen  $l$ ,  $m$  und  $n$  ergibt, das heißt, die Zahl der möglichen Moden ist unendlich groß und ihre Dichte (Zahl der Moden in einem Frequenzintervall) nimmt mit steigendem  $\omega$  zu. Gemäß dem klassischen *Gleichverteilungssatz* von **Boltzmann** hat jede Mode im thermischen Gleichgewicht die Energie  $k_B T$  ( $\frac{1}{2} k_B T$  pro Freiheitsgrad, von denen eine Oszillatormode zwei besitzt). Deshalb muss die Gesamtenergie im Hohlraum unendlich groß werden. Dabei wird die Energiedichte zu höheren Frequenzen unendlich groß, weshalb man von einer *Ultraviolett-Katastrophe* sprach.

Die experimentellen Daten des Spektrums eines so genannten schwarzen Strahlers (eines Hohlraumes mit einer kleinen Öffnung, durch die die Strahlung im Inneren gemessen werden kann) zeigten aber ein anderes Ergebnis (siehe Abb. 9.8). Bei kleinen Frequenzen (großen Wellenlängen) wurde zwar ein Anstieg proportional zu  $\omega^2$  beobachtet, dann erreicht die Strahlungsdichte allerdings ein Maximum und nimmt zu höheren Frequenzen (kleineren Wellenlängen) hin schnell ab. **Planck** schlug im Jahr 1900 zur Lösung des Problems die Quantisierung der Strahlungsmoden vor. Dieser Vorschlag bildet die Geburtsstunde der Quantenphysik.

## 9.2.2 Temperaturstrahler und Strahlungsgesetze

Wir wissen aus unserer Alltagserfahrung, dass ein heißer Körper (z.B. ein elektrisch beheizter Metalldraht) Licht abstrahlt, wobei sich der Schwerpunkt des abgestrahlten Spektrums mit steigender Temperatur von rot nach weiß verschiebt. Diese Tatsache wird in *Pyrometern* zur Messung der Temperatur ausgenutzt. Man nennt diese Strahlung *Temperatur- oder Wärmestrahlung*. Um die Spektren strahlender Körper näher zu diskutieren, müssen wir zunächst die Strahlungsquellen genauer spezifizieren. Wir wollen hier zunächst das Konzept eines *schwarzen Strahlers* definieren.

Wenn sich ein beliebiger Körper im thermischen Gleichgewicht mit seiner Umgebung befindet, dann wird er pro Zeiteinheit genauso viel Energie abstrahlen wie er absorbiert. Daraus folgt, dass ein guter Emittent auch ein guter Absorber ist. Ein *perfekter Absorber*, der unabhängig von der Wellenlänge der einfallenden Strahlung die gesamte einfallende Strahlungsenergie absorbiert, nennen wir einen *schwarzen Körper*.

Wir wollen nun einen *schwarzen Strahler* betrachten. Es wurde von **Kirchhoff** (1861) gezeigt, dass die Energie, die durch ein kleines Loch aus einem Hohlraum austritt, in dem sich die Strahlung im thermischen Gleichgewicht mit den Wänden befindet, gleich der Energie ist, die ein schwarzer Strahler aussendet. Dies folgt daraus, dass sich in einem Hohlraum ein Gleichgewicht zwischen der von den Wänden absorbierten und emittierten Energiemenge einstellen muss, da sich sonst die Temperatur ändern müsste. Bringt man ein kleines Loch in der Wand des Hohlraumes an, so kann man das Spektrum der Strahlung des schwarzen Strahlers bestimmen. Wir ermitteln die im Innern des Hohlraumes herrschende spektrale Energiedichte  $u(\omega, T)d\omega$  durch Messung der aus dem Loch austretenden Strahlungsdichte  $L(\omega, T)d\omega$ . Diese beiden Größen sind durch folgende Beziehungen definiert:

$$u(\omega, T) d\omega = \frac{\text{Strahlungsenergie im Frequenzbereich } (\omega, \omega + d\omega)}{\text{Volumen des Hohlraumes}} \quad (9.2.5)$$

$$L(\omega, T) d\omega = \frac{\text{Strahlungsleistung im Frequenzbereich } (\omega, \omega + d\omega)}{\text{Raumwinkel x Fläche des Strahlers}} \quad (9.2.6)$$

**Kirchhoff** fand, dass das Verhältnis der Strahllichte  $L$  (Emissionsgrad  $\varepsilon$ ) zum Absorptionsgrad  $\alpha$  eines beliebigen Temperaturstrahlers gleich der Strahllichte eines schwarzen Körpers der gleichen Temperatur ist. Er zeigte ferner, dass bei gegebener Wellenlänge und Temperatur der spektrale Emissionsgrad  $\xi_\lambda$  eines beliebigen Körpers gleich seinem spektralen Absorptionsgrad  $\alpha_\lambda$  ist (Kirchhoff'sches Gesetz).

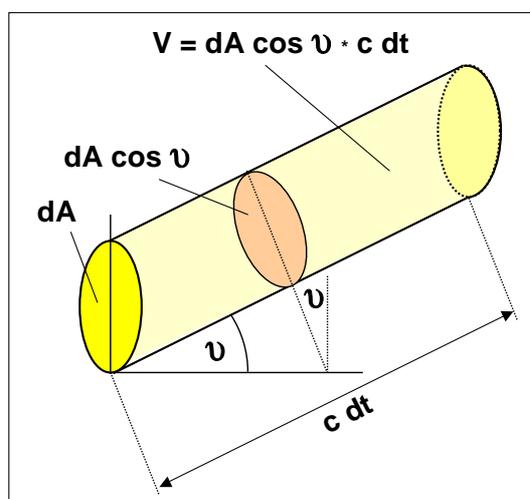


Abbildung 9.7: Zur Veranschaulichung des Zusammenhangs zwischen der von einer Fläche  $dA$  abgegebenen Strahlleistung und der daraus resultierenden Energiedichte.

Zur Ableitung der Beziehung zwischen der Energiedichte  $u(\omega, T)$  im Hohlraum und der gemessenen Strahlungsleistung  $L(\omega, T)$  betrachten wir zunächst Abb. 9.7. Wir betrachten ein Flächenelement  $dA$  im Innern des Hohlraumes und die von ihm in einer Richtung, die mit der Normalen auf der Flächen den Winkel  $\vartheta$  einschließt, ausgesandten Strahlung. Da die Strahlung in der Zeit  $dt$  die Strecke  $c dt$  zurücklegt, ist sie in dem in Abb. 9.7 gezeigten Zylinder enthalten, der die Grundfläche  $dA \cos \vartheta$  und die Höhe  $c dt$  besitzt. Andererseits ist die Strahlleistung  $d\Phi$ , die von der Fläche  $dA$  in der Richtung  $\vartheta$  in den Raumwinkel  $d\Omega$  abgegeben wird, durch  $d\Phi = L dA \cos \vartheta d\Omega$  gegeben. Dabei haben wir einen Lambert'schen Strahler angenommen, dessen Strahlstärke proportional zu  $\cos \vartheta$  ist. Mit  $du = (d\Phi / \text{Volumen}) dt$  ( $d\Phi$  ist eine Leistungsgröße) erhalten wir

$$du(\omega, T) = \frac{L(\omega, T) dA \cos \vartheta d\Omega dt}{dA \cos \vartheta c dt} = \frac{L(\omega, T)}{c} d\Omega \quad (9.2.7)$$

Durch Integration über den gesamten Raumwinkel erhalten wir

$$u(\omega, T) = \frac{4\pi}{c} L(\omega, T) \quad (9.2.8)$$

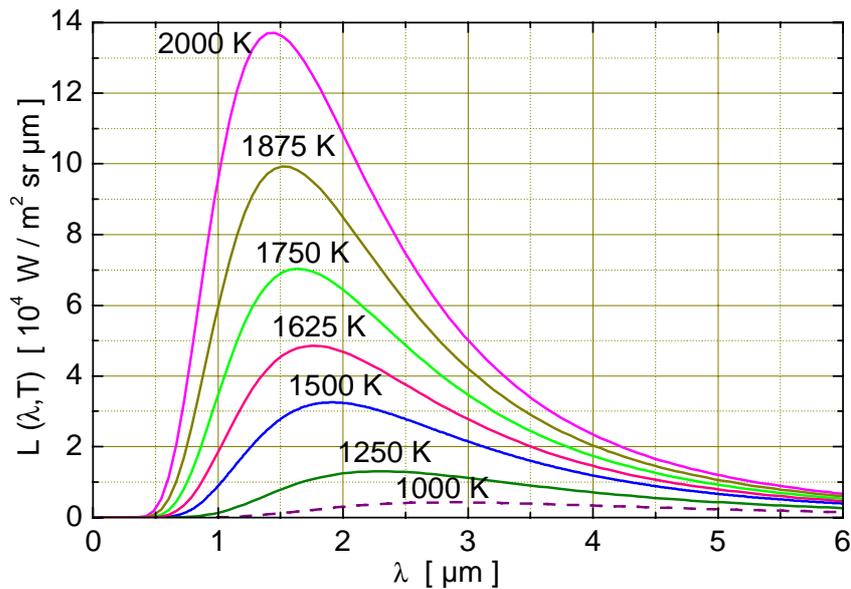


Abbildung 9.8: Intensitätsverteilung der Schwarzkörperstrahlung bei verschiedenen Temperaturen. Man erkennt, dass sich das Maximum der Intensität mit sinkender Temperatur zu längeren Wellenlängen verschiebt.

oder

$$L(\omega, T) = \frac{c}{4\pi} u(\omega, T) . \quad (9.2.9)$$

Diese Beziehung können wir jetzt benutzen, um die spektrale Energiedichte und die Strahlungsdichte ineinander umzurechnen. Somit ist die Strahlungsdichte  $L(\omega, T)$  mit der Einheit  $\text{W}/\text{m}^2\text{sr}$  die pro Flächeneinheit, Raumwinkel und Sekunde abgestrahlte Energie.

Im Allgemeinen wird die aus dem Loch tretende Strahlung einen ganzen Halbraum erfüllen. Nach dem Lambert'schen Gesetz fällt die Strahlungsdichte mit  $\cos \vartheta$  ab, wobei der Winkel  $\vartheta$  die Abweichung von der Richtung der Normalen auf der Fläche  $A$  misst. Wenn wir eine Halbkugel integrieren, erhalten wir die gesamte Abstrahlung in den Halbraum zu

$$\begin{aligned} L_{\text{ges}}(\omega, T) &= \frac{c}{4\pi} u(\omega, T) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \\ &= \frac{c}{4} u(\omega, T) \\ &= \pi L(\omega, T) . \end{aligned} \quad (9.2.10)$$

Die Wellenlängenabhängigkeit dieser Spektren ist in Abb. 9.8 gezeigt. Sie ist kontinuierlich mit einem deutlich ausgeprägten Maximum, das bei Zimmertemperatur im Infraroten liegt und sich für höhere Temperaturen in den sichtbaren Bereich verschiebt. Wichtig ist, dass die Form des Spektrums nur von der Temperatur  $T$  und nicht von der Form des schwarzen Strahlers abhängt.

Um 1900 waren zahlreiche experimentelle Daten zum Spektrum der Strahlung eines schwarzen Körpers bekannt, insbesondere durch die Messungen von **Lummer**, **Pringsheim**, **Rubens** und **Kurlbaum**. Zur

Beschreibung dieser Daten wurden einige, teilweise empirisch abgeleiteten Strahlungsgesetze vorgeschlagen, die wir nun kurz vorstellen wollen. Diese Gesetze erwiesen sich später als Spezialfälle einer allgemeingültigeren Strahlungsformel, dem *Planck'schen Strahlungsgesetz*, das wir anschließend ableiten und diskutieren wollen.

### Ludwig Eduard Boltzmann (1844 -1906):

Ludwig Eduard Boltzmann wurde am 20. Februar 1844 in Wien geboren.

Seine Jugend verbrachte er größtenteils in Wels und Linz. Nachdem Ludwig Boltzmann 1863 am Linzer Gymnasium maturiert hatte begann er ein Studium der Physik und Mathematik an der Universität Wien. Dort wurde er 1866 promoviert und erhielt 1867 eine Assistentenstelle am Physikalischen Institut. Noch im gleichen Jahr konnte er sich habilitieren und wurde so im Jahre 1868 Privatdozent für mathematische Physik. Bereits im folgenden Jahr erhielt er einen Ruf an die Universität Graz. Stets um internationale wissenschaftliche Kontakte bemüht reiste er im Sommersemester 1870 zu Wilhelm Bunsen und Gustav Kirchhoff nach Heidelberg und arbeitete 1871/72 für einige Monate am Laboratorium von Hermann von Helmholtz in Berlin. Hier begann er mit der experimentellen Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten von Isolatoren, die eine der ersten experimentellen Bestätigung von James Maxwells elektromagnetischer Lichtwellentheorie darstellten. Ihm gelang es, unter Heranziehung statistischer Rechenverfahren einen grundlegenden Zusammenhang zwischen der thermodynamischen Entropie  $S$  und der Wahrscheinlichkeit  $W$  der jeweiligen molekularen Bewegungszustände in einem gasförmigen Stoffsystem zu finden

( $S = k_B \ln W$ ), wobei die Naturkonstante  $k_B$  die so genannte Boltzmann-Konstante ist. Von 1873 an wirkte er als Ordinarius für Mathematik an der Universität Wien, kehrte aber 1876 als Direktor des Physikalischen Instituts nach Graz zurück. 1890 verließ Boltzmann Graz und lehrte theoretische Physik an der Ludwig Maximilian Universität in München, bis er 1894 wieder an die Universität Wien zurückkehrte. Hier blieb er bis auf eine kurze Unterbrechung (1900 bis 1902 in Leipzig) und übernahm ab 1903 auch die Vorlesung in Naturphilosophie, welche vorher Ernst Mach gehalten hatte.

Am 5. September 1906 setzte er während eines Sommeraufenthaltes in Duino bei Triest seinem Leben durch Freitod ein vorzeitiges Ende.



### Das Stefan-Boltzmann-Gesetz

Bereits 1865 stellte **John Tyndall** fest, dass ein geheizter Platindraht bei  $1200^\circ\text{C}$  (1473 K) 11.7-mal mehr Energie emittiert als bei  $525^\circ\text{C}$  (798 K). **Josef Stefan** erkannte, dass das Verhältnis der vierten Potenzen der beiden absoluten Temperaturen gleich 11.6, also sehr nahe bei dem experimentell gemessenen Wert lag. Stefan hatte zwar recht, aber auch viel Glück, da der Pt-Draht natürlich kein idealer schwarzer Strahler ist. **Ludwig Boltzmann** gelang es dann 1884, das  $T^4$  Gesetz theoretisch abzuleiten.

Die gesamte, über alle Frequenzen  $\omega$  integrierte Strahlungsleistung  $U(T)$ , die ein schwarzer Strahler pro Flächeneinheit in den oben spezifizierten Halbraum abgibt, ist gegeben durch

$$U(T) = \int_0^{\infty} L_{\text{ges}}(\omega, T) d\omega = \sigma T^4 . \quad (9.2.11)$$

mit der *Stefan-Boltzmann-Konstante*

$$\sigma = 5.67051(19) \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4 . \quad (9.2.12)$$

Das *Stefan-Boltzmann-Gesetz* beschreibt die Temperaturabhängigkeit der integrierten Strahlungsleistung. Eine Ableitung des Werts von  $\sigma$  aus dem Planckschen Strahlungsgesetz erfolgt später (vergleiche (9.2.26)).

In Wirklichkeit gibt es natürlich keine idealen schwarzen Strahler. Bei ausgesuchten Temperaturen und Frequenzen verhalten sich allerdings die meisten Objekte fast wie schwarze Strahler. Für uns selbst gilt das im Infrarotbereich. Wir können deshalb auch für gewöhnliche Körper eine dem Stefan-Boltzmann-Gesetz äquivalente Beziehung formulieren:

$$U(T) = \varepsilon \sigma T^4 . \quad (9.2.13)$$

Hierbei ist  $\varepsilon$  der materialspezifische Emissionsgrad, der für 300 K für eine Aluminiumfolie nur 0.02, poliertes Kupfer 0.03, Kohle 0.8, Beton 0.94 und Ruß 0.95 beträgt.<sup>11</sup>

Bringen wir einen Körper mit Absorptionsgrad  $\alpha$ , Emissionsgrad  $\varepsilon$  und Temperatur  $T$  in einen Hohlraum mit Emissionsvermögen  $\varepsilon_h$  und Temperatur  $T_h$ , so strahlt der Körper mit einer Rate  $\varepsilon \sigma T^4$  und absorbiert mit einer Rate  $\alpha(\varepsilon_h \sigma T_h^4)$ . Wenn sich der Körper und der Hohlraum im thermischen Gleichgewicht befinden, also  $T = T_h$  gilt, müssen die beiden Raten gleich sein. Daraus folgt für alle Temperaturen  $\alpha \varepsilon_h = \varepsilon$ . Ist  $T \neq T_h$  so ist die vom Körper emittierte bzw. absorbierte Strahlungsleistung pro Flächeneinheit

$$U(T) = \varepsilon \sigma (T^4 - T_h^4) . \quad (9.2.14)$$

Die von einem Körper abgestrahlte Leistung nimmt also mit steigender Temperatur stark zu.

### Das Wien'sche Verschiebungsgesetz

Einen bemerkenswerten Erfolg bei der Anwendung der klassischen Theorie auf das Problem der Schwarzkörperstrahlung konnte 1893 der deutsche Physiker **Wilhelm Wien** verzeichnen, indem er das so genannte *Verschiebungsgesetz* ableitete. Die Wellenlänge  $\lambda_{\text{max}}$  der mit maximaler Intensität emittierten Strahlung variiert mit der Temperatur. Es stellt sich heraus, dass das Produkt aus beiden Größen eine Konstante ist. Es gilt

$$\lambda_{\text{max}} \cdot T = 0.2898 \text{ cm K} . \quad (9.2.15)$$

<sup>11</sup>Aufgrund des sehr kleinen Emissionsgrades von Al kann man Al-Folie dazu benutzen, um z.B. die Körperwärme einer verletzten Person möglichst lange zu konservieren, indem man die Person in eine Al-Folie hüllt.

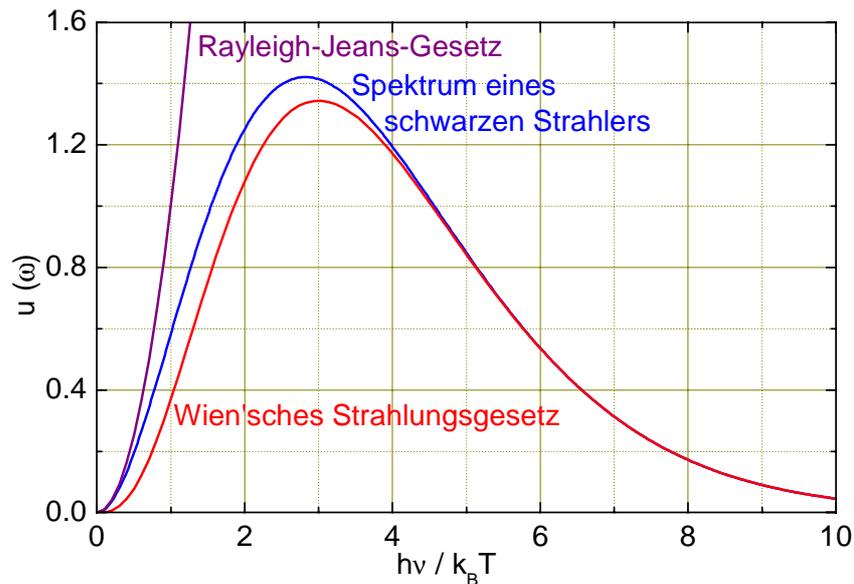


Abbildung 9.9: Spektrum eines schwarzen Strahler im Vergleich mit dem Rayleigh-Jeans-Gesetz und dem Wien'schen Strahlungsgesetz.

Diesen Zusammenhang nennt man das *Wien'sche Verschiebungsgesetz* (Wien, 1893). Steigt die Temperatur an, so verschiebt sich das Maximum der Strahlung zu kürzeren Wellenlängen. Für die Oberfläche der Sonne mit  $T = 6\,000\text{ K}$  ergibt sich  $\lambda_{\text{max}} = 480\text{ nm}$ . Da die Temperatur eines Strahlers die spektrale Verteilung des abgestrahlten Lichts bestimmt, spricht man manchmal auch von einer Farbtemperatur einer Lichtquelle.

Wien leitete den obigen Zusammenhang aus einer thermodynamischen Betrachtung ab. Er verwendete dabei die Ähnlichkeit der in einem Hohlraum eingeschlossenen Strahlung mit einem idealen Gas in einem bestimmten Volumen. Betrachtet man die Strahlung im Teilchenbild (Photonen in bestimmtem Volumen), so ist diese Analogie einsichtig. Auf die genaue Herleitung des Wien'schen Verschiebungsgesetzes wollen wir hier aber verzichten.

### Das Rayleigh-Jeans-Gesetz

Durch Überlegungen, die auf der klassischen Elektrodynamik beruhten, leiteten **Lord Rayleigh** und **J. H. Jeans** einen Ausdruck für die Energiedichte  $u(\omega, T)d\omega$  des Strahlungsfeldes ab.

$$u(\omega, T)d\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} k_B T d\omega . \quad (9.2.16)$$

Hierbei ist  $k_B$  die Boltzmann-Konstante. Das *Rayleigh-Jeans-Gesetz* beschreibt die experimentell gemessenen Daten (vergleiche hierzu auch Abb. 9.8) sehr gut für kleine Frequenzen (große Wellenlängen). Für große Frequenzen (kleine Wellenlängen) würde nach dem Rayleigh-Jeans-Gesetz aber die Energiedichte divergieren, man erhält eine so genannte Ultraviolett-Katastrophe (vergleiche Abschnitt 9.2.1).

In ihren Überlegungen betrachteten Rayleigh und Jeans einen verspiegelten Hohlraum mit stehenden elektromagnetischen Wellen (dies ist nach Kirchhoff eine zulässige Modellierung eines schwarzen Strahlers). Sie bestimmten dann die Zustandsdichte  $D(\omega)d\omega$  der Eigenschwingungen des Hohlraums, die sie

zu  $\omega^2 d\omega / \pi^2 c^3$  erhielten (eine Ableitung der Zustandsdichte folgt später, vergleiche (9.2.20)). Sie ordnen dann nach dem Äquipartitionsgesetz jedem Freiheitsgrad der kinetischen Energie im Mittel die Energie  $\frac{1}{2}k_B T$  zu. Bei harmonischen Schwingungen ist die mittlere kinetische Energie gleich der mittleren potentiellen Energie, folglich entfällt auf jeden Freiheitsgrad der Gesamtenergie im Mittel die Energie  $k_B T$ . Daraus erhält man sofort (9.2.16).

### Das Wien'sche Strahlungsgesetz

Für hohe Frequenzen leitete **Wien** die Näherungsformel

$$u(\omega, T) d\omega = \frac{2\omega^3}{\pi c^3} \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) d\omega \quad (9.2.17)$$

ab. Das *Wien'sche Strahlungsgesetz* versagt allerdings bei kleinen Frequenzen (großen Wellenlängen).

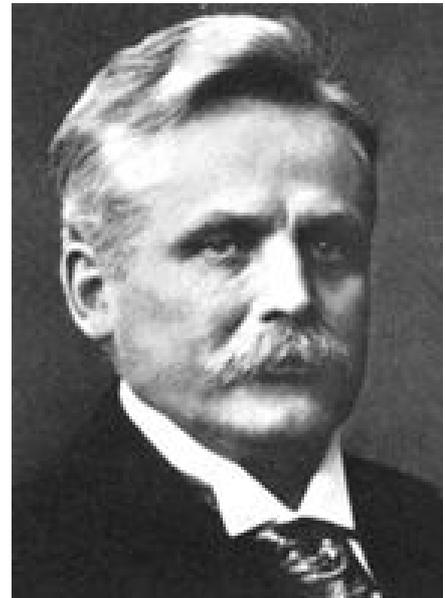
Wien ließ sich bei der Ableitung des nach ihm benannten Gesetzes von der Ähnlichkeit leiten, die die gemessenen Kurven mit denen der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung hatten.

#### Wilhelm Otto Fritz Franz Wien (1864 - 1928) – Nobelpreis für Physik 1911:

Willi Wien wurde am 13. Januar 1864 in Gaffken bei Fischhausen (Ostpreußen) geboren.

Er studierte Mathematik und Naturwissenschaften in Göttingen, Berlin und Heidelberg und wurde 1886 promoviert. Ab 1889 war er Assistent bei Hermann von Helmholtz an der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt und habilitierte 1892 an der Universität Berlin. Von 1892 bis 1896 war er als Privatdozent tätig. Aufgrund seiner Untersuchungen über die Zusammenhänge zwischen Wellenlänge, Temperatur und Strahlungsintensität formulierte Wien 1893 das nach ihm benannte Wien'sche Verschiebungsgesetz, das die Wellenlänge maximaler Emission des Schwarzen Körpers mit seiner Temperatur verknüpft. 1896 folgte das Wien'sche Strahlungsgesetz zur Berechnung der spektralen Energieverteilung der Strahlung eines schwarzen Körpers, das aber nur auf die beobachtete kurzwellige Strahlung zutrif. Im gleich Jahr wurde er Professor in Aachen. 1899 trat er eine Professur in Gießen an um 1900 einem Ruf an die Würzburger Universität zu folgen. Hier trat er die Nachfolge Conrad Röntgens an, der nach München ging. 1911 erhielt Wien den Nobelpreis für Physik für die Arbeiten zur Wärmestrahlung und für die auf dieser Grundlage gewonnene Formulierung der og. Gesetze. Als Röntgen sich Ende 1919 vom Lehramt zurückzog, wurde Wien auch an der Universität München sein Nachfolger.

Willi Wien verstarb am 30. August 1928 in München.



### 9.2.3 Die Planck'sche Strahlungsformel

Die Beschreibung der Intensitätsverteilung der Schwarzkörperstrahlung durch theoretische Modelle war um 1900 sehr unbefriedigend, da es nur für bestimmte Grenzfälle befriedigende Modellbeschreibungen gab. Dieses Problem wurde von **Max Planck** gelöst. Er schlug zunächst rein intuitiv ein Strahlungsgesetz vor, das die experimentellen Daten hervorragend beschreiben konnte. Er gab dann aber sehr bald eine systematische Theorie zu seiner Ableitung an. Es war am 14. Dezember 1900, als Max Planck in

einem Vortrag vor der Deutschen Physikalischen Gesellschaft in Berlin seine Formel zur Beschreibung des Spektrums eines schwarzen Strahlers präsentierte. Bei der Ableitung dieser Formel musste Planck, wie er damals selbst sagte, "in einem Akt der Verzweiflung" die *Quantisierung der Strahlungsmoden* annehmen. Diese Quantenhypothese Plancks bedeutete gleichzeitig die Geburtsstunde der modernen Quantentheorie und damit einen der größten Fortschritte der Physik.

Planck machte bei der Entwicklung seiner Strahlungsformel folgende Annahmen:

1. Die Atome in den Wänden des Hohlraumes verhalten sich wie Oszillatoren einer vorgegebenen Frequenz  $\omega$ . Sie strahlen die Energie in den Hohlraum ab und absorbieren Energie aus dem Strahlungsfeld, wobei thermisches Gleichgewicht zwischen Strahlung und Hohlraum herrscht.
2. Die Oszillatoren können nur diskrete Energiewerte

$$E_n = n \hbar \omega \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.2.18)$$

annehmen. Das heißt, die *Energie ist gequantelt*.

3. Solange der Oszillator keine Energie aufnimmt oder abstrahlt, bleibt er in seinem quantisierten Zustand, der durch die Quantenzahl  $n$  charakterisiert ist.
4. Die Zahl der möglichen Oszillatorzustände des elektromagnetischen Feldes im Hohlraum mit Frequenzen zwischen  $\omega$  und  $\omega + d\omega$  ist proportional zu  $\omega^2 d\omega$ . Dieser Sachverhalt wird im nächsten Abschnitt noch explizit abgeleitet.

### Die Quantisierung der elektromagnetischen Moden eines Hohlraumes

Wir wollen die Überlegungen von Planck zur Ableitung seiner Strahlungsformel nicht im Einzelnen vorstellen. Wir wollen hier nur aufzeigen, wie die Planck'sche Strahlungsformel aus der Quantisierung der elektromagnetischen Moden eines Hohlraumes abgeleitet werden kann.<sup>12</sup>

Die in Abschnitt 9.2.1 eingeführten Zahlentripel  $(l, m, n)$  können als ganzzahlige Punkte in einem Phasenraum aufgefasst werden, in dem  $l$  in  $x$ -,  $m$  in  $y$ - und  $n$  in  $z$ -Richtung aufgetragen werden. Aus (9.2.4) folgt, dass die Frequenz  $\omega$ , die zu den  $(l, m, n)$  gehört, durch  $\pi c/L$ -mal den Abstand des Tripels  $(l, m, n)$  vom Ursprung gegeben ist. Daher ist die Zahl der Zustände mit Frequenzen im Intervall  $\omega$  bis  $\omega + \Delta\omega$  gleich der Zahl der Punkte im positiven Quadranten einer Schale mit Radius  $\omega L/\pi c$  und Dicke  $\Delta\omega L/\pi c$  (siehe Abb. 9.10). Dieser Schalenquadrant hat das Volumen

$$\frac{1}{8} 4\pi \left( \frac{\omega L}{\pi c} \right)^2 \frac{\Delta\omega L}{\pi c}, \quad (9.2.19)$$

und enthält im Durchschnitt gleich viel Zustände, da es einen ganzzahligen Gitterpunkt pro Volumeneinheit gibt. Multipliziert man diese Zahl mit 2 (aufgrund der zwei Polarisationsrichtungen: links- und rechtszirkular), so erhält man die Zustandsdichte

<sup>12</sup>Eine andere Ableitung wurde von Einstein im Jahr 1917 gegeben. Diese wollen wir hier aber nicht diskutieren.

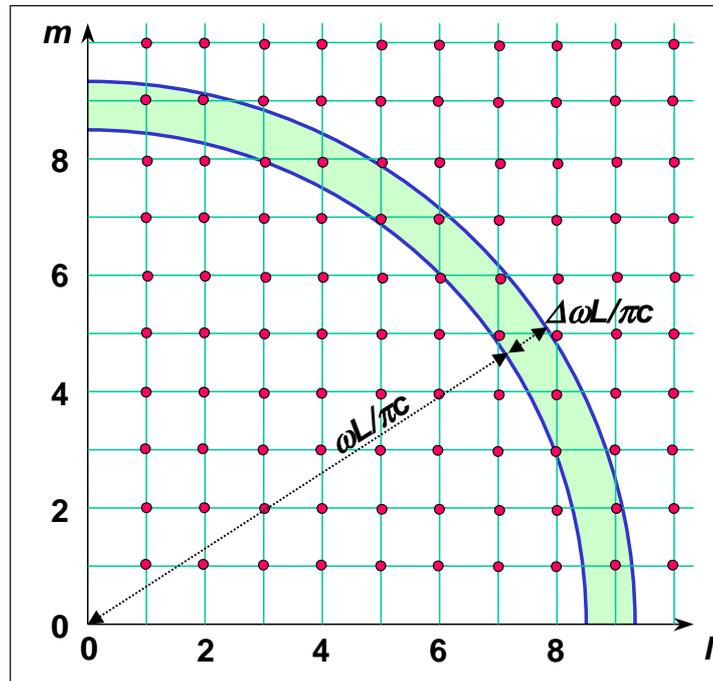


Abbildung 9.10: Verteilung der Moden in der  $(l, m)$ -Ebene für einen kubischen Hohlraum. Das Volumen des markierten Schalenquadranten ist durch (9.2.19) gegeben.

$$D(\omega) = \frac{L^3 \omega^2}{c^3 \pi^2} . \quad (9.2.20)$$

Planck's Idee bestand nun darin, die elektromagnetische Energie in Einheiten von  $\hbar\omega$  zu quantisieren. Jede Schwingungsmode kann dann eine Energie

$$U_n = n \cdot \hbar\omega$$

annehmen, wobei  $n$  eine ganze Zahl ist. Wir müssen nun durch eine statistische Betrachtung die Wahrscheinlichkeit  $p(U_n)$  ermitteln, dass eine Schwingungsmode tatsächlich die Energie  $U_n$  hat, also mit  $n$  Photonen besetzt ist. Im thermischen Gleichgewicht ist die Wahrscheinlichkeit  $p(U_n)$  proportional zum Boltzmann-Faktor  $\exp(-U_n/k_B T)$ . Wir normieren nun die Wahrscheinlichkeit  $p(n\hbar\omega)$  so, dass gerade  $\sum_{n=0}^{\infty} p(n\hbar\omega) = 1$  wird:

$$p(U_n) = \frac{e^{-n\hbar\omega/k_B T}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\hbar\omega/k_B T}} . \quad (9.2.21)$$

Diese Normierung muss so gemacht werden, da ja jede Schwingungsmode irgendeine Energie  $n\hbar\omega$  haben muss und folglich die Wahrscheinlichkeit  $p(U_n)$ , summiert über alle erlaubten Energien, gerade eins ergeben muss. Mit der Wahrscheinlichkeit  $p(U_n)$  können wir die mittlere Energie  $\langle U_n \rangle$  pro Schwingungsmode angeben:

$$\begin{aligned}
\langle U_n \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \hbar\omega \cdot n \cdot p(n\hbar\omega) = \hbar\omega \cdot \langle n \rangle \\
&= \frac{\sum n\hbar\omega e^{-n\hbar\omega/k_B T}}{\sum e^{-n\hbar\omega/k_B T}} \\
&= \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} .
\end{aligned} \tag{9.2.22}$$

Die mittlere Bestetzungszahl  $\langle n \rangle$  ist also durch die **Bose-Einstein**-Statistik gegeben:<sup>13</sup>

$$\langle n \rangle = \left[ \exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1 \right]^{-1} \tag{9.2.23}$$

Ist das Quantum  $\hbar\omega \ll k_B T$ , d.h. klein gegenüber der klassisch ermittelten mittleren Energie einer Mode, dann ist eine große mittlere Zahl von Quanten möglich. Für diesen Fall erhält man näherungsweise das klassische Ergebnis  $\langle n \rangle \simeq \hbar\omega/k_B T$ . Ist dagegen  $\hbar\omega \gg k_B T$ , gibt es nur eine geringe Wahrscheinlichkeit, dass auch nur ein einziges Quantum pro Mode im thermischen Gleichgewicht im Hohlraum zu finden ist. Im Maximum des Spektrums des schwarzen Strahlers ist  $\hbar\omega \sim k_B T$  und die wahrscheinliche Zahl von Photonen pro Mode ist  $(e - 1)^{-1} \approx 0.6$ .

Um die Gesamtenergie  $\tilde{u}$  pro Frequenzeinheit bei der Frequenz  $\omega$  zu bekommen, müssen wir die Zustandsdichte mit der entsprechende Energie der Mode und ihrer Besetzungswahrscheinlichkeit multiplizieren. Man erhält somit das *Planck'sche Strahlungsgesetz*

$$\tilde{u}(\omega, T) = \langle n \rangle \cdot \hbar\omega \cdot D(\omega) = \frac{\hbar L^3}{c^3 \pi^2} \frac{\omega^3}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1} . \tag{9.2.24}$$

Um die Strahlungsenergie  $u(\omega)$  pro Volumen des Hohlraumes zu erhalten, müssen wir durch  $L^3$  dividieren und wir erhalten das *Planck'sche Strahlungsgesetz*

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar}{c^3 \pi^2} \frac{\omega^3}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1} . \tag{9.2.25}$$

Dieser Ausdruck beschreibt die experimentell gemessenen Spektren sehr gut. Integriert man über den Ausdruck, erhält man die gesamte Energiedichte der Schwarzkörperstrahlung in einem Hohlraum der Temperatur  $T$ . Man erhält das **Stefan-Boltzmann**-Gesetz

$$U(T) = \int_0^{\infty} L_{\text{ges}}(\omega, T) d\omega = \int_0^{\infty} \frac{c}{4} u(\omega, T) d\omega = \frac{\pi^2 k_B^4 T^4}{60 \hbar^3 c^2} = \sigma \cdot T^4 . \tag{9.2.26}$$

<sup>13</sup>Die Herleitung dieses Ausdrucks erfolgt in Physik IV, er kann auch in fast allen Lehrbüchern zur statistischen Physik gefunden werden. Wir wollen deshalb hier nicht herleiten, wie man in (9.2.22) aus der 2. Zeile die 3. Zeile erhält.

Die Strahlungskonstante  $\sigma = 5.6697 \times 10^{-8} \text{J/sm}^2\text{K}^4$  wird *Stefan-Boltzmann-Konstante* genannt.<sup>14</sup>

Die Entdeckung der richtigen Strahlungsformel durch Max Planck im Jahr 1900 ist unzweifelhaft eine große wissenschaftliche Leistung. Ganz entscheidend war aber, dass Max Planck gezeigt hat, dass die klassische Physik an die Grenzen ihrer Leistungsfähigkeit und Zulässigkeit angelangt ist. In der Natur treten Unstetigkeiten auf, was in direktem Widerspruch zur klassischen Physik steht und in dem Ausdruck  $E = \hbar\omega$  zum Ausdruck kommt. Darin ist  $h = 2\pi\hbar$  eine neue Naturkonstante, die die Dimension einer "Wirkung" (Energie mal Zeit) hat. Deshalb bezeichnet man die Planck'sche Konstante als *Wirkungsquantum*. Das Entscheidende an der Planck'schen Entdeckung ist nicht die Größe der Energiequanten, da sich diese mit der Frequenz verändert, sondern vielmehr die Tatsache, dass das Wirkungsquantum den Schlüssel zum Verständnis der Quantenphysik liefert.

Es sei hier noch auf zwei Tatsachen hingewiesen. Aus unserer Darlegung geht hervor, dass die Planck'sche Begründung des Strahlungsgesetzes an einem inneren Widerspruch leidet. Es ist zwar die klassische Elektrodynamik benutzt worden, aber dann an einer Stelle die dazu im Gegensatz stehende Quanten-Hypothese von der un stetigen Absorption und Emission eingeführt worden. Die Planck'sche Ableitung muss deshalb noch durch eine einheitliche Theorie ersetzt werden (Quantenelektrodynamik). Die zweite Feststellung ist die, dass Planck in dieser Unstetigkeit eine besondere Eigenschaft der Resonatoren sah. Der revolutionäre Charakter und die weitreichende Bedeutung der Quantenhypothese wurde erst später erkannt.

### Beispiel: Kosmische Hintergrundstrahlung

Die Theorien zur Entstehung unseres Universums sagen voraus, dass das Weltall von einer Hintergrundstrahlung erfüllt sein sollte, einem Überbleibsel des Urknalls. Infolge der Expansion des Weltalls nach dem Urknall sollte die Gleichgewichtstemperatur des Photonengases auf einen Wert von ca. 3 K abgesunken sein. Das Satellitenexperiment COBE hat es in letzter Zeit ermöglicht, das Spektrum der Hintergrundstrahlung sehr genau zu vermessen. Die experimentellen Daten stimmen erstaunlich gut mit der spektralen Verteilung eines Planck'schen Strahlers mit der Temperatur  $T = 2.730 \text{ K}$  überein.

---

<sup>14</sup>Der Wiener Physiker **J. Stefan** vermutete im Jahr 1879, dass dieses Gesetz für beliebige Strahler gültig ist. **L. Boltzmann** hat es dann im Jahr 1879 auf schwarze Strahler beschränkt und damit endgültig abgeleitet und formuliert.

## Zusammenfassung

- Die von Max Planck im Jahr 1900 aufgestellte Quantenhypothese zur Erklärung der Schwarzkörperstrahlung stellt die Geburtsstunde der Quantenphysik dar, die wir zur Beschreibung des Verhaltens mikroskopischer Objekte benötigen. Er postulierte, dass die Energie der Schwingungsmoden eines schwarzen Strahlers nur diskrete Energiewerte

$$E = \hbar\omega$$

annehmen kann.

Bei der Erklärung der Schwarzkörperstrahlung stieß Max Planck auf ein erstaunliches Geheimnis der Natur:

*Die Energie ist gequantelt.*

- Das Verhalten von mikroskopischen Objekten kann nicht mit klassischen Teilchen oder Wellen alleine beschrieben werden. Mikroskopische Objekte zeigen sowohl Teilchen- als auch Wellencharakter.

- Komplementaritätsprinzip (Bohr 1927):

In einem Experiment können Teilchen- und Welleneigenschaften von mikroskopischen Objekten niemals gleichzeitig beobachtet werden. Teilchen und Welle schließen sich gegenseitig aus – sie sind *komplementär*.

- Grundprinzipien der Quantenphysik:

- Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis in einem Experiment ist durch das Absolutquadrat einer komplexen Wahrscheinlichkeitsamplitude gegeben:

$$P = |\phi|^2$$

- Gibt es mehrere alternative Möglichkeiten für ein Ereignis, so gilt

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \dots$$

$$P = |\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \dots|^2$$

- Stellt man im Experiment fest, welche Alternative tatsächlich gewählt wurde, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis

$$P = |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 + \dots$$

- Heisenbergsche Unschärferelation:

Konjugierte physikalische Größen wie Ort/Impuls, Energie/Zeit, Drehimpuls/Winkel können nicht gleichzeitig mit beliebiger Genauigkeit gemessen werden. Das Produkt der Unschärfen der Einzelmessungen muss immer größer als das Plancksche Wirkungsquantum  $h$  sein:

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq h$$

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq h.$$

Die Heisenbergsche Unschärferelation ist gleichbedeutend damit, dass in einem Interferenzexperiment es nicht möglich ist festzustellen, welchen alternativen Weg ein mikroskopisches Objekt nimmt, ohne gleichzeitig das Interferenzmuster zu zerstören.

- Zwischen Teilcheneigenschaften  $E, \mathbf{p}$  und den Welleneigenschaften  $\omega, \mathbf{k}$  mikroskopischer Objekte bestehen die Beziehungen:

$$E = \hbar\omega \qquad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}.$$

- Durch die Quantisierung der elektromagnetischen Moden des Hohlraumes hat Planck das nach ihm benannte Strahlungsgesetz abgeleitet:

$$u(\omega) = \frac{\hbar}{c^3 \pi^2} \frac{\omega^3}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}.$$

- Aus dem Planckschen Strahlungsgesetz folgt das Stefan-Boltzmann-Gesetz

$$U(T) = \sigma T^4 \qquad \text{mit} \qquad \sigma = 5.67051 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$$

und das Wiensche Verschiebungsgesetz

$$\lambda_{\text{max}} \cdot T = 0.2898 \text{ cm K}.$$